

# TRANSFERÊNCIA DE CALOR NÃO LINEAR BIDIMENSIONAL EM CORPOS COM PROTEÇÃO TÉRMICA ABLATIVA

**Fábio Yukio Kurokawa**

e-mail: [kurokawa@mec.ita.br](mailto:kurokawa@mec.ita.br)

**Edson Luiz Zaporoli**

e-mail: [zaporoli@mec.ita.br](mailto:zaporoli@mec.ita.br)

Centro Técnico Aeroespacial – Instituto Tecnológico de Aeronáutica – Departamento de Energia  
Praça Mal. Eduardo Gomes, 50 – Vila das Acáias – São José dos Campos – SP – CEP 12 228-900.

**Antonio João Diniz**

e-mail: [diniz@dem.feis.unesp.br](mailto:diniz@dem.feis.unesp.br)

**João Batista Campos Silva**

e-mail: [jbcampos@dem.feis.unesp.br](mailto:jbcampos@dem.feis.unesp.br)

Universidade Estadual Paulista – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – Departamento de Engenharia Mecânica  
Av. Brasil, 56 – Centro – Ilha Solteira – SP – CEP 15 385-000.

**Resumo.** Ablação é um processo com várias aplicações na engenharia principalmente no campo da indústria aeroespacial. Como proteção térmica da estrutura dos veículos espaciais que estão submetidos a altas temperaturas devido ao aquecimento aerodinâmico. O uso de materiais convencionais seria bastante restrito, pois sofreriam falhas catastróficas devido a degradação térmica de sua estrutura. Entretanto estes materiais poderão servir para os seus propósitos desde que estejam protegidos pelos conhecidos materiais ablativos. A proteção térmica ablativa consiste na aplicação de materiais especiais externamente na superfície da estrutura, isolando-a dos efeitos térmicos e garantindo uma reentrada segura dos veículos espaciais na atmosfera. O fenômeno ablativo é complexo podendo envolver perda total ou parcial de material que é sacrificado para absorção de energia, controlando a temperatura da superfície. A análise do processo ablativo em um corpo rombudo com geometria de revolução tem sido realizada na região do ponto de estagnação que pode ser simplificado como um problema de transferência de calor bidimensional com movimento de fronteira. Nesse trabalho a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG) é empregada para solução do sistema não linear de equações diferenciais parciais acopladas. A solução do problema é obtida pela transformação do sistema de equações diferenciais parciais não linear em um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas e então resolvidas pelas conhecidas rotinas numéricas. A superfície externa do domínio está sujeito a um fluxo de calor transiente prescrito. Os resultados de interesse tais como o tempo de ablação e perda total de material ablativo são apresentados e comparados com os disponíveis na literatura.

**Palavras-chave:** ablação, mudança de fase, movimento de fronteira, proteção térmica, TTIG.

## 1. INTRODUÇÃO

Os problemas relacionados à transmissão de calor no escoamento a alta velocidade, tornaram-se importantes nos últimos anos, quando as velocidades dos aviões e dos mísseis alcançaram e excederam a velocidade sônica. De fato, a barreira térmica presente é o maior obstáculo para o vôo

a alta velocidade e, para o retorno seguro dos veículos espaciais. O termo “barreira térmica” inclui os problemas associados às propriedades físicas do material do avião a temperaturas elevadas e, às limitações de temperatura sobre o pessoal e os instrumentos no avião, mas, refere-se principalmente aos problemas relacionados à dissipação de energia convertida na camada limite a altas temperaturas, Kreith (1973). As tensões viscosas dentro da camada limite executam trabalho de cisalhamento sobre o fluido, e as altas velocidades, aumentam agradavelmente sua temperatura. Este processo é freqüentemente denominado de aquecimento aerodinâmico.

Quando um veículo espacial se aproxima de uma atmosfera planetária antes de aterrissar, ele possui uma grande quantidade de energia potencial, devido a sua posição acima da superfície do planeta, e energia cinética devido a sua velocidade, na vizinhança da borla de uma atmosfera planetária, entretanto, a energia cinética é predominante. O maior problema na entrada na atmosfera, consiste em converter esta energia em uma forma que não danifique o veículo ou seu conteúdo.

Se toda energia potencial e cinética de um veículo que entra em uma atmosfera de um planeta, fosse convertido em energia interna, o veículo evaporaria, Kreith (1973). Ainda que o aquecimento e a desaceleração que acompanham a reentrada na atmosfera, provoquem sérios problemas, a presença desta é altamente vantajosa, uma vez que ela atua como uma “almofada”, onde a velocidade do veículo espacial pode ser reduzida para uma velocidade de aterrissagem segura.

