

# UMA FORMULAÇÃO AXISSIMÉTRICA DO MVF EM MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS TRANSIENTES DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

**Paulo Roberto Maciel Lyra**

e-mail: [prmlyra@demec.ufpe.br](mailto:prmlyra@demec.ufpe.br)

**Rita de Cássia Fernandes de Lima**

e-mail: [ritailima@ufpe.br](mailto:ritailima@ufpe.br)

**Giselle Maria Lopes Leite da Silva**

e-mail: [gisellemls@aol.com](mailto:gisellemlls@aol.com)

**Darlan Karlo Elisiário de Carvalho**

e-mail: [darlan@demec.ufpe.br](mailto:darlan@demec.ufpe.br)

Departamento de Engenharia Mecânica - UFPE

R. Acadêmico Hélio Ramos, s/n – Cidade Universitária, 50740-530- Recife- PE

**Resumo:** Neste trabalho, uma formulação do método dos volumes finitos anteriormente desenvolvida para tratar modelos bidimensionais (Guimarães, 2003; Lyra et al, 2002) é estendida para lidar com modelos axissimétricos para solução da equação da condução de calor. Esta formulação utiliza volume de controle centrado no nó e foi implementada fazendo uso de uma estrutura de dados baseada nas arestas da malha. A formulação envolvendo a discretização espacial e temporal para malhas triangulares é descrita em detalhes, incluindo o tratamento de condições de contorno, termos de carregamento térmico e o tratamento de problemas envolvendo múltiplos materiais. Em seguida, para validar e demonstrar a versatilidade da ferramenta, aplica-se a mesma em problemas-modelo tridimensionais axissimétricos de transferência de calor, que apresentem solução analítica, no regime estacionário e transiente.

**Palavras-chave:** MVF, malhas não-estruturadas, modelos axissimétricos, transferência de calor.

## 1. INTRODUÇÃO

O método dos volumes finitos é particularmente atraente na solução de equações de conservação, sendo bastante flexível quando da implementação adequada à utilização de malhas não-estruturadas pois garante conservação discreta local e global, permitindo ainda tratar problemas de geometrias complexas e a utilização de técnicas de adaptação de malhas (Barth, 1992; Maliska, 1995; Lyra et al., 2002). Nas últimas duas décadas, o método dos volumes finitos (MVF) tem sido desenvolvido com o uso de malhas não-estruturadas em problemas da dinâmica dos fluidos (Baliga & Patankar, 1983; Maliska, 1995).

No estudo de uma certa classe de problemas a utilização de modelos bidimensionais torna-se muito grosseira. Devido à característica axissimétrica dos mesmos, a modelagem tridimensional, com seus custos computacionais associados, pode ser evitada. Desta forma, pode-se desenvolver uma formulação do MVF adequada para lidar com modelos axissimétricos, onde apenas a metade de um plano que contém o eixo do sólido de revolução é discretizado. O método dos volumes finitos (MVF) é então aplicado em uma malha triangular não-estruturada e implementado com uma estrutura de dados por arestas. O método é do tipo “*vertex centered*”, ou seja, centrado no nó ou vértice das células, e os volumes de controle são, formados pelo método das medianas (“*median dual*”) (Sorensen, 2001). As formulações centradas nos nós requerem menor memória e menos cálculos quando estendidas às malhas tetraédricas tridimensionais, e possuem também uma forte semelhança com uma formulação em elementos finitos por arestas quando elementos triangulares (tetraedros) lineares são usados (Barth, 1992; Peraire et al., 1993 & Sorensen, 2001). A estrutura de dados adotada é baseada nas arestas a fim de reduzir o tempo da CPU e a memória requerida. Isto é motivado pelo uso de malhas não-estruturadas, as quais requerem o armazenamento de informações

topológicas da malha (conectividades), aumentando assim, o uso da memória do computador e o endereçamento indireto para recuperar a informação local necessária durante a análise via MVF.

A discretização através do método dos volumes finitos será descrita para um problema de condução de calor transiente sujeito a diferentes tipos de condições de contorno (Dirichlet, Neumann, e Cauchy) e para alguns tipos de fontes térmicas. O tratamento de problemas envolvendo múltiplos materiais também é considerado. A discretização no tempo é feita utilizando o método das diferenças finitas com o esquema “Euler-forward” de primeira ordem.

## 2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Como já foi dito anteriormente, admite-se um modelo axissimétrico, onde o eixo das coordenadas  $z$  é o eixo de simetria. Adotando-se um sistema de coordenadas cilíndricas tem-se que todos os coeficientes são independentes de  $\theta$ , portanto, a distribuição de temperatura é função apenas de  $(r, z)$ . Desta forma a equação da condução é escrita como:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q \quad \text{em} \quad \Omega \times \mathbf{T}$$

onde,  $\rho$  é a massa específica,  $c$  é o calor específico,  $T$  é a temperatura, e  $Q$  representa os termos de fonte ou sumidouro de calor. O domínio espacial do problema é representado por  $\Omega$ , com  $r$  sendo a coordenada radial, e  $z$ , a coordenada axial. O intervalo de tempo de integração é representado por  $\mathbf{T} = [t^i, t^f]$ . Por simplicidade, o meio é considerado ortotrópico com  $\rho$ ,  $c$ ,  $k$ , constantes e a Eq. (1) representa uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem, parabólica e não-homogênea.

