

IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE HARDY-CROSS PARA A RESOLUÇÃO DE REDES DE CONDUTAS

António M. Gameiro Lopes

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade de Coimbra

3030 Coimbra – Portugal

email: antonio.gameiro@dem.uc.pt

Resumo. *O presente trabalho descreve um programa de computador que implementa o método de Hardy-Cross para a resolução de escoamentos no interior de redes de condutas. O programa é construído numa plataforma gráfica, com vista a maximizar a sua funcionalidade. São obtidos valores de pressão e caudal em cada ramal do sistema de condutas, sendo igualmente possível resolver o problema inverso, no qual se procura dimensionar determinado elemento da rede de forma a atingir um caudal num ramal especificado.*

Palavras Chave: *Redes de Condutas, Hardy-Cross, Software*

1. INTRODUÇÃO

Os sistemas de redes de condutas encontram um campo de aplicação prática muito variado, desde redes de distribuição de gás até sistemas de ar condicionado. Se bem que problemas simples possam ser resolvidos analiticamente, sistemas mais complexos necessitam de métodos iterativos para serem solucionados. O método mais popular para abordar este tipo de situações é o método de Hardy-Cross (Cross, 1936), o qual foi desenvolvido inicialmente para cálculo manual. Este método baseia-se numa correcção aditiva de caudal a aplicar em cada ramal do sistema de condutas, para que a solução se aproxime da satisfação da conservação de energia ao longo de cada circuito na rede. Apesar de existirem soluções baseadas em folhas de cálculo e aplicações matemáticas (Hodge e Taylor, 2002; Huddleston, 2003), a implementação em código de programação com interface gráfica torna-se mais poderosa e funcional. O presente trabalho serve, primariamente, o propósito de uma aplicação académica. A sua interface gráfica e a facilidade com que um problema pode ser construído e modificado permite ao estudante analisar como pequenas alterações poderão influenciar significativamente o escoamento na rede.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Descreve-se, seguidamente, a teoria subjacente ao problema da resolução de redes. Antes de prosseguir, torna-se conveniente estabelecer algumas definições:

Designa-se por rede um conjunto de ramais inter-conectados.

A junção de dois ou mais ramais designa-se por nodo. Os ramais interiores ligam dois nodos, enquanto os ramais exteriores se encontram ligados somente a um nodo.

A cada nodo corresponde um índice. Ao domínio exterior corresponde o índice “0”.

Ramais interiores podem ser compostos de vários sub-ramais, cada um com o seu próprio diâmetro, comprimento e rugosidade.

A ligação entre dois sub-ramais pode ser efectuada por intermédio de uma válvula, uma bomba, ou simplesmente uma mudança no diâmetro (acidentes).

Os acidentes são responsáveis por perdas localizadas. As bombas são também definidas como acidentes.

Os caudais que circulam nos ramais são definidos como positivos quando se dão no sentido do nodo de menor índice para o nodo com maior índice.

2.1. Conservação de Massa

Basicamente, a resolução de uma rede de condutas passa pela satisfação da conservação de massa em cada nodo e conservação de energia ao longo de circuitos.

A satisfação de conservação de massa é obtida assegurando que a soma dos caudais que chegam a determinado nodo é igual à soma dos caudais que dele partem, ou seja (cf. Fig. 1):

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4 = 0 \quad (1)$$

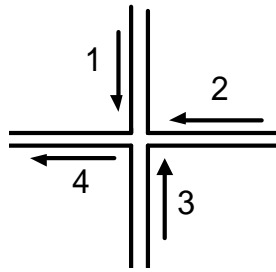


Figura 1. Representação de caudais em cada nodo

2.2. Conservação de Energia

A equação de conservação de energia escrita entre os dois nodos extremos de um ramal (1 e 2), estabelece que:

$$h_{1 \rightarrow 2} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + z_1 - z_2 = \frac{8Q^2}{\pi^2 g} \sum \left[\frac{1}{d^4} \left(f \frac{\Delta L}{d} + k \right) \right] - \sum h_p + \sum h_t \quad (2)$$

onde:

p - pressão	k - coeficiente de perda de carga localizada
v - velocidade	h_t - perda de carga em turbinas
z - cota	h_p - altura de elevação de bombas
f - factor de atrito de Darcy-Weisbach	ΔL - comprimento do ramal
Q - caudal volúmico	g - aceleração da gravidade
d - diâmetro do tubo	ρ - massa volúmica do fluido

A Eq. (2) pode ser escrita na seguinte forma:

$$h_{1 \rightarrow 2} = \alpha_f Q^2 - \sum h_p + \sum h_t \quad (3)$$

sendo:

$$\alpha_f = \frac{8}{\pi^2 g} \sum \left[\frac{1}{d^4} \left(f \frac{\Delta L}{d} + k \right) \right] \quad (4)$$

onde o somatório é feito para todos os sub-ramais e acidentes em cada ramal.