Para proteger a estrutura do aquecimento superficial, durante a reentrada na atmosfera, uma variedade de sistemas de proteção térmica, Hatori & Pessoa-Filho (1998), e resfriamento tem sido propostos. Estes sistemas, geralmente envolvem a absorção de calor pelo material da superfície, através de armazenamento de energia interna, mudança de fase, ou uma reação química e/ou rejeição de parte da energia, por meio de um efluxo de massa da superfície, ou pela radiação. Dentre estes sistemas mais utilizados, destacam-se os que utilizam materiais ablativos, Suton (1982), como sistema de proteção térmica superficial, Steg & Lew (1962).

O fenômeno de ablação é complexo podendo envolver transferência de calor e massa, reações químicas, carbonização e ionização, Lacaze (1967). Devido a sua complexidade, o processo de ablação pode ser definido com base em vários aspectos. Uma proposta conveniente é a remoção de massa causada por processos mecânicos e termoquímicos.

Neste trabalho o processo de ablação é considerado como um fenômeno de mudança de fase com movimento de fronteira e perda de massa. Devido a este movimento de fronteira o problema de transferência de calor em materiais em ablação é considerado não linear (Chung & Hsiao, 1985; Zien, 1978 e Hsiao & Chung, 1984). A objetivo do trabalho é obter a solução do problema de ablação bidimensional utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG) (Cotta, 1993; Diniz *et al.*, 1993a; Diniz *et al.*, 1993b e Özisik & Murray, 1974).

## 2. ANÁLSE

Considere um corpo rombudo com proteção térmica ablativa movendo-se com uma velocidade hipersônica numa trajetória de reentrada na atmosfera terrestre. Este corpo sofrerá um aquecimento devido à conversão de energia cinética em energia térmica (calor). A análise foi realizada próximo ao ponto de estagnação cujo modelo utilizado no presente trabalho é apresentado na Fig. 1.

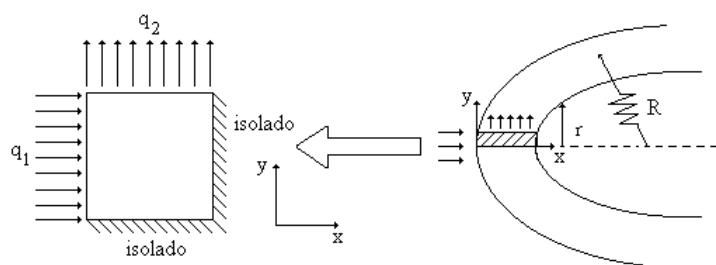


Figura 1. Modelo utilizado para análise do fenômeno de ablação na região do ponto de estagnação.

Neste trabalho considerou-se o problema de ablação bidimensional em que o fenômeno pode ser modelado por uma equação de difusão. Considera-se uma transferência de calor transiente em um prisma retangular cujo perímetro está sujeito a um aquecimento numa das superfícies, um resfriamento em outra e isolado nas demais, como ilustrado na Fig. 2(a). Neste problema adota-se um fluxo de calor  $q_1$  e  $q_2$ , fluxos de calor dimensionais absorvido e perdido, respectivamente, Kurokawa & Diniz, 2001, Fig. 2.

O fenômeno de ablação é melhor descrito dividindo-o em dois períodos, isto é, o período pré-ablativo em que não há perda de massa apenas ocorre o aumento de temperatura, Fig. 2(a), e o período ablativo em que a temperatura atingiu a temperatura de fusão ou sublimação do material e ocorre a perda de massa, Kurokawa & Diniz, 2002, Fig. 2(b).

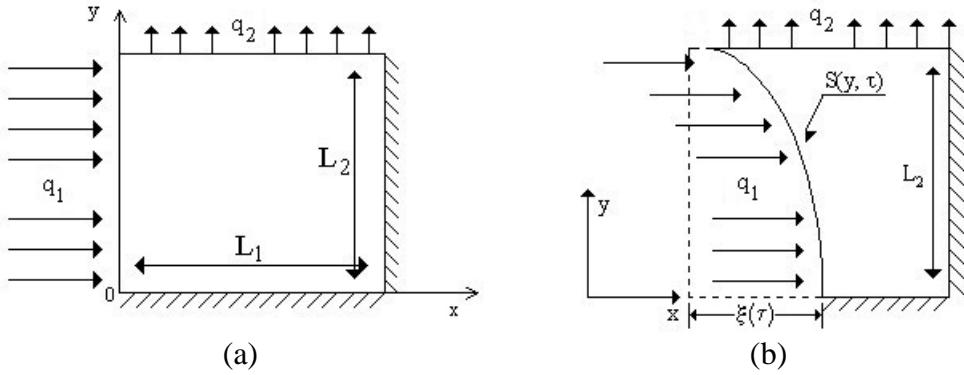


Figura 2. Modelo do problema de ablação bidimensional: (a) pré-ablativo e (b) ablativo.

