

# DIFUSÃO NÃO LINEAR TRANSIENTE EM UM MEIO SÓLIDO

**Odacir Almeida Neves<sup>1</sup>**

[odacir@fem.unicamp.br](mailto:odacir@fem.unicamp.br)

**Luiz Felipe Mendes de Moura<sup>2</sup>**

[felipe@fem.unicamp.br](mailto:felipe@fem.unicamp.br)

**João Batista Aparecido<sup>3</sup>**

[jbaparecido@dem.feis.unesp.br](mailto:jbaparecido@dem.feis.unesp.br)

<sup>1,2</sup> UNICAMP – Faculdade de Engenharia Mecânica, Depto de Engenharia Térmica e Fluidos  
Cidade Universitária “Zeferino Vaz”, Barão Geraldo, Campinas, – SP, Cep. 13083-970, Brasil.

<sup>3</sup> UNESP – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica  
Av. Brasil centro, n.º 56, Ilha Solteira, São Paulo, Cep.: 15385-000, Brasil.

**Resumo:** Foi realizado neste trabalho uma formulação matemática, análise e solução do problema de condução de calor tridimensional não-linear e transiente, definido no sistema de coordenadas cartesianas. A Técnica da Transformada Integral Generalizada foi utilizada para transformar o sistema de equações diferenciais parciais original em um sistema de equações diferenciais ordinárias, o qual foi truncado em uma ordem suficientemente grande de acordo com a precisão desejada e os recursos computacionais disponíveis. Foram obtidos e apresentados resultados numéricos para a difusão de calor em um paralelepípedo de Aço Inoxidável Aisi 304.

**Palavras-chave:** Difusão de calor, Não-linear, Transformada integral, Transiente, Tridimensional.

## 1. INTRODUÇÃO

Os processos de transferência de calor estão presentes em diversas aplicações. Na natureza, animais e plantas não sobrevivem sem os processos vitais da transferência de calor que fazem parte de seu metabolismo. Assim, a transferência de calor tornou-se, desde tempos remotos, um importante campo de pesquisa teórica e aplicada.

Muitas aplicações na área de transferência de calor são representadas por modelos difusivos não-lineares. Para o caso tridimensional, o modelamento matemático será representado por uma equação diferencial parcial, não-linear de segunda ordem.

As técnicas analíticas tradicionais não abordam todos os problemas. Soluções aproximadas foram propostas através de métodos numéricos. Técnicas de soluções híbridas analítico-numéricas têm sido desenvolvidas e utilizadas em diversos trabalhos disponíveis na literatura. Uma família destas técnicas são os métodos integrais, e entre eles há uma técnica chamada Transformada Integral Generalizada (TTIG) que têm sido utilizada com sucesso na solução de problemas difusivos ou convectivos-difusivos.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada transforma a equação diferencial parcial original em um sistema de equações diferenciais ordinárias acoplado e infinito, o qual é truncado e resolvido numericamente através de sub-rotinas computacionais para problemas de valor inicial.

Será realizado neste trabalho, uma formulação matemática, análise e solução para o problema de difusão não-linear tridimensional e transiente. Resultados numéricos serão apresentados para a difusão de calor em um cubo.

## 2. ANÁLISE MATEMÁTICA

O problema de condução de calor transiente no interior de um cubo com condutividade térmica dependente da temperatura foi considerado, cuja formulação matemática é dada por

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \nabla \cdot [K(T(x, y, z, t)) \nabla T(x, y, z, t)] \quad (1)$$

no domínio,  $0 < x < l_x$ ,  $0 < y < l_y$ ,  $0 < z < l_z$ ,  $t > 0$ .

Os parâmetros e variáveis presentes na Eq. (1) são adimensionais e estão relacionados com suas dimensões pela formulação seguinte

$$T(x, y, z, t) \equiv \frac{T^*(x^*, y^*, z^*, t) - T_\infty^*}{T_0^* - T_\infty^*} \Leftrightarrow T^*(x^*, y^*, z^*, t) = T_\infty^* + (T_0^* - T_\infty^*)T(x, y, z, t), \quad (2a)$$

$$x \equiv \frac{x^*}{L^*}, \quad y \equiv \frac{y^*}{L^*}, \quad z \equiv \frac{z^*}{L^*}, \quad t \equiv \frac{k_{\text{ref}}^* t^*}{\rho c (L^*)^2} \Leftrightarrow x^* = x L^*, \quad y^* = y L^*, \quad z^* = z L^*, \quad t^* = \frac{\rho c (L^*)^2 t}{k_{\text{ref}}^*}, \quad (2b-e)$$

$$k_{\text{ref}}^* \equiv \frac{\int_{T_0^*}^{T_\infty^*} k^*(T^*) dT^*}{\int_{T_0^*}^{T_\infty^*} dT^*} = \frac{\int_{T_0^*}^{T_\infty^*} k^*(T^*) dT^*}{T_\infty^* - T_0^*}, \quad K[T(x, y, z, t)] \equiv \frac{k^*[T^*(x^*, y^*, z^*, t^*)]}{k_{\text{ref}}^*}, \quad (2f,g)$$

$$L^* = \max\{l_x^*, l_y^*, l_z^*\}, \quad l_x \equiv \frac{l_x^*}{L^*}, \quad l_y \equiv \frac{l_y^*}{L^*}, \quad l_z \equiv \frac{l_z^*}{L^*} \Leftrightarrow l_x^* \equiv l_x L^*, \quad l_y^* \equiv l_y L^*, \quad l_z^* \equiv l_z L^*. \quad (2h-l)$$

