

# PROBLEMAS DIFUSIVOS TRANSIENTES EM DOMÍNIOS DE GEOMETRIAS RETANGULARES E ELÍPTICAS

**Marcelo F. Pelegrini, Thiago A. Alves, Cassio R. M. Maia, Ricardo A. V. Ramos**

Departamento de Engenharia Mecânica, UNESP – Campus Ilha Solteira

Av. Brasil, 56, CEP 15385-000, Ilha Solteira, SP, marcelo@dem.feis.unesp.br

**Resumo.** *Apresenta-se neste trabalho a solução de problemas difusivos transientes em domínios representados por cilindros com seção transversal de geometria elíptica e retangular submetidos a condições de contorno de primeiro tipo. Para a formulação do problema foram considerados meios difusivos com propriedades termofísicas constantes e com distribuição de temperatura inicial uniforme. Com respeito ao caso particular de difusão em domínios de geometria elíptica procedeu-se uma transformação adequada do sistema de coordenadas para facilitar a aplicação das condições de contorno. Para a obtenção de solução a Técnica da Transformada Integral Generalizada foi aplicada sobre a equação da energia para cada um dos problemas propostos. A distribuição de temperatura e os parâmetros físicos de interesse foram, então, determinados para diversas razões de aspecto dos cilindros de seção elíptica e retangular e depois comparados com resultados disponíveis na literatura.*

**Palavras-Chaves:** *Difusão de calor, condução em regime transiente, transformada integral, geometria retangular, geometria elíptica.*

## 1. INTRODUÇÃO

A resolução de problemas difusivos e difusivos-convectivos sempre representou um desafio para a engenharia, uma vez que, as equações diferenciais fundamentais que regem os princípios de conservação são, em regra, de natureza mais complexa. Durante muito tempo, técnicas analíticas clássicas foram aplicadas com sucesso somente em problemas que apresentavam estruturas matemáticas mais simples. Mas, diante da necessidade de se obter soluções mais precisas para modelos físicos mais realísticos era imperativo que o desenvolvimento e o aperfeiçoamento de novas metodologias pudessem contemplar, por exemplo, o acoplamento entre as equações de conservação, a não linearidade das relações constitutivas, processos com mudança de fase, a presença de contornos com geometria não regular, problemas com fronteiras móveis, condições de contorno não lineares, etc. Com a evolução de equipamentos e ferramentas computacionais, foram criadas, então, as condições para que diversas técnicas numéricas fossem intensamente desenvolvidas e permitissem a obtenção de soluções mais precisas para problemas que apresentassem estruturas mais complexas nas diversas áreas de conhecimento da engenharia, inclusive na área de transferência de calor e massa.

Recentemente, tem sido observado que a aplicação de técnicas híbridas analítico-numéricas vem ganhando destaque em várias áreas de interesse da engenharia, por garantirem maior confiabilidade dos resultados a um menor custo computacional. A Técnica da Transformada Integral Generalizada - TTIG (Cotta, 1998), em particular, é uma ferramenta com estas características e vem demonstrando ser poderosa para a solução de problemas de transferência de calor e massa os quais, geralmente, não possuem solução pelas técnicas analíticas clássicas. No que diz respeito a processos puramente difusivos a TTIG vem sendo aplicada com sucesso em vários problemas tais como aqueles que apresentam domínios de geometria irregular ou não convencional (Aparecido *et al.*, 1989), (Cotta & Ramos, 1998), (Maia *et al.*, 2001) e (Maia *et al.*, 2003), problemas difusivos tridimensionais e não-lineares (Mikhailov & Cotta, 1996), (Serfaty, 1997), problemas com

condições de contorno variáveis no espaço (Cotta & Özisik, 1986), problemas difusivos que envolvem movimento de fronteiras (Diniz *et al.*, 1996) e (Diniz *et al.*, 1999), entre outros.

Assim, dando continuidade a esta linha de trabalhos, a TTIG será utilizada para a obtenção de solução de problemas difusivos transientes em domínios multidimensionais que caracterizam cilindros de seção transversal de geometria elíptica e retangular. Serão considerados para a formulação dos problemas propostos meios difusivos com propriedades termofísicas constantes, perfil de temperatura inicial uniforme e condições de temperatura prescrita no contorno. Nota-se que para o cilindro de seção retangular ainda é possível obter solução pelas técnicas clássicas analíticas, a qual será utilizado para a convalidação da técnica. Porém, no que diz respeito ao cilindro de seção elíptica, há uma dificuldade típica para a obtenção de solução analítica devido à impossibilidade da separação de variáveis. Para este caso será aplicada uma mudança de variáveis adequada para facilitar a aplicação das condições de contorno antes da aplicação da TTIG. Neste contexto, a distribuição de temperatura e os parâmetros físicos de interesse serão, então, determinados para diversas razões de aspecto dos cilindros de seção elíptica e retangulares e comparados com outros resultados disponíveis na literatura.

