

# **SOLUÇÃO ANALÍTICA APROXIMADA PARA CONVECÇÃO FORÇADA LAMINAR TRANSIENTE COM ENTRADA PERIÓDICA**

**Jacques Cesar dos Santos**

(\*) Laboratório de Energia Solar(**LES**) da UFPB, Cidade Universitária -Campus I, 58059-900, João Pessoa/PB, e-mail: [jacquescesarsantos@ig.com.br](mailto:jacquescesarsantos@ig.com.br)

**Jean Pierre Veronese**

(\*), e-mail: [jpveronese@ig.com.br](mailto:jpveronese@ig.com.br)

**Carlos A. Cabral dos Santos**

(\*), e-mail: [cabral@les.ufpb.br](mailto:cabral@les.ufpb.br)

**Romberg Rodrigues Gondim**

(\*), e-mail: [romberg@les.ufpb.br](mailto:romberg@les.ufpb.br)

**Resumo.** *Uma solução analítica aproximada, de baixo custo computacional, é apresentada para a convecção forçada transiente em um canal de placas planas paralelas submetido à condição de entrada periódica. A Técnica da Expansão em Autofunções é usada aliada a Transformada Clássica de Laplace para encontrar a solução analítica para um escoamento completamente desenvolvido e em desenvolvimento térmico, com uma função periódica na condição de entrada e condição de contorno do 3º tipo na parede. O código computacional desenvolvido permite uma rápida análise do problema, em todo o domínio, para diferentes tempos.*

**Palavras-chave:** *Analítica, Convecção, Expansão em Autofunções.*

## **1. INTRODUÇÃO**

O estudo dos fenômenos relativos a transferência de calor na convecção forçada interna tem sido realizado essencialmente, para atender a uma necessidade prática, uma vez que a maioria das soluções encontradas para este tipo de fenômeno, notadamente, na região de entrada térmica e desenvolvimento simultâneo do fluido pode ser útil no projeto de dispositivos térmicos de melhor desempenho. Portanto, componentes eletrônicos, condensadores, evaporadores, trocadores de calor, entre outros são exemplos da possível utilização. Mais ainda, com a crescente miniaturização e a necessidade de otimização destes equipamentos, tem se tornado uma necessidade mundial. Assim, a motivação do estudo deixa de ser um exercício puramente acadêmico, devido a sua importância prática nas diversas áreas da engenharia, tais como, na engenharia nuclear, espacial, controle automático e transporte envolvendo reações químicas.

Um outro fator importante neste estudo é a crescente busca de soluções exatas e de referência para problemas de engenharia, cada vez mais complexos em intervalos de tempo curtos. Por esta razão, a abordagem teórica vem ganhando espaço sobre a experimentação e aos métodos analíticos tradicionais. Isto ocorre, primeiro porque a experimentação é geralmente demorada, alem do fato de ser muito dispendiosa, pois para cada experiência tem-se novos gastos tais como a utilização e aferição de novos equipamentos para adaptação da nova situação no problema em análise; segundo porque os métodos analíticos tradicionais apresentam certas limitações, onde as dificuldades matemáticas são reduzidas através de simplificações, que por vezes tornam os modelos muito

distantes da realidade física, possuindo assim utilidade do ponto de vista acadêmico ou didático, mas raramente de aplicação prática. Por último, com o desenvolvimento dos computadores digitais com velocidades de processamento cada vez maiores, tem-se avançado bastante na simulação de problemas em mecânica dos fluidos e transferência de calor, minimizando o tempo de trabalho e possibilitando assim um menor custo.

