

ESTUDOS PRELIMINARES E SIMULAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR EM GEOMETRIAS IRREGULARES

Edmilson Almeida de Assis Segundo

Universidade Federal de Campina Grande, Departamento de Engenharia Elétrica, Av. Aprígio Veloso, 882, 58.109-970, Campina Grande – PB, e-mail: esegundo@dee.ufcg.edu.br

Edson Guedes da Costa

Universidade Federal de Campina Grande, Departamento de Engenharia Elétrica, Av. Aprígio Veloso, 882, 58.109-970, Campina Grande – PB, e-mail: edson@dee.ufcg.edu.br

Antonio Gilson Barbosa de Lima

Universidade Federal de Campina Grande, Departamento de Engenharia Mecânica, Av. Aprígio Veloso, 882, 58.109-970, Campina Grande – PB, e-mail: gilson@dem.ufpb.br

Marcelo José Albuquerque Maia

CHESF - Companhia Hidrelétrica do São Francisco, R. Delmiro Gouveia, 333. - Bongi. Recife – PE – Brasil. CEP 50.761-901, e-mail: mjamaia@chesf.gov.br

Resumo. *Pára-raios de óxido de zinco (ZnO) são dispositivos utilizados na proteção dos sistemas elétricos de alta tensão. Os pára-raios são compostos por uma ou mais colunas de varistores e por um invólucro de porcelana ou polimérico com formato irregular. Estudos preliminares sobre a condução de calor e sobre geometrias irregulares foram feitos. Para a simulação da condução de calor em geometrias irregulares, foi realizada uma transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas generalizadas. Um programa computacional que simula a condução de calor em geometrias retangulares usando o método dos volumes finitos foi implementado usando a linguagem de programação C++. Um novo programa que gera malhas usando coordenadas generalizadas e que resolve problemas de condução de calor em geometrias irregulares foi desenvolvido.*

Palavras-chave: *Condução de calor, volumes finitos, coordenadas generalizadas.*

1. INTRODUÇÃO

Pára-raios de óxido de zinco são dispositivos utilizados na proteção dos sistemas elétricos de alta tensão, protegendo os equipamentos elétricos contra possíveis sobretensões provocadas por descargas atmosféricas ou surtos de manobra, atuando quando ocorre uma elevação da tensão, transformando a energia elétrica excedente em energia térmica. Os pára-raios são compostos por uma ou mais colunas de varistores e por um invólucro de porcelana ou polimérico. O invólucro dos pára-raios apresenta uma geometria muito peculiar, como se pode observar na Fig. (1).

Como consequência da necessidade de se estimar a temperatura nas pastilhas varistoras, realizou-se alguns estudos preliminares com relação à condução de calor, e devido à geometria irregular do

envoltório realizou-se o estudo da transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas generalizadas.

O trabalho foi dividido em 4 etapas. A primeira etapa corresponde à simulação da condução de calor em geometrias retangulares onde a temperatura varia em apenas uma direção. A segunda etapa é semelhante à primeira, com o diferencial de ser uma condução bidimensional. A terceira etapa consiste na geração da malha bidimensional usando coordenadas generalizadas. A quarta corresponde à simulação da condução de calor em geometrias irregulares usando a malha gerada com o sistema de coordenadas generalizadas.