## 2. ANÁLISE

Para o problema proposto, será estabelecido um meio difusivo isotrópico, sem fontes e com propriedades termofísicas constantes com a temperatura. A análise será feita admitindo-se, ainda, uma distribuição de temperatura inicial uniforme em todo o domínio. Neste modelo, a equação da difusão em meios cilíndricos com seção de domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ , é dada por:

$$\nabla \cdot \nabla T(x,y,t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t}, \quad \{(x,y) \in \Gamma, t > 0\}, \quad (1a)$$

$$T(x,y,t) = T_p, \quad \{(x,y) \in \Gamma, t > 0\}, \quad (1b)$$

$$T(x,y,0) = T_i, \quad \{(x,y) \in \Omega\}. \quad (1c)$$

onde,  $T_p$  representa a condição de temperatura prescrita no contorno e  $T_i$  representa a condição de temperatura inicial uniforme no domínio. A Eq. (1) pode ser reescrita na forma como segue:

$$\nabla^2 \theta(X,Y,\tau) = \frac{\partial \theta(X,Y,\tau)}{\partial \tau}, \quad \{(X,Y) \in \Omega, \tau > 0\}, \quad (2a)$$

$$\theta(X,Y,\tau) = \theta_p = 0, \quad \{(X,Y) \in \Gamma, \tau > 0\}, \quad (2b)$$

$$\theta(X,Y,0) = \theta_i = 1, \quad \{(X,Y) \in \Omega\}, \quad (2c)$$

com

$$X = x/L_{ref}, \quad Y = y/L_{ref}, \quad \tau = t\alpha/L_{ref}^2, \quad (2d,e,f)$$

$$\theta(X,Y,\tau) = \frac{T(X,Y,\tau) - T_p}{T_i - T_p}. \quad (2g)$$

O parâmetro  $L_{ref}$  representa um comprimento de referência que é aqui definido como:

$$L_{ref} = 2A_s / Per \quad (3)$$

onde  $A_s$  representa a área da seção transversal do cilindro e  $Per$  o perímetro. Para caracterizar as diversas possibilidades de contornos de geometria retangular ou elíptica emprega-se o parâmetro razão de aspecto  $\rho_{aspec}$  dado por:

$$\rho_{aspec} = l/L \quad (4)$$

Os parâmetros geométricos de interesse são visualizados na Fig. 1. Observa-se que os dois problemas propostos apresentam simetria em relação ao eixo X e ao eixo Y de forma que é suficiente considerar somente o domínio em um quadrante conforme destacado pela região sombreada na Fig. (1).

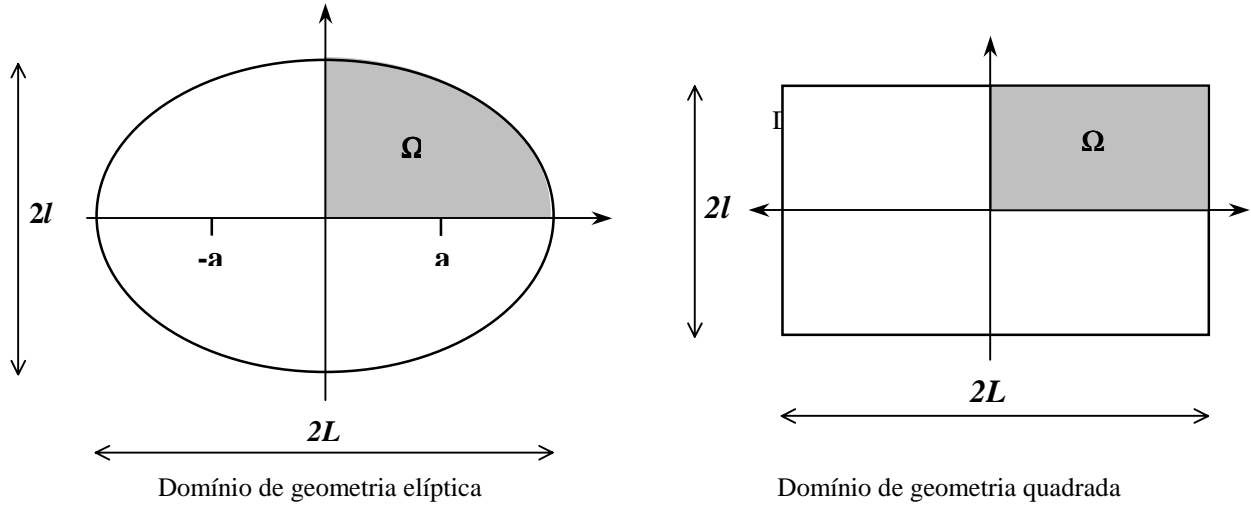


Figura 1. Formatos dos cilindros propostos para análise.