As equações que governam os dois períodos são dadas na sua forma adimensional:

- período pré-ablativo:

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, \tau)}{\partial y^2} \quad \tau > 0 \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq l \end{matrix} \quad (1)$$

com condições inicial e de contorno:

$$\theta(x, y, \tau) = 0 \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ \tau = 0 \\ 0 \leq y \leq l \end{matrix} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial x} = -Q_1 \quad x = 0 \quad 0 \leq y \leq l \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial x} = 0 \quad x = 1 \quad 0 \leq y \leq l \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial y} = 0 \quad y = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial y} = -Q_2 \quad y = l \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (6)$$

- período ablativo:

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, \tau)}{\partial y^2} \quad \tau > \tau_f \quad \begin{matrix} S \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq l \end{matrix} \quad (7)$$

com condição inicial e de contorno:

$$\theta(x, y, \tau) = \theta_{in}(x, y, \tau) \quad \tau = \tau_f \quad \begin{cases} S \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq l \end{cases} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial x} = 0 \quad x = 1 \quad 0 \leq y \leq l \quad (9)$$

$$\theta(x, y, \tau) = 1 \quad x = S(y, \tau) \quad 0 \leq y \leq l \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial y} = 0 \quad y = 0 \quad S \leq x \leq 1 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial y} = -Q_2 \quad y = l \quad S \leq x \leq 1 \quad (12)$$

em que  $\theta_{in}(x, y, \tau)$  é a distribuição de temperatura obtida no período pré-ablativo, no tempo ablativo  $\tau_f$ . Devido ao movimento de fronteira pelo processo de mudança de fase tem-se uma equação da velocidade da fronteira, chamada de equação de acoplamento, definida como:

$$-\left[1 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nu \frac{\partial S}{\partial \tau} = Q_1 \quad x = S(y, \tau) \quad (13)$$

que é a equação de balanço de calor na fronteira ablativa (móvel).

### 3. SOLUÇÃO ANALÍTICA

Na solução analítica foi utilizada a TTIG. O potencial de temperatura do período pré-ablativo foi considerado como uma superposição do tipo:

$$\theta(x, y, \tau) = \theta_1(x, y, \tau) + \theta_2(x, y, \tau) \quad (14)$$

necessária para se homogeneizar as condições de contorno.

Então tem-se dois problemas: um em  $\theta_1(x, y, \tau)$  e outro  $\theta_2(x, y, \tau)$ . Para utilizar a TTIG, homogeneizou-se as condições de contorno e definiu-se um problema de autovalor apropriado, Kurokawa (2003). Portanto tem-se que:

$$\theta_1(x, y, \tau) = Q_1 \left( \frac{x^2}{2} - x \right) + A_1 B_1 \hat{\theta}_{11}(\tau) + A_1 \sum_{m=2}^{\infty} B_m \cos(\lambda_m x) \hat{\theta}_{1m}(\tau) \quad (15)$$

em que:

$$A_i = \sqrt{\frac{2}{l(1 + \delta_{ii})}}$$

$$B_m = \sqrt{\frac{2}{(1 + \delta_{m1})}}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad \text{é o delta de Kronecker.}$$

Para se obter os valores de  $\hat{\theta}_{im}(\tau)$  deve-se resolver a equação diferencial ordinária:

$$\frac{\partial \hat{\theta}_{im}(\tau)}{\partial \tau} + (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \hat{\theta}_{im}(\tau) = \hat{P}_{im}(\tau) \quad (16)$$

com condição inicial:

$$\hat{\theta}_{im}(0) = \hat{f}_{im} \quad (17)$$

em que:

$$\hat{P}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{P}_i(x, \tau) \phi_m(x, \tau) dx = \int_0^1 \int_0^l \psi_i(x, y, \tau) \phi_m(x, \tau) P_1(x, y, \tau) dy dx$$

$$\hat{f}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{f}_i(x, \tau) \phi_m(x, \tau) dx = \int_0^1 \int_0^l \psi_i(x, y, \tau) \phi_m(x, \tau) f_1(x, y) dy dx$$