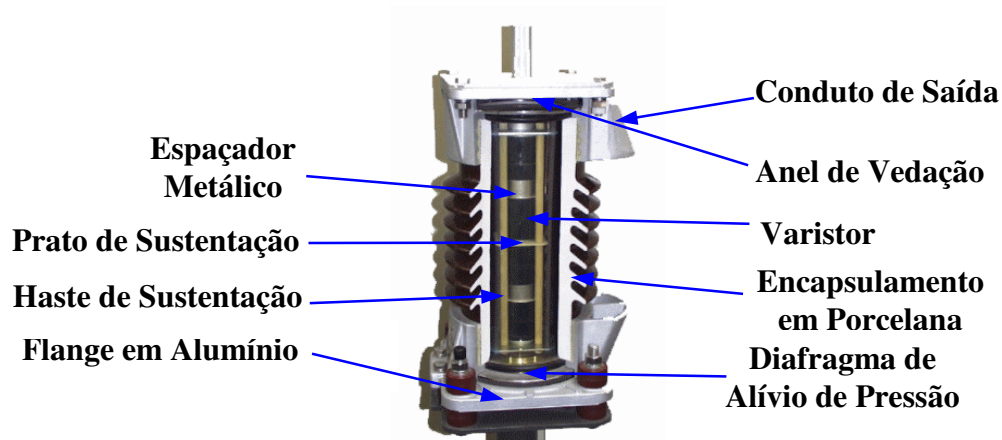


Figura 1. Vista de um pára-raios com seus componentes (Hinrichsen, 2001)

Após a conclusão do estudo preliminar, planeja-se a aplicação, dos conhecimentos adquiridos e dos programas computacionais concebidos, na simulação da transferência de calor em pára-raios de óxido de zinco.

2. MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

O método dos volumes finitos pode ser usado na resolução de problemas de transferência de calor. O método consiste em dividir a região de interesse em vários volumes (discretizar), e o problema passa a ser resolvido em cada um desses volumes. Após a discretização, é realizado em cada volume o balanço da propriedade envolvida no problema. A propriedade pode ser quantidade de calor, de massa, etc. O passo seguinte é a integração das equações diferenciais obtidas a partir do balanço de energia. A integração deve ser feita no domínio do espaço e do tempo em cada um dos volumes elementares.

Uma equação algébrica é obtida para cada volume e a solução do problema global é alcançada através da resolução do sistema formado pelas equações de todos os volumes.

3. CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL

A equação da condução de calor em uma dimensão, como mostrado por (Ozisik, 1985 e Holman, 1983), sem considerar o termo de geração de calor é:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1)$$

onde ρ é a densidade do material dado em kg/m^3 , c_p é o calor específico do material dado em $\text{kJ/kg.}^\circ\text{C}$ e k é a condutividade térmica do material dada em $\text{W/m.}^\circ\text{C}$.

A Equação (1) será integrada no espaço e no tempo em cada volume como se observa a seguir. Na Figura (2) tem-se um exemplo de uma malha usada para integração no caso unidimensional.

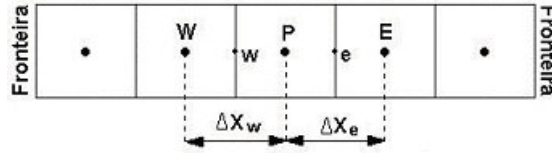


Figura 2. Exemplo de uma malha unidimensional discretizada

Realizando a integração da Eq. (1) no volume P da malha mostrada na Fig. (2), tem-se:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial t} (\rho T) dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt \quad (2)$$

$$\int_w^e (\rho T - \rho^0 T^0) dx = \int_t^{t+\Delta t} \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_e - \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_w dt \quad (3)$$

$$\rho_p \cdot \Delta x \cdot T_p - \rho_p^0 \cdot \Delta x \cdot T_p^0 = \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_e - \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_w \right) dt \quad (4)$$

$$\rho_p \cdot \Delta x \cdot T_p - \rho_p^0 \cdot \Delta x \cdot T_p^0 = \left[\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_e - \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_w \right] \Delta t \quad (5)$$

Pode-se observar nas equações acima que o índice das temperaturas referem-se ao volume correspondente. O expoente '0' que aparece em algumas variáveis das equações indica que o valor daquela variável corresponde ao seu valor no instante de tempo anterior. A Equação (5) apresenta duas derivadas parciais que podem ser aproximadas pelas diferenças centrais:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_e = \frac{T_E - T_P}{\Delta x_e} \quad \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_w = \frac{T_P - T_W}{\Delta x_w} \quad (6)$$

Para os volumes adjacentes à fronteira, as derivadas parciais aproximadas por diferenças centrais sofrem uma pequena modificação, pois não se tem volume adjacente em um dos lados.