## 2.1. Transformação de coordenadas

Para o cilindro de seção elíptica o sistema de coordenadas cartesianas não permite uma representação simples de seu formato. Assim, é conveniente que se proceda uma transformação de coordenadas adequada para facilitar a aplicação das condições de contorno. O sistema ortogonal de coordenadas elípticas é utilizado, então, para transformar o domínio original com contorno de formato elíptico no plano  $(X,Y)$  em um domínio com contorno de formato retangular no plano transformado  $(u,v)$ :

$$X = a^* \cos(u) \cosh(v), \quad (5a)$$

$$Y = a^* \sin(u) \sinh(v), \quad (5b)$$

$$a^* = a/L_{ref}. \quad (5c)$$

onde  $a$  é a distância focal da elipse que é dada por:

$$a = L/\cosh(v_0), \quad (6a)$$

$$v_0 = \arctan h(l/L). \quad (6b)$$

onde  $L$  e  $l$  são, respectivamente, os comprimentos dos semi-eixos maior e menor da elipse e  $v_0$  é o parâmetro que define o contorno no plano  $(u,v)$ . Os coeficientes métricos, o jacobiano da transformação e o operador laplaciano são determinados pelas seguintes relações:

$$h_u(u,v) = h_v(u,v) = a^* [\sin^2(u) + \sinh^2(v)]^{1/2}, \quad (7a)$$

$$J(u,v) = \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = a^* [\sin^2(u) + \sinh^2(v)]. \quad (7b)$$

Para o domínio compreendido em um quadrante, a equação da difusão e as condições iniciais e de contorno no sistema de coordenadas elípticas são dadas por:

$$\frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial v^2} = J(u, v) \frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial \tau}, \quad \{0 \leq u \leq \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0\}, \quad (8a)$$

$$\theta(u, v, 0) = 1, \quad \{u = 0, \quad u = \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0\}, \quad (8b)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial u} = 0, \quad \{u = 0, \quad u = \pi/2, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0\}, \quad (8c)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial v} = 0, \quad \{0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = 0, \quad \tau > 0\}, \quad (8d)$$

$$\theta(u, v, \tau) = 0, \quad \{0 \leq u \leq \pi/2, \quad v = v_0, \quad \tau > 0\}. \quad (8e)$$

Para os cilindros de seção retangular, a representação do contorno é natural no sistema de coordenadas cartesianas. A fim de manter uniformidade de representação das variáveis espaciais, a transformação identidade é aplicada no presente problema:

$$X = u, \quad Y = v \quad (9)$$

Assim, para o domínio compreendido em um quadrante, a equação da difusão e as condições de contorno são reescritas como:

$$\frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u, v, \tau)}{\partial v^2} = J(u, v) \frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial \tau}, \quad \{0 \leq u \leq u_0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0\} \quad (10a)$$

$$\theta(u, v, 0) = 1, \quad \{0 \leq u \leq u_0, \quad 0 \leq v \leq v_0\}, \quad (10b)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial u} = 0, \quad \{u = 0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0\}, \quad (10c)$$

$$\frac{\partial \theta(u, v, \tau)}{\partial v} = 0, \quad \{0 \leq u \leq u_0, \quad v = 0, \quad \tau > 0\}, \quad (10d)$$

$$\theta(u, v, \tau) = 0, \quad \{u = u_0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad \tau > 0\}, \quad (10e)$$

$$\theta(u, v, \tau) = 0, \quad \{0 \leq u \leq u_0, \quad v = v_0, \quad \tau > 0\}. \quad (10f)$$

com

$$u_0 = L/L_{ref}, \quad v_0 = l/L_{ref} \quad (11)$$

## 2.2. Aplicação da TTIG

Para a obtenção dos perfis de temperatura a transformada integral será aplicada sobre a equação da difusão. Devido a sua característica bidimensional, o potencial  $\theta(u, v, \tau)$  será escrito em termos de uma expansão em autofunções normalizadas obtidas de problemas auxiliares de autovalor para cada coordenada espacial (Aparecido, 1997). Neste sentido, a aplicação da transformada integral será feita por partes, para cada um dos problemas propostos.

### 2.2.1. Aplicação da TTIG para o cilindro de seção elíptica

Considere o seguinte problema auxiliar de autovalor (Aparecido, 1997):

$$\frac{d^2 \psi(u)}{du^2} + \mu^2 \psi(u) = 0, \quad \{0 < u < \pi/2\}, \quad (12a)$$

$$\psi'(0) = 0, \quad \psi'(\pi/2) = 0. \quad (12b)$$

Os autovalores e as autofunções associados a este problema são

$$\mu_i = 2(i-1), \quad i = 1, 2, 3... \quad (13a)$$

$$\psi_i(u) = \cos(\mu_i u). \quad (13b)$$

As autofunções acima são ortogonais e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\bar{\theta}_i(v, \tau) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) \theta(u, v, \tau) du, \quad \text{transformada}, \quad (14a)$$

$$\theta(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{\theta}_i(v, \tau), \quad \text{inversa}. \quad (14b)$$

onde  $\bar{\theta}_i(v, \tau)$  é o potencial transformado em  $u$  e  $K_i(u)$  são as autofunções normalizadas, dadas por:

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{N_i^{1/2}}, \quad (15a)$$

$$N_i = \int_0^{\pi/2} \psi_i^2(u) du = \begin{cases} \pi/2, & i = 1, \\ \pi/4, & i > 1. \end{cases} \quad (15b)$$