Utilizou-se a Expansão em Autofunções, que é um método de fácil manuseio e que pode apresentar soluções completamente analíticas, ou para casos de maior complexidade apresenta soluções híbridas, analítico-numéricas, onde se tem um controle preestabelecido sobre o erro, aliada a Transformada Clássica de Laplace. A idéia básica consiste na transformação de um sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias, através da eliminação de dependências direcionais, com a vantagem de produzir uma solução analítica aproximada mais econômica em relação aos métodos numéricos, além de não necessitar da geração de malha e permitir ainda o acompanhamento e a variação dos parâmetros de interesse práticos determinantes presentes na solução.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema físico considerado consiste de um escoamento laminar hidrodinamicamente desenvolvido no interior de um duto de placas planas paralelas, submetido à convecção forçada, com entrada térmica periódica, como ilustrado na Fig. (1). O sistema em estudo é constituído por um canal de placas paralelas infinitas na largura, de comprimento  $L$ , no interior do qual escoa um fluido newtoniano. O sistema assim definido está inicialmente em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T_0$ . É então provocada uma perturbação na temperatura de entrada do fluido, sendo essa perturbação uma função generalizada do tipo  $G(t)$ , tendo como distribuição ao longo da entrada uma função  $F(y)$ . O sistema possui uma condição de contorno com convecção na parede do canal. As paredes são sólidas e impermeáveis. O escoamento ocorre na direção  $x$ , sendo simétrico em relação à  $y$ , conforme esta representado na Fig. (1). O fluido em estudo é considerado incompressível, com propriedades constantes, desprezam-se os efeitos da dissipação viscosa, e a variação temporal temperatura de entrada é do tipo periódica.

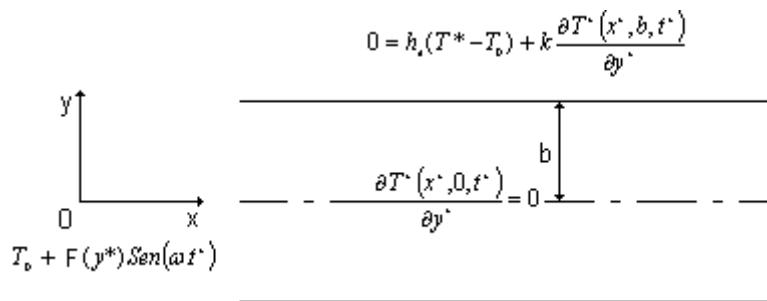


Figura 1. Representação Esquemática do Problema.

Para o problema proposto são considerados os seguintes grupos adimensionais:

$$x = \left( D_h / b \right)^2 \frac{\alpha}{\bar{u}} \frac{x^*}{D_h^2} = \left( \frac{x^*}{D_h} \right) \left( \frac{D_h}{b} \right)^2 \operatorname{Re}_{D_h} \operatorname{Pr} ; \quad y = \frac{y^*}{b} ; \quad u = \frac{u^*}{\bar{u}} ; \quad \theta = \frac{T^* - T_o}{T_e - T_o} ;$$

$$\begin{aligned}
R_e &= \frac{\bar{u} D_h}{\nu}; & \text{Pr} &= \frac{\nu}{\alpha}; & \text{Pe}_{D_h} &= \text{Re}_{D_h} \cdot \text{Pr} = \frac{\bar{u} \cdot D_h}{\alpha}; & \Omega &= \frac{\varpi \cdot b^2}{\alpha} & ; & \text{Bi} &= \frac{h_e b}{k} & ; \\
t &= \frac{\alpha t^*}{b^2}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Com a utilização dos grupos adimensionais, o problema pode ser representado pela equação da energia, e suas condições de contorno e de entrada como:

$$\frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial t} + u(y) \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta(x, y, t)}{\partial y^2}, \quad 0 < y < 1, x > 0, t > 0 \tag{1.2.a}$$

$$\theta(x, y, 0) = 0, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \tag{1.2.b}$$

$$\theta(0, y, t) = F(y) \text{Sen}(\Omega \cdot t), \quad t > 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \tag{1.2.c}$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0, t)}{\partial y} = 0, \quad t > 0, \quad x \geq 0 \tag{1.2.d}$$

$$Bi \theta(x, 1, t) + \frac{\partial \theta(x, 1, t)}{\partial y} = 0, \quad t > 0, \quad x \geq 0 \tag{1.2.e}$$

$$\theta(\infty, y, t) = 0, \quad t > 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \tag{1.2.f}$$

Segundo Cavalcante (2000), o perfil de velocidade adimensional é dado por:

$$u(y) = \frac{3}{2}(1 - y^2) \quad \text{para o escoamento com perfil desenvolvido;} \tag{1.2.g}$$