Substituindo a Eq. (6) na Eq. (5), e reorganizando, obtém-se:

$$(\rho \cdot \Delta x + 2 \cdot \Delta t \frac{k}{c_p} \frac{1}{\Delta x}) T_p = \rho \cdot \Delta x \cdot T_p^0 + \Delta t \frac{k}{c_p} \frac{1}{\Delta x} T_E + \Delta t \frac{k}{c_p} \frac{1}{\Delta x} T_W \quad (7)$$

Nomeando os coeficientes de cada temperatura, obtém-se:

$$A_p T_p = A_p^0 T_p^0 + A_e T_E + A_w T_W \quad (8)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_p^0 &= \frac{\rho \cdot \Delta x}{\Delta t} \\ A_w &= \frac{k}{c_p \Delta x} \Big|_w \\ A_e &= \frac{k}{c_p \Delta x} \Big|_e \\ A_p &= A_p^0 + A_e + A_w \end{aligned} \quad (9)$$

A Equação (8) representa a transferência de calor em cada volume elementar e está escrita de modo a facilitar a sua implementação computacional. Ela representa a integração local no domínio do espaço e do tempo em cada um dos volumes elementares. Desse modo um sistema com todas as equações é formado. A solução do sistema, usando o método de Gauss-Seidel, fornece a temperatura em cada volume. As condições de contorno utilizadas são as temperaturas nas fronteiras.

O fluxograma do programa computacional produzido para simulação de transferência de calor em coordenadas cartesianas é:

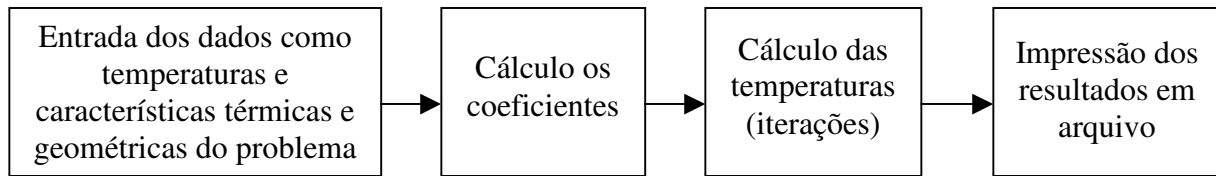


Figura 3. Fluxograma do programa desenvolvido para condução unidimensional

3.1. Simulação Unidimensional

Uma simulação computacional foi implementada para análise do comportamento da temperatura no tempo. Uma barra unidimensional medindo 10 cm a 0°C foi considerada. As propriedades térmicas utilizadas foram: $c_p = 0,3831 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$, $\rho = 8954 \text{ kg/m}^3$ e $k = 386 \text{ W/m}^\circ\text{C}$. Foi utilizada a condição de contorno de temperatura prescrita, sendo a temperatura na face oeste de 100°C e na face leste 0°C. A Fig. (4) explicita a propagação de calor ao longo da barra no tempo e a Fig. (5) a distribuição de temperaturas em regime permanente na barra simulada.

