

DETERMINAÇÃO DOS EFEITOS DOS NÚMEROS DE PRANDTL E DE RAYLEIGH E DA RAZÃO DE ASPECTO NA CONVECÇÃO NATURAL EM UMA CAVIDADE TRIANGULAR

Mauricio Araujo Zanardi

Departamento de Energia

UNESP – Campus de Guaratinguetá

(12) 3122-3590

e-mail: mzanardi@feg.unesp.br

Felipe Rinaldo de Queiroz Aquino

Departamento Básico

FAENQUIL - Lorena

e-mail : felipe@debas.fauenquil.br

Resumo. Neste trabalho é estudada a influência de parâmetros como o número de Prandtl, o número de Rayleigh e a razão de aspecto na convecção natural, em regime permanente, em cavidades triangulares isósceles com um fluxo de calor constante em uma de suas faces. São consideradas cavidades com diferentes razões de aspecto e escoamentos com número de Rayleigh na faixa de 10^4 a 10^8 . As equações bidimensionais de conservação de massa, quantidade de movimento e energia, com aproximação de Boussinesq, são resolvidas usando a técnica de volumes finitos. A discretização é feita através do esquema “Power Law” e a determinação das diferenças de pressão através do algoritmo SIMPLE. Foram simuladas situações com número de Prandtl entre 0,01 e 5000 e são apresentadas as isotérmicas e as linhas de corrente para algumas simulações. Finalmente, é proposta uma correlação para a taxa de transferência de calor para as superfícies frias em função dos números de Rayleigh e Prandtl e da razão de aspecto da cavidade.

Palavras-Chave : convecção natural, cavidade triangular, transferência de calor.

1. INTRODUÇÃO

A convecção natural em cavidades é muito importante nas aplicações da engenharia tais como no estudo de transferência de calor em montagens com componentes eletrônicos, sótãos, painéis solares, etc.. Muitos estudos de convecção natural em cavidades foram realizados para formas geométricas retangulares, trapezoidais, cilíndricas, circulares e triangulares.

O estudo de cavidades triangulares é relativamente recente. A primeira simulação numérica, citada por varios autores, foi realizada por Gershuni et al. (1974). Após este artigo, outros trabalhos numéricos e experimentais foram desenvolvidos e alguns deles são comentados na sequência deste trabalho. Akinsete e Coleman (1982) estudaram uma cavidade prismática com a seção em forma de um triângulo retângulo com a base resfriada e a parede inclinada adiabática. Poulikakos e Bejan (1983) estudaram a convecção natural transiente em uma cavidade com a seção reta em forma de um triângulo isósceles onde todas as paredes foram consideradas isotérmicas.

Flack et al. (1979) realizaram um estudo experimental de transferência do calor

por convecção natural em uma cavidade triangular considerando diferentes condições de temperatura nas paredes. Campo et al. (1988), usando o método de elementos finitos, estudaram a convecção natural do ar dentro de uma cavidade triangular onde várias combinações de condições de contorno foram utilizadas, para diferentes números de Grashof e várias relações entre a altura e a largura da cavidade. Karyakin et al. (1985), analisaram a convecção natural laminar transiente em cavidades triangulares para vários casos de condições de contorno térmicas, considerando as paredes adiabáticas ou com temperaturas constantes. Estes trabalhos consideram, como condições de contorno, combinações de superfícies isotérmicas e adiabáticas.

Na literatura podem ser ainda encontrados trabalhos nos quais existem condições de contorno de fluxo de calor. Como exemplos pode-se citar Yedder e Bielen (1997) que estudaram a convecção natural laminar em cavidades retangulares com uma parede exterior a temperatura constante e a parede oposta recebendo um fluxo de calor constante e Hasami and Chung (1998) que analisaram a convecção natural e radiação em uma cavidade triangular. Recentemente, Zanardi e Aquino (2000, 2001) simularam numericamente o comportamento de cavidades triangulares, preenchidas com ar, submetidas a fluxos de calor uniformes e variáveis em uma de suas faces.

