



III NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING
August 10 – 13, 2004 – Belém – PA - Brazil

ESTUDO DA SOLIDIFICAÇÃO DE MATERIAIS METÁLICOS EM RESFRIAMENTO RÁPIDO ATRAVÉS DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Nascimento, A. A.

Centro Federal de Educação Tecnológica de Sergipe
49400-000 – Lagarto – SE – Brasil
e-mail:arielig@ig.com.br

Santos, C. A. C.

Departamento de Tecnologia Mecânica
Universidade Federal da Paraíba - 58051-970 – João Pessoa – Brasil
e-mail:cabral@les.ufpb.br

Macêdo, E. N.

Departamento de Engenharia Química e de Alimentos – DEQAL
Universidade Federal do Pará - UFPA
66075-970 – Belém, PA – Brasil
e-mail:enegrao@ufpa.br

Resumo: O processo de solidificação rápida (Planar Flow Casting) de um metal é modelado através de um balanço de energia. As equações de camada limite em duas dimensões são transformadas, através de uma mudança de variável, em um problema de condução de calor unidimensional. Soluções híbridas para o problema são obtidas através da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). Resultados são apresentados para a distribuição de temperatura e para a evolução da frente de solidificação na fita de metal.

Palavras Chave: Solidificação, Resfriamento Rápido, Transformação Integral

1. INTRODUÇÃO

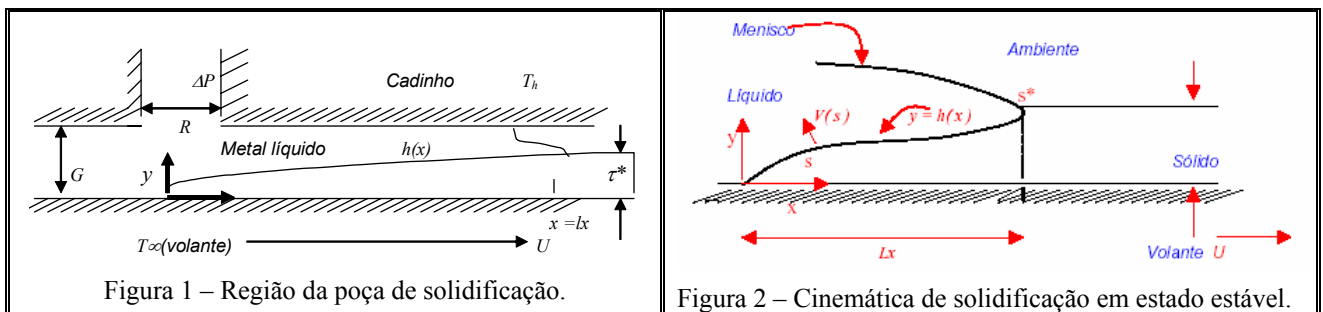
Problemas de mudança de fase transientes envolvem o caminho trilhado por um movimento da fronteira de solidificação, separando as fases líquidas e sólidas de uma substância. Dentro da fase líquida e da fase sólida o processo de transferência de calor é governado principalmente por condução. A têmpera a partir do metal líquido é um processo de solidificação rápida que envolve o choque com espalhamento e surgimento da solidificação a partir da poça de metal líquido sobre a superfície de um substrato. Contrário ao processo tradicional de fabricação, onde a têmpera é feita sobre amostra de material sólido, o resfriamento rápido a partir do metal líquido representa uma categoria separada de têmpera em que o estado inicial do metal é líquido (Amantharaman e Suryanarayana, 1971; Jones, 1982). Isto leva a uma definição característica do método de resfriamento rápido a partir do metal líquido, o qual é imposto pelas velocidades de resfriamento do metal líquido e que são tipicamente muitas ordens de grandeza mais rápidas do que os métodos convencionais de têmpera. Esta situação ocorre quando o mecanismo de transferência de calor, principalmente condução, é capaz de remover muito mais rápido o calor que sai da camada de deposição do que o calor que é depositado pelo material líquido.

Particularmente a indústria tem tomado interesse na tecnologia do resfriamento rápido de metais a partir do estado líquido, por causa de sua forma compacta e capacidade de produção com rápida performance, bem como um aperfeiçoamento das propriedades dos materiais (Brooks *et al.*, 1977; Bricknell, 1986; Annavarapu *et al.*, 1990).

A modelagem e a simulação do problema físico é considerada uma ferramenta importante para acompanhar o projeto de máquinas e equipamentos. Com a redução dos custos computacionais, em virtude dos avanços tecnológicos, o uso de métodos avançados e computadores mais velozes passaram a ser mais usados, fazendo com que a parte experimental deixasse de ser um dos poucos recursos de projeto. Com este objetivo a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) que é uma técnica de natureza híbrida (Cotta, 1993) é aplicada na busca da solução do problema de solidificação rápida (*Planar Casting Flow*). Esta técnica, mantém características semelhantes à solução analítica o que proporciona mais simplicidade para implementação computacional. Os erros relativos dos resultados são definidos *a priori* e controlados automaticamente (Cotta, 1993; Cotta e Mikhalov, 1993 e Cotta, 1994).

2. SOLIDIFICAÇÃO RÁPIDA: O PROCESSO “*PLANAR CASTING FLOW*”

O processo “*Planar Flow Casting*”, é usado para solidificação rápida de uma fita fina de metal posicionando-se um cadinho bem próximo a um substrato de resfriamento em movimento. Embora, na realidade ocorra sub-resfriamento neste processo, a maioria dos modelos negligenciam este aspecto (Wang e Matthys, 1992). Uma geometria ilustrativa do processo é mostrada na Figura 1, na Figura 2 é mostrada uma ilustração da cinemática do processo de solidificação em estado estável.