Efetuada o produto interno das autofunções normalizadas  $K_i(u)$  com a equação da difusão dada pela Eq. (10a) e fazendo uso das condições de contorno dadas pelas Eqs. (10c), (10d) e (10e) e da equação que define o problema auxiliar de autovalor, Eq. (12b), obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{\theta}_j(v, \tau)}{\partial \tau} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(v, \tau) = \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(v, \tau)}{\partial v^2}, \quad i = 1, 2, 3... \quad (16a)$$

$$A_{ij}(v) = \int_0^{\pi/2} K_i(u) K_j(u) J(u, v) du. \quad (16b)$$

Para proceder a transformação integral relativo a coordenada  $v$ , considere o seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2 \phi(v)}{dv^2} + \lambda^2 \phi(v) = 0, \quad \{0 < v < v_0\}, \quad (17a)$$

$$\phi'(0) = 0, \quad \phi(v_0) = 0. \quad (17b)$$

Os autovalores e as autofunções para este novo problema auxiliar são:

$$\lambda_m = (2m-1)I/2v_0, \quad m = 1, 2, 3... \quad (18a)$$

$$\phi_m(v) = \cos(\lambda_m v). \quad (18b)$$

As autofunções  $\phi_m(v)$  são ortogonais e permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa:

$$\widetilde{\bar{\theta}}_{im}(\tau) = \int_0^{v_o} \int_0^{\pi/2} K_i(u) Z_m(v) \theta(u, v, \tau) du dv, \quad \text{transformada}, \quad (19a)$$

$$\theta(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_i(u) Z_m(v) \widetilde{\bar{\theta}}_{im}(\tau), \quad \text{inversa}. \quad (19b)$$

Aqui,  $Z_m(v)$  são as autofunções normalizadas e são dadas por:

$$Z_m(v) = \frac{\phi_m(v)}{M_m^{1/2}}, \quad (20a)$$

$$M_m = \int_0^{v_o} \phi_m^2(v) dv = \frac{v_o}{2}. \quad (20b)$$

A transformação integral sobre a coordenada  $v$  é feita efetuando-se o produto interno das autofunções normalizadas  $Z_m(v)$  com a equação diferencial transformada na coordenada  $u$ , Eq. (16a). Em seguida, fazendo uso das condições de contorno e das propriedades de ortogonalidade das autofunções correspondentes ao problema auxiliar de autovalor em  $v$ , obtém-se a seguinte relação para o potencial transformado  $\widetilde{\bar{\theta}}_{im}(\tau)$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ijnm} \frac{d\widetilde{\bar{\theta}}_{jn}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \widetilde{\bar{\theta}}_{im}(\tau) = 0, \quad i, m = 1, 2, 3... \quad (21a)$$

$$B_{ijnm} = \int_0^{v_o} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv = \int_0^{\pi/2} \int_0^{v_o} K_i(u) K_j(u) Z_m(v) Z_n(v) J(u, v) du dv, \quad (21b)$$

que deve satisfazer a condição inicial transformada, que é dada por:

$$\widetilde{\bar{\theta}}_{im}(0) = \int_0^{v_o} \int_0^K K_i(u) Z_m(v) \theta_i(u, v) dv du. \quad (21c)$$

O potencial transformado  $\widetilde{\bar{\theta}}_{im}(\tau)$  pode ser obtido numericamente quando se trunca a expansão para uma dada ordem  $M$  e  $N$ :

$$\sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^N B_{ijnm} \frac{d\widetilde{\bar{\theta}}_{jn}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \widetilde{\bar{\theta}}_{im}(\tau) = 0 \quad (22)$$

O potencial temperatura  $\theta_{elip}(u, v, \tau)$  para o cilindro de seção elíptica é obtido, então, através da fórmula de inversão dada pela Eq. (19b), por:

$$\theta_{elip}(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^N K_i(u) Z_m(v) \widetilde{\bar{\theta}}_{im}(\tau) \quad (23)$$

## 2.2.2. Aplicação da TTIG para o cilindro de seção retangular

A estrutura das condições de contorno para o cilindro de seção retangular apresentam a mesma forma para as variáveis  $u$  e  $v$ . Com o mesmo procedimento empregado no problema de domínios de geometria elíptica, a aplicação da TTIG conduz a seguinte relação para o potencial  $\theta_{ret}(u, v, \tau)$ :

$$\theta_{ret}(u, v, \tau) = \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^N K_i(u) Z_m(v) \widetilde{\bar{\theta}}_{im}(\tau) \quad (24)$$

com

$$\sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^N B_{ijnm} \frac{d\tilde{\theta}_{jn}(\tau)}{d\tau} + [\mu_i^2 + \lambda_m^2] \tilde{\theta}_{im}(\tau) = 0, \quad (25a)$$

$$B_{ijnm} = \int_0^v Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv = \int_0^{u_o} \int_0^v K_i(u) K_j(u) Z_m(v) Z_n(v) J(u,v) du dv, \quad (25b)$$

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{N_i^{1/2}}, \quad N_i = \int_0^{u_o} \psi_i^2(u) du = \frac{u_o}{2}, \quad (25c)$$

$$Z_m(v) = \frac{\phi_m(v)}{M_m^{1/2}}, \quad M_m = \int_0^v \phi_m^2(v) dv = \frac{v_o}{2}, \quad (25d)$$

$$\psi_i(u) = \cos(\mu_i u), \quad \mu_i = (2i-1)\pi/2u_o, \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (25e)$$

$$\phi_m(v) = \cos(\lambda_m v), \quad \lambda_m = (2m-1)\pi/2v_o, \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad (25f)$$

onde o jacobiano da transformação  $J(u,v) = 1$ .