Todos os trabalhos citados consideram que o fluido no interior da cavidade é o ar, cujo número de Prandtl é unitário ou um valor próximo à unidade. Os resultados são apresentados em função do número de Grashof, que numericamente é igual ao número de Rayleigh, e da razão de aspecto da cavidade. Neste trabalho estuda-se o comportamento de uma cavidade triangular isósceles, submetida a um fluxo de calor constante em uma de suas superfícies laterais, variando-se o número de Prandtl do fluido bem como a razão de aspecto e o número de Rayleigh. Foram considerados números de Prandtl (Pr) entre 0,01 e 5000, razão de aspecto (A) entre 0,1 e 5 e números de Rayleigh (Ra) entre 10^4 e 10^8 , sendo que na faixa entre 10^7 e 10^8 foram tomados mais valores por se estar próximo ao limite de convergência do modelo. Como resultados são apresentadas as isotermas e as linhas de corrente para algumas das simulações realizadas e são feitas as análises de influência dos diversos parâmetros. Finalmente, é proposta uma correlação para a razão entre a taxa de calor transferida para superfície lateral da cavidade em relação à imposta na outra face, em função dos parâmetros considerados, tendo sido utilizado para a regressão o resultado de cerca de 2800 simulações.

2. MODELO MATEMÁTICO

Considere uma cavidade prismática longa com a seção reta em forma de um triângulo isósceles como mostrado na Fig. (1).

Para a formulação do problema são consideradas as seguintes hipóteses simplificadoras: o escoamento é bidimensional e laminar; os gradientes de temperatura são moderados de tal modo que a aproximação de Boussinesq é válida; são desprezados a dissipação viscosa e o trabalho realizado pelas forças de compressão.

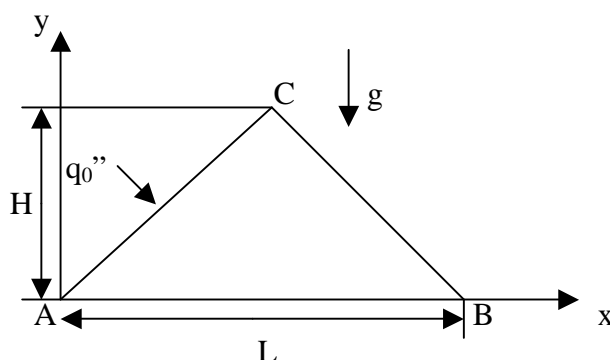


Figura 1. Região de convecção triangular com fluxo de calor constante na parede da esquerda.

As equações de conservação da massa, quantidade de movimento e energia com as simplificações citadas e de forma adimensional são então escritas como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \text{Pr} \text{ Ra } \theta - \frac{\partial p}{\partial y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (4)$$

Para a adimensionalização das equações foram considerados as seguintes variáveis adimensionais, sendo que o apostrofe indica as variáveis dimensionais :

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{L} & y &= \frac{y'}{L} & u &= \frac{u' L}{\alpha} & v &= \frac{v' L}{\alpha} \\ p &= \frac{p' + \rho_0 g y'}{\rho_0 (\alpha/L)^2} & \theta &= \frac{T - T_c}{L q_0'' / k} & \text{Pr} &= \frac{\nu}{\alpha} & \text{Ra} &= \frac{g \beta L^4 q_0''}{\nu \alpha k} \end{aligned} \quad (5)$$

sendo Pr o número de Prandtl, Ra o número de Rayleigh, L o comprimento da base da cavidade, β , α , ρ_0 e k respectivamente o coeficiente de expansão térmica volumétrica, a difusividade térmica, a massa específica e a condutividade térmica do fluido, q'' o fluxo de calor imposto e T_c a temperatura das paredes frias.

As condições de contorno necessárias para a solução das equações de conservação são as tradicionais : condições de paredes impermeáveis, de não deslizamento nas superfícies sólidas e de temperatura e fluxo de calor especificados nas superfícies. Matematicamente, já incluindo as transformações adimensionais, as condições utilizadas estão representadas no conjunto de equações:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 0.5, \quad y = 2Hx/L & \quad u = v = 0 & \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = -1 \\ 0.5 < x \leq 1, \quad y = 2H(1-x)/L & \quad u = v = 0 & \quad \theta = 0 \\ 0 \leq x < 1, \quad y = 0 & \quad u = v = 0 & \quad \theta = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Como as equações de Navier-Stokes só permitem calcular diferenças de pressões, para se complementar o problema é necessário se conhecer (ou especificar um valor a ser tomado como referência) em pelo menos um volume de controle do domínio. Neste trabalho foi especificado o valor $p=0$ no primeiro volume de controle junto à origem do sistema de coordenadas.

3. PROCEDIMENTO NUMÉRICO

Para realizar a discretização das equações foi utilizado o esquema “power-law” sugerido por Patankar (1980). As equações governantes foram escritas em suas formas conservativas de forma que todas elas podem ser colocadas na forma :

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S \quad (7)$$

com $J_x = \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}$ and $J_y = \rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}$ e S o termo fonte.