O tempo adimensional ( $t$ ) é também conhecido na literatura como número de Fourier,  $Fo$ , assim  $Fo \equiv t = \alpha t^* / (L^*)^2$ . As condições inicial e de contorno para a Eq. (1) são representadas por

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z) = 1, \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad 0 \leq y \leq l_y, \quad 0 \leq z \leq l_z, \quad (3a)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad t > 0, \quad (3b-d)$$

$$T(l_x, y, z, t) = 0, \quad T(x, l_y, z, t) = 0, \quad T(x, y, l_z, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3e-g)$$

A condutividade térmica é representada neste trabalho por uma função linear da temperatura, como expressa a seguir

$$K(T(x, y, z, t)) = a + bT(x, y, z, t). \quad (4)$$

A Eq. (4) quando substituída na Eq. (1) resulta

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = a \nabla^2 T(x, y, z, t) + b \nabla \cdot [T(x, y, z, t) \nabla T(x, y, z, t)] \quad (5)$$

No caso particular  $b = 0$ , o problema difusivo não linear se torna linear.

## 2.1 Problemas de Autovalores

Os problemas auxiliares de autovalor e suas respectivas condições de contorno para os três eixos são escolhidos como sugerido em Aparecido (1997) e são expressos por

$$a^{1/3} \frac{d^2 \Psi_i^{(x)}(x)}{dx^2} + \mu_i^{(x)2} \Psi_i^{(x)}(x) = 0, \quad 0 < x < l_x, \quad (6)$$

$$\left. \frac{d\Psi_i^{(x)}(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \Psi_i^{(x)}(x = l_x) = 0, \quad (6a,b)$$

$$a^{1/3} \frac{d^2 \Psi_m^{(y)}(y)}{dy^2} + \mu_m^{(y)2} \Psi_m^{(y)}(y) = 0, \quad 0 < y < l_y, \quad (7)$$

$$\left. \frac{d\Psi_m^{(y)}(y)}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad \Psi_m^{(y)}(y = l_y) = 0, \quad (7a,b)$$

$$a^{1/3} \frac{d^2 \Psi_p^{(z)}(z)}{dz^2} + \mu_p^{(z)2} \Psi_p^{(z)}(z) = 0, \quad 0 < z < l_z, \quad (8)$$

$$\left. \frac{d\Psi_p^{(z)}(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad \Psi_p^{(z)}(z = l_z) = 0. \quad (8a,b)$$

As soluções dos problemas, Eqs. (6), (7) e (8), sujeitas às condições de contorno, Eqs. (6a,b), (7a,b) e (8a,b) para os três eixos espaciais são efetuadas e portanto são obtidas as autofunções normalizadas  $\Psi_i^{(x)}$ ,  $\Psi_m^{(y)}$  e  $\Psi_p^{(z)}$ , as autoconstantes  $B_i^{(x)}$ ,  $B_m^{(y)}$  e  $B_p^{(z)}$ , bem como os autovalores  $\mu_i^{(x)}$ ,  $\mu_m^{(y)}$  e  $\mu_p^{(z)}$ . Estas entidades matemáticas são apresentadas a seguir:

$$\Psi_i^{(x)}(x) = B_i^{(x)} \cos(\gamma_i^{(x)} x), B_i^{(x)} = \sqrt{\frac{2}{l_x}}, \mu_i^{(x)} = \frac{(2i-1)\pi}{2l_x} a^{1/6}, \gamma_i^{(x)} = \frac{\mu_i^{(x)}}{a^{1/6}}, i=1,2,\dots,\infty; \quad (9a-c)$$

$$\Psi_m^{(y)}(y) = B_m^{(y)} \cos(\gamma_m^{(y)} y), B_m^{(y)} = \sqrt{\frac{2}{l_y}}, \mu_m^{(y)} = \frac{(2m-1)\pi}{2l_y} a^{1/6}, \gamma_m^{(y)} = \frac{\mu_m^{(y)}}{a^{1/6}}, m=1,2,\dots,\infty; \quad (10a-c)$$

$$\Psi_p^{(z)}(z) = B_p^{(z)} \cos(\gamma_p^{(z)} z), B_p^{(z)} = \sqrt{\frac{2}{l_z}}, \mu_p^{(z)} = \frac{(2p-1)\pi}{2l_z} a^{1/6}, \gamma_p^{(z)} = \frac{\mu_p^{(z)}}{a^{1/6}}, p=1,2,\dots,\infty. \quad (11a-c)$$

## 3. TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

A Técnica da Transformada Integral Generalizada aplicada na solução da equação diferencial parcial, Eq. (1) transforma o problema investigado em um sistema infinito acoplado de equações diferenciais ordinárias não-lineares de primeira ordem, o qual é truncado e resolvido numericamente. Através da fórmula de inversão que esta técnica proporciona é possível reconstruir o potencial original.