O fluxo de calor condutivo é função do gradiente de temperatura, sendo modelado pela Lei de Fourier:  $q_j = -k_j \partial T / \partial x_j$ . Onde  $k_j$  é a condutividade térmica na direção  $x_j$  que representa a variável espacial independente, e  $j$  varia de um ao número de dimensões espaciais. Em coordenadas cilíndricas num modelo axissimétrico  $x_j$  representa as coordenadas  $(r, z)$ .

O problema representado pela Eq. (1) está sujeito a condições de contorno e inicial. As condições de contorno de interesse podem ser de diferentes tipos:

a) Condição de Contorno de Dirichlet: temperatura prescrita  $\bar{T}$  sobre uma porção do contorno  $\Gamma_D$ .

$$T = \bar{T}, \quad \text{em} \quad \Gamma_D \times \mathbf{T} \quad (2)$$

b) Condição de Contorno de Neumann: fluxo de calor normal prescrito  $\bar{q}_n$  sobre  $\Gamma_N$ .

$$-q_j n_j = \bar{q}_n, \quad \text{em} \quad \Gamma_N \times \mathbf{T} \quad (3)$$

onde  $n_j$  são os cossenos diretores da normal externa ao domínio.

c) Condição de Contorno de Cauchy ou Robin: condição de contorno mista, ou seja, fluxo prescrito e/ou troca de calor por convecção sobre  $\Gamma_C$ .

$$-q_j n_j = \bar{q}_n + \alpha_s (T - T_a), \quad \text{em} \quad \Gamma_C \times \mathbf{T} \quad (4)$$

onde  $\alpha_s$  é o coeficiente de transferência de calor e  $T_a$  é a temperatura média do ambiente.

A distribuição inicial da temperatura  $\bar{T}^i$  é conhecida para um estágio de tempo inicial  $t^i$ , e a condição inicial é expressa por:

$$T = \bar{T}^i \quad \text{em } \Omega \text{ e } t = t^i \quad (5)$$

### 3. FORMULAÇÃO AXISSIMÉTRICA EM VOLUMES FINITOS

A Equação (1) pode ser reescrita em termos de fluxos e integrada em torno de um volume axissimétrico  $\Omega$ , como:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial q_z}{\partial z} d\Omega + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (6)$$

O volume infinitesimal num modelo tridimensional em coordenadas cilíndricas é dado por:  $d\Omega = r d\theta dr dz = r d\theta dA$ . Para o caso axissimétrico  $d\theta = 2\pi$ , e o volume axissimétrico resulta em:  $d\Omega = 2\pi r dA$ .

Substituindo na Eq. (6), temos:

$$\int_A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} 2\pi r dA = - \int_A \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) 2\pi r dA - \int_A \frac{\partial q_z}{\partial z} 2\pi r dA + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (7)$$

A equação anterior pode ser reescrita na forma:

$$\int_A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} 2\pi r dA = - \int_A \frac{\partial (2\pi r q_r)}{\partial r} dA - \int_A \frac{\partial (2\pi r q_z)}{\partial z} dA + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (8)$$

A Equação (8) pode ser reescrita com notação indicial. Aplicando, portanto o Teorema da Divergência, temos:

$$\int_A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} 2\pi r dA = - \int_S (2\pi r q)_j n_j dS + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (9)$$

onde,  $S$  é o contorno da secção transversal do volume de controle.

Para obter a formulação numérica, via MVF, da Eq. (9), procede-se inicialmente a discretização do domínio computacional que é feita no presente trabalho por meio de uma malha de elementos não-estruturada. As integrais sobre o volume na Eq. (9) são calculadas para cada volume de controle axissimétrico associado ao nó  $I$  da malha. A integral sobre o contorno presente na mesma equação é calculada sobre o contorno do volume de controle associado ao nó  $I$ , usando uma representação da malha por arestas. Após considerar estas aproximações (Lyra et al., 2002; Sorensen, 2001), a formulação semidiscreta da Eq. (9) pode ser convenientemente expressão como:

$$\rho c \frac{\partial \hat{T}_I}{\partial t} 2\pi r_c A_I = - \left( \sum_L C_{IJ_L}^{AX(j)} q_{IJ_L}^{j(A)} + \sum_L D_{IJ_L}^{AX(j)} q_{IJ_L}^{j(S)} \right) + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (10)$$

onde  $A_I$  é a área da secção transversal do volume de controle associado ao nó  $I$ ,  $r_c$  é o raio do centróide do V.C. e  $\hat{T}_I$  representa a temperatura calculada numericamente para o nó  $I$ .

O centróide do volume de controle é dado por:

$$r_c = \sum_i r_i A_i / \sum_i A_i \quad (11)$$

onde  $r_i$  é o centróide de cada sub-elemento que forma o volume de controle e  $A_i$  é a área deste sub-elemento. É importante observar que as coordenadas do centróide não coincidem, necessariamente, com as coordenadas do nó  $I$ .