### 2.3. Temperatura média e energia interna específica

A temperatura média no domínio em um dado instante  $\tau$  é dada por:

$$\theta_m(\tau) = \frac{[T_m(\tau) - T_p]}{T_i - T_p} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} \frac{[T_m(X,Y,\tau) - T_p]}{T_i - T_p} dA, \quad (26a)$$

$$\theta_m(\tau) = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} \theta(X,Y,\tau) dA = \frac{1}{A_s} \int_0^{v_o} \int_0^{\kappa} \theta(u,v,\tau) J(u,v) du dv. \quad (26b)$$

$\kappa = \pi/2 \Rightarrow$  para o problema de difusão em cilindros elípticos,

$\kappa = u_o \Rightarrow$  para o problema de difusão em cilindros retangulares,

sendo que a distribuição de temperatura  $\theta(u,v,\tau)$  e o Jacobiano da transformação  $J(u,v)$  são aqueles correspondentes a cada problema proposto.

Estabelecendo como referência para a energia interna o estado em regime permanente, a energia interna específica em um dado instante é dada por:

$$U(\tau) = \frac{1}{\rho V} \int_V \rho c_p [T(X,Y,\tau) - T(X,Y,\infty)] dV = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} c_p [T(X,Y,\tau) - T_p] dA \quad (27)$$

Desta forma, a energia interna relativa, definida como sendo a relação entre a energia interna no instante  $\tau$  e a energia interna no instante inicial, pode ser determinada pela temperatura média adimensional:

$$U^*(\tau) = \frac{U(\tau)}{U(0)} = \frac{U}{U_i} = \theta_{med}(\tau) \quad (28)$$

## 2.4. Constante de tempo

Para a análise dos problemas abordados é conveniente que se estabeleça um parâmetro apropriado capaz de verificar o comportamento transiente da difusão de calor em função da razão de aspecto do cilindro de seção elíptica e retangular. Para tanto, são definidos aqui duas constantes de tempo: a constante  $\tau_{max}$  como sendo o parâmetro que determina o tempo necessário para que a temperatura máxima no domínio  $\theta_{max}(0,0,\tau)$  esteja a  $1/e$  do seu valor em regime permanente  $\theta(0,0,\infty)$ , e a constante de tempo  $\tau_{med}$  como sendo o parâmetro que determina o tempo necessário para que a energia interna relativa  $U^*(\tau)$  alcance o valor  $(1/e)$ . Assim, as constantes de tempo são:

$$\theta_{max}(\tau_{max}) = \theta(0,0,\tau_{max}) = 1/e = 0,36788, \quad (29a)$$

$$U^*(\tau_{med}) = U(\tau_{med})/U_i = 1/e = 0,36788. \quad (29b)$$

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a determinação dos potenciais transformados  $\tilde{\theta}_{jn}$  é necessário preliminarmente calcular os coeficientes  $B_{ijmn}$  referentes a cada problema proposto. A integração envolvida no cômputo desses coeficientes foi feita pelo método de quadratura de Gauss. Conseqüentemente, todas as autofunções e o jacobiano da transformação foram calculados nos pontos de quadratura.

O potencial transformado  $\tilde{\theta}_{jn}$  foi calculado para cada problema resolvendo-se o sistema de equações diferenciais ordinárias, dada pelas Eqs. (22) e (25a), fazendo uso da rotina DIVPAG da Biblioteca IMSL FORTRAN. Foi observado que a convergência da série que determina o potencial temperatura fica mais lenta no início do transiente ( $\tau < 0,01$ ), principalmente quando a razão de aspecto tende a zero para cilindros retangulares e quando tende a 1 para cilindros de seção elíptica. Para estes casos é necessário truncar a série que determina o potencial temperatura  $\theta(u,v,\tau)$  em uma ordem  $N, M$  superior a 25 termos para se obter um mínimo de 4 dígitos de precisão. À medida que  $\tau$  aumenta, observa-se que a série converge com um número bem menor de termos.

Nas Figs. (2) e (3) são apresentadas as evoluções da temperatura máxima e da energia interna para cilindros de seção elíptica e retangular, respectivamente, para diversas razões de aspecto. Para a simulação de cilindros de seção circular foram obtidos resultados para cilindros de seção elíptica com razão de aspecto  $\rho_{aspec} = 0,99$ , pois com razão de aspecto unitária a transformação para o sistema de coordenadas elípticas leva a uma singularidade.

