

# ANÁLISE TEÓRICA DE CONVECÇÃO FORÇADA LAMINAR TRANSIENTE COM ENTRADA PERIÓDICA

**Jacques Cesar dos Santos**

(\*) Laboratório de Energia Solar(LES) da UFPB, Cidade Universitária -Campus I, 58059-900, João Pessoa/PB, e-mail: [jacquescesarsantos@ig.com.br](mailto:jacquescesarsantos@ig.com.br)

**Jean Pierre Veronese**

(\*), e-mail: [jpveronese@ig.com.br](mailto:jpveronese@ig.com.br)

**Carlos A. Cabral dos Santos**

(\*), e-mail: [cabral@les.ufpb.br](mailto:cabral@les.ufpb.br)

**Romberg Rodrigues Gondim**

(\*), e-mail: [romberg@les.ufpb.br](mailto:romberg@les.ufpb.br)

**Resumo.** *No presente trabalho um estudo teórico da convecção forçada transiente em um canal de placas planas paralelas é apresentado. É feita uma formulação geral da convecção forçada transiente para um escoamento completamente desenvolvido e em desenvolvimento térmico, com o uso de uma função temporal periódica na condição de entrada e uma condição de contorno do 3º tipo na parede. A Técnica da Expansão em Autofunções é usada para encontrar uma solução completa do problema. O código computacional desenvolvido permite uma análise apurada para diferentes tempos.*

**Palavras-chave:** *Expansão em Autofunções, Convecção, Periódica.*

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo dos fenômenos relativos a transferência de calor na convecção forçada interna tem sido realizado essencialmente, para atender a uma necessidade pratica, uma vez que a maioria das soluções encontradas para este tipo de fenômeno, notadamente, na região de entrada térmica e desenvolvimento simultâneo do fluido, pode ser útil no projeto de dispositivos térmicos de melhor desempenho. Portanto, componentes eletrônicos, condensadores, evaporadores, trocadores de calor, entre outros, são exemplos da possível utilização. Mais ainda, com a crescente miniaturização e a necessidade de otimização desses equipamentos, tem se tornado uma necessidade mundial. Assim, a motivação do estudo deixa de ser um exercício puramente acadêmico, devido a sua importância pratica nas diversas áreas da engenharia, tais como, na engenharia nuclear, espacial, controle automático e transporte envolvendo reações químicas.

Um outro fator importante neste estudo é a crescente busca de soluções exatas e de referencia para problemas de engenharia, cada vez mais complexos em intervalos de tempo curtos. Por esta razão, a abordagem teórica vem ganhando espaço sobre a experimentação e aos métodos analíticos tradicionais. Isto ocorre, primeiro porque a experimentação é geralmente demorada, além do fato de ser muito dispendiosa, pois para cada experiência tem-se novos gastos tais como a utilização e aferição de novos equipamentos para adaptação da nova situação no problema em análise; segundo porque os métodos analíticos tradicionais apresentam certas limitações, onde as dificuldades matemáticas são reduzidas através de simplificações, que por vezes tornam os modelos

muito distantes da realidade física, possuindo assim utilidade do ponto de vista acadêmico ou didático, mas raramente de aplicação prática. Por último, com o desenvolvimento dos computadores digitais com velocidades de processamento cada vez maiores, tem-se avançado bastante na simulação de problemas em mecânica dos fluidos e transferência de calor, minimizando o tempo de trabalho e possibilitando assim um menor custo.

Utilizou-se a Expansão em Autofunções Boyce e Di Prima(1988), que é um método de fácil manuseio, que pode apresentar soluções completamente analíticas, ou para casos de maior complexidade apresenta soluções híbridas, analítico-numéricas, onde se tem um controle preestabelecido sobre o erro. A ideia básica consiste na transformação de um sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias ou um sistema linear, através da eliminação de dependências direcionais, com a vantagem de produzir uma solução mais econômica em relação aos métodos numéricos, além de não necessitar da geração de malha.