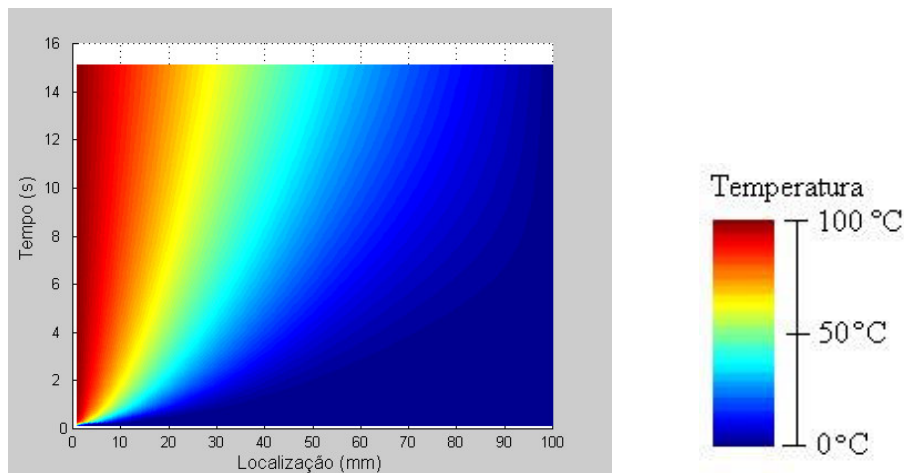


Figura 4. Condução de calor unidimensional

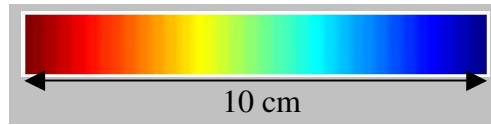


Figura 5. Comportamento das temperaturas na barra em regime permanente

4. CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL

A sequência dos procedimentos no caso bidimensional é semelhante ao unidimensional, a equação de condução de calor bidimensional sem o termo da geração de calor é:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (10)$$

Uma malha utilizada na implementação bidimensional foi composta de “volumes elementares” em formato retangular. A Equação (11) representa a transferência de calor bidimensional em cada volume elementar.

$$A_p T_p = A_p^0 T_p^0 + A_e T_e + A_w T_w + A_s T_s + A_n T_n \quad (11)$$

Uma equação com o formato da Eq. (11) é montada para cada volume não adjacente à fronteira, formando um sistema de equações lineares. Na solução do sistema é mostrada a temperatura em cada volume. As equações geradas para os volumes adjacentes às fronteiras são ligeiramente diferentes e as condições de contorno utilizadas são as mesmas, ou seja, as temperaturas nas fronteiras da geometria.

O algoritmo do programa que simula a condução de calor bidimensional é semelhante ao mostrado para o caso da condução unidimensional.

4.1. Simulação Bidimensional

Um exemplo de condução de calor bidimensional é mostrado na Fig. (6). A temperatura inicial da placa é 0 (zero) graus Celsius. O comportamento da temperatura na placa em três instantes de tempo é mostrado na Fig. (6). A escala de temperaturas é semelhante à do exemplo unidimensional.

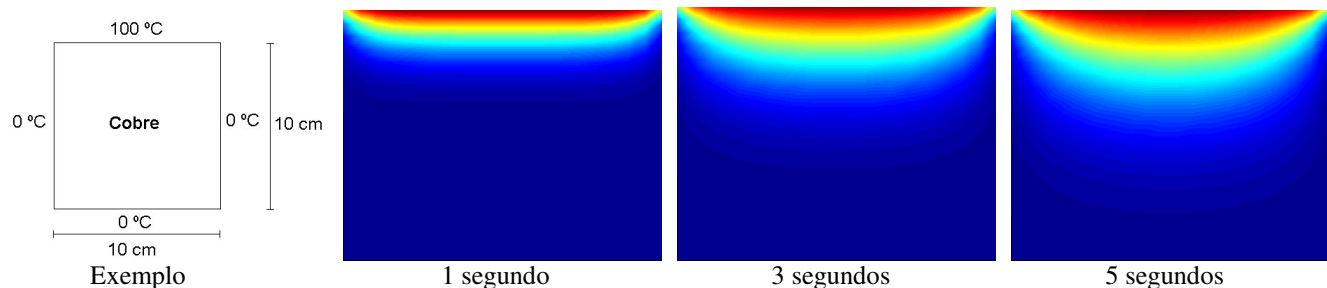


Figura 6. Condução de calor bidimensional e saída de dados

5. GERAÇÃO DA MALHA USANDO COORDENADAS GENERALIZADAS

Em geometrias peculiares, como por exemplo, o invólucro do pára-raios, a aplicação do método dos volumes finitos não é adequada ao uso com coordenadas cartesianas. Assim, pode-se realizar uma

transformação de coordenadas, de forma que os volumes gerados no novo sistema coordenado sejam ajustados à fronteira da geometria em questão.