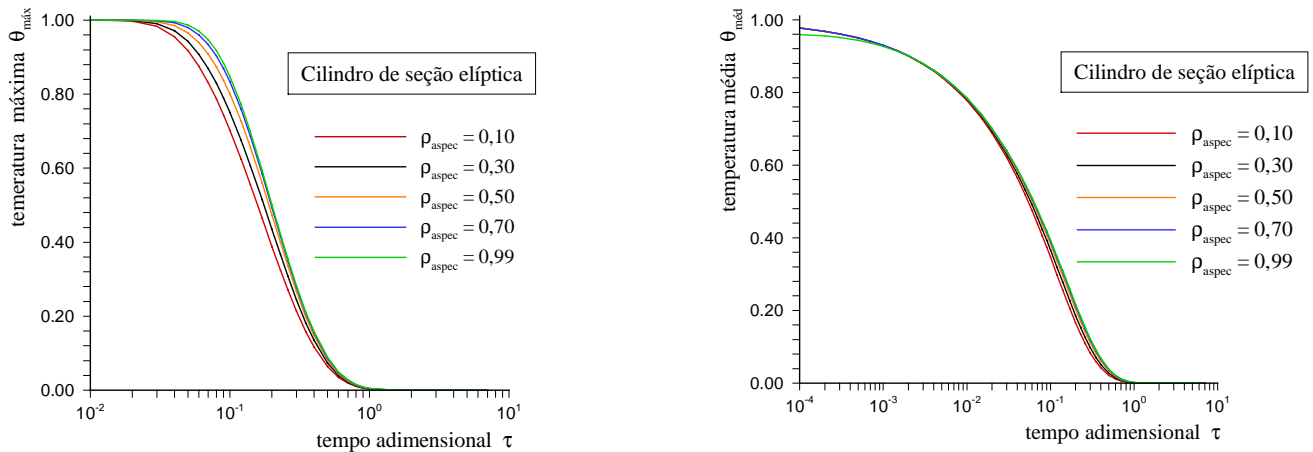


Figura 2. Evolução das temperaturas máxima e média em função do tempo em um cilindro de seção elíptica para diversas razões de aspecto.

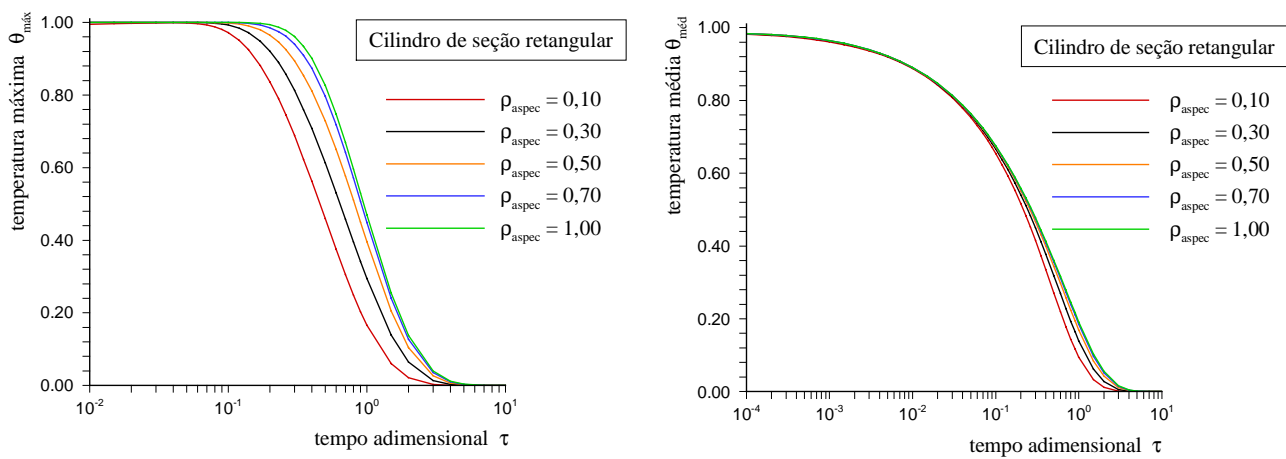


Figura 3. Evolução das temperaturas máxima e média em função do tempo em um cilindro de seção retangular para diversas razões de aspecto.

Os resultados obtidos para a temperatura máxima e temperatura média (que representa a energia interna relativa) são apresentados na Tab. (1) para cilindros de seção elíptica e retangular com razão de aspecto  $\rho_{\text{aspec}} = 0,50$ .

O problema difusivo transiente em cilindros retangulares permite a obtenção de solução analítica pelo método da separação de variáveis (Özisik, 1993) e, para fim de comparação, os resultados obtidos para a temperatura máxima e temperatura média também são apresentados na Tab. (1). Como pode ser observado, há uma excelente concordância entre os mesmos.

Tabela 1. Evolução das temperaturas máxima e média em função do tempo para cilindros de seções elíptica e retangular ambos com razão de aspecto 0,50.