O presente trabalho pode ser inserido no contexto dos problemas de convecção forçada transiente, sendo considerado uma extensão dos trabalhos realizados por Cheroto(1998), Cavalcante(2000) e outros; na resolução da equação da energia com condição de entrada periódica e considerando condição de contorno do terceiro tipo.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema físico considerado consiste de um escoamento laminar hidrodinamicamente desenvolvido no interior de um duto de placas planas paralelas, submetido à convecção forçada, com entrada térmica periódica, como ilustrado na Fig. (1). O sistema em estudo é constituído por um canal de placas paralelas infinitas na largura, de comprimento L, no interior do qual escoam um fluido newtoniano. O sistema assim definido está inicialmente em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T_0$ . É então provocada uma perturbação na temperatura de entrada do fluido, sendo essa perturbação uma função generalizada do tipo  $G(t)$ , tendo como distribuição ao longo da entrada uma função  $F(y)$ . O sistema possui uma condição de contorno com convecção na parede do canal. As paredes são sólidas e impermeáveis. O escoamento ocorre na direção x, sendo simétrico em relação à y, conforme esta representada na Fig. (1). O fluido em estudo é considerado incompressível, com propriedades constantes, desprezam-se os efeitos da dissipação viscosa, e a variação temporal temperatura de entrada é do tipo periódica.

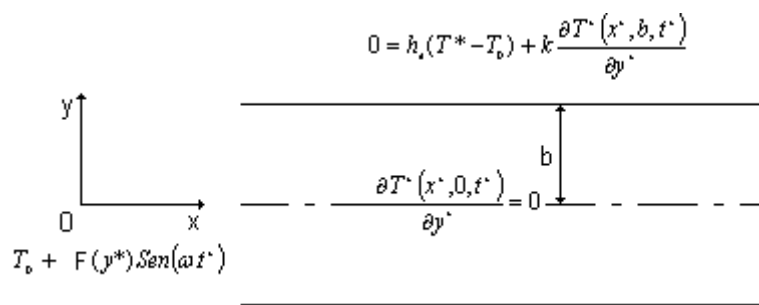


Figura 1. Representação Esquemática do Problema.

Para o problema proposto são considerados os seguintes grupos adimensionais:

$$x = (D_h/b)^2 \frac{\alpha}{\bar{u}} \frac{x^*}{D_h^2} = \left( \frac{x^*}{D_h} \right) \frac{(b)^2}{\text{Re}_{D_h} \text{Pr}} ; \quad y = \frac{y^*}{b} ; \quad u = \frac{u^*}{\bar{u}} ; \quad \theta = \frac{T^* - T_o}{T_e - T_o} ;$$

$$R_e = \frac{\bar{u} D_h}{\nu}; \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}; \quad \text{Pe}_{Dh} = \text{Re}_{Dh} \cdot \text{Pr} = \frac{\bar{u} D_h}{\alpha}; \quad \Omega = \frac{\varpi b^2}{\alpha}; \quad \text{Bi} = \frac{h_e b}{k};$$

$$t = \frac{\Omega}{2\pi} \frac{\alpha t^*}{b^2} \quad (1.1)$$

Com a utilização dos grupos adimensionais, o problema pode ser representado pela equação da energia, e suas condições de contorno e de entrada como:

$$\frac{\Omega}{2\pi} \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial t} + u(y) \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta(x, y, t)}{\partial y^2}, \quad 0 < y < 1, x > 0, t > 0 \quad (1.2.a)$$

$$\theta(x, y, 0) = 0, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (1.2.b)$$

$$\theta(0, y, t) = F(y) \text{Sen}(2\pi t), \quad t > 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (1.2.c)$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0, t)}{\partial y} = 0, \quad t > 0, \quad x \geq 0 \quad (1.2.d)$$

$$\text{Bi} \theta(x, 1, t) + \frac{\partial \theta(x, 1, t)}{\partial y} = 0, \quad t > 0, \quad x \geq 0 \quad (1.2.e)$$

$$\theta(\infty, y, t) = 0, \quad t > 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (1.2.f)$$

Segundo Cavalcante(2000), o perfil de velocidade adimensional é dado por:

$$u(y) = \frac{3}{2} (1 - y^2) \quad \text{para o escoamento com perfil desenvolvido;} \quad (1.2.g)$$