### 3. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

Seguindo os passos apresentados por Guindem(1997), aplica-se a Transformada Clássica de Laplace sobre a variável tempo no sistema de equações (1.2.a-f), obtendo-se :

$$s \tilde{\theta}(x, y) + u(y) \frac{\partial \tilde{\theta}(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(x, y)}{\partial y^2}, \quad 0 < y < 1, x > 0, t > 0 \tag{2.1.a}$$

$$\tilde{\theta}(0, y) = F(y) \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \quad , \quad t > 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (2.1.b)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad , \quad t > 0, \quad x \geq 0 \quad (2.1.c)$$

$$Bi\tilde{\theta}(x, 1) + \frac{\partial \tilde{\theta}(x, 1)}{\partial y} = 0 \quad , \quad t > 0, \quad x \geq 0 \quad (2.1.d)$$

$$\tilde{\theta}(\infty, y) = 0 \quad , \quad t > 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (2.1.e)$$

Onde  $\tilde{\theta}(x, y)$  é a transformada de Laplace do potencial  $\theta(x, y, t)$ .

### 3.1 Problema de Autovalor na Direção y

Como primeiro passo para resolver o problema (2.1.a-e) usando a Expansão em Autofunções, define-se um problema de autovalor, na direção y :

$$\frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} + \beta_n^2 Y_n(y) = 0 \quad (2.2.a)$$

$$\frac{d Y_n(0)}{dy} = 0 \quad (2.2.b)$$

$$Bi Y_n(1) + \frac{d Y_n(1)}{dy} = 0 \quad (2.2.c)$$

Onde as autofunções são dadas por:

$$Y_n(y) = \cos(\beta_n y) \quad (2.2.d)$$

Os autovalores são obtidos da solução da equação transcendental:

$$Bi = \beta_n \operatorname{Tan}(\beta_n) \quad (2.2.e)$$

A norma é dada por:

$$NY_n = \int_0^1 \tilde{Y}_n^2(y) dy = \frac{Bi^2 + \beta_n^2 + Bi}{2(Bi^2 + \beta_n^2)} \quad (2.2.f)$$

Logo a Autofunção Normalizada torna-se:

$$\tilde{Y}_n(y) = Y_n(y) / NY_n^{1/2} \quad (2.2.g)$$

Obedecendo a propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \tilde{Y}_m(y) dy = \delta_{nm}, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \delta_{nm} = 1 & , \quad n = m \\ \delta_{nm} = 0 & , \quad n \neq m \end{cases} \quad (2.2.h)$$

### 3.2 Par Transformada-Inversa

Escrevendo a função  $\tilde{\theta}(x, y)$  como uma expansão que tem como base as autofunções oriundas do problema de autovalor equações (2.2a-c) e observando a propriedade de ortogonalidade equação( 2.2.h) temos:

$$\tilde{\theta}_n(x) = \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \tilde{\theta}(x, y) dy \quad \text{TRANSFORMADA} \quad (3.1.a)$$

$$\tilde{\theta}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Y}_n(y) \tilde{\theta}_n(x) \quad \text{INVERSA} \quad (3.1.b)$$

### 3.3 Transformação do Problema na Direção y

Operando a equação (2.1a) com o operador  $\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) dy$ , tem-se:

$$\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) s \tilde{\theta}(x, y) dy + \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) u(y) \frac{\partial \tilde{\theta}(x, y)}{\partial x} dy = \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(x, y)}{\partial y^2} dy \quad (A)$$

$$(B) \quad (C)$$

Aplicando-se a equação da Inversa(3.1.b) em cada termo, e utilizando a propriedade de ortogonalidade(2.2.h) tem-se:

Termo (A)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{Y}_m(y) s \tilde{\theta}(x, y) dy = \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \tilde{Y}_m(y) dy s \tilde{\theta}_m(x) = s \tilde{\theta}_n(x) \end{aligned} \quad (4.1.a)$$

Termo (B)

$$\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) u(y) \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{Y}_m(y) \frac{\partial \tilde{\theta}_m(x, t)}{\partial x} dy = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial \tilde{\theta}_m(x)}{\partial x} \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) u(y) \tilde{Y}_m(y) dy = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \frac{\partial \tilde{\theta}_m(x)}{\partial x} \quad (4.1.b)$$

Termo (C)

$$\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \sum_{m=1}^{nt} \tilde{Y}_m(y) \tilde{\theta}_m(x) dy = \sum_{m=1}^{nt} \tilde{\theta}_m(x) \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) (-\beta_m^2 \tilde{Y}_m(y)) dy = -\beta_n^2 \tilde{\theta}_n(x) \quad (4.1.c)$$