O metal líquido no cadinho é forçado através do orifício e forma a poça de solidificação entre a base do cadinho e a superfície do volante. O metal se solidifica pelo contato com o volante e uma fita fina é arrastada pelo seu movimento. Resultados experimentais têm demonstrado que a forma da fita depende do formato da base do cadinho, bem como da relação de aspecto do orifício (Wang e Matthys, 1992). Dada uma grande relação de aspecto da poça e considerando-se que a velocidade axial é muito maior do que a velocidade normal, é portanto razoável, aproximar a poça de metal a uma tira retangular de metal líquido. A geometria esquemática do processo é mostrada na Figura 2.

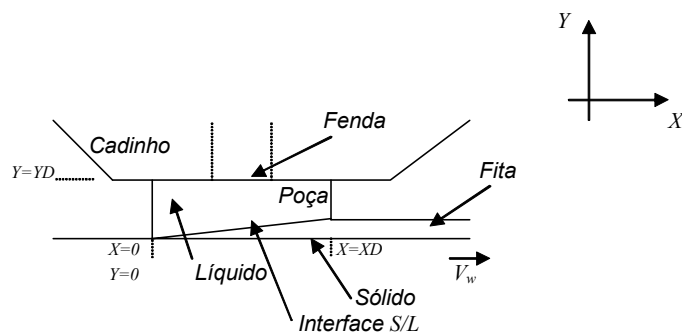


Figura 2 – Geometria esquemática do “*Planar Flow Casting*” com sistema de coordenadas.

Com o objetivo de tornar o modelo o mais simples possível, consideremos que não existe gradiente de velocidade na poça. Na realidade, isto não é verdade e representa uma aproximação de um caso real. Para identificar tendências relativas e investigar parâmetros importantes no processo, adotaremos um modelo unidimensional (Wang e Matthys, 1992), onde as principais hipóteses simplificadoras adotadas foram: O de fluxo de metal fluido na poça é assumido em regime permanente; Limitamos nosso estudo à poça abaixo do cadinho sobre a roda em movimento; Negligenciamos a transferência de calor convectiva normal à superfície da roda; Condução de calor paralelo à superfície do substrato é negligenciada; Solidificação de um metal puro; Assumiremos a existência de equilíbrio termodinâmico local na interface sólido/líquido, isto é, a temperatura da

interface é igual à temperatura de fusão do metal; A distribuição inicial de temperatura na poça é assumida uniforme, sendo “ T_∞ ” a temperatura do substrato e T_0 a temperatura de vazamento; A massa específica do metal é tomada constante para ambas as fases; A temperatura no topo da superfície da poça é assumida constante e igual à temperatura de vazamento; O calor perdido através dos meniscos é negligenciado; A curvatura da roda é negligenciada e sua superfície é assumida ser horizontal; É assumida uma condição de não deslizamento na superfície da roda; As propriedades do metal são assumidas independentes da temperatura, porém, são diferentes para cada região; A contração durante a solidificação é negligenciada.

Com as hipóteses acima e assumindo que uma fina camada imóvel de metal líquido seja subitamente colocada em contato com o substrato de resfriamento, em um tempo muito pequeno, então o metal líquido se solidificará. Se não existe movimento relativo entre fluxo de fluido e o volante, se a camada de metal depositada (poça) é fina e, ainda, em virtude do desacoplamento entre a transferência de calor e os mecanismos do fluxo de fluido (provocado pela alta velocidade do substrato), podemos aproximar o processo de transferência de calor, na camada de metal depositada e no substrato, como uma condução unidimensional. Então, com as coordenadas da Figura 2, as equações da energia para a camada limite em cada região são dadas por:

$$U \frac{\partial T_s}{\partial x} = \alpha_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2}; \quad 0 < y < S_y(t), \quad t > t_0 \quad (1.a)$$

$$U \frac{\partial T_\ell}{\partial x} = \alpha_\ell \frac{\partial^2 T_\ell}{\partial y^2}; \quad S_y(t) < y < L, \quad t > t_0 \quad (1.b)$$

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} = h_w (T_s - T_\infty); \quad \text{em } y = 0, \quad t > t_0 \quad (1.c)$$

$$\left. \begin{aligned} T_s &= T_\ell = T_m \\ k_s \frac{\partial T_s}{\partial y} - k_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial y} &= \rho \Delta H \frac{dS_y(t)}{dt} \end{aligned} \right\}; \quad \text{em } y = S_y(t), \quad t > t_0 \quad (1.d, e)$$

$$T_\ell = T_0; \quad \text{em } y = L, \quad t > t_0 \quad (1.f)$$

onde $T_s, \ell, \alpha_s, \ell, k_s, \ell$ são, respectivamente, as temperaturas, as difusividades térmicas e as condutividades térmicas das fases sólida e líquida. U é a velocidade do volante, h_w é o coeficiente de transferência de calor, T_∞ temperatura do ambiente e volante, T_m é a temperatura de mudança de fase, T_0 é a temperatura inicial do metal, ρ é a massa específica do metal, ΔH é o calor latente de mudança de fase do metal e $S_y(t)$ é a posição da frente de solidificação na direção y .

Em função da hipótese da não existência de movimento relativo dentro do metal líquido na poça, o problema bidimensional para a camada limite em estado permanente, pode ser reduzido a um problema de condução de calor unidimensional. Para isso faremos $x = \bar{V}_f t$, onde \bar{V}_f é a velocidade média do metal sobre o volante. Considerando que o escoamento na poça seja completamente desenvolvido, de forma que a velocidade do volante U seja igual a velocidade média do metal sobre o volante \bar{V}_f , substituindo $x = \bar{V}_f t$ nas equações (1) junto com os seguintes grupos adimensionais

$$\eta_1 = \frac{y}{S_y(t)}, \quad \eta_2 = \frac{y-L}{S_y(t)-L}, \quad \tau = \frac{\alpha_\ell t}{L^2}, \quad S(\tau) = S_y(t)/L, \quad \theta_s(\eta_1, \tau) = \frac{T_s - T_\infty}{T_m - T_\infty} \quad (2.a-f)$$

$$\theta_\ell(\eta_2, \tau) = \frac{T_\ell - T_0}{T_m - T_0}, \quad v = \left(\frac{\alpha_\ell}{\alpha_s} \right)^{1/2}, \quad Bi = \frac{h_w L}{k_s}, \quad Ste_s = \frac{Cp_s(T_m - T_\infty)}{\Delta H}, \quad Ste_\ell = \frac{Cp_\ell(T_m - T_\infty)}{\Delta H} \quad (2.g-j)$$

onde as coordenadas adimensionais η_1 e η_2 foram adotadas a fim de se trabalhar com um domínio fixo para o problema. No entanto, tal transformação acarretará o aparecimento de termo convectivo nas equações. Tais coordenadas η_1 e η_2 requerem os seguintes operadores