### 3. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

#### 3.1 Problema de Autovalor na Direção y

Como primeiro passo para resolver o problema Eqs. (2.1.a-e), usando a Expansão em Autofunções, define-se um problema de autovalor, na direção y :

$$\frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} + \beta_n^2 Y_n(y) = 0 \quad (2.1.a)$$

$$\frac{dY_n(0)}{dy} = 0 \quad (2.1.b)$$

$$BiY_n(1) + \frac{dY_n(1)}{dy} = 0 \quad (2.1.c)$$

Onde as autofunções são dadas por:

$$Y_n(y) = \cos(\beta_n y) \quad (2.1.d)$$

Os autovalores são obtidos da solução da equação transcendental:

$$Bi = \beta_n \tan(\beta_n) \quad (2.1.e)$$

A norma é dada por:

$$NY_n = \int_0^1 \tilde{Y}_n^2(y) dy = \frac{Bi^2 + \beta_n^2 + Bi}{2(Bi^2 + \beta_n^2)} \quad (2.1.f)$$

Logo a Autofunção Normalizada torna-se:

$$\tilde{Y}_n(y) = Y_n(y) / NY_n^{1/2} \quad (2.1.g)$$

Obedecendo a propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \tilde{Y}_m(y) dy = \delta_{nm}, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \delta_{nm} = 1 & , \quad n = m \\ \delta_{nm} = 0 & , \quad n \neq m \end{cases} \quad (2.1.h)$$

### 3.2 Par Transformada-Inversa

Escrevendo a função  $\theta(x, y, t)$  como uma expansão que tem como base as autofunções oriundas do problema de autovalor Eqs. (2.1a-c) e observando a propriedade de ortogonalidade Eq. (2.1.h) temos:

$$\bar{\theta}_n(x, t) = \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \theta(x, y, t) dy \quad \text{TRANSFORMADA} \quad (3.1.a)$$

$$\theta(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Y}_n(y) \bar{\theta}_n(x, t) \quad \text{INVERSA} \quad (3.1.b)$$

### 3.3 Transformação do Problema na Direção y

Operando a Eq. (1.1a) com o operador  $\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) dy$ , tem-se:

$$\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \frac{\Omega}{2\pi} \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial t} dy + \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) u(y) \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial x} dy = \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \frac{\partial^2 \theta(x, y, t)}{\partial y^2} dy$$

(A)
(B)
(C)

Aplicando-se a equação da Inversa Eq. (3.1.b) em cada termo, e utilizando a propriedade de ortogonalidade Eq. (2.1.h) tem-se:

$$\frac{\Omega}{2\pi} \frac{\partial \bar{\theta}_n(x,t)}{\partial t} + \sum_{m=1}^{\infty} A1_{nm} \frac{\partial \bar{\theta}_m(x,t)}{\partial x} = -\beta_n^2 \bar{\theta}_n(x,t) \quad (4.1.a)$$

(A1)                      (B1)                      (C1)

Aplicando o operador  $\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) dy$  na condição inicial, e de contornos, tem-se :

$$\bar{\theta}_n(x,0) = \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \theta(x,y,0) dy = 0 \quad (4.1.b)$$

$$\bar{\theta}_n(0,t) = \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) F(y) \text{Sen}(2\pi t) dy = \text{Sen}(2\pi t) \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) F(y) dy \quad (4.1.c)$$

$$\bar{\theta}_n(\infty, t) = 0 \quad (4.1.d)$$

Onde o termo  $A1_{nm}$  é dado por :  $\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \mu(y) \tilde{Y}_m(y) dy$

### 3.4 Problema de Autovalor na Direção t

Define-se um problema de autovalor para a variável t, tem-se:

$$\frac{d^2 X_l(t)}{dt^2} + \lambda_l^2 X_l(t) = 0 \quad (5.1.a)$$

As condições de contorno são homogêneas, para o instante inicial, t=0 e para o fim do ciclo de oscilação da temperatura, ou seja, um período completo, t=1 , o que pode ser observado da Eq. (1.2.c). Assim tem-se:

$$X_l(0) = 0 \quad (5.1.b)$$

$$X_l(1) = 0 \quad (5.1.c)$$

Este problema auxiliar tem como autofunção:

$$X_l(t) = \text{Sen}(\lambda_l t) \quad (5.1.d)$$

E os autovalores,  $\lambda_l$  , são encontradas pela equação transcendental:

$$\text{Sen}(\lambda_l t) = 0 \quad (5.1.e)$$

como:

$$\lambda_l = l\pi \quad (5.1.f)$$

A norma é dada por:

$$NX_l = \int_0^1 X_l^2(t) dt = \frac{1}{2} \quad (5.1.g)$$

As autofunções normalizadas:

$$\tilde{X}_l(t) = X_l(t)/NX_l^{1/2} \quad (5.1.h)$$

E a propriedade de ortogonalidade é:

$$\int_0^1 \tilde{X}_k(t) \tilde{X}_l(t) dt = \delta_{kl}, \quad \text{onde,} \quad \begin{cases} \delta_{kl} = 1, & k = l \\ \delta_{kl} = 0, & k \neq l \end{cases} \quad (5.1.i)$$