Como em todos os métodos de volume de controle, as equações discretizadas foram obtidas pela integração da Eq. (7) sobre volumes de controle definidos ao redor de cada ponto da grade, resultando em equações algébricas do tipo

$$J_x^e A_e + J_y^n A_n = J_x^w A_w + J_y^s A_s + \bar{S} V \quad (8)$$

sendo os A 's as áreas das faces dos volumes de controle, V o volume e \bar{S} o valor médio do termo fonte no volume considerado.

A avaliação dos termos J da Eq. (8) através do método de discretização “power-law” resulta em sistemas de equações algébricas, para cada variável, com a forma geral :

$$a_p \phi_p = a_e \phi_e + a_w \phi_w + a_n \phi_n + a_s \phi_s + b \quad (9)$$

na qual o índice p indica o ponto considerado da grade e E, W, N e S são seus vizinhos.

A solução destes sistemas exige um algoritmo para determinação do campo de diferenças de pressões. Como não existe uma equação específica para a pressão, se optou pela utilização do algoritmo SIMPLE descrito por Patankar (1980), que utiliza a equação da conservação da massa para gerar valores de correções das pressões nos volumes de controle ao longo do processo iterativo de solução.

Para a solução das equações algébricas foi escolhido um processo iterativo do tipo “line-by-line” que combina um método direto, que é o algoritmo de Thomas para matrizes tridiagonais, com um método iterativo de Gauss-Siedel.

Foram consideradas grades deslocadas para as variáveis u , v e θ , conforme sugerido por Patankar (1980) como uma forma de evitar soluções não realistas. Como foi utilizado o sistema de coordenadas cartesianas, e o domínio possui superfícies inclinadas em relação a este sistema, foi utilizado o procedimento de bloqueio de células, pela imposição de coeficientes difusivos elevados nas regiões fora do domínio, conforme discutido em Patankar (1980). Para diminuir o tempo computacional, alguns marcadores foram acrescentados de forma a se evitar perda de tempo com o cálculo de valores fora do domínio real do problema.

A convergência de sistemas de equações diferenciais não lineares é difícil de ser garantida. Para conseguir convergência foram utilizados fatores de subrelaxação da ordem de 0,5 para as componentes de velocidade e 0,7 para a pressão, sendo conseguido com estes valores uma convergência com característica pouco oscilante.

Como critério de parada foi escolhido o valor médio do erro em cada volume de controle, ou seja :

$$\frac{\|r_p\|^k}{n_p} \leq \epsilon \quad (10)$$

sendo $\|r_p\|^k$ a norma euclidiana do resíduo na iteração k e n_p o número de volumes de controle do domínio real. O parâmetro de convergência ϵ tomado como padrão foi 10^{-5} para todas as variáveis. Para evitar resíduos locais grandes nas soluções consideradas convergidas, foi ainda estabelecido que o resíduo máximo, em qualquer volume de controle do domínio não poderia ser maior que 10^{-4} .

O programa computacional desenvolvido foi testado comparando as soluções com as reportadas por Del Campo, Sem and Ramos (1988), Karyakin and Sokovishin (1988) e Akinsete and Coleman (1979).

4. RESULTADOS

A seguir são mostrados e comentados alguns resultados obtidos pela resolução numérica do modelo proposto. Esses casos foram escolhidos a partir das soluções encontradas variando-se o número de Prandtl, o número de Rayleigh e a razão de aspecto da cavidade. Os número de Prandtl utilizados na simulação estão na faixa entre 0,01 e 5000 sendo que, devido ao maior interesse prático, tomou-se um maior número de valores entre 0,5 e 10. Quanto à razão de aspecto optou-se por uma variação entre 0,1 e 5 com valores espaçados em intervalos de 0,1 para $0,1 < A < 1$ e intervalos unitários para $1 < A < 5$. A faixa considerada para o número de Rayleigh foi $10^4 < Ra < 10^8$, com o refinamento do intervalo a partir de 10^7 pois alterações importantes no escoamento acontecem nesta faixa e, para valores de número de Prandtl muito baixos não se consegue convergência a partir de determinados valores.

Na Fig. (2) estão mostradas as isothermas e as linhas de corrente para cavidade com razão de aspecto 0,5, para números de Prandtl iguais a 0,01, 1,0 e 10 e com $Ra = 10^4$. Nota-se claramente a predominância da condução como mecanismo de transferência de calor caracterizada pela forma parabólica das isothermas e pelas linhas de corrente praticamente concêntricas. Para outras razões de aspecto o comportamento é similar.