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \tau} \quad \text{para } i = s \text{ e } \ell \quad (3.a, b)$$

logo, as equações adimensionais para as fases sólida e líquida são apresentadas por:

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial \tau} = \frac{1}{v^2 S(\tau)^2} \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \eta_1^2} + \frac{S'(\tau)}{S(\tau)} \eta_1 \frac{\partial \theta_s}{\partial \eta_1}; \quad 0 < \eta_1 < 1, \quad \tau > \tau_o \quad (4.a)$$

$$\frac{\partial \theta_\ell}{\partial \tau} = \frac{1}{(S(\tau)-1)^2} \frac{\partial^2 \theta_\ell}{\partial \eta_2^2} + \frac{S'(\tau)}{S(\tau)-1} \eta_2 \frac{\partial \theta_\ell}{\partial \eta_2}, \quad 0 < \eta_2 < 1, \quad \tau > \tau_o \quad (4.b)$$

$$\theta_s = f_s(\eta_1); \quad \theta_\ell = f_\ell(\eta_2); \quad S(\tau_o) = S_o, \quad \text{para } \tau = \tau_o \quad (4.c-e)$$

$$-\frac{\partial \theta_s}{\partial \eta_1} + \text{Bi} S(\tau) \theta_s = 0, \quad \text{em } \eta_1 = 0, \quad \tau > \tau_o \quad (4.f)$$

$$\theta_s = 1, \quad \text{em } \eta_1 = 1, \quad \tau > \tau_o \quad (4.g)$$

$$\theta_\ell = 1, \quad \text{em } \eta_2 = 0, \quad \tau > \tau_o \quad (4.h)$$

$$\theta_\ell = 0, \quad \text{em } \eta_2 = 1, \quad \tau > \tau_o \quad (4.i)$$

e a condição de acoplamento na interface sólido/líquido, necessária para a determinação da posição da frente de solidificação, é dada por:

$$\frac{dS(\tau)}{d\tau} = \frac{\text{Ste}_s}{v^2 S(\tau)} \frac{\partial \theta_s}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=1} - \frac{\text{Ste}_\ell}{S(\tau)-1} \frac{\partial \theta_\ell}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=1} \quad (4.j)$$

Nas equações (4.c, d), $f_s(\eta_1)$ e $f_\ell(\eta_2)$ são as soluções analíticas obtidas por similaridade para um instante $\tau = \tau_o$ muito pequeno.

3. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

Com o objetivo de melhorar a performance da GITT é necessário homogeneizar as condições de contorno do problema, para isso os potenciais θ_s e θ_ℓ serão decompostos em duas parcelas na forma

$$\theta_s(\eta_1, \tau) = \Phi_s(\eta_1; \tau) + \Theta_s(\eta_1, \tau) \quad (5.a)$$

$$\theta_\ell(\eta_2, \tau) = \Phi_\ell(\eta_2; \tau) + \Theta_\ell(\eta_2, \tau) \quad (5.b)$$

onde os potenciais Φ_s e Φ_ℓ são obtidos a partir dos seguintes problemas:

$\frac{1}{v^2 S(\tau)^2} \frac{d^2 \Phi_s}{d\eta_1^2} + \frac{S'(\tau)}{S(\tau)} \eta_1 \frac{d\Phi_s}{d\eta_1} = 0; \quad 0 < \eta_1 < 1 \quad (6.a)$	$\frac{d^2 \Phi_\ell}{d\eta_2^2} + (S(\tau)-1) S'(\tau) \eta_2 \frac{d\Phi_\ell}{d\eta_2} = 0; \quad 0 < \eta_2 < 1 \quad (7.a)$
$-\frac{d\Phi_s}{d\eta_1} + \text{Bi} S(\tau) \Phi_s = 0; \quad \text{em } \eta_1 = 0 \quad (6.b)$	$\Phi_\ell = 1; \quad \text{em } \eta_2 = 0 \quad (7.b)$
$\Phi_s = 1; \quad \text{em } \eta_1 = 1 \quad (6.c)$	$\Phi_\ell = 0; \quad \text{em } \eta_2 = 1 \quad (7.c)$

com as seguintes soluções

$$\Phi_s(\eta_1; \tau) = \frac{\text{Bi} \sqrt{2\pi S(\tau)} \text{Erf} \left[\left(v \sqrt{S(\tau) S'(\tau) / 2} \right) \eta_1 \right] + 2v \sqrt{S'(\tau)}}{\text{Bi} \sqrt{2\pi S(\tau)} \text{Erf} \left[v \sqrt{S(\tau) S'(\tau) / 2} \right] + 2v \sqrt{S'(\tau)}} \quad (8.a)$$

$$\Phi_\ell(\eta_2; \tau) = 1 - \frac{\text{Erf} \left[\left(\sqrt{(S(\tau)-1) S'(\tau) / 2} \right) \eta_2 \right]}{\text{Erf} \left[\sqrt{(S(\tau)-1) S'(\tau) / 2} \right]} \quad (8.b)$$

e as EDP's para os potenciais $\Theta_s(\eta_1, \tau)$ e $\Theta_\ell(\eta_2, \tau)$ serão obtidas substituindo-se as equações (5.a, b) nas equações (4) e fazendo-se uso das equações (6) e (7). Então, teremos:

$$\frac{\partial \Theta_s}{\partial \tau} = \frac{1}{v^2 S(\tau)^2} \frac{\partial^2 \Theta_s}{\partial \eta_1^2} + \frac{S'(\tau)}{S(\tau)} \eta_1 \frac{\partial \Theta_s}{\partial \eta_1} - G(\eta_1, \tau); \quad 0 < \eta_1 < 1, \quad \tau > \tau_0 \quad (9.a)$$

$$\frac{\partial \Theta_\ell}{\partial \tau} = \frac{1}{(S(\tau)-1)^2} \frac{\partial^2 \Theta_\ell}{\partial \eta_2^2} + \frac{S'(\tau)}{S(\tau)-1} \eta_2 \frac{\partial \Theta_\ell}{\partial \eta_2} - H(\eta_2, \tau), \quad 0 < \eta_2 < 1, \quad \tau > \tau_0 \quad (9.b)$$

$$\Theta_s = f_s(\eta_1) - \Phi_s(\eta_1; \tau_0); \quad \Theta_\ell = f_\ell(\eta_2) - \Phi_\ell(\eta_2; \tau_0); \quad S(\tau_0) = S_0, \quad \text{para } \tau = \tau_0 \quad (9.c-e)$$

$$-\frac{\partial \Theta_s}{\partial \eta_1} + \text{Bi}S(\tau)\Theta_s = 0, \quad \text{em } \eta_1 = 0, \quad \tau > \tau_0 \quad (9.f)$$

$$\Theta_s = 0, \quad \text{em } \eta_1 = 1, \quad \tau > \tau_0 \quad (9.g)$$

$$\Theta_\ell = 0, \quad \text{em } \eta_2 = 0, \quad \tau > \tau_0 \quad (9.h)$$

$$\Theta_\ell = 0, \quad \text{em } \eta_2 = 1, \quad \tau > \tau_0 \quad (9.i)$$

$$\frac{dS(\tau)}{d\tau} = \frac{\text{Ste}_s}{v^2 S(\tau)} \left(\frac{\partial \Theta_s}{\partial \eta_1} + \frac{d\Phi_s}{d\eta_1} \right) \bigg|_{\eta_1=1} - \frac{\text{Ste}_\ell}{S(\tau)-1} \left(\frac{\partial \Theta_\ell}{\partial \eta_2} + \frac{d\Phi_\ell}{d\eta_2} \right) \bigg|_{\eta_2=1}, \quad \tau > \tau_0 \quad (9.j)$$

onde

$$G(\eta_1, \tau) = \frac{d\Phi_s(\eta_1; \tau)}{d\tau}; \quad H(\eta_2, \tau) = \frac{d\Phi_\ell(\eta_2; \tau)}{d\tau} \quad (10.a, b)$$

Seguindo os passos básicos da GITT (Cotta, 1993), os problemas auxiliares, apropriados para o processo de transformação integral, são dados a seguir.

<u>Para o potencial Θ_s</u>	<u>Para o potencial Θ_ℓ</u>
$\frac{d^2 \Psi_i(\eta_1; \tau)}{d\eta_1^2} + \mu_i^2(\tau) \Psi_i(\eta_1; \tau) = 0; \quad 0 < \eta_1 < 1 \quad (11.a)$	$\frac{d^2 \Omega_m(\eta_2)}{d\eta_2^2} + \beta_m^2 \Omega_m(\eta_2) = 0; \quad 0 < \eta_2 < 1 \quad (12.a)$
$\frac{d\Psi_i(0; \tau)}{d\eta_1} - \text{Bi}S(\tau)\Psi_i(0; \tau) = 0 \quad (11.b)$	$\Omega_m(0) = 0 \quad (12.b)$
$\Psi_i(1; \tau) = 0 \quad (11.c)$	$\Omega_m(1) = 0 \quad (12.c)$

onde as autofunções, normas e autovalores são dados por:

$$\Psi_i(\eta_1; \tau) = \text{Sin}[\mu_i(\tau)(1 - \eta_1)]; \quad N_i(\tau) = \frac{1}{2} \frac{\mu_i^2(\tau) + (S(\tau)\text{Bi})^2 + S(\tau)\text{Bi}}{\mu_i^2(\tau) + (S(\tau)\text{Bi})^2} \quad (13.a, b)$$

$$\mu_i(\tau) \text{Cos}[\mu_i(\tau)] + S(\tau)\text{Bi} \text{Sin}[\mu_i(\tau)] = 0; \quad \tilde{\Psi}_i(\eta_1; \tau) = \Psi_i(\eta_1; \tau) / \sqrt{N_i(\tau)} \quad (13.c, d)$$

$$\Omega_m(\eta_2) = \text{Sin}[\beta_m \eta_2]; \quad M_m = 1/2; \quad \beta_m = (2m-1)\pi/2; \quad \tilde{\Omega}_m(\eta_2) = \Omega_m(\eta_2) / \sqrt{M_m} \quad (14.a, d)$$

Em função dos problemas de autovalor adotados, os seguintes pares transformada-Inversa são desenvolvidos para os potenciais $\Theta_s(\eta_1, \tau)$ e $\Theta_\ell(\eta_2, \tau)$

$$\bar{\Theta}_{s_i}(\tau) = \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(\eta_1; \tau) \Theta_s(\eta_1, \tau) d\eta_1 \quad \Rightarrow \quad \Theta_s(\eta_1, \tau) = \sum_{i=1}^{N_s} \tilde{\Psi}_i(\eta_1; \tau) \bar{\Theta}_{s_i}(\tau) \quad (15.a, b)$$

$$\bar{\Theta}_{\ell_m}(\tau) = \int_0^1 \tilde{\Omega}_m(\eta_2) \Theta_\ell(\eta_2, \tau) d\eta_2 \quad \Rightarrow \quad \Theta_\ell(\eta_2, \tau) = \sum_{m=1}^{N_\ell} \tilde{\Omega}_m(\eta_2) \bar{\Theta}_{\ell_m}(\tau) \quad (16.a, b)$$