Cuja solução resulta em:

$$\hat{\theta}_{11}(\tau) = \exp[-(\mu_1^2 + \lambda_1^2)\tau] \left\{ \frac{\sqrt{l}}{3} Q_1(0) + \sqrt{l} \left[ \int_0^\tau Q_1(\tau) \exp[(\mu_1^2 + \lambda_1^2)\tau] d\tau + \frac{1}{3} \int_0^\tau \dot{Q}_1(\tau) \exp[(\mu_1^2 + \lambda_1^2)\tau] d\tau \right] \right\} \quad (18)$$

$$\hat{\theta}_{1m}(\tau) = \exp[-(\mu_1^2 + \lambda_m^2)\tau] \left[ -\sqrt{2l} Q_1(0) \frac{1}{\lambda_m^2} - \frac{\sqrt{2l}}{\lambda_m^2} \int_0^\tau \dot{Q}_1(\tau) \exp[(\mu_1^2 + \lambda_m^2)\tau] d\tau \right] \quad (19)$$

Para  $\theta_2(x, y, \tau)$ , define-se um novo problema de autovalor apropriado, Kurokawa (2003), cuja solução do potencial  $\theta_2(x, y, \tau)$  é do tipo:

$$\theta_2(x, y, \tau) = Q_2 \frac{y^2}{2l} + A_1 B_1 \hat{Z}_{11}(\tau) + B_1 \sum_{i=2}^{\infty} A_i \cos(\mu_i y) \hat{Z}_{ii}(\tau) \quad (20)$$

Os valores de  $\hat{Z}_{im}(\tau)$  são obtidos resolvendo-se a equação diferencial ordinária:

$$\frac{\partial \hat{Z}_{im}(\tau)}{\partial \tau} + (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \hat{Z}_{im}(\tau) = \hat{S}_{im}(\tau) \quad (21)$$

com condição inicial:

$$\hat{Z}_{im}(0) = \hat{h}_{im}(\tau) \quad (22)$$

em que:

$$\hat{S}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{S}_i(x, \tau) \phi_m(x, \tau) dx = \int_0^1 \int_0^l P_2(x, y, \tau) \psi_i(x, y, \tau) \phi_m(x, \tau) dy dx$$

$$\hat{h}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{h}_i(x, \tau) \phi_m(x, \tau) dx = \int_0^1 \int_0^l f_2(x, y) \psi_i(x, y, \tau) \phi_m(x, \tau) dy dx$$

Cuja solução resulta:

$$\hat{\tilde{Z}}_{11}(\tau) = \exp[-(\mu_1^2 + \lambda_1^2)\tau] \left\{ \sqrt{l}Q_2(0)\frac{l}{6} + \sqrt{l} \left[ -\frac{1}{l} \int_0^\tau Q_2(\tau) \exp[(\mu_1^2 + \lambda_1^2)\tau] d\tau + \frac{l}{6} \int_0^\tau \dot{Q}_2(\tau) \exp[(\mu_1^2 + \lambda_1^2)\tau] d\tau \right] \right\} \quad (23)$$

$$\hat{\tilde{Z}}_{i1}(\tau) = \exp[-(\mu_i^2 + \lambda_1^2)\tau] \left[ \sqrt{2l}Q_2(0)\frac{l}{\mu_i^2} \cos(\mu_i^*) + \sqrt{2l} \frac{l}{\mu_i^2} \cos(\mu_i^*) \int_0^\tau \dot{Q}_2(\tau) \exp[(\mu_i^2 + \lambda_1^2)\tau] d\tau \right] \quad (24)$$

Portanto tem-se que a distribuição de temperatura na fase pré-ablativa é:

$$\begin{aligned} \theta(x, y, \tau) = & Q_1(\tau) \left( \frac{x^2}{2} - x \right) - Q_2(\tau) \frac{y^2}{2l} + \frac{1}{\sqrt{l}} \exp[-(\mu_1^2 + \lambda_1^2)\tau] \left\{ \frac{\sqrt{l}}{3} Q_1(0) + \sqrt{l}Q_2(0)\frac{l}{6} + \right. \\ & + \sqrt{l} \left[ \int_0^\tau Q_1(\tau) \exp[(\mu_1^2 + \lambda_1^2)\tau] d\tau + \frac{1}{3} \int_0^\tau \dot{Q}_1(\tau) \exp[(\mu_1^2 + \lambda_1^2)\tau] d\tau \right] + \\ & + \sqrt{l} \left[ -\frac{1}{l} \int_0^\tau Q_2(\tau) \exp[(\mu_1^2 + \lambda_1^2)\tau] d\tau + \frac{l}{6} \int_0^\tau \dot{Q}_2(\tau) e^{(\mu_1^2 + \lambda_1^2)\tau} d\tau \right] \left. \right\} + \\ & - \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{m=2}^{\infty} \sqrt{2} \cos(\lambda_m x) \exp[-(\mu_1^2 + \lambda_m^2)\tau] \frac{\sqrt{2l}}{\lambda_m^2} \left[ Q_1(0) + \int_0^\tau \dot{Q}_1(\tau) \exp[(\mu_1^2 + \lambda_m^2)\tau] d\tau \right] + \\ & + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{i=2}^{\infty} \cos(\mu_i y) \exp[-(\mu_i^2 + \lambda_1^2)\tau] \frac{l\sqrt{2l}}{\mu_i^2} \cos(\mu_i^*) \left[ Q_2(0) + \int_0^\tau \dot{Q}_2(\tau) \exp[(\mu_i^2 + \lambda_1^2)\tau] d\tau \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Concluído o período pré-ablativo passa-se a resolver o período ablativo. Foi realizada uma mudança de variável a fim de se homogeneizar as condições de contorno. Desta forma definiu-se a nova variável como:

$$\theta^*(x, y, \tau) = \theta(x, y, \tau) - 1 \quad \begin{aligned} S(y, \tau) \leq x \leq 1 \\ \tau > \tau_f \end{aligned} \quad (26)$$

e também foi realizada uma mudança de direção no eixo  $x$ , sendo:

$$\eta = 1 - x \quad (27)$$

em que a posição da fronteira ablativa é denotada por  $x = S(y, \tau)$ , sendo:

$$S = S(y, \tau) = \xi \left( 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \frac{y}{l} \right) \quad (28)$$

em que  $\xi$  representa a espessura ablativa ao longo do eixo  $x$ .

Novamente define-se um problema auxiliar de autovalor apropriado, Kurokawa (2003), e obtém-se a equação diferencial ordinária:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\tilde{\theta}}_{ik}^*(\tau)}{\partial \tau} + \mu_k^2 \hat{\tilde{\theta}}_{jm}^*(\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^l A_{ij} M_k(y, \tau) M_m(y, \tau) dy \hat{\tilde{\theta}}_{jm}^*(\tau) - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^l B_{ij} M_k(y, \tau) \frac{\partial M_m(y, \tau)}{\partial y} dy \hat{\tilde{\theta}}_{jm}^*(\tau) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^l \lambda_m^2 (y, \tau) M_k(y, \tau) M_m(y, \tau) dy \hat{\tilde{\theta}}_{jm}^*(\tau) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} M_k(l, \tau) M_m(l, \tau) B_{ij}(l, \tau) \hat{\tilde{\theta}}_{jm}^*(\tau) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{ij}(0, \tau) M_k(0, \tau) M_m(0, \tau) \hat{\theta}_{jm}^*(\tau) + M_k(l, \tau) f_i(l, \tau) Q_2(\tau) \quad (29)$$

A equação de restrição no acoplamento transformada é:

$$\left[ 1 + \left( \frac{\xi}{l} \frac{Q_2}{Q_1} \right)^2 \right] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l}} \frac{\lambda_i^*}{\bar{\eta}_b^{3/2}} (-1)^i \hat{\theta}_{i1}^*(\tau) - \nu \frac{\partial \bar{\eta}_b}{\partial \tau} = Q_1 \quad (30)$$

em que:

$$\bar{\eta}_b = \int_0^l 1 - \xi \left( 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \frac{y}{l} \right) dy = 1 - \xi \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{Q_2}{Q_1} \right)$$

Sendo a condição inicial transformada:

$$\hat{\theta}_{ik}^*(\tau) = \hat{\phi}_{ik}(\tau) - \hat{\gamma}_{ik}(\tau) \quad (31)$$

em que:

$$\hat{\phi}_{ik}(\tau) = \int_0^l M_k(y, \tau) \tilde{\phi}_i(y, \tau) dy$$

$$\hat{\gamma}_{ik}(\tau) = \int_0^l M_k(y, \tau) \tilde{\gamma}_i(y, \tau) dy$$

Portanto as Eqs. (29) e (30) formam um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acopladas que é solução para o problema de ablação bidimensional. A Eq. (31) é a condição inicial do sistema solução.