O problema fica transformado no sistema diferencial ordinário:

$$s \tilde{\theta}_n(x) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \frac{\partial \tilde{\theta}_m(x)}{\partial x} = -\beta_n^2 \tilde{\theta}_n(x) \quad (5.1.a)$$

(A1)

(B1)

(C1)

Aplicando o operador  $\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) dy$  na condição inicial, tem-se :

$$\tilde{\theta}_n(0) = \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) F(y) \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} dy = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) F(y) dy \quad (5.1.c)$$

$$\tilde{\theta}_n(\infty) = 0 \quad (5.1.d)$$

Onde o termo  $A_{nm}$  é dado por :  $\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) u(y) \tilde{Y}_m(y) dy$

#### 4. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINARIO

Desprezando-se os termos não diagonais na equação (5.1.a), o sistema de equações é aproximado por:

$$s \tilde{\theta}_n(x) + A_{nn} \frac{\partial \tilde{\theta}_n(x)}{\partial x} = -\beta_n^2 \tilde{\theta}_n(x) \quad (6.1.a)$$

$$\tilde{\theta}_n(0) = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) F(y) dy \quad (6.1.b)$$

O sistema de equações diferenciais, ordinário desacoplado, equações (6.1a-b), tem como solução:

$$\bar{\theta}_n(x) = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) F(y) dy \exp\left(\frac{-(\beta_n^2 + s)x}{A_{nn}}\right) \quad (7)$$

#### 4.1 Recuperação do Potencial Original

Para a recuperação do potencial original, inicialmente substitui-se equação (7) na equação (3.1.b), equação da Inversa, obtendo-se:

$$\tilde{\theta}(x, y) = \sum_{n=1}^{nt} \tilde{Y}_n(y) \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) F(y) dy \exp\left(\frac{-(\beta_n^2 + s)x}{A_{nn}}\right) \quad (8)$$

Observando-se que o potencial original é dado pela inversão da Transformada Clássica de Laplace da equação (8). Aplica-se este procedimento matemático à equação (4.8), o que pode ser efetivamente simplificado pelo emprego de um programa de computador que execute a manipulação simbólica, obtendo se:

$$\theta(x, y, t) = \sum_{n=1}^{nt} \tilde{Y}_n(y) \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) F(y) dy \operatorname{Sen}\left((t - \frac{x}{A_{nn}})\Omega\right) \exp\left(\frac{-\beta_n^2 x}{A_{nn}}\right) U(t - \frac{x}{A_{nn}}) \quad (9)$$

Esta equação é a solução analítica aproximada do sistema de equações diferenciais do problema (1.2.a-f) onde o termo  $A_{nn}$  é dado por:  $\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) u(y) \tilde{Y}_n(y) dy$ .

### 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com o intuito de avaliar, a presente solução é testada através da convergência, e comparada com resultados apresentados por Cheroto (1998). Os resultados são mostrados na Tab. (1), que representa a convergência da solução analítica.

Tabela 1. Comparação da temperatura ao longo da linha central entre o presente trabalho e Cheroto (1998), para:  $Bi = 10^5$ ,  $\Omega = 0.06491$  e  $F(y) = 1 - y^2$ ,  $t = 24.1996$ ,  $y = 0$ .

x	1 termo	2 termos	3 termos	5 termos	7 termos	9 termos	Cheroto(1998)
0.01	1.0127	0.98187	0.98635	0.98564	0.98561	0.98561	0.9866
0.1	0.85411	0.84965	0.84967	0.84967	0.84967	0.84967	0.8562
0.5	0.40057	0.40056	0.40056	0.40056	0.40056	0.40056	0.4056
1	0.15537	0.15537	0.15537	0.15537	0.15537	0.15537	0.1580

Na Tabela (1) observa-se uma boa concordância entre os valores apresentados pela solução aproximada e os valores apresentados por Cheroto(1998), o que indica que a solução analítica tem uma utilidade na estimativa de parâmetros de interesse práticos para o problema aqui estudado. A

Tabela (2) apresenta uma estimativa da temperatura para a linha central do canal para uma faixa de valores do numero de Biot, onde todos os cálculos foram efetuados com nove termos nas series. A Tabela (2) mostra a influencia do número de Biot nos valores da temperatura ao longo da linha central, mostrando que quanto maior este número, maior a troca térmica ao longo do canal.