Seguindo os passos da técnica, faremos agora a transformação integral das equações diferenciais parciais (9.a) e (9.b). Para isso, multiplica-se a eq. (9.a) por $\tilde{\Psi}_i(\eta_1; \tau)$ e a eq. (9.b) por $\tilde{\Omega}_m(\eta_2)$ e integra-se os resultados no domínio de cada equação, originando o seguinte sistema de equações diferenciais ordinário infinito e acoplado.

$$\frac{d\bar{\Theta}_{s_i}(\tau)}{d\tau} = \frac{-\mu_i^2(\tau)}{v^2 S(\tau)^2} \bar{\Theta}_{s_i} + \frac{S'(\tau)}{S(\tau)} \sum_{j=1}^{N_s} A_{ij} \bar{\Theta}_{s_i}(\tau) - \bar{G}_i(\tau); \quad N_s \rightarrow \infty, \tau > \tau_o \quad (17.a)$$

$$\frac{d\bar{\Theta}_{\ell_m}(\tau)}{d\tau} = \frac{-\beta_m^2}{(S(\tau)-1)^2} \bar{\Theta}_{\ell_m}(\tau) + \frac{S'(\tau)}{S(\tau)-1} \sum_{n=1}^{N_\ell} B_{mn} \bar{\Theta}_{\ell_n}(\tau) - \bar{H}_m(\tau), \quad N_\ell \rightarrow \infty, \tau > \tau_o \quad (17.b)$$

$$\frac{dS(\tau)}{d\tau} = \frac{Ste_s}{v^2 S(\tau)} \left\{ \sum_{i=1}^{N_s} \tilde{\Psi}_i(1; \tau) \bar{\Theta}_{s_i}(\tau) + \frac{d\Phi_s}{d\eta_1} \Big|_{\eta_1=1} \right\} - \frac{Ste_\ell}{S(\tau)-1} \left\{ \sum_{m=1}^{N_\ell} \tilde{\Omega}_m(1) \bar{\Theta}_{\ell_m}(\tau) + \frac{d\Phi_\ell}{d\eta_2} \Big|_{\eta_2=1} \right\} \quad \tau > \tau_o \quad (17.c)$$

$$\bar{\Theta}_{s_i}(\tau_o) = C_i; \quad \bar{\Theta}_{\ell_m}(\tau_o) = D_m; \quad S(\tau_o) = S_o \quad (17.d, e)$$

onde

$$A_{ij}(\tau) = \int_0^1 \eta_1 \tilde{\Psi}_i(\eta_1; \tau) \frac{d\tilde{\Psi}_j(\eta_1; \tau)}{d\eta_1} d\eta_1; \quad B_{mn} = \int_0^1 \eta_2 \Omega_m(\eta_2) \frac{d\Omega_n(\eta_2)}{d\eta_2} d\eta_2 \quad (18.a, b)$$

$$C_i = \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(\eta_1; \tau) [f_s(\eta_1) - \Phi_s(\eta_1; \tau_o)] d\eta_1; \quad D_m = \int_0^1 \tilde{\Omega}_m(\eta_2) [f_\ell(\eta_2) - \Phi_\ell(\eta_2; \tau_o)] d\eta_2 \quad (18.b, c)$$

$$\bar{G}_i(\tau) = \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(\eta_1; \tau) G(\eta_1, \tau) d\eta_1; \quad \bar{H}_m(\tau) = \int_0^1 \tilde{\Omega}_m(\eta_2) H(\eta_2, \tau) d\eta_2 \quad (18.d, e)$$

Como consequência, o processo de transformação integral elimina as coordenadas η_1 e η_2 e oferece um sistema de equações diferenciais ordinário para os potenciais transformados $\bar{\Theta}_{s_i}(\tau)$ e $\bar{\Theta}_{\ell_m}(\tau)$. O sistema infinito, equações (17.a-c), deve ser truncado em uma ordem suficientemente grande (N_s e N_ℓ para as expressões dos potenciais $\bar{\Theta}_{s_i}$ e $\bar{\Theta}_{\ell_m}$, respectivamente) com o objetivo de se conseguir resultados com uma acurácia prescrita pelo usuário. Isto é alcançado através de sub-rotinas bem estabelecidas para problemas de valor inicial, tal como a DIVPAG da biblioteca do IMSL (IMSL, 1987), onde se adotou um erro local de 10^{-5} . Uma vez que estes potenciais transformados foram avaliados numericamente na variável temporal, os potenciais originais serão recuperados analiticamente através das fórmulas de inversão.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A simulação do processo “*Planar Flow Casting*” proporciona o controle e otimização de parâmetros envolvidos na fabricação de fitas de materiais metálicos. A relação desses parâmetros com os coeficientes de transferência de calor, possibilitam o ajuste do processo e a utilização de materiais diferentes. Os principais parâmetros envolvidos são: temperatura de ejeção, distância do cadinho ao substrato de resfriamento, temperatura do substrato, velocidade do substrato, altura e comprimento da poça. Para a realização das simulações será utilizado o metal alumínio, cujas propriedades foram retiradas da referência Wang e Matthys (1992): $\Delta H = 3.95 \times 10^5$ [J/Kg]; $Cp_\ell = 1200$ [J/Kg K]; $Cp_s = 1060$ [J/Kg K]; $k_s = 200$ [W/m K]; $k_\ell = 100$ [W/m K]; $\rho = 2520$ [Kg/m³]; $T_m = 933$ [K]; $To = T_m + 50$ [K]; $T_\infty = 300$ [K]. Os coeficientes médios de transferência de calor h_w adotados (Wang e Matthys; 1992) são: $h_w = 5.0 \times 10^5$, 1.0×10^6 , 1.5×10^6 e 5.0×10^6 [W/m² K]. Além destes dados, usaremos neste trabalho $YD = 350$ [μm] (altura da poça de metal), $U = 23$ [m/s] e o tempo de permanência do metal sobre o volante $t_s = 0.25$ [ms].