O par transformada-inversa associado aos três eixos é constituído seguindo a teoria da Transformada Integral Generalizada, (Cotta, 1993), e é expresso pelas seguintes equações:

$$\tilde{T}_{imp}^{(xyz)}(t) = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_p^{(z)}(z) T(x, y, z, t) dx dy dz, \quad i, m, p = 1, 2, \dots, \infty \quad (12)$$

$$T(x, y, z, t) = \sum_{i, m, p=1}^{\infty} \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{imp}^{(xyz)}(t) \quad (13)$$

O termo  $\tilde{T}_{imp}^{(xyz)}$  significa a transformação da variável dependente para os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  em relação às autofunções  $\Psi_i^{(x)}$ ,  $\Psi_m^{(y)}$  e  $\Psi_p^{(z)}$ , respectivamente.

Para transformar a equação diferencial parcial não linear, Eq.(5) multiplica-se esta equação pelas respectivas autofunções; os problemas de autovalores são multiplicados por  $T(x, y, z, t)$ ; as equações resultantes foram somadas e integradas sobre todo o domínio. Assim, um sistema de equações diferenciais ordinárias acoplado é obtido, veja Neves (2003), e dado por

$$\frac{d\tilde{T}_{imp}^{(xyz)}(t)}{dt} = \sum_{j, n, q=1}^{\infty} [A_{ijmnpq} + B_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}(t))] \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t), \quad i, m, p = 1, 2, \dots, \infty \quad (14)$$

onde o vetor  $\tilde{T}_{\infty}(t)$  contém todos os infinitos termos, transformados para  $i, m, p = 1, 2, \dots, \infty$ ,

$$\tilde{T}_{\infty}(t) \equiv [\{\tilde{T}_{111}, \tilde{T}_{112}, \tilde{T}_{113}, \dots\}, \{\tilde{T}_{121}, \tilde{T}_{122}, \tilde{T}_{123}, \dots\}, \dots, \{\tilde{T}_{211}, \tilde{T}_{212}, \tilde{T}_{213}, \dots\}, \{\tilde{T}_{221}, \tilde{T}_{222}, \tilde{T}_{223}, \dots\}, \dots]^T(t). \quad (15)$$

A Eq. (14) é um sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas. Para que sua postulação fique completa é necessário prover uma condição inicial. Isto pode ser efetuado, transformando a condição inicial original, Eq. (3a). Logo tem-se,

$$\tilde{T}_{imp}^{(xyz)}(0) = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_p^{(z)}(z) dx dy dz = \tilde{f}_{imp}^{(xyz)} \text{ com } i, m, p = 1, 2, \dots, \infty. \quad (16)$$

Os coeficientes na Eq. (14) são resultantes da transformação dos termos lineares e não-lineares da Eq. (5) e são representados por

$$A_{ijmnpq} = B_{ijmnpq}^* + \delta_{ij} D_{ijmnpq} + \delta_{ij} \delta_{mn} E_{ijmnpq} + \delta_{ij} \delta_{mn} \delta_{pq} F_{ijmnpq}; \quad (17)$$

$$B_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}(t)) = -\{R_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}(t)) + C_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}(t)) + V_{ijmnpq}(\tilde{T}_{\infty}(t))\}, \quad (18)$$

Os coeficientes envolvidos na Eq. (17) são expressos por:

$$B_{ijmnpq}^* = (1 - \delta_{ij}) F_{ij} Q_{mn} H_{pq} - F_{ij} H_{mn} \omega_{pq} (1 - \delta_{ij} \delta_{mn}); \quad (19)$$

$$D_{iimnpq} = -(\mu_i^{(x)})^2 H_{mn} H_{pq}; \quad E_{iimnpq} = -(\mu_m^{(y)})^2 F_{ii} H_{pq}; \quad F_{iimpp} = (\mu_p^{(z)})^2 F_{ii} H_{mn}, \quad (20)$$

sendo que os coeficientes presentes nas Eqs. (19) e (20), são integrais que surgiram durante o processo de transformação realizado pela TTIG. Seus resultados são

$$F_{ij} = \delta_{ij}; \quad H_{mn} = \delta_{mn}; \quad H_{pq} = \delta_{pq}; \quad \omega_{pq} = \mu_q^{(z)} \mu_p^{(z)} \delta_{pq}; \quad Q_{mn} = \mu_n^{(y)} \mu_m^{(y)} \delta_{mn},$$

nas quais os símbolos  $\delta_{ij}$ ,  $\delta_{mn}$  e  $\delta_{pq}$  são conhecidos como delta de kronecker e são definidos por

$$\delta_{st} = \begin{cases} 0 & \text{se } s \neq t \\ 1 & \text{se } s = t \end{cases}; \quad \text{para } (s, t) = (i, j), (m, n), (p, q).$$

Os coeficientes presentes na Eq. (18) são expressões matemáticas que contêm as não-linearidades existentes no problema analisado. Essas contribuições foram resolvidas numericamente.