#### 4. RESULTADOS

Foi implementado um algoritmo em linguagem FORTRAN para solução do sistema solução. Na fase pré-ablativa determinou-se o instante em que se inicia a fase ablativa. Isto ocorre quando a temperatura média  $\phi(x, \tau)$ , definido pela Eq. (32), na posição  $x = 0$  é igual a 1. Foi considerado uma condição de contorno do tipo  $Q_1 = 2$  e  $Q_2 = 1$ . Na Fig. (3) é mostrada uma comparação dos resultados obtidos pela TTIG para determinação do tempo de ablação com resultados da literatura obtidos pela aplicação da Transformada de Laplace e do Método Integral do Balanço de Calor Modificado, Hsiao & Chung (1984).

Sendo que:

$$\phi(x, \tau) = \int_0^l \theta(x, y, \tau) dy \quad (32)$$

O tempo de ablação quando substituído na distribuição de temperatura, obtida na fase pré-ablativa, é a condição inicial da fase ablativa. Na Fig. 4 é apresentado a distribuição de temperatura da fase pré-ablativa para o tempo de início da ablação.

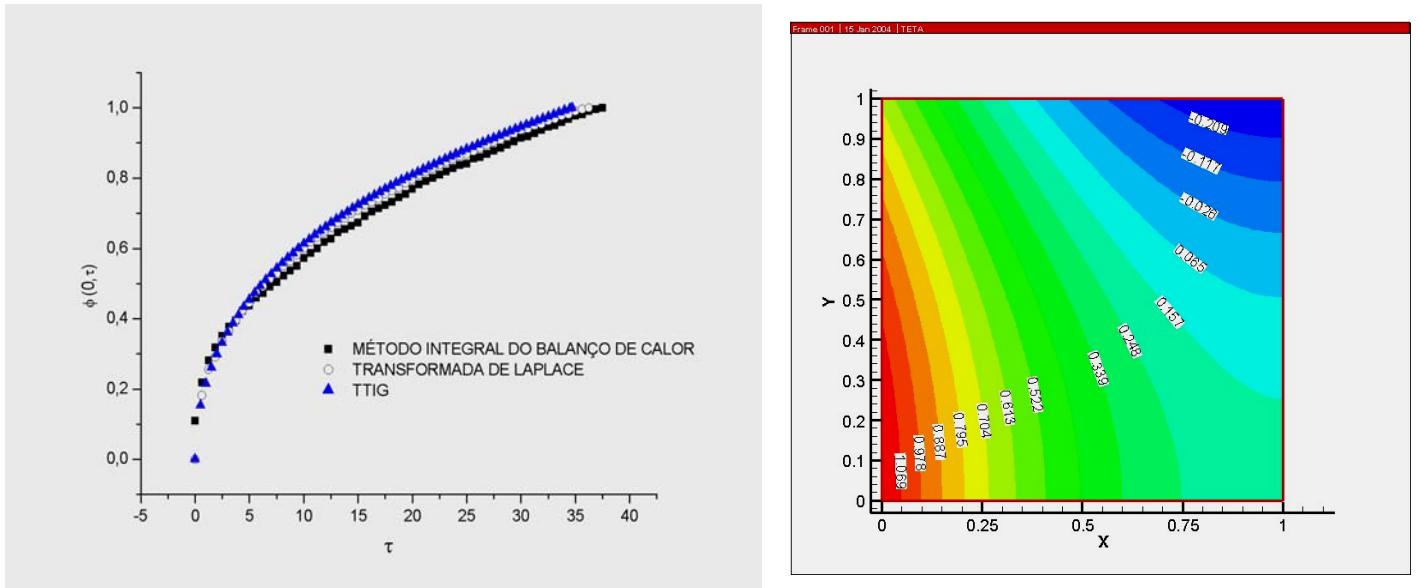


Figura 3. Comparação de  $\phi$  obtida por diferentes metodologias.

Figura 4. Distribuição de temperatura no tempo de ablação  $\tau = 0,347$ .

Na Figura 5 é mostrada a perda total de material como função do tempo. Esta perda representa a massa total de material que é removida da superfície aquecida. Os resultados foram comparados com os obtidos pelo Método de Elementos Finitos (MEF) e Método Integral do Balanço de Calor Modificado (MIBCM), Hsiao & Chung (1984).