A partir dos dados acima, foram gerados resultados para o campo de temperatura na fita e para a posição da frente de solidificação. Inicialmente foi realizada uma análise de convergência do campo de temperatura em função das coordenadas x e y para uma fita de espessura igual a $114\text{ }\mu\text{m}$, como mostrado na Tabela 1. Pode-se observar, desta tabela, que foi necessário entre 450 e 500 termos em cada série para obtermos uma convergência na quarta casa decimal. Se tomarmos como base $N_s = N_t = 500$ estaremos resolvendo via DIVPAG um sistema de 1001 equações, incluindo-se a equação para a determinação da posição da fronteira.

Tabela 1. – Convergência da distribuição de temperatura em função de x e y para uma fita de espessura igual a $114\text{ }\mu\text{m}$.

x (mm)	T(x, y) [K]								
	y = 21 μm			y = 46 μm			y = 88 μm		
	N = 400	N = 450	N = 500	N = 400	N = 450	N = 500	N = 400	N = 450	N = 500
0.00	983.00	983.00	983.00	983.00	983.00	983.00	983.00	983.00	983.00
1.15	896.99	896.85	896.891	936.26	936.27	936.26	944.32	944.34	944.33
2.30	838.22	838.10	838.17	904.14	904.17	904.16	942.12	942.11	942.10
3.45	792.47	792.30	792.38	855.95	855.94	855.94	936.72	936.70	936.69
4.60	755.88	755.69	755.67	816.64	816.59	816.54	912.39	912.37	912.38
5.75	725.89	725.64	725.52	783.87	783.75	783.62	876.65	876.61	876.59

$$N = N_s = N_t$$

No processo “*Planar Flow Casting*” a altura da poça é muito pequena e o tempo de processo é muito curto. Daí, a necessidade da utilização de número de autovalores razoavelmente elevado, nas séries soluções propostas, para a obtenção das convergências.

Após a análise de convergência foram gerados resultados para o campo de temperatura e a posição da interface sólido/líquido em função dos parâmetros do processo, onde se adotou uma ordem de truncamento para as séries de $N_s = N_t = 500$.

Na Figura 4 é apresentado as curvas de temperatura em função da distância ao menisco superior, onde a solidificação para o metal alumínio tem início sobre um volante de cobre. Elas são os perfis de temperatura dentro da poça de metal, referentes às alturas de $15\mu\text{m}$, $35\mu\text{m}$, $54\mu\text{m}$, $66\mu\text{m}$ e $72\mu\text{m}$. Verifica-se que nesta simulação uma fita de $72\mu\text{m}$ de espessura é obtida. A linha horizontal pontilhada na Figura 4 representa a temperatura de mudança da fase na poça de metal. No instante $t = 0$, todo metal se encontra à temperatura inicial T_o , e a medida que o processo se desenvolve, a fronteira de solidificação toma a forma mostrada na Figura 5.

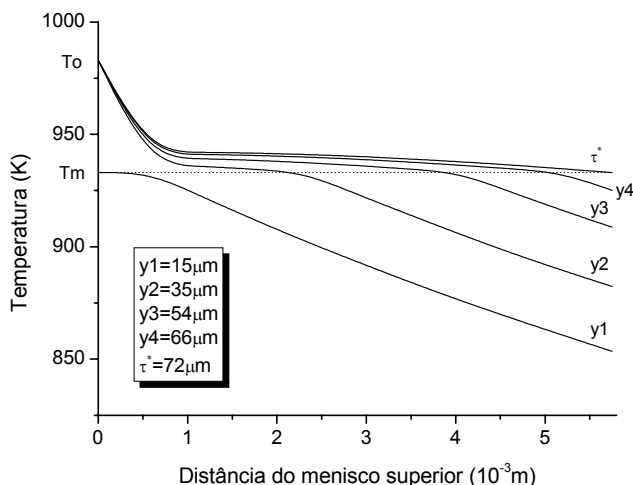


Figura 4 – Distribuição de Temperatura $T(x, y)$ para o alumínio sobre volante de cobre para $h_w = 5.0 \times 10^5\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-1}$, $XD = 5.75\text{ mm}$ e uma fita de espessura igual a $72\text{ }\mu\text{m}$.

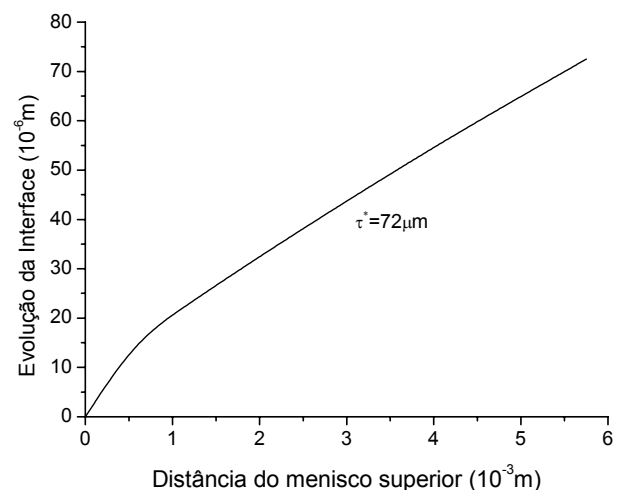


Figura 5 – Evolução da interface de solidificação para o alumínio sobre volante de cobre para $h_w = 5.0 \times 10^5\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-1}$, $XD = 5.75\text{ mm}$ e uma fita de espessura igual a $72\text{ }\mu\text{m}$.