### 3.1 Truncamento da Expansão de Funções em Séries Finitas

O sistema definido pela Eq. (14) possui um número infinito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem sujeito à condição inicial transformada, dada pela Eq. (16). Para obter-se resultados numéricos, o sistema infinito, Eq. (14), deve ser truncado em uma ordem finita suficientemente grande de acordo com a precisão desejada e respeitando os recursos computacionais disponíveis. Deste modo, truncando a expansão x em  $N_x$  termos, a expansão y em  $N_y$  termos e a expansão z em  $N_z$  termos, o número total de termos será  $(N_x N_y N_z)$ , implicando no sistema de equações diferenciais ordinárias, como segue

$$\frac{d\tilde{T}_{\text{imp}}^{(xyz)}(t)}{dt} = \sum_{j, n, q=1}^{N_x, N_y, N_z} [(A_{ijmnpq} + B_{ijmnpq}(\tilde{T}^{(xyz)}(t)))] \tilde{T}_{jnq}^{(xyz)}(t); \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N_x; \\ m = 1, 2, \dots, N_y; \\ p = 1, 2, \dots, N_z; \end{array} \quad (21)$$

sujeito à condição inicial

$$\tilde{T}_{\text{imp}}^{(xyz)}(0) = \tilde{f}_{\text{imp}}^{(xyz)}. \quad (22)$$

A Eq. (21) é um sistema finito de equações diferenciais ordinárias não-lineares de primeira ordem e pode ser escrito na forma matricial, como apresentado a seguir

$$\frac{d\tilde{\mathbf{T}}(t)}{dt} = [\mathbf{A} + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{T}}(t))] \tilde{\mathbf{T}}(t), \quad (23)$$

onde  $\mathbf{A}$  é a matriz dos coeficientes lineares  $A_{ijmnpq}$  e  $\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{T}}(t))$  a matriz dos coeficientes não-lineares  $B_{ijmnpq}(\tilde{T}^{(xyz)}(t))$ . O vetor  $\tilde{\mathbf{T}}(t)$  é o vetor  $\tilde{\mathbf{T}}_{\infty}(t)$  truncado, como comentado anteriormente, e é expresso por

$$\tilde{\mathbf{T}}(t) = [\tilde{T}_{111}, \tilde{T}_{112}, \dots, \tilde{T}_{11N_z}, \tilde{T}_{121}, \tilde{T}_{122}, \dots, \tilde{T}_{12N_z}, \dots, \tilde{T}_{1N_y1}, \tilde{T}_{1N_y2}, \dots, \tilde{T}_{1N_yN_z}, \dots, \tilde{T}_{2N_yN_z}, \dots, \tilde{T}_{N_xN_y1}, \tilde{T}_{N_xN_y2}, \dots, \tilde{T}_{N_xN_yN_z}]^T.$$

Assim, a fórmula de inversão, Eq. (13), depois de truncada é utilizada para obter a distribuição de temperatura

$$T(x, y, z, t) = \sum_{i, m, p=1}^{N_x, N_y, N_z} \Psi_i^{(x)}(x) \Psi_m^{(y)}(y) \Psi_p^{(z)}(z) \tilde{T}_{\text{imp}}^{(xyz)}(t). \quad (24)$$

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste trabalho, foi considerado um paralelepípedo cartesiano, com comprimento unitário em cada direção x, y e z,  $l_x = l_y = l_z = 1$ . O material analisado é o Aço Inoxidável Aisi 304, o qual foi submetido a um processo de resfriamento de uma temperatura inicial  $T_0^* = 1200\text{K}$  até uma temperatura final  $T_{\infty}^* = 400\text{K}$ . A ordem usada no truncamento da série foi de 5, 7 e 10 termos para cada direção, resultando em sistemas diferenciais com 125, 343 e 1000 equações diferenciais, respectivamente. Os resultados apresentados aqui se referem a 10 termos no truncamento da série.