Os coeficientes  $C_{IJ_L}^{AX(j)}$  e  $D_{IJ_L}^{AX(j)}$  representam as componentes na direção  $j$  do vetor área normal à superfície do volume de controle e que devem multiplicar o fluxo associado à aresta  $IJ_L$  para assim obter a contribuição do fluxo de calor desta aresta para o nó  $I$ . Sendo que primeiro somatório da Eq. (10) se dá sobre todas as arestas do domínio que estão conectadas ao nó  $I$ , enquanto que o segundo somatório corresponde à contribuição do fluxo em uma aresta  $L$  do contorno conectadas ao nó  $I$ . A seguir são apresentadas as expressões para o cálculo dos coeficientes de peso  $C_{IJ_L}^{AX(j)}$  e  $D_{IJ_L}^{AX(j)}$ , correspondentes ao modelo axissimétrico proposto no presente trabalho.

$$C_{IJ_L}^{AX(j)} = \sum_k A_K n_K^j \quad e \quad D_{IJ_L}^{AX(j)} = A_L n_L^j \quad (12)$$

onde,  $A_K = 2\pi r_k L_K$ , com  $r_k = (r_{MP} + r_C)/2$ , ou seja, a coordenada radial do ponto médio da interface  $K$  e  $L_K$  é o comprimento de cada interface  $K$  associada à aresta  $IJ_L$ . Cada interface liga o centróide (C) de um elemento em torno do nó  $I$  ao ponto médio (MP) de uma das arestas que pertencem a este elemento. Para cada aresta do contorno deve-se calcular um coeficiente  $D_{IJ_L}^{AX(j)}$  com  $A_L = 2\pi r_L L_L$ , onde  $L_L$  é a metade do comprimento da aresta de contorno em consideração, e  $r_L = (3r_I + r_{J_L})/4$ , para o nó  $I$ , e  $r_L = (3r_{J_L} + r_I)/4$ , para o nó  $J_L$ . As componentes dos vetores unitários normais à superfície de controle na direção  $j$  são dados por  $n_K^j$  e  $n_L^j$ .

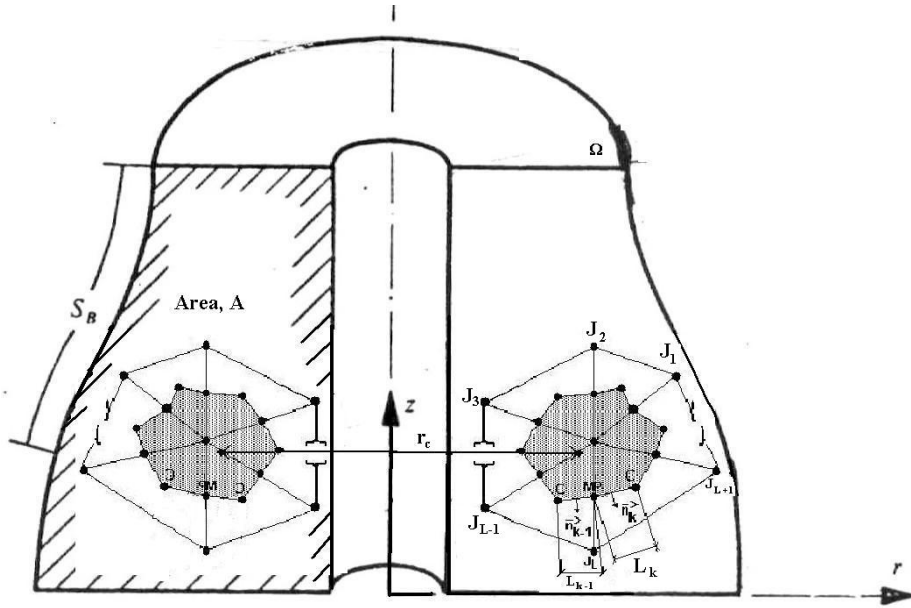
A Figura (1) representa um exemplo de volume de controle axissimétrico típico e o sistema de coordenadas adotado. A figura mostra, em destaque, a secção transversal de um volume de controle interno e nela estão detalhados os parâmetros geométricos necessários para calcular os coeficientes. Uma descrição mais detalhada destes parâmetros geométricos pode ser encontrada em Guimarães (2003) para o caso bidimensional e está detalhado em Silva (2004) para o caso axissimétrico.

Os valores dos fluxos  $q_{IJ_L}^{j(A)}$  e  $q_{IJ_L}^{j(S)}$  (Eq. 10), para arestas internas e do contorno, são aproximados, respectivamente, pelas expressões convencionais do MVF dadas por:  $q_{IJ_L}^{j(A)} = (q_I^j + q_{J_L}^j)/2$  e  $q_{IJ_L}^{j(S)} = q_I^j$ .