A fronteira de solidificação se desenvolve em relação às direções positivas de x e y , conforme a forma genérica da mostrada na Figura 2. Nesta situação, as forças de inércia são bem maiores do que as forças viscosas do fluido, com isso a espessura da fita é limitada pela altura da fronteira de solidificação $h(x)$ no final

do comprimento da poça de metal. Pela Figura 5 verifica-se que a forma da fronteira apresenta um comportamento quase linear ao longo do comprimento da poça. Isto é atribuído ao curto tempo de processo e a alta velocidade do volante.

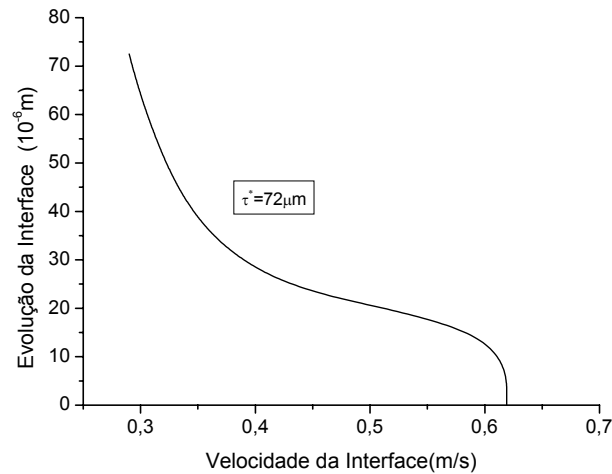


Figura 6 – Velocidade da interface de solidificação em função da posição para o alumínio sobre volante de cobre com $h_w = 5.0 \times 10^5 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$, $XD = 5.75 \text{ mm}$ e para uma fita de espessura igual a $72 \mu\text{m}$.

Na Figura 6 é mostrada a velocidade da interface em função da posição da interface, para os mesmos dados das Figuras 4 e 5. Desta figura pode-se calcular a velocidade média da interface de solidificação, cujo valor obtido foi de $0,39 \text{ m/s}$.

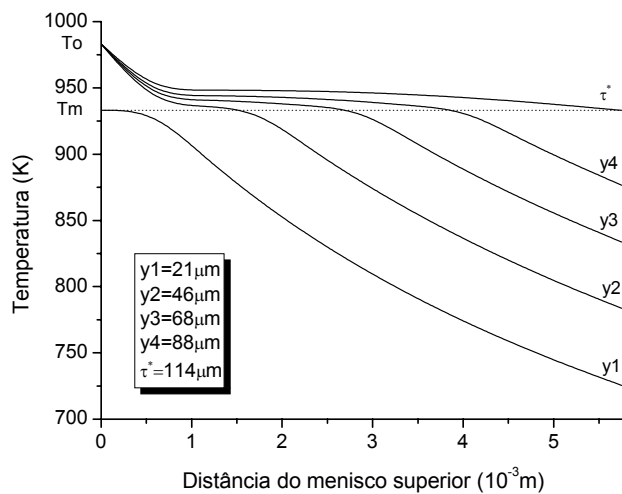


Figura 7 – Distribuição de Temperatura $T(x, y)$ para o alumínio sobre volante de cobre para $h_w = 1.0 \times 10^6 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$, $XD = 5.75 \text{ mm}$ e uma fita de espessura igual a $114 \mu\text{m}$.

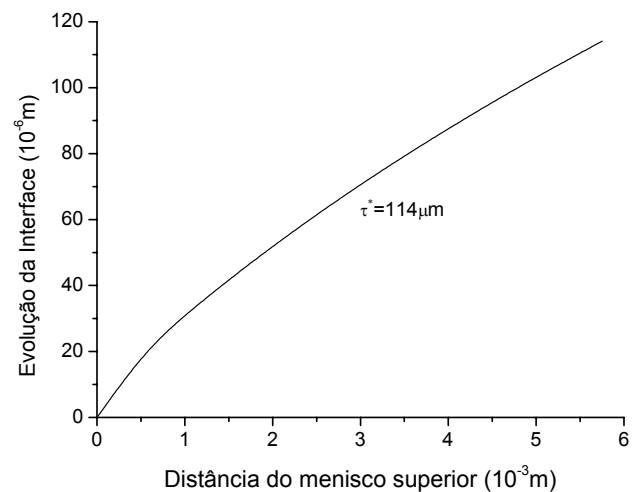


Figura 8 – Evolução da interface de solidificação para o alumínio sobre volante de cobre para $h_w = 1.0 \times 10^6 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$, $XD = 5.75 \text{ mm}$ e uma fita de espessura igual a $114 \mu\text{m}$.

Nas Figuras 7, 8 e 9 são apresentados $T(x, y)$, a evolução da interface e a velocidade da interface para $h_w = 1.0 \times 10^6 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$, $YD = 350 \mu\text{m}$, $XD = 5.75 \text{ mm}$ e para uma fita de espessura igual a $114 \mu\text{m}$. Observa-se que estes resultados são qualitativamente semelhantes aos anteriores, de onde se determinou que a velocidade média da interface de solidificação (Figura 9) foi de $0,59 \text{ m/s}$. Como já era esperado, quando o coeficiente de troca de calor aumenta de valor maior será a velocidade da frente de solidificação.

Na Figura 10 são apresentadas curvas da localização da interface em função da distância ao menisco superior para diferentes valores do coeficiente de transferência de calor h_w . Verifica-se que a espessura da fita aumenta com o valor de h_w e as curvas tendem a serem mais lineares para menores valores de h_w .