Generalizando a Eq. (3) para uma direcção arbitrária do escoamento, obtém-se:

$$h_{a \rightarrow b} = \delta_x \delta_y \alpha_f Q^2 - \delta_x \sum h_p + \delta_x \delta_y \sum h_t \quad (5)$$

onde δ_x identifica o sentido do escoamento da seguinte forma:

$$\delta_x = \text{sgn}(b - a) \quad (6)$$

sendo ‘a’ e ‘b’ os números identificativos dos nodos extremidade do ramal e:

$$\delta_y = \text{sgn}(Q) \quad (7)$$

Os caudais, assim como a altura de elevação das bombas, são definidos como positivos se estes apontam no sentido do nodo menor para o nodo maior.

2.2.1. Conservação de energia ao longo de um circuito fechado

Durante o processo iterativo, a perda de carga total ao longo de um circuito fechado será diferente de zero, a menos que a solução final tenha sido alcançada. Assim, pode-se escrever:

$$\sum_{j=1}^{n_j} h_j^* = \sum_{j=1}^{n_j} \left(\delta_x \delta_y \alpha_f Q^2 - \delta_x \sum h_p + \delta_x \delta_y \sum h_t \right) \quad (8)$$

onde o expoente ‘*’ indica que se trata da perda de carga correspondente à solução não convergida. Surge então a necessidade de corrigir os caudais em cada ramal, por meio de uma quantidade ΔQ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_j} \left(\delta_x \delta_y \alpha_f (Q + \Delta Q)^2 - \delta_x \sum h_p + \delta_x \delta_y \sum h_t \right) &\cong \\ \sum_{j=1}^{n_j} \left(\delta_x \delta_y \alpha_f (Q^2 + 2Q\Delta Q) - \delta_x \sum h_p + \delta_x \delta_y \sum h_t \right) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

onde, partindo do pressuposto de que as correcções de caudal são suficientemente pequenas, os termos de ordem superior foram desprezados. Como condição necessária para que a conservação de massa não seja alterada pelas correcções de caudal, a grandeza $|\Delta Q|$ deverá ser a mesma em cada ramal de cada circuito fechado. Assim, combinando as Eqs. (8) e (9), obtém-se a seguinte equação para o cálculo das correcções de caudal:

$$\Delta Q_i = \frac{-\sum_{j=1}^{n_j} h_j^*}{2\delta_{x_i} \sum_{j=1}^{n_j} (\alpha_f |Q|)} \quad ; \quad i = 1, n_j \quad (10)$$

As correcções são aplicadas em cada ramal, sendo empregue um factor de sub-relaxação, de forma a assegurar a convergência do processo iterativo:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \gamma \Delta Q_i \quad ; \quad i = 1, n_j \quad ; \quad (11)$$

2.2.2. Conservação de energia ao longo de circuitos abertos

Os circuitos abertos são estabelecidos através da ligação de dois ramais exteriores nos quais a pressão é imposta como condição fronteira. Com base nisto, a equação de conservação de energia toma a seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{nk} h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + z_1 - z_2 = \sum_{k=1}^{nk} (\delta_x \delta_y \alpha_f Q^2 - \delta_x \sum h_p + \delta_x \delta_y \sum h_t) \quad (12)$$

onde 'nk' é o número de ramais interiores que formam o circuito aberto. A explicitação da correcção de caudal é feita da seguinte forma:

$$\Delta Q_i = \frac{\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + z_1 - z_2 \right) - \sum_{k=1}^{nk} h_k^*}{2\delta_{x_i} \sum_{k=1}^{nk} (\alpha_f |Q|)} \quad ; \quad i = 1, nk \quad (13)$$

Esta correcção é também aplicada ao último ramal exterior do circuito, assegurando assim, a satisfação da conservação de massa no nodo correspondente. Se o primeiro ramal exterior possui, como condição fronteira, imposição de caudal e pressão, não é necessário efectuar nenhuma correcção de caudal. Se só pressão é imposta, a correcção de caudal é assegurada por imposição de satisfação global de conservação de massa.