Para calcular os fluxos nas arestas, é necessário conhecer o valor nodal dos fluxos e, conseqüentemente, os valores nodais dos gradientes de temperatura. Adotando o teorema da divergência e a aproximação usada para calcular a integral sobre um volume de controle ao redor do nó  $I$ , tem-se que:

$$\int_{\Omega_I} \frac{\partial T}{\partial x_j} d\Omega = \int_{A_I} \frac{\partial T}{\partial x_j} 2\pi r dA = 2\pi \int_{A_I} \left[ \frac{\partial(rT)}{\partial x_j} - B \right] dA \equiv 2\pi \int_{S_I} (rT) n_j dS - 2\pi \int_{A_I} B dA \quad (13)$$

$$\text{onde, } 2\pi \int_{A_I} B dA = 2\pi B_I A_I \quad e \quad B_I = \begin{cases} T_I & \text{para } x_j = r \quad (\text{direção radial}) \\ 0 & \text{para } x_j = z \quad (\text{direção axial}) \end{cases}$$



**Figura 1** - Sólido axissimétrico com um volume de controle típico em destaque

Por outro lado,

$$\int_{\Omega_I} \frac{\partial T}{\partial x_j} d\Omega = \int_{A_I} \frac{\partial T}{\partial x_j} 2\pi r dA \cong 2\pi \frac{\partial T_I}{\partial x_j} r_C A_I \quad (14)$$

Igualando as Eq. (13) e (14) e usando a mesma aproximação adotada para calcular a integral no contorno na Eq. (9), tem-se a aproximação nodal do gradiente expressa como:

$$\frac{\partial T_I}{\partial x_j} 2\pi r_C A_I \cong \sum_L C_{IJ_L}^{AX(j)} T_{IJ_L}^{(A)} + \sum_L D_{IJ_L}^{AX(j)} T_{IJ_L}^{(S)} - 2\pi B_I A_I \quad (15)$$

Utilizam-se as mesmas aproximações adotadas na determinação dos fluxos das arestas, ou seja,  $T_{IJ_L}^{(A)} = (T_I + T_{J_L})/2$  e  $T_{IJ_L}^{(S)} = T_I$ .

O uso da Eq. (15) para calcular os gradientes implica no uso recursivo da aproximação adotada para calcular uma integral sobre o contorno. Portanto a discretização do termo de difusão na Eq. (10) envolve informações de duas camadas de pontos ao redor do ponto  $I$  em consideração, ou seja, um estêncil estendido que pode levar a alguma perda de robustez e à redução na taxa de convergência do esquema resultante. Este fato pode levar ainda a um “checker-boarding” ou a oscilações “par-ímpar” (Lyra, 1994 & Sorensen, 2001), uma vez que a contribuição dos nós, diretamente conectados ao nó  $I$ , pode ser cancelada ou contribuir pouco no cálculo. Para superar tais deficiências, os gradientes são calculados através de um procedimento alternativo, sugerido na literatura (Crumpton et al., 1997 & Sorensen, 2001). Resumidamente, o procedimento consiste em uma nova avaliação do fluxo  $q_{IJ_L}^{j(A)}$  nas arestas do domínio, considerando as contribuições deste fluxo nas direções paralela e normal à aresta. Sendo que para a contribuição paralela é feita uma nova aproximação em diferenças finitas central de segunda ordem, e a componente normal se mantém igual à obtida via aproximação expressa na Eq. (15). Este procedimento está descrito detalhadamente em Guimarães, (2003).

Com a nova aproximação do fluxo nas arestas, aqui representadas por  $q_{IJ_L}^{j(A*)}$ , a Eq. (10) pode ser reescrita como:

$$\rho c \frac{d\hat{T}_I}{dt} 2\pi r_C A_I = - \left( \sum_L C_{IJ_L}^{AX(j)} q_{IJ_L}^{j(A^*)} + \sum_L D_{IJ_L}^{AX(j)} q_{IJ_L}^{j(S)} \right) + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (16)$$

### 3.1 Discretização dos Termos de Fontes Térmicas

O termo  $Q$  representa a fonte térmica que pode atuar em diferentes porções do domínio. A forma integral da fonte térmica  $Q$ , descrita pela Eq. (16), é dada por:

$$\int_{\Omega} Q d\Omega = 2\pi Q^P + \sum_L Q_I^C 2\pi r_L L_L + Q_I^R 2\pi r_C A_I \quad (17)$$

onde os sobrescritos  $P$ ,  $C$ ,  $R$  informam se as fontes térmicas ou sumidouros de calor agem em um ponto, uma curva ou uma região, respectivamente. Na Equação (17), o somatório se dá sobre as duas arestas  $L$  que aproximam a curva  $C$  no ponto  $I$  sob a qual a fonte atua. Vale salientar que a expressão proposta na Eq. (17) apenas se aplica no caso de fontes térmicas axissimétricas e fontes pontuais quando aplicadas sobre o eixo.

### 3.2 Discretização das Condições de Contorno

Para a porção do domínio submetido à condição de contorno de Dirichlet, o valor nodal da temperatura é conhecido, sendo o valor da temperatura prescrita  $\bar{T}_I$ .