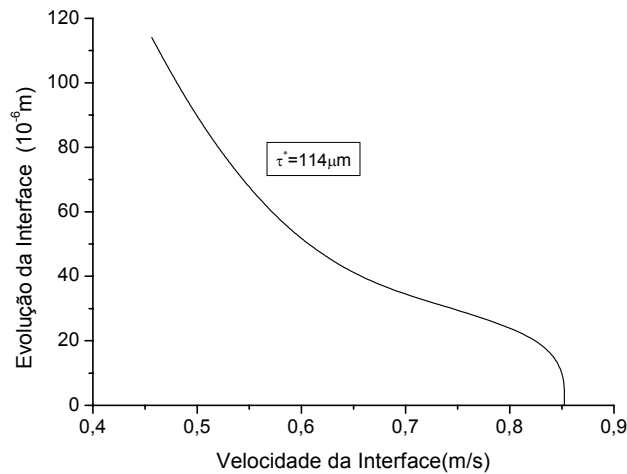


Figura 9 – Velocidade da interface de solidificação em função da posição para o alumínio sobre volante de cobre com $h_w = 1.0 \times 10^6 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$, $XD = 5.75 \text{ mm}$ e uma fita de espessura igual a $114 \mu\text{m}$.

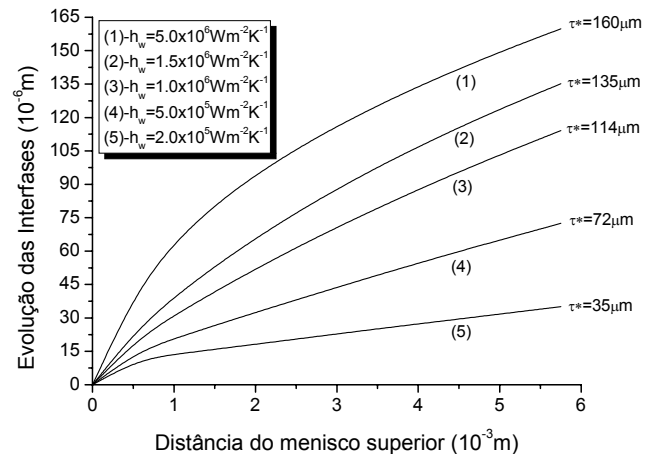


Figura 10 – Localizações das interfaces em função da distância do menisco superior para diferentes valores de h_w .

No “*Planar Flow Casting*” o escoamento do fluxo de fluido na direção x desenvolve-se com o tempo. Análises feitas por Carpenter e Steen (1997) mostram que a altura da fronteira de solidificação $h(x)$, é proporcional a raiz quadrada do tempo, desde que as resistências ao fluxo de calor sejam somente através do metal já solidificado (condução limitada). Assim, pela Figura 10 verifica-se que, quando o contato térmico é aperfeiçoado (aumentando-se o valor de h_w) ocorre também um aumento da não linearidade das curvas da posição da fronteira de solidificação.

5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) mostrou-se uma ferramenta capaz de solucionar o problema de transferência no calor “*Planar Flow Casting*”, com isso podemos estudar o resfriamento rápido de metais ou ligas e obter fitas de espessura controlada pela velocidade do volante e pelo coeficiente de transporte de calor. Observo-se que a taxa de convergência da GITT foi lenta, necessitando de um número elevado de autovalores, isto se deu em função do pequeno comprimento da amostra e do curto tempos de processo de solidificação.

Na representação do “*Planar Flow Casting*” utilizando os mesmos parâmetros de processo do trabalho de Wang e Matthys (1992), foi obtido um valor maior na espessura da fita. No entanto, no presente trabalho não foi considerado o aquecimento do substrato de resfriamento durante os processos, a massa específica utilizada no presente trabalho foi a média das massas específicas da região sólida e líquida que foi extraída de Wang e Matthys (1992).

A solução para o processo “*Planar Flow Casting*”, permite a obtenção de resultados que podem ser utilizados ao nível de engenharia. Assim, são verificadas as influências de parâmetros envolvidos no processo e a relação destes com o coeficiente de transferência de calor e isto possibilita o ajuste do processo e a utilização de materiais diferentes.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Annavarapu, S., Apelian, D. and Lawley, A., 1990, “Spray Casting of Steel Strip: Process Analysis”, **Metallurgical Transactions A**, Vol. 21A, pp. 3237-3256.
- Anantharaman, T. R. and Suryanarayana, C., 1971, “Review: A Decade of Quenching from the Melt” **Journal of Material Science**, vol. 6, pp. 1111-1135.
- Bricknell, R.H., 1986, “The Structure and Properties of a Nickel-Base Superalloy Produced by Osprey Atomization Deposition”, **Metallurgical Transactions A**, Vol. 7A, pp. 583-590.
- Brooks, R. G., Moore, C., Leatham, A. C. and Coombs, J. S., 1977, “Osprey Process”, **Powder Metallurgy**,

Vol. 2, pp. 100-102.

- Carpenter, J.K. and Steen, P.H., 1997, "Heat transfer and solidification in planar- flow melt-spinning: high wheel speeds", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 40, No 9, pp. 1993 –2007.
- Cotta, R.M., 1993, "Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow", CRC Press, Boca Raton, FL, USA.
- Cotta, R.M. and Mikhailov, M.D., 1993, "The Integral Transform Method", **Appl. Math, Modelling**, Vol. 17, pp. 156-161.
- Cotta, R.M., 1994, "The Integral Transform Method in Computational Heat and Fluid Flow, **10th International Heat Transfer Conference**, Brighton, UK.
- IMSL Library, 1997, **Math/Lib.**, Houston , Texas.
- Jones, H., 1982, " Rapid Solidification of Metals and Alloys," **The institution of Metallurgists**, Monograph 8, Great Britain Institution of Metallurgists.
- Wang, G. X. and Matthys, E. F., 1992, "Numerical modelling of phase change and heat transfer during rapid solidification processes: use of control volume integrals with element subdivision". **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 135 (1), 141-153.

***Abstract:** The process of fast solidification (Planar Flow Casting) of a metal is modelling through an energy balance. The boundary layer equations in two dimensions are transformed, through a change of variable, in a one-dimensional heat conduction problem. Hybrid solutions for the problem are obtained through the Generalizada Integral Transform Technique (GITT). Results are then presented for the temperature distribution and front of solidification evolution in the metal ribbon.*

***Key Words:** Solidification, Fast Cooling, Integral Transformation*