2.3. Condições Fronteira

No presente contexto, entendem-se por condições fronteira as variáveis (pressão, caudal) e correspondentes valores impostos nos ramais exteriores da rede. A correcta imposição de condições fronteira deverá obedecer às seguintes regras, para que o problema tenha uma única solução física:

- A soma de todas as variáveis impostas como condição fronteira deve ser igual ao número total de ramais exteriores.
- A imposição simultânea de pressão e caudal poderá ser efectuada num só ramal exterior. Consequentemente, só um ramal exterior poderá ser deixado sem imposição de variáveis.
- Em, pelo menos, um ramal exterior, deverá ser conhecida a pressão. Esta é uma condição necessária para que se possa calcular a pressão em qualquer ponto da rede.

- Por questões relacionadas com o processo de resolução, pressão e caudal deverão ser impostos no mesmo ramal exterior, sempre que possível. Isto aplica-se ao caso em que, em determinada rede, são conhecidos os caudais em todos os ramais exteriores. Neste caso, o ramal exterior onde a pressão vai ser especificada, deverá ter imposto o correspondente valor de caudal.

3. IMPLEMENTAÇÃO

3.1 Inicialização dos Caudais

O campo inicial de velocidades deve, necessariamente, satisfazer a equação de conservação de massa em cada nodo da rede. Este aspecto é crucial, uma vez que os ajustes de caudal subsequentes para assegurar a conservação de energia não irão modificar o balanço mássico em cada nodo. Começa-se por arbitrar valores para os caudais em todos os ramais exteriores e interiores, à excepção daqueles em que o caudal é imposto. Os valores iniciais de caudal nos ramais interiores são obtidos pela resolução do sistema de equações (14), o qual representa a conservação de massa em todos os nodos, à excepção de um. No nodo em falta, o balanço global assegura a satisfação da conservação de massa.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,nb} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,nb} \\ \vdots & & & \\ a_{nn-1,1} & a_{nn-1,2} & \dots & a_{nn-1,nb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{nb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{nn-1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Os termos b_j representam o caudal no ramal exterior ligado ao nodo de índice j , “nn” é o número total de nodos e “nb” é o número total de ramais interiores. O coeficiente genérico a_{ij} é nulo se o ramal “j” não se encontra ligado ao nodo “i”. Em caso contrário, o seu valor é calculado da seguinte forma:

$$a_{ij} = \text{sgn}(n_x - i) \quad (15)$$

em que o ramal “i” liga os nodos “j” e “ n_x ”. A solução para este sistema de equações é obtida através do método de Gauss-Seidel.

3.2. Construção dos Circuitos Fechados

Como já referido anteriormente, a aplicação da equação de conservação de energia ao longo de um circuito fechado traduz-se na imposição de uma perda de carga nula ao longo do circuito. O número de circuitos a considerar para este efeito deverá ser igual ao número máximo de circuitos independentes que é possível construir na rede em análise. Na presente implementação, o processo de geração dos circuitos independentes é totalmente automático. Numa fase inicial, são gerados todos os possíveis circuitos fechados existentes na rede. Os circuitos são seguidamente representados como linhas na matriz da Eq. (16):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,nb} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,nb} \\ \vdots & & & \\ a_{c,1} & a_{c,2} & \dots & a_{c,nb} \end{bmatrix} \quad (16)$$

onde “c” é o número de circuitos encontrado e a_{ij} é um coeficiente calculado de acordo com a seguinte equação:

$$a_{ij} = \text{sgn}(b - a) \quad (17)$$

sendo “a” e “b” os índices dos nodos que o ramal “j” liga, segundo a direcção em que o circuito é percorrido. Se o ramal “j” não estiver presente no circuito considerado, o correspondente índice será, naturalmente, nulo. O próximo passo consiste em condensar a matriz (16), de forma a rejeitar as linhas linearmente dependentes. Este processo é efectuado através do método de Gauss-Seidel, conduzindo a uma matriz que representa o número máximo de circuitos linearmente independentes na rede.

3.3. Construção dos Circuitos Abertos

Circuitos abertos ligam ramais exteriores com imposição de pressão como condição fronteira. Na presente implementação, todos os circuitos abertos começam no mesmo ramal exterior. O sistema de busca assegura que um “caminho” entre os dois ramais exteriores em questão é sempre encontrado. Como forma de reduzir ao mínimo os erros de arredondamento, um sistema de optimização é aplicado à posteriori, como forma de minimizar o número de ramais que compõem cada circuito aberto.