Para $Ra = 10^7$, cujos resultados estão apresentados na Fig (3), observa-se que para $Pr=0,01$ a transferência de calor ainda é altamente influenciada pela condução principalmente próximo à parede quente, devido à alta difusividade térmica do fluido. Inicia-se entretanto o aparecimento de recirculações junto aos vértices inferiores da cavidade. Para $Pr=1$ e 1000, nota-se um deslocamento do centro de recirculação para a parte superior da cavidade, havendo um aumento das velocidades próximas às paredes, e a diminuição destas no centro da cavidade e, para razões de aspecto elevadas, o escoamento junto às paredes inclinadas apresenta características próximas ao do escoamento em camada limite. Nestes casos, existe uma estratificação do fluido dentro da cavidade, que é mais acentuada nos fluidos com Prandtl maiores devido à dificuldade de movimentação do mesmo pelo aumento da viscosidade.

Na Fig (4) se representa os resultados para $Ra = 10^8$. Neste caso, não foi alcançada a convergência para a cavidade com razão de aspecto 3,0 e $Pr = 0,01$. As características comentadas no caso anterior continuam válidas sendo que a estratificação do fluido é mais sensível. Nota-se o aparecimento de um segundo centro de recirculação nas cavidades com razão de aspecto maior. O primeiro centro é deslocado para próximo da parede quente, e a característica de escoamento do tipo camada limite junto às paredes inclinadas da cavidade é mais acentuada.

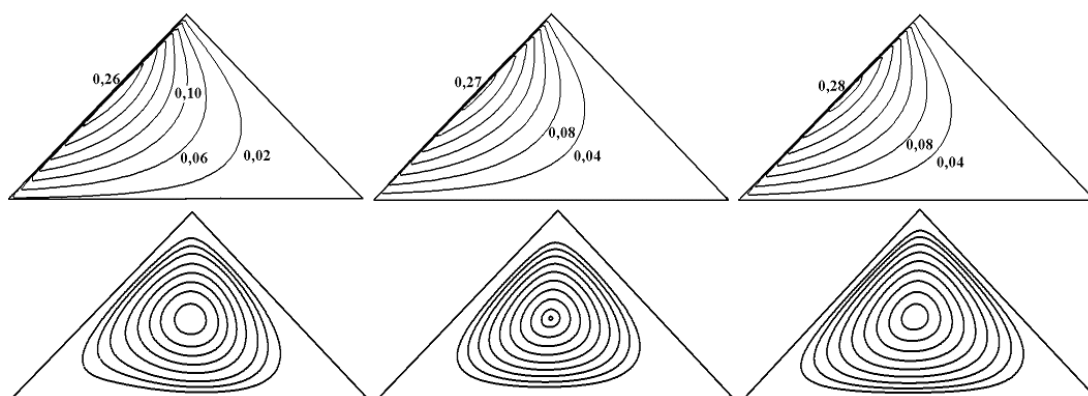


Figura 2 – Isothermas e linhas de corrente para cavidade com razão de aspecto 0,5; $Pr = 0,01, 1,0$ e 1000 (da esquerda para direita) e $Ra = 10^4$.