O sistema finito não-linear, Eq. (23) foi resolvido através de um programa implementado em Fortran 90/95 que simula a difusão tridimensional não-linear transiente para um corpo com o formato de paralelepípedo cartesiano. Neste programa, a subrotina DIVPAG do IMSL (1994) foi

usada para resolver o sistema diferencial de equações. A precisão da subrotina foi fixada em  $\varepsilon = 10^{-5}$ . A condutividade térmica dimensional do Aço Aisi 304 foi obtida a partir dos dados experimentais disponíveis em Incropera & de Witt (1992), para o intervalo de temperatura de 400K a 1200K e é expressa por

$$k^*(T^*) = 11,47 + 0,013T^*, \quad [T^*] = K, \quad [k^*] = W/(m \times K).$$

Partindo desse polinômio de primeira ordem, utilizou-se a Eq. (2f) para calcular a condutividade térmica de referência  $k_{ref}^*$  que possui valor igual a 22,42 W/(m × K) e então, através da Eq. (2g) obteve-se a condutividade térmica adimensional  $K(T) = 0,756 + 0,489T$ .

Para este caso, o tempo computacional necessário para se obter a solução aumenta significativamente devido ao cômputo repetido dos coeficientes dependentes da temperatura. Para reduzir o tempo de processamento, as matrizes **A** e **B**, presentes na Eq. (23) foram computadas na forma de matrizes banda, sendo que os elementos das matrizes que estejam fora da banda são desprezados. Quando o tamanho da banda aumenta, a aproximação para a solução é melhor, mas também aumenta o custo computacional. O valor adotado para a largura da banda foi 21.

Para o caso que  $b = 0$ , a Eq. (5) torna-se linear, dependendo somente do parâmetro  $a$ . Adotou-se três maneiras para analisar o problema linear gerado: a primeira consiste em tomar a condutividade térmica igual ao valor médio  $k_{ref}^*$  e assim  $K(T) = k_{ref}^* / k_{ref}^* = 1$ ; as outras duas consistem em tomar  $K(T) = k_{min}^* / k_{ref}^* = 0,741$  e  $K(T) = k_{max}^* / k_{ref}^* = 1,249$ , onde  $k_{max}^* = k^*(T_{max}^*)$  e  $k_{min}^* = k^*(T_{min}^*)$  são os respectivos valores da condutividade térmica nas temperaturas máxima e mínima. Para este caso,  $T_{min}^* = 400K$  e  $T_{max}^* = 1200K$ .

Na Fig. (1), são apresentadas as distribuições de temperatura máxima ( $T_{max}$ ) e temperatura média ( $T_{média}$ ), respectivamente, em função do tempo adimensional,  $Fo$ . Como esperado, as curvas de temperatura tendem para zero mais rapidamente nos casos em que a condutividade térmica é maior. É importante salientar que, apesar das distribuições de temperatura estarem próximas, os resultados obtidos, para um dado instante  $Fo$ , se diferenciam bastante para os três casos analisados. Como exemplo, para  $Fo = 0,2$ , tem-se para o caso que  $K(T) = 0,741$ , uma temperatura  $T_{max} = 0,652$  e para  $K(T) = 1,249$ , a temperatura  $T_{max} = 0,322$ , acarretando uma diferença de temperatura da ordem de 100% em relação ao menor valor. Para a temperatura média, essa diferença é superior a 100%. O tempo que o paralelepípedo gasta para resfriar até uma temperatura  $T_{max} = 0,1$  é de aproximadamente  $Fo \approx 0,54$  para  $K(T) = 0,741$ ; e quando calculada para  $K(T) = 1,249$ , o tempo é de  $Fo \approx 0,32$  levando a uma diferença superior a 60%, relativamente, ao menor valor. Com respeito à temperatura média, essa diferença é da ordem de 70%.