Para a imposição da condição de contorno de Neumann, a componente normal do fluxo (vinda do cálculo via MVF) deve ser substituída pelo fluxo prescrito  $\bar{q}_n$ , enquanto que a componente paralela é proveniente de uma aproximação por diferenças finitas centrais de segunda ordem.

A condição de contorno de Robin, é implementada de modo semelhante à condição de contorno de Neumann, uma vez que na formulação explícita adotada para o tempo o lado direito da Eq. (4) é conhecido se tomarmos o valor da temperatura  $T$  do estágio de tempo anterior.

### 3.3 Domínio com Múltiplos Materiais

Quando os problemas de transferência de calor envolvem diferentes propriedades de materiais, a discretização das equações governantes deve garantir a solução correta nas interfaces das sub-regiões. O gerador de malhas utilizado (Carvalho, 2001) tem flexibilidade para gerar malhas consistentes sobre o domínio com múltiplas regiões.

Quando uma aresta pertence à interface entre duas regiões, os coeficientes são calculados para cada região independentemente. Com isto, cada aresta da interface possui dois coeficientes de peso, definidos de forma semelhante à Eq. (12).

No caso de múltiplos materiais, a equação discreta (16) é agora substituída por:

$$\begin{aligned} \rho c \frac{d\hat{T}_I}{dt} 2\pi r_C A_I = & - \left( \sum_L C_{IJ_L}^{AX(j)} q_{IJ_L}^{j(A^*)} + \sum_L D_{IJ_L}^{AX(j)} q_{IJ_L}^{j(S)} + \sum_{k=1}^2 \sum_L C_{IJ_L}^{AX(j)(R_k)} q_{IJ_L}^{j(S_k^*)} \right) + \\ & + 2\pi Q^P + \sum_L Q_I^C 2\pi r_L S_L + Q_I^R 2\pi r_C A_I \end{aligned} \quad (18)$$

Vale ressaltar que o terceiro somatório do lado direito é diferente de zero apenas quando o nó  $I$  está na interface entre duas ou mais regiões de propriedades diferentes. Os fluxos nas arestas da interface  $q_{IJ_L}^{j(S_k^*)}$  são calculados da mesma forma que  $q_{IJ_L}^{j(A^*)}$ .

Os valores dos gradientes e respectivos fluxos são obtidos em três etapas. Em primeiro lugar é feito o somatório sobre as arestas do contorno com as condições de contorno de Neumann e Robin já prescritas. Em segundo lugar é feito o somatório sobre todas as arestas do domínio (internas e de contorno); a terceira etapa consiste em um somatório duplo sobre as arestas das interfaces. Durante cada somatório são utilizados o coeficiente e propriedades do material correspondentes a cada lado.

Como a constante  $2\pi$  aparece em todos os termos da equação, explicitamente ou implicitamente, como no caso dos coeficientes  $C_{IJ_L}^{AX(j)}$  e  $D_{IJ_L}^{AX(j)}$ , pode ser simplificada, não sendo implementada na prática nem no cálculo dos coeficientes (Eq. 12) nem nos termos da Eq. (18).

### 3.4 Discretização no Tempo

A discretização no tempo é feita através de uma formulação explícita (“Euler forward”), onde as temperaturas do nó  $I$  são calculadas em função das temperaturas dos nós vizinhos avaliadas no instante anterior, ou seja, já são conhecidas. Obtém-se, assim, um conjunto de equações progressivas no tempo não constituindo um sistema de equações simultâneas e que podem ser calculadas uma a uma, tantas vezes quantos forem os níveis de tempo desejados.

## 4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

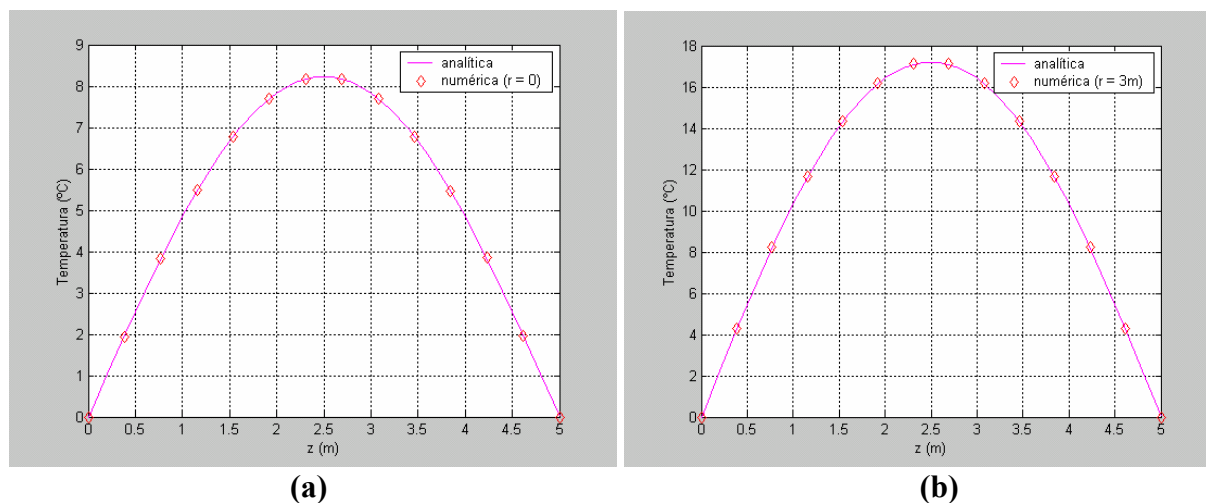
As malhas aqui utilizadas são obtidas através de um gerador de malhas triangulares não-estruturadas desenvolvido por Carvalho (2001). Após uma etapa de pré-processamento dos dados geométricos da malha para extrair a estrutura de dados por aresta e cálculo dos coeficientes associados às mesmas, tem-se a etapa de análise via MVF propriamente dita, que pode se descrita pelo algoritmo abaixo:

1. Entrada de dados: modelo discreto, propriedades físicas e parâmetros de controle;
2. Cálculo do intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) baseado na condição de estabilidade;
3. Cálculo dos termos de fonte de calor sobre o contorno e domínio;
4. Imposição de condição de contorno de Dirichlet nos nós correspondentes do contorno;
5. Cálculo dos gradientes e fluxos de calor via MVF (Eq. 15 e Lei de Fourier);
6. Cálculo dos fluxos paralelos às arestas do contorno por diferenças finitas (DF);
7. Decomposição dos fluxos nas componentes paralela e normal às arestas e substituição da componente paralela pela componente vinda do cálculo por DF para todas as arestas;
8. Imposição dos fluxos de calor prescritos (condição de contorno de Neumann ou de Cauchy) nos pontos nodais correspondentes do contorno, através da substituição da componente normal do fluxo pelos fluxos de calor prescritos e cálculo das componentes paralelas dos fluxos das arestas destes contornos pelas aproximações por DF;
9. Atualização das temperaturas;
10. Iterar entre os itens 3 a 9 até completar o tempo de análise desejado (caso transiente) ou alcançar um novo estado estacionário.

## 5. VALIDAÇÃO DO PROGRAMA

O primeiro exemplo, consiste em calcular o perfil de temperatura em estado estacionário em um cilindro sólido sem geração de calor de dimensões  $0 \leq r \leq b$  e  $0 \leq z \leq c$ . As superfícies em  $z = 0$  e  $z = c$  são mantidas à temperatura de zero grau. A superfície em  $r = b$  é mantida à temperatura constante  $T_o = 60^\circ\text{C}$ . O cilindro é feito com um material que possui uma condutividade térmica  $k = 2,0 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ , massa específica  $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$  e calor específico,  $c = 1,0 \text{ J/kg K}$ . As dimensões do cilindro são  $b = 6 \text{ m}$  e  $c = 5 \text{ m}$ . Para a solução numérica do problema, foram utilizadas duas malhas triangulares não-estruturadas, a primeira malha com 390 elementos e 225 nós, e a segunda, com 1656 elementos e 884 nós. No tempo  $t = 0$ , a placa se encontrava a  $T = 5^\circ\text{C}$  e a solução foi obtida

quando o perfil de temperatura atingiu o estado permanente. A Figura (2) mostra as distribuições de temperatura e a comparação com a solução analítica para as duas malhas.



**Figura 2** – (a) Distribuição de temperatura no cilindro (1ª e 2ª malha) em  $r = 0$  e  $0 \leq z \leq 5,0$  m. (b) Distribuição de temperatura no cilindro (1ª malha) em  $r = 3$  m e  $0 \leq z \leq 5,0$  m.

Um segundo exemplo é apresentado, onde é calculado o perfil de temperatura em estado estacionário para um cilindro sólido sem geração de calor de dimensões e propriedades físicas idênticas ao primeiro exemplo. A superfície em  $z = 0$  agora é mantida a uma temperatura constante  $T_o = 50^\circ\text{C}$ , a superfície em  $z = c$  é mantida a zero grau, e a superfície em  $r = b$  dissipa calor por convecção para um ambiente também a zero grau com coeficiente de transferência de calor  $h = 10 \text{ W/m}^2\text{C}$ . Para a solução numérica do problema, foram utilizadas duas malhas triangulares não-estruturadas, a primeira malha com 146 nós e 246 elementos e a segunda, com 403 nós e 730 elementos. No tempo  $t = 0$ , a placa se encontrava a  $T = 25^\circ\text{C}$  e a solução foi obtida quando o perfil de temperatura atingiu o estado permanente. A Figura (3) mostra a distribuição de temperatura e a comparação com a solução analítica.