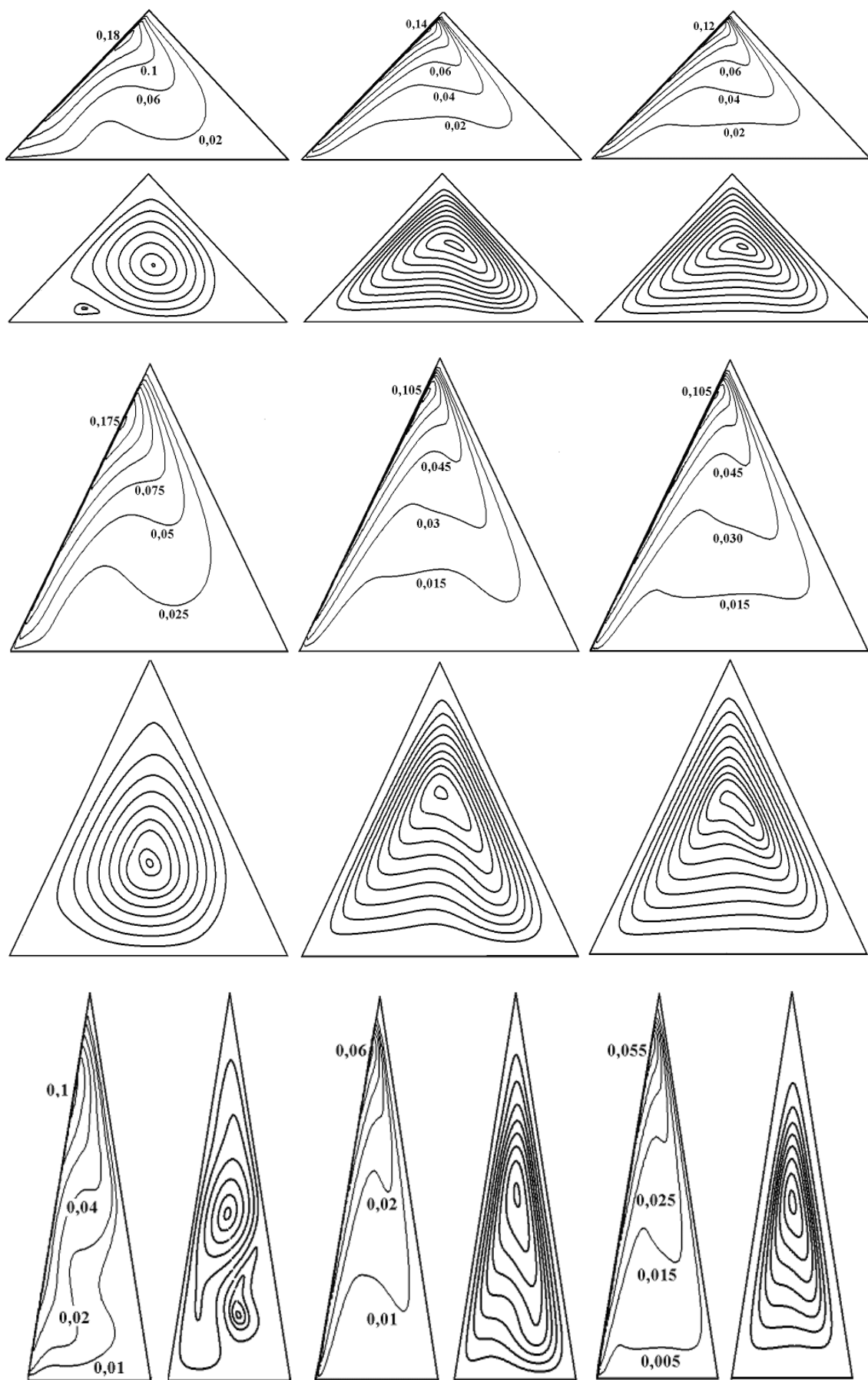


Figura 3 – Isotermas e linhas de corrente para cavidades com razões de aspecto 0,5 , 1,0 e 3,0 ; números de Prandtl 0,01, 1,0 e 1000 (da esquerda para direita) e $Ra = 10^7$.