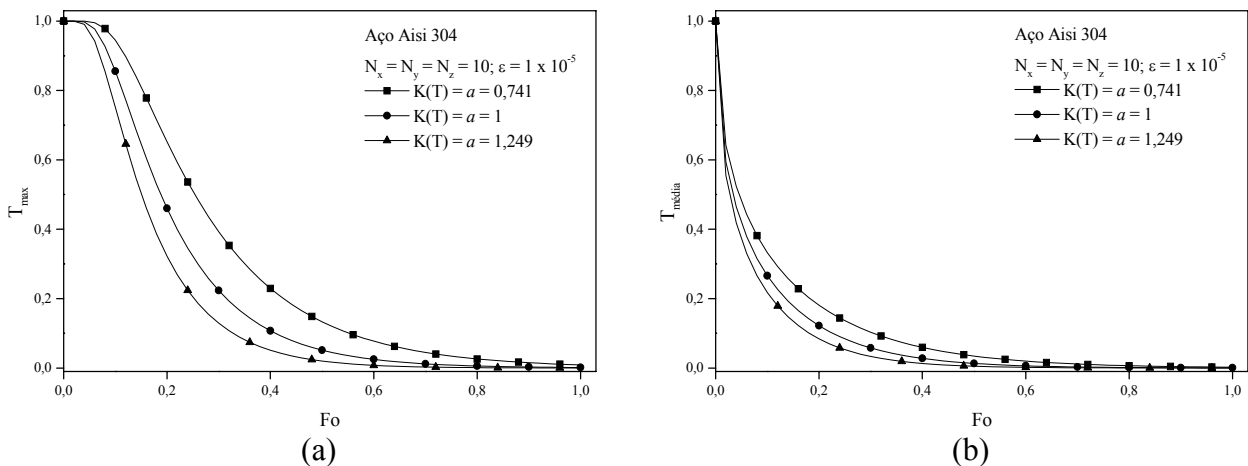
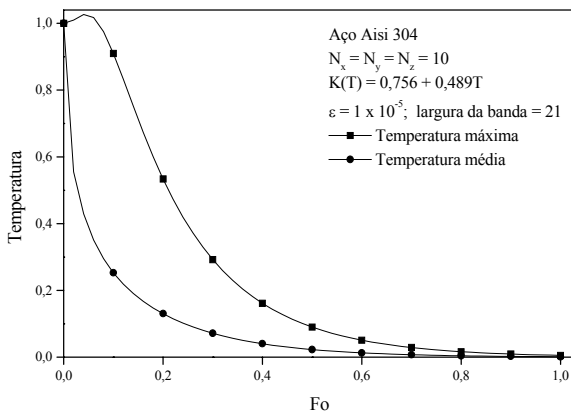
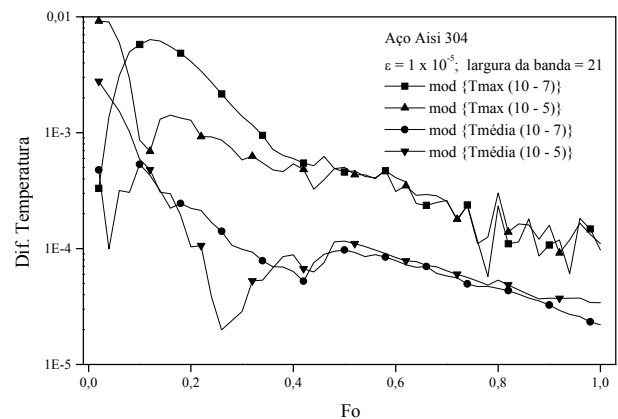


Figura 1: (a) Distribuição da temperatura máxima e (b) temperatura média, em função do número de Fourier, para o Aço Inoxidável Aisi 304.

Nas Figs. (2) e (3) apresentam-se resultados obtidos para o caso não linear onde a condutividade térmica foi modelada como uma função linear da temperatura,  $K(T) = 0,756 + 0,489T$ , para o aço Aisi 304. Pode-se observar nessas figuras pequenos picos no início das curvas que representam as distribuições de temperatura máxima. Isso acontece, pois para tempos adimensionais próximos de zero, existe uma insuficiência de autovalores necessários para obter o processo adequado de convergência. Ao se aumentar a quantidade de termos na série, a precisão irá melhorar, no entanto sempre haverá um valor suficientemente pequeno do tempo para o qual um número fixo de termos na série será insuficiente. Em termos práticos a quantidade total de termos utilizados é dependente da capacidade computacional disponível em termos de memória e tempo de processamento. Na Fig. (3) apresenta-se uma medida da convergência da solução, através do cômputo da diferença das distribuições de temperatura para diferentes quantidades de termos nas expansões em série. A solução com 10 termos em cada direção, 1000 no total, foi tomada como referência. Na figura estão as diferenças dos resultados para as temperaturas máximas e médias, obtidas com expansões de 5 e 7 termos em cada direção, com aqueles providas na solução de referência. Percebe-se por inspeção da figura que os resultados para a temperatura média apresentam menor diferença e portanto uma maior convergência do que aqueles para a temperatura máxima. Quando o tempo ( $Fo$ ) aumenta a diferença de um modo geral diminui. As maiores diferenças são da ordem de  $10^{-2}$  e as menores da ordem de  $10^{-5}$ .



(a)



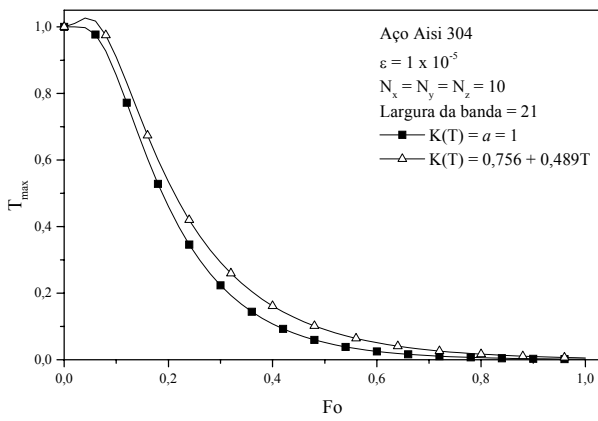
(b)

Figura 2: Distribuição das temperaturas máxima e média, em função do número de Fourier, para o Aço Inoxidável Aisi 304.