$\tau$	Elíptico		Retangular			
	$\theta_{\text{máx}}$	$\theta_{\text{méd}}$	$\theta_{\text{máx}}$	$\theta_{\text{méd}}$	$\theta^{(1)}_{\text{máx}}$	$\theta^{(1)}_{\text{méd}}$
0,0001	1,0002	0,9772	1,0008	0,9833	1,00000	0,98874
0,0002	1,0000	0,9682	1,0005	0,9805	1,00000	0,98410
0,0005	1,0000	0,9500	1,0004	0,9734	1,00000	0,97491
0,0010	1,0000	0,9295	1,0003	0,9640	1,00000	0,96460
0,0020	1,0000	0,9008	1,0001	0,9500	1,00000	0,95010
0,0050	1,0000	0,8447	1,0000	0,9216	1,00000	0,92163
0,0100	1,0000	0,7830	1,0000	0,8900	1,00000	0,88999
0,0200	0,9997	0,6984	1,0000	0,8461	1,00000	0,84608
0,0500	0,9656	0,5408	1,0000	0,7618	1,00000	0,76183
0,1000	0,8010	0,3821	0,9984	0,6715	0,99841	0,67147
0,2000	0,4742	0,2034	0,9646	0,5520	0,96458	0,55196
0,5000	0,0811	0,0332	0,7288	0,3443	0,72883	0,34433
1,0000	0,0040	0,0017	0,3964	0,1689	0,39641	0,16890
2,0000	0,0000	0,0000	0,1041	0,0424	0,10408	0,04242
5,0000	0,0000	0,0000	0,0017	0,0007	0,00171	0,00069
10,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00000	0,00000

<sup>(1)</sup> Resultados obtidos através da solução analítica do problema difusivo em cilindros retangulares.

Na Tabela (2) são apresentados os resultados obtidos para as constantes de tempo relacionados com a temperatura máxima e temperatura média para cilindros de seção elíptica e retangular com diversas razões de aspecto. Como pode ser visualizado na Fig. (4), a constante de tempo sofre uma maior influência da razão de aspecto nos cilindros de seção retangular. Mas para todos os casos analisados observa-se, como era esperado, que a constante de tempo relacionado com a temperatura média é inferior quando comparado com a constante de tempo relacionada com a temperatura máxima.

Tabela 2. Constantes de tempo em função da razão de aspecto para cilindros de seções elíptica e retangular.

$\rho_{\text{aspec}}$	Elíptico		Retangular	
	$\tau_{\text{máx}}$	$\tau_{\text{méd}}$	$\tau_{\text{máx}}$	$\tau_{\text{méd}}$
0,10	0,2091	0,0922	0,6087	0,3565
0,20	0,2191	0,0957	0,7245	0,3885
0,30	0,2295	0,0995	0,8501	0,4169
0,40	0,2383	0,1029	0,9670	0,4382
0,50	0,2446	0,1057	1,0577	0,4554
0,60	0,2487	0,1079	1,1224	0,4702
0,70	0,2514	0,1095	1,1619	0,4773
0,80	0,2535	0,1105	1,1871	0,4829
0,90	0,2543	0,1110	1,1994	0,4888
0,99	0,2545	0,1111	1,2026	0,4897

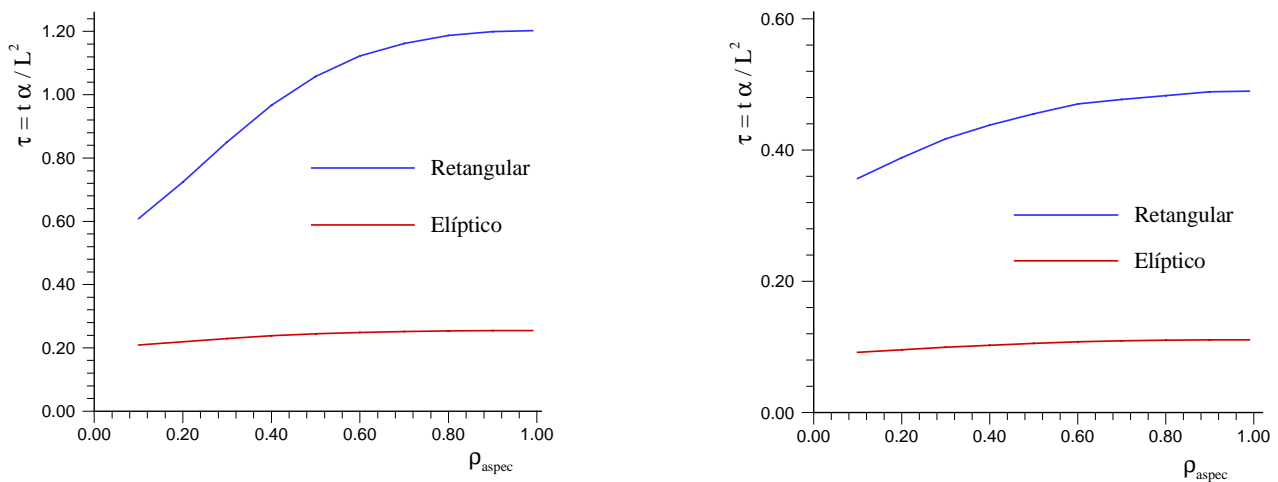


Figura 4. Constantes de tempo máxima e média em função da razão de aspecto.