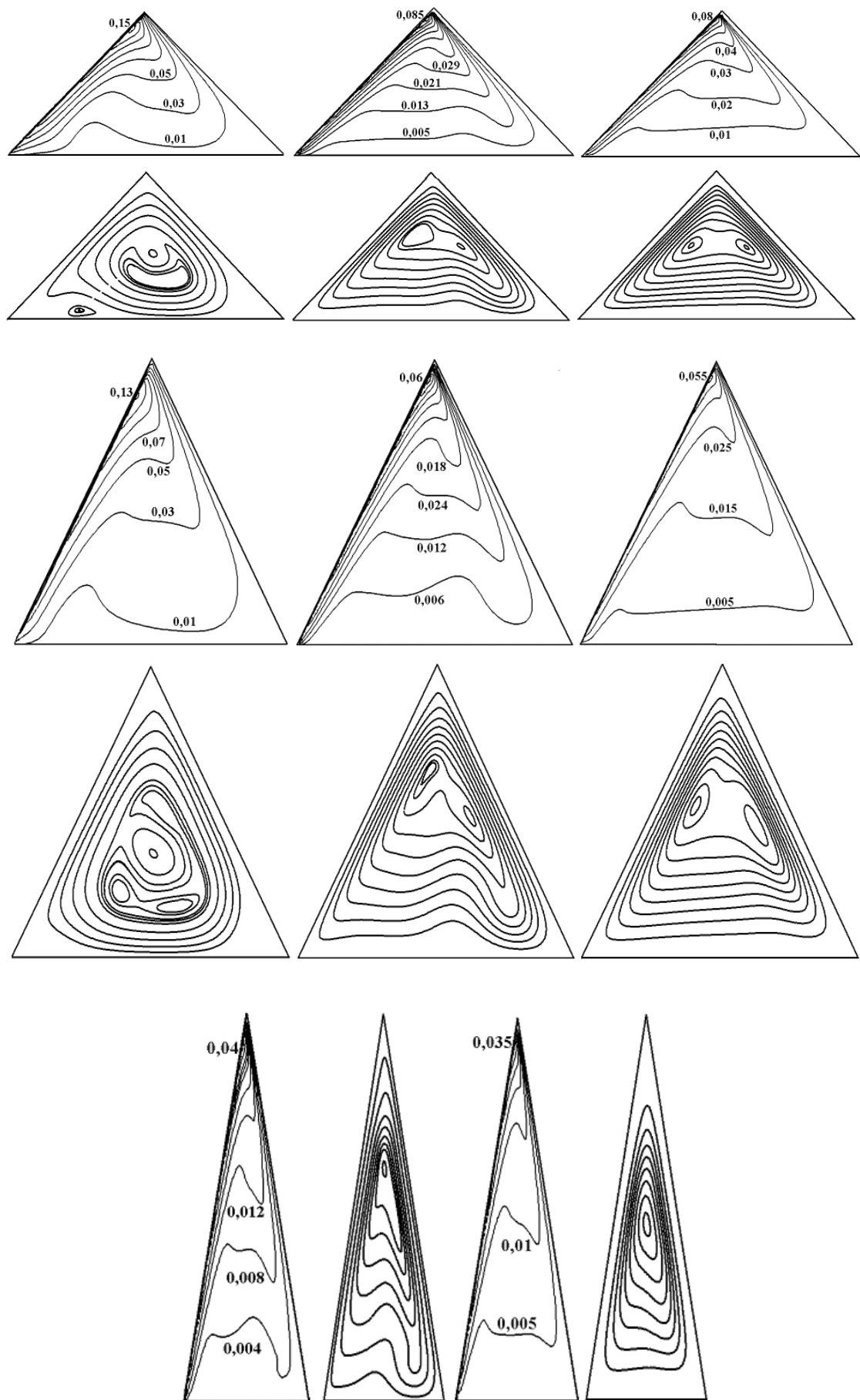


Figura 4 – Isotermas e linhas de corrente para cavidades com razões de aspecto 0,5 , 1,0 e 3,0 ; números de Prandtl 0,01, 1,0 e 1000 (da esquerda para direita) e $Ra = 10^7$.

O conhecimento das características do escoamento e da distribuição de temperaturas no interior das cavidades são importantes para a compreensão dos fenômenos de transferência de calor porém, pensando de forma mais prática, a determinação das taxas de calor transferidas entre a superfície aquecida e as outras é o objetivo de todo estudo em convecção.

Em todas as simulações realizadas foram calculadas as taxas de transferência de calor para as duas superfícies frias. Logicamente, a soma das duas é numericamente igual à taxa de entrada na superfície quente.

A taxa de calor transferida para a superfície lateral fria da cavidade, em relação à taxa total imposta na superfície quente está representada na Fig. (5a), em função da razão de aspecto e do número de Rayleigh. Embora neste caso específico $Pr = 0,7$, as curvas para outros valores apresentam o mesmo comportamento. O aumento da razão de aspecto faz com que mais calor seja transferido para esta superfície o que era esperado visto que, no limite $A \rightarrow \infty$ se tem duas placas paralelas. Um resultado interessante é obtido quando se utiliza a relação entre a razão transferida em relação àquela que seria transferida por condução ($Ra = 0$) nas mesmas condições, Fig (5b). Nota-se que existe uma faixa estreita de razões de aspecto que favorecem a transferência de calor por convecção, e que com o aumento de A , o aumento da transferência em relação à condução é bastante pequeno. Nota-se ainda que para cavidades com razões de aspecto muito pequenas existe uma diminuição da transferência de calor por convecção em relação à condução. Logicamente, esta faixa é aquela em que existe o aumento do calor transferido para base da cavidade.