### 3.5 Par Transformada-Inversa

Escrevendo a função  $\bar{\theta}_n(x, t)$  como uma expansão que tem como base as autofunções oriundas do problema de autovalor na direção t, e observando a propriedade de ortogonalidade tem-se:

$$\bar{\theta}_{nl}(x) = \int_0^1 \tilde{X}_l(t) \bar{\theta}_n(x, t) dt \quad \text{TRANSFORMADA} \quad (6.1.a)$$

$$\bar{\theta}_n(x, t) = \sum_{l=1}^{nt} \tilde{X}_l(t) \bar{\theta}_{nl}(x) \quad \text{INVERSA} \quad (6.1.b)$$

### 3.6 Transformação do Problema na Direção t

Operando a Eq. (4.1a) com o operador  $\int_0^1 \tilde{X}_l(t) dt$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tilde{X}_l(t) \frac{\Omega}{2\pi} \frac{\partial \bar{\theta}_n(x, t)}{\partial t} dt + \int_0^1 \tilde{X}_l(t) \sum_{m=1}^{\infty} A_{lm} \frac{\partial \bar{\theta}_m(x, t)}{\partial x} dt &= \int_0^1 \tilde{X}_l(t) - \beta_n^2 \bar{\theta}_n(x, t) dt \\ \text{(A)} & \qquad \qquad \qquad \text{(B)} & \qquad \qquad \qquad \text{(C)} \end{aligned}$$

Aplicando-se a equação da Inversa Eq. (6.1.b) em cada termo, e utilizando a propriedade de ortogonalidade Eq. (5.1.i), o problema fica transformado no sistema diferencial ordinário:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{k=1}^{nt} B_{lk} \bar{\theta}_{nk}(x) + \sum_{m=1}^{nt} A_{lm} \frac{\partial \bar{\theta}_{ml}(x)}{\partial x} &= -\beta_n^2 \bar{\theta}_{nl}(x) \\ \text{(A1)} & \qquad \qquad \text{(B1)} & \qquad \qquad \text{(C1)} \end{aligned} \quad (7.1.a)$$

E operando a condição de entrada (4.1.c) com  $\int_0^1 \tilde{X}_l(t) dt$ :

$$\bar{\theta}_{nl}(0) = \int_0^1 \tilde{X}_l(t) \bar{\theta}_n(0, t) dt = \int_0^1 \tilde{X}_l(t) \text{Sen}(2\pi t) \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) F(y) dy dt \quad (7.1.b)$$

$$\bar{\bar{\theta}}_{nl}(\infty) = 0 \quad (7.1.c)$$

Onde o termo  $B1_{kl}$  é dado por :  $\int_0^1 \tilde{X}_l(t) \frac{\partial \tilde{X}_k(t)}{\partial t} dt$

### 3.7 Reordenamento das Expansões

Com o objetivo de reduzir os esforços computacionais, e assim otimizar o código computacional, reduz-se os somatórios duplos das expansões a um somatório simples, através de um processo de pré-seleção dos termos das expansões, a partir do ordenamento dos autovalores originais Gondim(1997).

Esta redução gera um agrupamento de dois índices em um, de acordo com esquema apresentado a seguir, referenciando-se a ligação destes índices com os autovalores e as respectivas direções de transformação. Desta forma, tem-se:

$$\bar{\bar{\theta}}_{nl}(x) \rightarrow \tilde{\bar{\theta}}_i(x) \quad (8.1.a)$$

$$\bar{\bar{\theta}}_{mk}(x) \rightarrow \tilde{\bar{\theta}}_j(x) \quad (8.1.b)$$