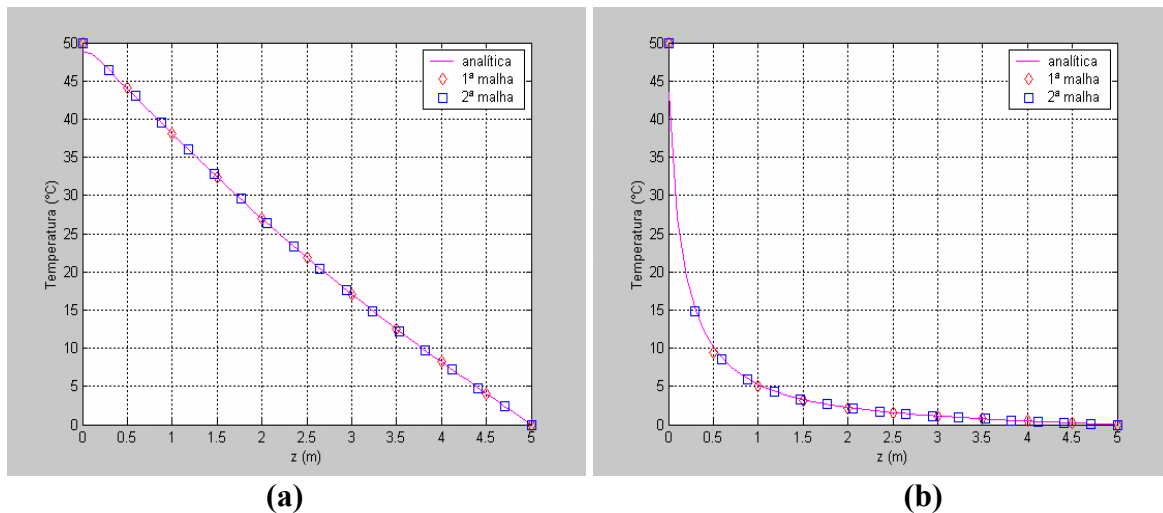
O terceiro exemplo tem como objetivo calcular o perfil de temperatura transiente para um cilindro sólido sem geração de calor inicialmente a  $T_o = 50^\circ\text{C}$ . As propriedades físicas são idênticas aos exemplos anteriores e as dimensões são  $b = 5 \text{ m}$  e  $c = 5 \text{ m}$ . As superfícies em  $z = 0$  e  $z = c$  são mantidas isoladas, e a superfície em  $r = b$  é mantida a zero grau. Para a solução numérica do problema, foi utilizada uma malha triangular não-estruturada com 37 nós e 52 elementos. A Figura (4) mostra a distribuição de temperatura em função do tempo.

As soluções analíticas que satisfazem as condições de contorno dos problemas apresentados podem ser encontradas em Özisik (1980). Os resultados obtidos numericamente no domínio apresentaram excelente aproximação com os valores conhecidos analiticamente.

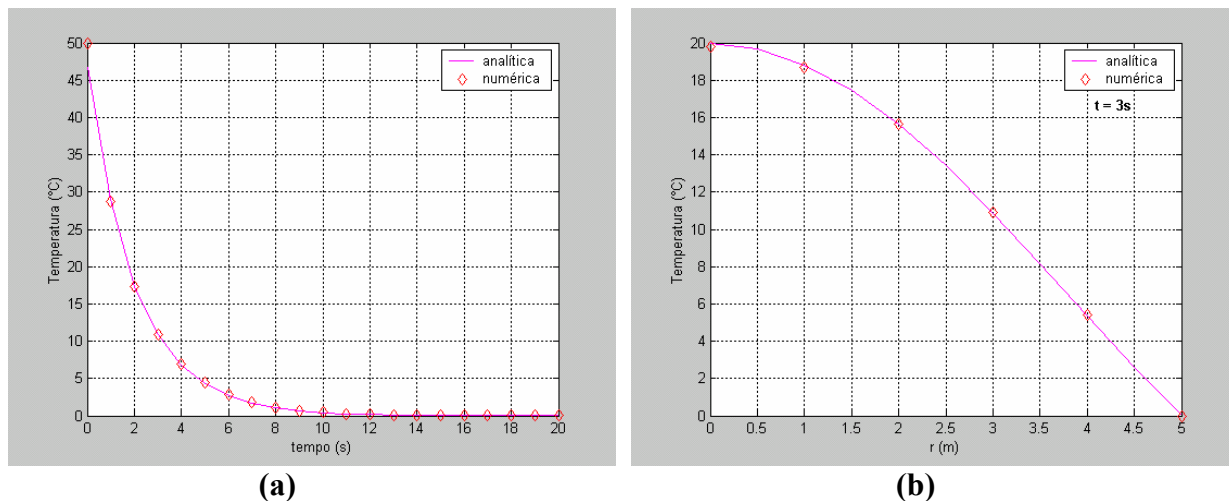
## 6. CONCLUSÃO

Os exemplos de validação apresentaram resultados bastante satisfatórios para os domínios analisados quando comparados com suas respectivas soluções analíticas. Pretende-se, futuramente, aplicar a referida formulação na solução de problemas de biotransferência de calor, particularmente no estudo da distribuição de temperatura no globo ocular com implantes retinianos subretinais ou epirretinais, que começam a ser utilizados em seres humanos que apresentam retinose pigmentar ou degeneração macular, as quais podem ser responsáveis pela perda total da visão (Margalit, 2002).





**Figura 3** – (a) Distribuição de temperatura no cilindro em  $r = 0$  e  $0 \leq z \leq 5,0m$ .  
(b) Distribuição de temperatura no cilindro em  $r = 6m$  e  $0 \leq z \leq 5,0m$ .