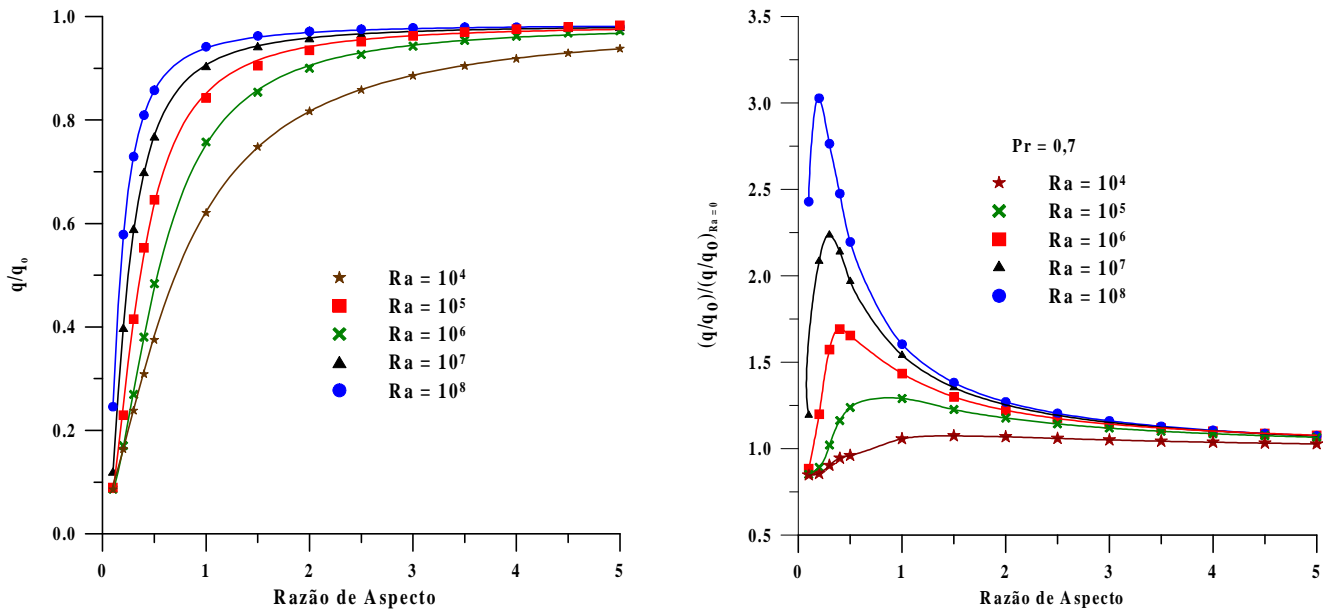


Figura 5. a) Relação entre as taxas de transferência para a superfície lateral e a imposta na superfície quente. b) Relação entre transferência por convecção e por condução para a superfície lateral

Com os resultados de todas as simulações realizadas e com um programa computacional de regressão não linear foi possível correlacionar o valor de q/q_0 para a superfície lateral em função dos parâmetros de estudo. A expressão obtida tem a forma :

$$\frac{q}{q_0} = 0,993 - \left(1,446 Ra^{-0,0031} Pr^{0,0015} + 1,053 Ra^{0,29} A^{1,63} \right)^{-1} \quad (11)$$

válida para $0,5 \leq Pr \leq 5000$, $0,1 \leq A \leq 5,0$ e $10^4 \leq Ra \leq 10^8$ e cuja aproximação possui uma soma de erros quadráticos de 0,116 com a utilização de 2800 valores. A influência maior de Pr está

contabilizada através do número de Rayleigh ($Ra = Gr Pr$, Gr o número de Grashof) e o termo $Pr^{0.0015}$, pode ser omitido com perda reduzida da qualidade da regressão.

Para se ter uma medida qualitativa da qualidade da regressão, na Fig. (6) estão representados os valores numéricos no eixo y e os valores obtidos pela Eq. (11), juntamente com a reta de equação $y = x$. Nota-se a boa concordância entre os resultados.

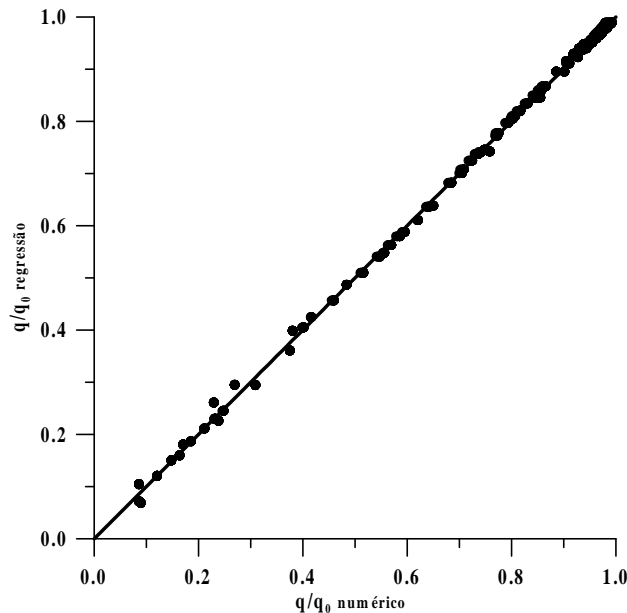


Figura 6. Comparação entre os valores numéricos e calculados pela Eq. (11)

5. CONCLUSÕES

Foi estudada a convecção natural em regime laminar em cavidades triangulares considerando como parâmetros os números de Prandtl, Rayleigh e a razão de aspecto.