No plano físico, que representa a geometria real, é gerada uma malha irregular usando coordenadas curvilíneas, o plano é mapeado para um plano computacional regular. A transformação do plano físico para o plano computacional é governada pelas métricas de transformação $\xi=\xi(x,y)$ e $\eta=\eta(x,y)$, que transmitem para o plano computacional as características do plano físico. Na Figura (7) observa-se um exemplo de planos físico e transformado.

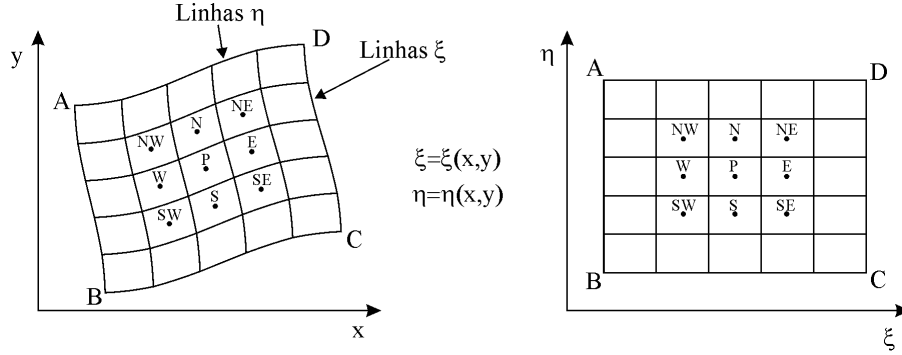


Figura 7. Planos físico e transformado

Para gerar a malha usando coordenadas generalizadas usam-se as equações de Poisson e Laplace mostradas na Eq. (12) (Maliska, 1995).

$$\begin{aligned}\nabla^2 \xi &= P(\xi, \eta) \\ \nabla^2 \eta &= Q(\xi, \eta)\end{aligned}\tag{12}$$

As funções $P(\xi, \eta)$ e $Q(\xi, \eta)$ são funções de controle propostas por (Maliska, 1995). As funções de controle servem como parâmetros de atração da malha para pontos e linhas pré-determinadas.

$$\begin{aligned}P(\xi, \eta) &= -\sum_{j=1}^N a_j \text{sign}(\xi - \xi_j) \exp^{-c_j |\xi - \xi_j|} \\ &\quad - \sum_{i=1}^M b_i \text{sign}(\xi - \xi_i) \exp^{-d_i \left\{ (\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \\ Q(\xi, \eta) &= -\sum_{j=1}^{N^*} a_j^* \text{sign}(\eta - \eta_j) \exp^{-c_j^* |\eta - \eta_j|} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{M^*} b_i^* \text{sign}(\eta - \eta_i) \exp^{-d_i^* \left\{ (\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\tag{13}$$

Realizando manipulações matemáticas, obtém-se:

$$\begin{aligned}\alpha x_{\xi\xi} + \gamma x_{\eta\eta} - 2\beta x_{\xi\eta} + \left(\frac{1}{J^2}\right)(Px_{\xi} + Qx_{\eta}) &= 0 \\ \alpha y_{\xi\xi} + \gamma y_{\eta\eta} - 2\beta y_{\xi\eta} + \left(\frac{1}{J^2}\right)(Py_{\xi} + Qy_{\eta}) &= 0\end{aligned}\quad (14)$$

onde, α , β e γ são métricas da transformação e são dadas na Eq. (15).

$$\begin{aligned}\alpha &= x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \\ \gamma &= x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \\ \beta &= x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}\end{aligned}\quad (15)$$

As incógnitas mostradas como índice corresponde a derivada com relação ao índice, por exemplo, x_a corresponde à derivada de x com relação à a .