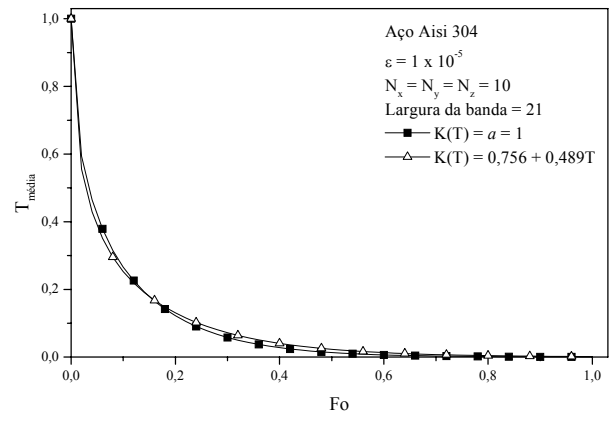
Figura 3: Erro de convergência para diferentes quantidades de termos na série, em função do número de Fourier, para o Aço Aisi 304.

Os resultados obtidos através do equacionamento não-linear com aqueles obtidos utilizando o equacionamento linear para o Aço Inoxidável Aisi 304 também foram comparados, conforme apresentado na Fig. (4). Observa-se na Fig. (1) para o problema linear, que os dois que mais se aproximam dos resultados do caso não-linear são aqueles correspondentes a  $K(T) = 0,741$  e  $K(T) = 1$ . Os resultados com menor concordância são os correspondentes a  $K(T) = 1,249$ . Note que, para  $K(T) = 1$  tem-se uma aproximação razoável, pois trata-se de uma distribuição de temperatura correspondente à condutividade térmica média.

Nas Figs. (5), (6) e (7) tem-se a distribuição de temperatura em relação ao sistema de coordenadas tridimensional para  $Fo = 0,02$ ;  $0,18$  e  $0,5$  com condutividade térmica do material expressa por uma função linear dependente da temperatura,  $K(T) = 0,756 + 0,489T$ .



(a)



(b)

Figura 4: (a) Distribuição da temperatura máxima e (b) temperatura média em função do número de Fourier para a condutividade térmica constante e linear com a temperatura.

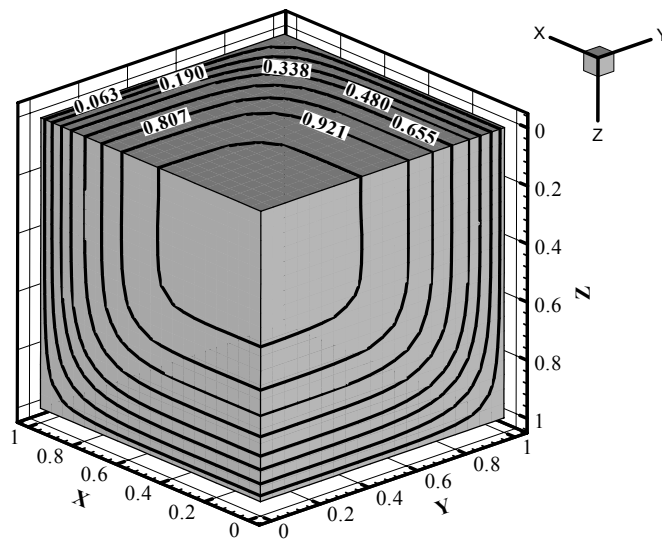


Figura 5: Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para  $Fo = 0,02$ ; material Aço Inoxidável Aisi 304.

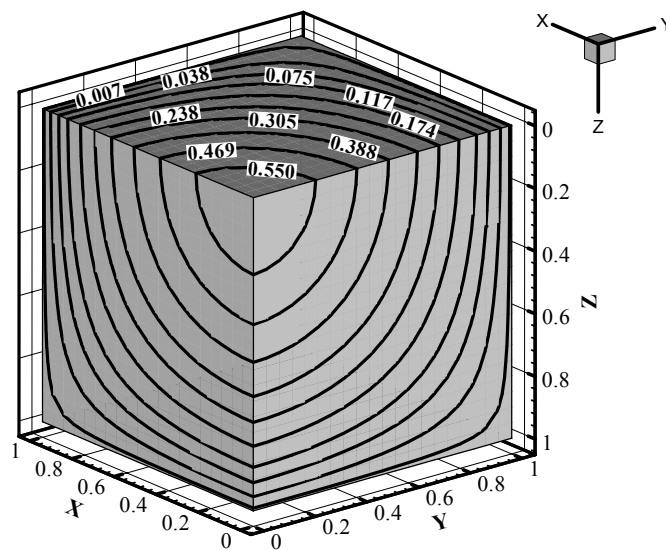


Figura 6: Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para  $Fo = 0,18$ ; material Aço Inoxidável Aisi 304.