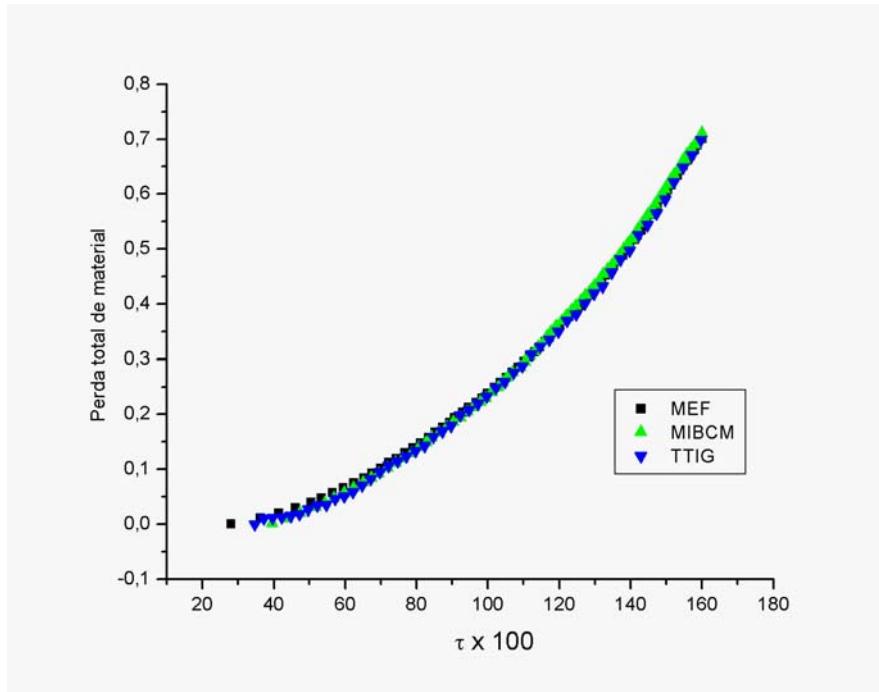


Figura 5. Comparação da perda total de material obtida por diferentes técnicas.

## 5. CONCLUSÃO

Este trabalho tem como enfoque principal a utilização de uma ferramenta matemática, no caso a

TTIG, num problema de ablação. Este problema pode ser modelado como um fenômeno de mudança de fase com perda de material da fronteira em ablação.

Observa-se na Fig. 3, uma boa concordância dos resultados obtidos pela TTIG quando comparado com os outros métodos. Este gráfico ilustra como se determinou o tempo de ablação que é um parâmetro importante na fase ablativa. Uma vez que, substituindo-o na equação da distribuição de temperatura obtida na fase pré ablativa tem-se a condição inicial para o período ablativo. Na Figura 4 apresenta-se a distribuição de temperatura adimensional da fase pré-ablativa no tempo de ablação. A face em  $x = 0$  está sendo aquecida e a face em  $y = 1$  se tem a perda de calor.

Já na Fig. 5 tem-se a perda total de material como função do tempo. Quando comparado com outros métodos também se observa uma boa concordância dos resultados. Nota-se que esta perda apresenta uma forma exponencial.

Em conclusão, este trabalho apresenta uma extensão da análise do problema unidimensional, utilizando-se a TTIG. Uma vez que, considerando-se que  $Q_2 = 0$  se tem o problema unidimensional. Os resultados obtidos apresentam uma ótima concordância com os da literatura e o qual vem a contribuir na obtenção de soluções de problemas complexos envolvendo fronteiras móveis através da aplicação da TTIG.