#### 4. CONCLUSÕES

No presente trabalho foi analisado o problema difusivo transiente caracterizado por cilindros de seção transversal elíptica e retangular submetidos à condição de contorno de primeiro tipo. Para os cilindros de seção transversal elíptica foi utilizado um sistema de coordenadas ortogonais adequado a fim de facilitar a aplicação das condições de contorno. Soluções da equação da energia foram obtidas, então, através da aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada. Foi observado que a expansão que determina o potencial temperatura apresenta convergência lenta no início do transiente para ambos os casos. Os resultados obtidos para o cilindro de seção retangular foram comparados com aqueles obtidos através da solução analítica (solução exata) e foi verificada uma excelente concordância entre os mesmos. Constantes de tempo definidas em relação à temperatura máxima e à temperatura média foram também calculadas para diversas razões de aspecto de cilindros de seção elíptica e retangular. Finalizando, observa-se que a TTIG foi aplicada com sucesso para a obtenção de solução de problemas difusivos transientes multidimensionais, ressaltando, aqui, o problema com domínio de geometria elíptica, o qual não admite solução pelas técnicas analíticas clássicas.

#### 5. REFERÊNCIAS

Aparecido, J. B., Cotta, R. M. and Özisik, M. N., 1989, “Analytical Solutions to Two-dimensional Diffusion Type Problems in Irregular Geometries”, Journal of the Franklin Institute, Vol. 326, pp. 421-434.

- Aparecido, J. B., 1997, "How to Choose Eigenvalue Problems When Using Generalized Integral Transforms to Solve Thermal", Proceedings of the 14<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Bauru, Brazil, in CD-ROM.
- Cotta, R. M., 1986, "Steady-state Diffusion With Space-dependent Boundary Condition Parameters", Proceedings of the 1<sup>st</sup> Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences (ENCIT), Rio de Janeiro, Brazil, pp. 163-166.
- Cotta, R. M., 1998, "The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engineering", Begell House Inc., New York, USA.
- Cotta, R. M. and Ramos, R., 1998, "Integral Transform in the Two-dimensional Nonlinear Formulation of Longitudinal Fins With Variable Profile", International Journal of Numerical Methods in Heat and Fluid Flow, Vol. 8, pp. 27-42.
- Diniz, A. J., Maia, C. R. M. and Zapparoli, E. L., 1996, "Solução Analítica Para Problemas de Transferência de Calor com Mudança de Fase em Geometria Axi-simétrica", Proceedings of the 6<sup>th</sup> Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences (ENCIT), Florianópolis, Brazil, pp. 957-962.
- Diniz, A. J., Silva, J. B. C. and Zapparoli, E. L., 1999, "Analytical Solution of Ablation Problem With Nonlinear Coupling Equation", Hybrid Methods in Engineering Modeling Programming Analysis Animation, New York, USA, Vol. 1, pp. 265-277.
- Maia, C. R. M., Aparecido, J. B. and Milanez, L. F., 2001, "Critical Specific Power in Fuel Rods With Biconcave Cross-section", Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Heat Transfer Conference (IHTC), August, Grenoble, France, paper 0868, 6 p.
- Maia, C.R.M., Aparecido, J.B. and Milanez, L.F., 2003, "Limiting Thermal Energy Generation Rate", Proceedings of the 24<sup>th</sup> Congresso Ibero-Latino Americano de Métodos Computacionais, Ouro Preto, Brazil, em CD-ROM - código CIL083-46.
- Mikhailov, M. D. and Cotta, R. M., 1996, "Ordering Rules for Double and Triple Eigenseries in the Solution of Multidimensional Heat and Fluid Flow Problems", International Comm. of Heat and Mass Transfer, Vol. 23, pp. 299-303.
- Ozisik, M. N., 1993, "Heat Conduction", 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons, New York, NY, USA.
- Serfaty, R., 1997, "Problemas Não Lineares Multidimensionais em Difusão Convecção-difusão: Benchmarks Via Transformada Integral", Tese de Doutorado, COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

## TRANSIENT HEAT TRANSFER PROBLEMS IN ELLIPTICAL AND RECTANGULAR GEOMETRIES

**Marcelo F. Pelegrini, Thiago A. Alves, Cassio R. M. Maia, Ricardo A. V. Ramos**

Paulist State University – UNESP, Campus Ilha Solteira, Department of Mechanical Engineering, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brazil, marcelo@dem.feis.unesp.br

**Abstract.** *Solutions of transient diffusion problems in elliptical and rectangular cross-section cylinders submitted to the first kind boundary conditions are presented in this work. Constant thermo-physical properties for the diffusive medium and uniform initial temperature distribution have been considered in the problem formulations. The main difficulty related to the boundary conditions application to elliptical geometries has been removed by employing a suitable coordinate change. The generalized integral transform technique (GITT) has been used to obtain the energy equation solutions. Temperature profiles and other interesting physical parameters have been evaluated for several cylinder aspect ratios and the results obtained have been compared with the literature.*

**Keywords:** *Transient conduction, heat diffusion, integral transform, rectangular geometry, elliptical geometry.*