O problema pode ser expresso como:

$$\frac{\Omega}{2\pi} \sum_{k=1}^{nt} B1_{lk} \bar{\bar{\theta}}_{nk}(x) + \sum_{m=1}^{nt} A1_{nm} \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}_{ml}(x)}{\partial x} = \beta_i^2 \tilde{\bar{\theta}}_i(x) \quad (8.2.a)$$

$$\tilde{\bar{\theta}}_i(0) = \int_0^1 \tilde{X}_l(t) \text{Sen}(2\pi \cdot t) \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) F(y) dy dt \quad (8.2.b)$$

## 4. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINARIO

$$\frac{\Omega}{2\pi} \sum_{k=1}^{nt} B1_{lk} \bar{\bar{\theta}}_{nk}(x) + \sum_{m=1}^{nt} A1_{nm} \frac{\partial \bar{\bar{\theta}}_{ml}(x)}{\partial x} = \beta_i^2 \tilde{\bar{\theta}}_i(x) \quad (9.1.a)$$

$$\tilde{\bar{\theta}}_i(0) = \int_0^1 \tilde{X}_l(t) \text{Sen}(2\pi \cdot t) \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) F(y) dy dt \quad (9.1.b)$$

O sistema de equações é truncado em um numero de termos, necessários para a convergência desejada, e numericamente solucionado. O que fornecerá  $\tilde{\bar{\theta}}_i(x)$ .

### 4.1 Recuperação da Temperatura Original

Para a recuperação da temperatura original, aplica-se a Eq. (6.1.b) na Eq. (3.1.b) e fazendo as considerações de redução a um somatório tem-se:

$$\theta(x, y, t) = \sum_{i=1}^{nt} \tilde{Y}_n(y) \tilde{X}_l(t) \tilde{\bar{\theta}}_i(x) \quad (10)$$

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com o intuito de avaliar, a presente solução é testada através da convergência, e comparada com resultados apresentados por Cheroto (1998). Os resultados são mostrados na Tab. (1), que representa a convergência da solução via Expansão em Autofunções.

Tabela 1. Comparação da temperatura ao longo da linha central entre o presente trabalho e Cheroto (1998), para :  $Bi = 10^5$ ,  $\Omega = 0.06491$  e  $F(y) = 1 - y^2$ ,  $t = 24.1996$ ,  $y = 0$ .

x	5 termos	10 termos	15 termos	20 termos	22 termos	24 termos	Cheroto(1998)
0.01	0.986426	0.986861	0.986449	0.98645	0.98661	0.98661	0.9866
0.1	0.856058	0.856243	0.856185	0.856199	0.856219	0.856219	0.8562
0.5	0.405441	0.405356	0.405403	0.40558	0.40559	0.40559	0.4056
1	0.157868	0.157646	0.157754	0.158034	0.158037	0.158037	0.1580

Na Tabela (1) verifica-se que a Técnica utilizada neste trabalho obteve uma boa eficiência na solução do escoamento em desenvolvimento térmico, obtendo-se também uma excelente concordância com os resultados obtidos por Cheroto(1998), onde os resultados são validos para tempos longos. A Figura (2) mostra a comparação do comportamento da temperatura ao longo da linha central entre o caso teórico e caso prático apresentado por Li e Kakaç(1990).