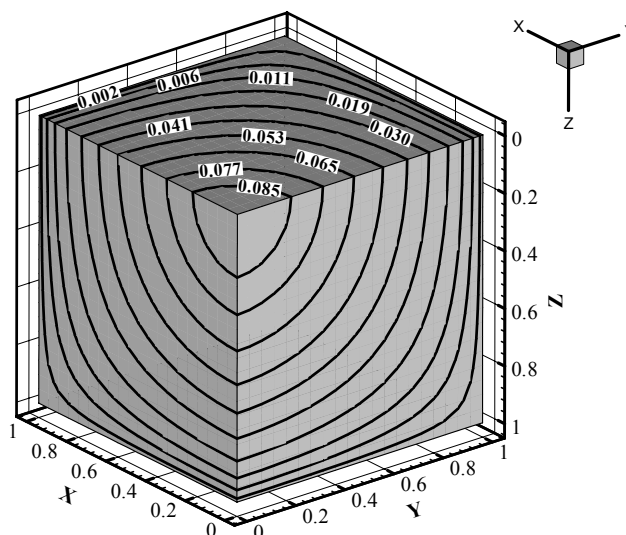


Figura 7: Distribuição de temperatura no paralelepípedo em função dos eixos do espaço para  $Fo = 0,5$  ; material Aço Inoxidável Aisi 304.

## 5. CONCLUSÕES

Foi analisado o problema de condução de calor transiente tridimensional em um domínio no formato de paralelepípedo cartesiano para um processo de resfriamento no intervalo de 1200K a 400K. Utilizou-se dois modelamentos para a condutividade térmica do material: um com condutividade térmica constante e outro variando linearmente com a temperatura. Para o equacionamento linear utilizou-se três diferentes estratégias para se definir um valor constante da condutividade térmica. Um que utilizava um valor médio e outros dois que utilizavam o maior e o menor valor.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG) foi utilizada para transformar a equação diferencial parcial original presente em ambos os equacionamentos, em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias. No caso linear, o sistema de equações diferenciais final é desacoplado e pode ser resolvido algebricamente, sendo que o custo computacional em termos de memória e tempo de processamento é baixo. Já para o caso não-linear, o sistema de equações diferenciais é acoplado e não-linear e foi resolvido usando rotinas do IMSL, tendo custo computacional alto.

Os resultados obtidos apresentam um comportamento no qual a distribuição tridimensional de temperatura evolui rapidamente do valor inicial para valores menores em uma queda exponencial com altos gradientes de temperatura. No decorrer do processo de transferência de calor os gradientes tornam-se menores e por fim tendem a zero quando a temperatura adimensional tende a zero.

## 6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao apoio financeiro da FAPESP, Projeto N.º: 01/04481-6, bem como da FUNDUNESP.

## 7. REFERÊNCIAS

- Aparecido, J. B., 1997, "How to Choose Eigenvalue Problems when Using Generalized Integral Transforms to Solve Thermal Convection - Diffusion Problems", In: Proc. of 14<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mech. Eng., Bauru, SP, Brazil.
- Cotta, R. M., 1993, "Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow, Boca Raton, FL, USA, CRC Press.

Incropera, F. P., & de Witt, D. P., 1992, “Fundamentos de Transferência de Calor e Massa”, Editora Guanabara Koogan S.A., Rio de Janeiro, Brasil.  
Neves, O. A., 2003, “Difusão Tridimensional Não-Linear Transiente”, Dissertação de Mestrado, FEIS/UNESP, Ilha Solteira, SP.  
Visual Numeric, 1994, “IMSL Math/Library”, Edition 10, Version 2.0, Suite 400, 9990 Richmond Avenue, Houston, TX-77042.

## 8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## TRANSIENT NON-LINEAR DIFFUSION WITHIN A SOLID MEDIUM

**Odacir Almeida Neves<sup>1</sup>**

[odacir@fem.unicamp.br](mailto:odacir@fem.unicamp.br)

**Luiz Felipe Mendes de Moura<sup>2</sup>**

[felipe@fem.unicamp.br](mailto:felipe@fem.unicamp.br)

**João Batista Aparecido<sup>3</sup>**

[jbaparecido@dem.feis.unesp.br](mailto:jbaparecido@dem.feis.unesp.br)

<sup>1,2</sup> UNICAMP – Faculdade de Engenharia Mecânica, Depto de Engenharia Térmica e Fluidos, Cidade Universitária “Zeferino Vaz”, Barão Geraldo, Campinas, – SP, Cep. 13083-970, Brasil.

<sup>3</sup> UNESP – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica Av. Brasil centro, n.º 56, Ilha Solteira, São Paulo, Cep.: 15385-000, Brasil.

**Abstract:** *It was done in this work a mathematical formulation, analysis and solution of a unsteady three-dimensional non-linear heat transfer process defined over a cartesian coordinate system. The Generalized Integral Transform Technique was used to transform the original non-linear partial differential equation into an infinite non-linear system of ordinary differential equations which was truncated to a finite order, big enough to provide a desired results accuracy under computational resources available. It was obtained and presented numerical results for the heat diffusion inside a parallelepiped of stainless steel Aisi 304.*

**Keywords:** *Heat diffusion, non-linear, integral transform, unsteady state, three-dimensional.*