## 6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio a este projeto de pesquisa.

## 7. REFERÊNCIAS

- Chung, B. T. F. and Hsiao, J. S., 1985, "Heat Transfer with Ablation in a Finite Slab Subjected to Time-Variant Heat Fluxes", AIAA Journal, v. 23, n° 1, pp. 145-150.
- Cotta, R. M., 1993, "Problems with Variable Boundaries, Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow", CRC Press, Inc 2000 Corporate Blvd, N. W. Boca Raton, Florida, pp. 109-155.
- Diniz, A. J. *et al.*, 1993a, "Heat Conduction with Ablation in a Finite Slab", Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow, CRC Press, Flórida – USA, pp. 131-139.
- Diniz, A. J., Aparecido, J. B. e Zaporoli, E. L., 1993b, "Solução de Problemas Térmicos com Acoplamentos Não-Lineares", XII COBEM, Brasília.
- Hatori, M. E. e Pessoa-Filho, J. B., 1998, "Soluções Similares em Escoamentos Supersônicos", VII Encontro Nacional de Ciências Térmicas – ENCIT-98, pp. 257-262.
- Hsiao, J. S. and Chung, B. T. F., 1984, "A Heat Balance Integral Approach for Two Dimensional Heat Transfer in Solids with Ablation", AIAA Journal, 22<sup>nd</sup> Aerospace Sciences Meeting, Reno Nevada, pp. 1-9.
- IMSL Library, 1979, GNB Building, Edition 7, 7500 Ballaire Blvd, Houston, Texas, 77036.
- Kreith, F., 1973, "Transmissão de Calor em Escoamento a Alta Velocidade", Princípios da Transmissão de Calor, Cap. 12, Ed. Edgard Blucher Ltda.
- Kurokawa, F. Y., 2003, "Estudo Híbrido Analítico/Numérico da Equação de Difusão Bidimensional em Sólidos com Proteção Térmica Ablativa", Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, SP.
- Kurokawa, F. Y. e Diniz, A. J., 2001, "Analytical Study of Ablative Thermal Protection for Two Dimensional Bodies", 22<sup>nd</sup> Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering and 2<sup>nd</sup> Brazilian Congress on Computational Mechanics, Campinas - SP.
- Kurokawa, F. Y. e Diniz, A. J., 2002, "Aplicação da TTIG na Transferência de Calor em Sólidos com Proteção Térmica Ablativa", II National Congress of Mechanical Engineering (CONEM), João Pessoa – PB.
- Lacaze, H., 1967, "La Protection Thermique par Ablation", Doc-Air-Espace, n° 105, juillet.
- Özisik, M. N. and Murray, R. L., 1974, "On the Solution of Linear Diffusion Problems with

- Variable Boundary Condition Parameters", Journal Heat Transfer, v. 96, pp. 48-51.
- Steg, L. and Lew, H., 1962, "Hypersonic Ablation", Aspects of Hypersonic Fluid Dynamics, Agard Meeting on High Temperature, v. 68, chapter 32, pp. 629-980.
- Sutton, G. W., 1982, "The Initial Development of Ablation Heat Protection", An Historical Perspective, AIAA Journal Spacecraft, v. 19, n° 1, pp. 3-11.
- Zien, T. F., 1978, "Integral Solutions of Ablation Problems with Time-Dependent Heat Flux", AIAA Journal, v. 16, n° 12, pp. 1287-1295.

## 8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## TWO DIMENSIONAL NON-LINEAR HEAT TRANSFER ON BODIES WITH ABLATIVE THERMAL PROTECTION

**Fábio Yukio Kurokawa**

e-mail: [kurokawa@mec.ita.br](mailto:kurokawa@mec.ita.br)

**Edson Luiz Zaporoli**

e-mail: [zaporoli@mec.ita.br](mailto:zaporoli@mec.ita.br)

Centro Técnico Aeroespacial – Instituto Tecnológico de Aeronáutica – Departamento de Energia  
Praça Mal. Eduardo Gomes, 50 – Vila das Acáias – São José dos Campos – SP – CEP 12 228-900.

**Antonio João Diniz**

e-mail: [diniz@dem.feis.unesp.br](mailto:diniz@dem.feis.unesp.br)

**João Batista Campos Silva**

e-mail: [jbcampos@dem.feis.unesp.br](mailto:jbcampos@dem.feis.unesp.br)

Universidade Estadual Paulista – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – Departamento de Engenharia Mecânica

Av. Brasil, 56 – Centro – Ilha Solteira – SP – CEP 15 385-000.

**Abstract.** *Ablation is process with several applications in engineering mainly in the field of aerospace industry. Like thermal protection of structures of space vehicles that are submitted to high temperature due to the high speed of the aerodynamic heating. The use of conventional materials must be quite restricted because they would suffer catastrophic flaws due to thermal degradation of their structures. However, the same materials can be quite suitable once being protected by well-known ablative materials. The ablative thermal protection consists of application of special materials on the outer surface of the structure, isolating it from the thermal effects and guaranteeing a proper re-entering of space vehicles in the atmosphere. The complex ablative phenomena could involve the whole or partial loss of material that is sacrificed for absorption of energy, controlling the temperature of the surface of the substructures like that. The analysis of the ablative process in a blunt body with revolution geometry has been done on the stagnation point area that can be simplified as a two-dimensional heat transfer problem with moving boundary. In this work the Generalized Integral Transform Technique (GITT) is employed for the solution of the non-linear system of coupled partial differential equations. The solution of the problem is obtained by transforming the non-linear partial differential equation system to a system of coupled first order ordinary differential equations and then solving it by using well-established numerical routines. The external surface of the domain is subject to a prescribed unsteady heat flow. The results of interest such as the ablation time and ablative material total loss are presented and compared with those ones available in the open literature.*

**Keywords.** *Ablation, phase change, moving boundary, thermal protection, GITT.*