Os resultados obtidos permitiram visualizar os principais fenômenos que ocorrem nos escoamentos internos à cavidade, principalmente as características de escoamento tipo camada limite junto às paredes laterais para números de Rayleigh mais elevados e razões de aspecto altas e a estratificação do fluido na região central da cavidade quando Rayleigh é grande.

Com os resultados de um grande número de simulações foi possível se estabelecer uma correlação entre o calor transferido pela parede quente para a superfície lateral fria. Como no problema estudado a condição utilizada foi a de fluxo de calor constante na superfície quente, o cálculo de calor transferido para a base pode também ser feito através da correlação obtida, tomando-se o complemento para o valor unitário.

6. REFERÊNCIAS

- Akinsete, V.A. and Coleman, T.A., 1982, "Heat Transfer by steady laminar free convection in triangular enclosures", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol 25, pp.991-998.
- Campo, E.M.; Sem, M. and Ramos, E., 1988, "Analysis of natural convection in a triangular enclosure", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 13, pp. 353-372.
- Flack, R.D.; Konopnicki, T.T. and Rooke, J.H., 1979, "The measurement of natural convective heat transfer in triangular enclosures". *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. Series C, J. Heat Transfer*, Vol. 101, pp. 648-654.
- Gershuni, G.Z.; Zhukhovitskiy, E.M. and Shvartzblat, D.L., 1974, "Overcritical convective motions in asymmetric region", *In Hydrodynamics*, pp. 89-95.

- Hasani, S.M.F. and Chung, B.T.F., 1998, "Combined natural convection and radiation in a triangular enclosure". American Society of Mechanical Engineers, Heat Transfer Division, (Publication) HTD, Vol. 357-1 pp. 63-72.
- Karyakin, Y.E.; Maritynenko, O.Z. and Sokovishin, Y.A., 1985, "Numerical simulation of unsteady-state natural convection in triangular enclosures". Heat Transfer - Sov. Res.17(3), pp.1-33.
- Karyakin, Y.E. and Sokovishin, Y.A., 1988, "Transient natural convection in triangular enclosures". Int. Journal Heat Transfer. Vol. 31, pp. 1759-1766.
- Patankar, S. (1980), "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere, N. York.
- Poulikakos, D. and Bejan, A., 1983, The Fluid dynamics of an attic space", J. Fluid Mech. 131, pp. 251-269.
- Yedder, R.B. and Bilgen, E., 1997, "Laminar natural convection in inclined bounded by a solid wall", Heat and Mass Transfer, Vol. 32 , pp. 455-462.
- Zanardi, M.A. and Aquino, F.Q., 2000,. "Transient Laminar Natural Convection in Triangular Enclosures Submitted to Wall Heat Flux",. Proceedings of the 34th National Heat Transfer Conference, Pittsburgh – PA.
- Zanardi, M. A. and Aquino, F. R. Q., 2001, "Transient Laminar Natural Convection in Triangular Enclosures Submitted to Time Dependent Heat Flux", .Anais do : XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Uberlandia. Vol.. 9, p. 291-299.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

THE INFLUENCE OF PRANDTL AND RAYLEIGH NUMBERS AND ASPECT RATIO IN NATURAL CONVECTION IN A TRIANGULAR ENCLOSURE

Mauricio Araujo Zanardi

Departamento de Energia

UNESP – Campus de Guaratinguetá

(12) 3122-3590

e-mail: mzanardi@feg.unesp.br

Felipe Rinaldo de Queiroz Aquino

Departamento Básico

FAENQUIL - Lorena

e-mail : felipe@debas.faenquil.br

Abstract. *In this work the influence of Prandtl and Rayleigh number as well as the aspect ratio in the natural convection inside a isosceles triangular enclosure. It was considered steady laminar flow and a constant heat flux in one lateral face is used as boundary condition. Two-dimensional equations of mass, momentum and energy conservation, with the Boussinesq approximation are solved using a finite volume method. The numerical procedure adopted is based on the SIMPLE algorithm. Simulations were done considering Prandtl number between 0,01 and 5000, Rayleigh numbers of 10^4 to 10^8 and aspect ratios up to 5. The isotherms and streamlines are presented for some different simulations and a correlation for the heat rate transferred to the cold walls in terms of dimensionless parameters is proposed.*

Keywords. *Natural convection, triangular enclosure, heat transfer.*