Como as coordenadas dos pontos das fronteiras são conhecidas, eles são usados como condições de contorno. Aproximando as derivadas e substituindo os coeficientes obtém-se:

$$A_P\phi_P = A_E\phi_E + A_W\phi_W + A_N\phi_N + A_S\phi_S + A_{NE}\phi_{NE} + A_{SE}\phi_{SE} + A_{NW}\phi_{NW} + A_{SW}\phi_{SW}\quad (16)$$

Uma equação com o formato da Eq. (16) é implementada para cada ponto, e a solução do sistema linear constituído pelas equações, quando resolvido, gera a malha em coordenadas generalizadas. As condições de contorno são os pontos localizados na fronteira da geometria.

O fluxograma do programa computacional produzido para a geração da malha encontra-se na Fig. (8).

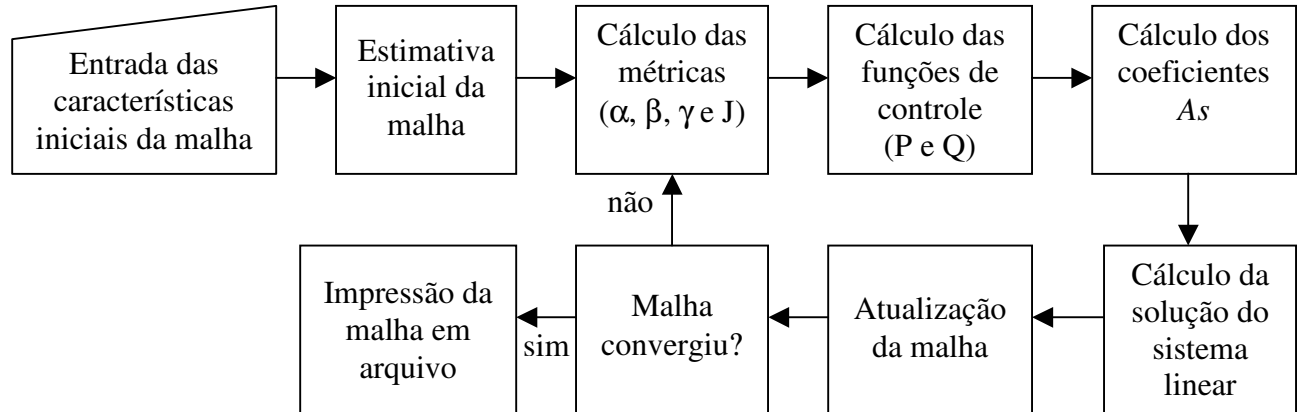


Figura 8. Fluxograma do programa gerador de malha

Alguns exemplos de malhas geradas usando o programa desenvolvido encontram-se na Fig. (9).

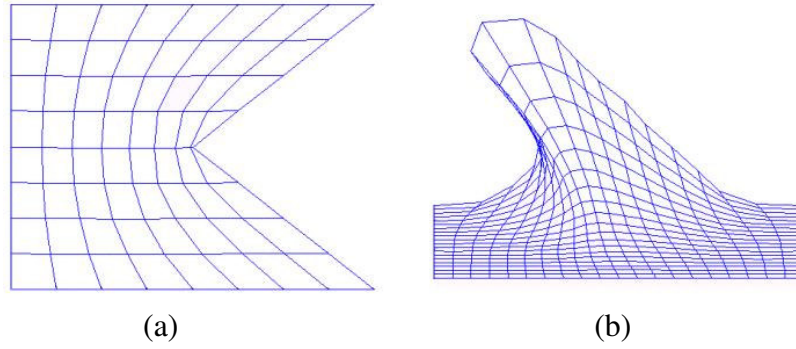


Figura 9 (a) e (b). Exemplos de malhas produzidas

6. CONDUÇÃO DE CALOR EM GEOMETRIAS IRREGULARES

Sabe-se que a equação de condução de calor em três dimensões sem o termo de geração de calor é:

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial Y} \right) - \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial Z} \right) = 0 \quad (17)$$

A Equação (17) pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho T}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{k}{c_p} \nabla T \right) = 0 \quad (18)$$

Utilizando-se a Eq. (18) em apenas duas dimensões (x e y), manipulando-se matematicamente, utilizando as métricas de transformação $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ e a Eq. (15), obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho T}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{k}{c_p} J \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{k}{c_p} J \gamma \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{k}{c_p} J \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{k}{c_p} J \gamma \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \quad (19)$$

Integrando a Eq. (19) no plano computacional do sistema de coordenadas generalizadas, tem-se:

$$\iiint_{\xi \eta \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho T}{J} \right) d\tau d\eta d\xi = \iiint_{\xi \eta \tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{k}{c_p} J \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{k}{c_p} J \gamma \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) d\tau d\eta d\xi + \iiint_{\xi \eta \tau} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{k}{c_p} J \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{k}{c_p} J \gamma \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) d\tau d\eta d\xi \quad (20)$$

Seguindo-se um procedimento semelhante ao caso da condução bidimensional em coordenadas cartesianas, obtém-se uma equação que assume a seguinte forma:

$$A_p T_p = A_p^0 T_p^0 + A_w T_w + A_e T_e + A_n T_n + A_s T_s + A_{sw} T_{sw} + A_{nw} T_{nw} + A_{ne} T_{ne} + A_{se} T_{se} \quad (21)$$

Uma equação com o formato da Eq. (21) é construída para cada volume da malha gerada, formando um sistema de equações lineares, a resolução do sistema fornece a temperatura em cada volume. As equações dos volumes adjacentes às fronteiras seguem o mesmo estilo dos encontrados na condução bidimensional. As condições de contorno usadas também são as temperaturas nas fronteiras da geometria.

O algoritmo do programa computacional produzido para simular a Eq. (21) é semelhante ao fluxograma apresentado na Fig. (3). Para uma simulação completa da condução de calor em geometrias irregulares, usa-se a princípio o programa gerador da malha apresentado na Fig. (8). O resultado da simulação serve como entrada para o programa que simula a condução de calor.

6.1. Simulação em Coordenadas Generalizadas

Um exemplo de condução de calor em geometria irregular é mostrado na Fig. (10). O triângulo tem temperatura inicial igual a zero e a escala de temperaturas é semelhante à mostrada no exemplo unidimensional na Fig. (4).

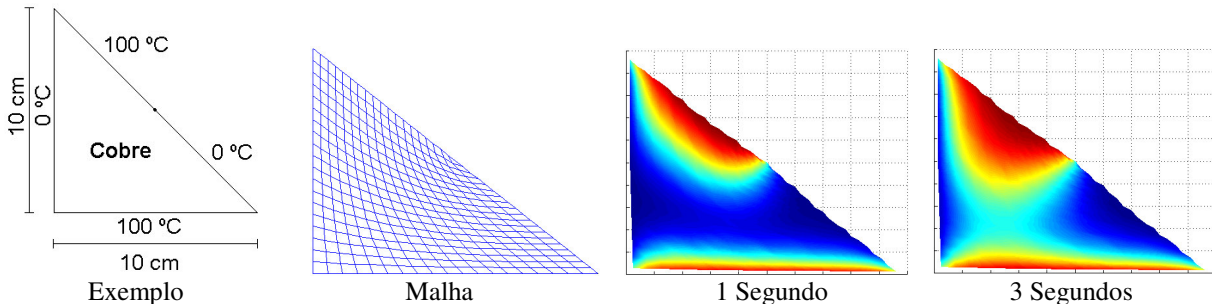


Figura 10. Exemplo de condução de calor em geometria irregular

7. CONCLUSÕES

O artigo apresenta estudos preliminares e simulações de transferência de calor em geometrias irregulares de forma a obter os conhecimentos necessários para o desenvolvimento de uma aplicação envolvendo pára-raios de óxido de zinco.