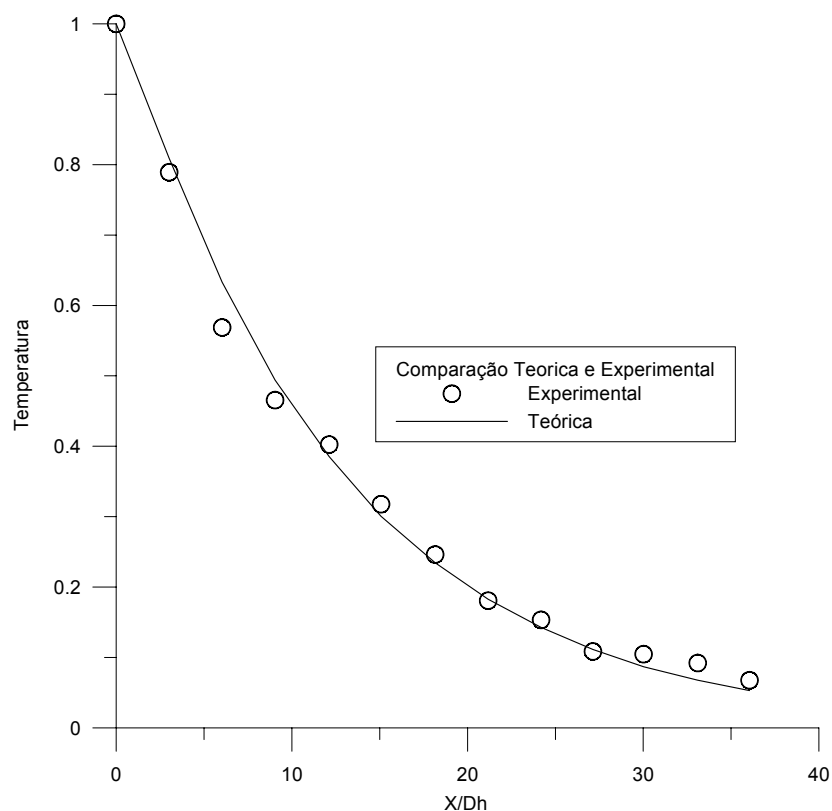


Figura 2. Comparação da Temperatura ao Longo da Linha Central do Canal Entre o Presente Trabalho e o Experimental Apresentado por Li e Kakaç(1990)  $t = 0.25$ ,  $Bi = 10^5$ ,  $\Omega = 0.01$ ,  $F(y) = 1 - y^2$ ,  $Re = 430$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $y = 0$ .



## **6. CONCLUSÃO**

O procedimento aqui desenvolvido mostrou ser útil no estudo da entrada térmica em um canal de placas planas paralelas submetido a uma variação senoidal na temperatura de entrada. A Solução encontrada neste trabalho foi totalmente obtida com o uso da Técnica da Expansão em Autofunções, que apresentou um fácil manuseio matemático e um custo computacional pequeno, inclusive, o esforço no desenvolvimento de códigos computacionais foi bastante simplificado.

## **7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Boyce, W.E. e DiPrima, R.C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno, Editora Guanabara, Rio de Janeiro, 1988.
- Cavalcante, F.F., Convecção Forçada Transiente Interna com Entrada Periódica: Solução Via Transformada Integral, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, Brasil, Agosto 2000.
- Cheroto, S. , Analysis of Unsteady Forced Convection in Channels by Integral Transform Technique, Doctor Thesis, University of Miami, Coral Gables, FL, USA, July 1998.
- Cotta, R. M. ; “Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow”, CRC Press, Boca Raton, FL, EUA, 1993.
- Gondim, R.R., Convecção Forçada Transiente Interna com Difusão Axial Solução Via Transformação Integral, Tese, UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, Brasil, 1997.
- Li, W. and Kakaç, S., Experimental and Theoretical Investigation of Unsteady Forced Convection in Ducts, Ph. D. Dissertation, University of Miami, Coral Gables, FL, USA, 1990.
- Santos, J.C., “Análise Teórica de Convecção Forçada Laminar Transiente com Entrada Térmica Periódica” , Dissertação de Mestrado , Universidade Federal da Paraíba , João Pessoa, PB, Brasil, Agosto 2002.

## **8. DIREITOS AUTORAIS**

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

# THEORETICAL ANALYSIS OF FORCED CONVECTION LAMINAR WITH PERIODIC ENTRANCE

**Jacques Cesar dos Santos**

(\*) Laboratório de Energia Solar(LES) da UFPB, Cidade Universitária -Campus I, 58059-900, João Pessoa/PB, e-mail: [jacquescesarsantos@ig.com.br](mailto:jacquescesarsantos@ig.com.br)

**Jean Pierre Veronese**

(\*), e-mail: [jpveronese@ig.com.br](mailto:jpveronese@ig.com.br)

**Carlos A. Cabral dos Santos**

(\*), e-mail: [cabral@les.ufpb.br](mailto:cabral@les.ufpb.br)

**Romberg Rodrigues Gondim**

(\*), e-mail: [romberg@les.ufpb.br](mailto:romberg@les.ufpb.br)

**Abstract:** *In the present work, a theoretical study of unsteady forced convection between parallel plates channels is presented. It is made a general formulation of the convection forced transient in a completely developed flow and in thermal development, with the use of a periodic temporary function in the entrance condition and boundary layer that presents convection in the walls. The Expansion in Eigenfunctions Technique is used to find a complete solution of the problem. The developed computational code allows a detailed analysis for different times.*

**Key Words:** *Expansion in Eigenfunctions, Convection, Periodic.*