Tabela 2. Temperatura ao longo da linha central para:  $\Omega = 0.06491$  e  $F(y) = 1-y^2$ ,  
 $t=24.1996$ ,  $nt=9$ ,  $y=0$ .

<b>X / Bi</b>	<b>0.001</b>	<b>0.1</b>	<b>1</b>	<b>10</b>	<b>1000</b>
0.1	0.8041	0.8034	0.8067	0.8421	0.8496
0.2	0.7144	0.7121	0.7061	0.7130	0.7064
0.3	0.6829	0.6768	0.6472	0.6061	0.5851
0.4	0.6719	0.6608	0.6016	0.5156	0.4844
0.5	0.6680	0.6512	0.5615	0.4387	0.4010
0.6	0.6665	0.6438	0.5246	0.3732	0.3319
0.7	0.6658	0.6372	0.4903	0.3175	0.2747
0.8	0.6654	0.6308	0.4583	0.2701	0.2274
0.9	0.6651	0.6246	0.4284	0.2298	0.1882
1	0.6647	0.6184	0.4004	0.1955	0.1558

## 6. CONCLUSÃO

O procedimento aqui desenvolvido mostrou ser útil no estudo da entrada térmica em um canal de placas planas paralelas submetido a uma variação senoidal na temperatura de entrada, o que indica a validade deste enfoque na avaliação de parâmetros de interesse prático, tendo em vista, a facilidade apresentada pela solução final, representada por uma equação analítica, e a boa concordância com a literatura.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Boyce, W.E. e Diprima, R.C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno, Editora Guanabara, Rio de Janeiro, 1988.
- Cavalcante, F.F., Convecção Forçada Transiente Interna com Entrada Periódica: Solução Via Transformada Integral,Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, Brasil, Agosto 2000.
- Cheroto, S. , Analysis of Unsteady Forced Convection in Channels by Integral Transform Technique, Doctor Thesis, University of Miami, Coral Gables, FL, USA, July 1998.
- Cotta, R. M. ; “Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow”, CRC Press, Boca Raton, FL, EUA, 1993.
- Gondim, R.R., Convecção Forçada Transiente Interna com Difusão Axial Solução Via Transformação Integral, Tese, UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, Brasil, 1997.
- Li, W. and Kakaç, S., Experimental and Theoretical Investigation of Unsteady Forced Convection in Ducts, Ph. D. Dissertation, University of Miami, Coral Gables, FL, USA, 1990.
- Santos, J.C., “Análise Teórica de Convecção Forçada Laminar Transiente com Entrada Térmica Periódica” , Dissertação de Mestrado , Universidade Federal da Paraíba , João Pessoa, PB, Brasil, Agosto 2002.

## 8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

# APPROXIMATE ANALYTIC SOLUTION FOR FORCED CONVECTION LAMINAR WITH PERIODIC ENTRANCE

**Jacques Cesar dos Santos**

(\*) Laboratório de Energia Solar(LES) da UFPB, Cidade Universitária -Campus I, 58059-900, João Pessoa/PB, e-mail: [jacquescesarsantos@ig.com.br](mailto:jacquescesarsantos@ig.com.br)

**Jean Pierre Veronese**

(\*), e-mail: [jpveronese@ig.com.br](mailto:jpveronese@ig.com.br)

**Carlos A. Cabral dos Santos**

(\*), e-mail: [cabral@les.ufpb.br](mailto:cabral@les.ufpb.br)

**Romberg Rodrigues Gondim**

(\*), e-mail: [romberg@les.ufpb.br](mailto:romberg@les.ufpb.br)

**Abstract:** *An approximate analytic solution, of low computational cost, to the periodic transient forced convection in parallel plates channels is presented. The Expansion in Eigenfunctions Technique is used to find the analytic solution for a completely developed flow and in thermal development, with the use of a periodic function in the entrance condition and convection in the walls. The developed computational code allows a fast analysis for the problem, in all dominion, for different times.*

**Key Words:** *Analytic, Convection, Expansion in Eigenfunctions.*