Foram implementados diversos programas computacionais. Um programa simula a condução de calor em uma e duas dimensões em geometrias retangulares. Um outro gera malhas em geometrias irregulares usando coordenadas generalizadas e o último simula a condução de calor em geometrias irregulares.

As simulações de transferência de calor apresentaram resultados confiáveis e promissores.

As malhas geradas apresentadas nas Fig. (9.a) e Fig (10) são uniformes, com volumes apresentando aproximadamente tamanhos semelhantes.

Na Figura (9.b) é apresentada a malha de uma secção de uma aleta de pára-raios. Observa-se a não uniformidade dos volumes. Analisando a parte superior da figura, podem ser visto volumes que facilmente superam em dez vezes o tamanho dos volumes da parte inferior. Na região superior esquerda, tem-se uma alta concentração de volumes. Pelos resultados apresentados na geração de malha, concluiu-se que o uso da técnica de multi-blocos seria útil, de forma a melhorar a malha da secção da aleta.

Uma interface amigável dos programas com o usuário deve ser desenvolvida para facilitar a utilização das rotinas, entrada e saída de dados.

8. AGRADECIMENTOS

Os autores desejam externar seus agradecimentos ao PET/SESu/MEC e a CHESF pelo apoio indispensável à realização do trabalho.

9. REFERÊNCIAS

- Hinrichsen, V., “Metal-Oxide surge arresters fundamentals”. Berlim, 2001.
- Holman, J. P., 1983, “Transferência de Calor”, São Paulo, Mc Graw-Hill do Brasil, São Paulo, Brasil, 639 p.
- Lima, A. G., 1997, “Estudos da Propagação de Calor em Pára-raios de Óxido de Zinco”, Campina Grande, Brasil, 92 p.
- Maliska, R. C., 1995, “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional”, LCT, Rio de Janeiro, Brasil, 424 p.
- Ozisik, M. N., 1990, “Transferência de Calor – Um Texto Básico”, Editora Guanabara, Rio de Janeiro, Brasil 661 p.

10. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

Preliminary heat transfer simulation and study in irregular geometries

Edmilson Almeida de Assis Segundo

Federal University of Campina Grande, Department of Electric Engineering, Av. Aprígio Veloso, 882, 58.109-970, Campina Grande – PB, e-mail: esegundo@dee.ufcg.edu.br

Edson Guedes da Costa

Federal University of Campina Grande, Department of Electric Engineering, Av. Aprígio Veloso, 882, 58.109-970, Campina Grande – PB, e-mail: edson@dee.ufcg.edu.br

Antonio Gilson Barbosa de Lima

Federal University of Campina Grande, Department of Mechanical Engineering, Av. Aprígio Veloso, 882, 58.109-970, Campina Grande – PB, e-mail: gilson@dem.ufcg.edu.br

Marcelo José Albuquerque Maia

CHESF - Companhia Hidrelétrica do São Francisco, R. Delmiro Gouveia, 333. - Bongi. Recife – PE – Brasil. CEP 50.761-901, e-mail: mjamaia@chesf.gov.br

Abstract. *Zinc Oxide surge arresters are devices used to protect high voltage electric systems. The surge arresters are made with one or more varistor columns involved by one porcelain housing with irregular geometrie. Preliminary studies over heat transfer and irregular coordinates were made. For a heat transfer simulation in irregular geometries, was made a transformation from cartesians coordinates to generalized coordinates. A software that simulate the heat conduction in rectangular geometry was made using C++, and the finite volume method. Then a new software, a grid generator using generalized coordinates and that solves conduction heat transfer in irregular geometries was developed.*

Keywords: *Heat transfer, finite volumes, generalized coordinates.*