**Figura 4** – (a) Distribuição de temperatura no cilindro em  $r = 3,0 m$  e  $z = 0$ .  
(b) Distribuição de temperatura no cilindro em  $z = 0$  para  $t = 3s$ .

## 7. REFERÊNCIAS

- Baliga, B.R., Patankar, S.V., 1983, “A Control Volume Finite-Element Method for Two-Dimensional Fluid Flow and Heat Transfer”, Numerical Heat Transfer, Vol. 6, pp. 245-261.
- Barth, T. J., 1992, “Aspects of Unstructured Grids and Finite-Volume Solvers for The Euler and Navier-Stokes Equations”, AGARD Report 787, pp. 6.1-6.61.
- Carvalho, D.K.E. de, “Um Sistema Computacional para Geração e Adaptação de Malhas Não-Estruturadas Bidimensionais”, Recife, (Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica/Universidade Federal de Pernambuco), 70p, 2001.
- Crompton, P.I., Moinier, P. & Giles, M.B.T.J., 1997, “An Unstructured Algorithm for High Reynolds Number Flows on Highly Stretched Grids”. In: TAYLOR, C. & Cross, J. T, ed., Numerical Methods In Laminar and Turbulent Flow, Pineridge Press, pp. 561-572.
- Guimarães, C.S.C., “Modelagem Computacional da Biotransferência de Calor no Tratamento por Hipertermia em Tumores de Duodeno através do Método dos Volumes Finitos em Malhas Não Estruturadas”, Recife, (Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica/Universidade Federal de Pernambuco), 80p, 2003.

- Lyra, P.R.M., 1994, “Unstructured Grid Adaptive Algorithms for Fluid Dynamics and Heat Conduction”, Ph.D. thesis C/PH/182/94, University of Wales – Swansea.
- Lyra, P.R.M., Lima, R. de C.F. de, Guimarães, C.S.C. & Carvalho, D.K.E. de, “Uma formulação com estrutura de dados por arestas do método dos volumes finitos na solução de problemas de potencial”, 2002, Anais do MECOM'2002 - First South American Congress on Computational Mechanics, Parana - Santa Fé, Argentina.
- Maliska, C.R., 1995, Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional; Fundamentos e Coordenadas Generalizadas, Ed. LTC, Rio de Janeiro.
- Margalit, E., Maia, M., Weiland, J.D., Greenberg, R.J., Fujii, G.Y., Torres, G., Piyathaisere, D.V., O'Hearn, T.M., Liu, W., Lazzi, G., Dagnelie, G., Scribner, D.A., de Juan Jr, E., Humayun, M.S., 2002, “Retinal prosthesis for the blind”, *Survey of ophthalmology*, vol. 47 (4), pp. 335-356.
- Özisik, M.N., 1980, *Heat Conduction*, New York, Ed. John Wiley & Sons.
- Peraire, J., Peiró, J. & Morgan, K., 1993, “Finite Element Multigrid Solution of Euler Flows Past Installed Aero-Engines”, *J. Computational Mechanics*, Vol.11, pp. 433-451.
- Silva, G.M.L.L. da, “Análise da biotransferência de calor nos tecidos oculares devido à presença de implantes retinianos através da utilização do Método dos Volumes Finitos em malhas não-estruturadas”, Recife, (Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica/Universidade Federal de Pernambuco), 2004.
- Sorensen, K.A., 2001, “A Multigrid Procedure for The Solution of Compressible Fluid Flows on Unstructured Hybrid Meshes”, Ph.D. thesis C/PH/251/01, University of Wales – Swansea.

## A FINITE VOLUME AXISYMMETRIC FORMULATION FOR THE SOLUTION OF TRANSIENT HEAT TRANSFER PROBLEMS USING UNSTRUCTURED MESHES

**Paulo Roberto Maciel Lyra**

e-mail: [prmlyra@demec.ufpe.br](mailto:prmlyra@demec.ufpe.br)

**Rita de Cássia Fernandes de Lima**

e-mail: [ritailima@ufpe.br](mailto:ritailima@ufpe.br)

**Giselle Maria Lopes Leite da Silva**

e-mail: [gisellemls@aol.com](mailto:gisellemls@aol.com)

**Darlan Karlo Elisiário de Carvalho**

e-mail: [darlan@demec.ufpe.br](mailto:darlan@demec.ufpe.br)

Departamento de Engenharia Mecânica - UFPE

R. Acadêmico Hélio Ramos, s/n – Cidade Universitária, 50740-530- Recife- PE

**Abstract:** *In this work, a finite volume formulation developed for two-dimensional models (Guimarães, 2003; Lyra et al., 2002) is extended to deal with axisymmetric models of heat conduction applications. This formulation uses a vertex centered finite volume method and it was implemented using an edge-based data structure. The temporal and domain discretization for “triangular” meshes is described in details, including the treatment of boundary conditions, source terms, and domains with multiple materials. Heat transfer model problems, which exact solutions are known, are used to validate the computational tool developed.*

**Keywords:** *FVM, unstructured meshes, axisymmetric models, heat transfer*