3.4. Método de Resolução

Como já referido, dois tipos de problemas podem ser abordados com o presente software:

Problema de cálculo de caudais:

Neste caso, o dimensionamento da rede encontra-se feito, sendo, portanto, conhecidos os comprimentos, diâmetros, rugosidades dos ramais e sub-ramais, assim como as características de todos os acidentes da rede. O objectivo, neste caso, é calcular o caudal e a pressão em toda a rede. Para isso, as Eqs. (10) e (13) são aplicadas sucessivamente até que as correcções de caudal ΔQ se encontrem todas abaixo de um determinado valor Δ_{\max} previamente estabelecido:

$$\Delta = \max \left(100 \frac{\Delta Q_i}{Q_i} \right) < \Delta_{\max} \quad ; \quad i = 1, nb \quad (18)$$

Problema de dimensionamento:

Neste caso, é imposto, como condição fronteira adicional, um caudal em determinado ramal interior (variável objectivo). Assim sendo, será necessário deixar livre uma variável, a qual será ajustada de forma a se alcançar o objectivo proposto. A variável livre poderá ser:

- O diâmetro de um ramal ou o diâmetro de todos os ramais da rede.
- O comprimento de um ramal ou o comprimento de todos os ramais da rede.
- A altura de elevação de uma bomba, a perda de carga de uma turbina, ou o coeficiente de perda de carga de uma válvula ou outro acidente.

A resolução deste tipo de problemas consiste, de facto, em resolver um número “n” de problemas de caudal, em que, ao longo do processo, o valor da variável livre vai sendo continuamente ajustado de acordo com as mudanças da variável objectivo, de acordo com a seguinte fórmula:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \left(\frac{\phi^n - \phi^{n-1}}{Q^n - Q^{n-1}} \right)^a (Q_g - Q^n) \quad (19)$$

onde ϕ é a variável livre e Q_g é a variável objectivo (caudal). O expoente “a” controla a sensibilidade da variável livre às mudanças na variável objectivo. No caso em que a variável livre é o diâmetro do(s) ramal (ramais), o seu valor é igual a 0.5. Em todos os outros casos, o seu valor é igual à unidade.

Este tipo de problemas poderá ser de difícil convergência, ou mesmo apresentar divergência, especialmente nos casos em que a variável livre tem pouca influência na variável objectivo. Pode até acontecer que, do ponto de vista físico, o objectivo seja impossível de alcançar, não se conseguindo, naturalmente neste caso, a convergência do processo de resolução.

4. A INTERFACE GRÁFICA E APRESENTAÇÃO DE EXEMPLOS

Configuração geométrica da rede

A rede representada na Fig. 2 servirá como exemplo para a descrição do programa. A Caixa de Diálogo para desenho da rede encontra-se representada na Fig. 3. O utilizador serve-se do “rato” para desenhar a rede, sendo os nodos e ramais automaticamente numerados. Existem ferramentas disponíveis para a correcção da rede, através da remoção ou inserção de nodos ou ramais. Esta mesma Caixa de Diálogo contém outros campos para a especificação das dimensões dos ramais, imposição de condições fronteira e características de acidentes. Neste exemplo, todos os ramais possuem um comprimento de 10 m, excepção feita aos ramais 10 e 12, com comprimentos de 5 m e 15 m, respectivamente. Todos os diâmetros são de 1cm com uma rugosidade absoluta de 0.02 mm.

Como já referido anteriormente, as condições fronteira são impostas em todos os ramais exteriores. Ao presente problema, correspondem as condições apresentadas na Tab. 1.

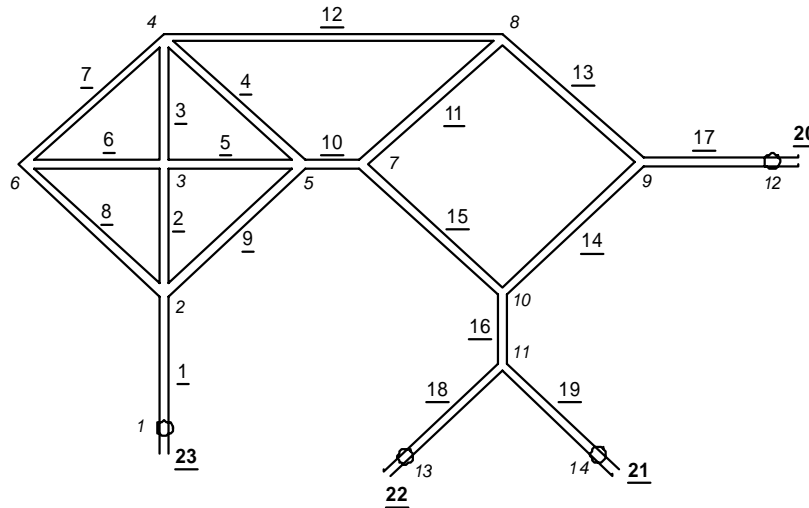


Figura 2. Representação esquemática da rede de exemplo

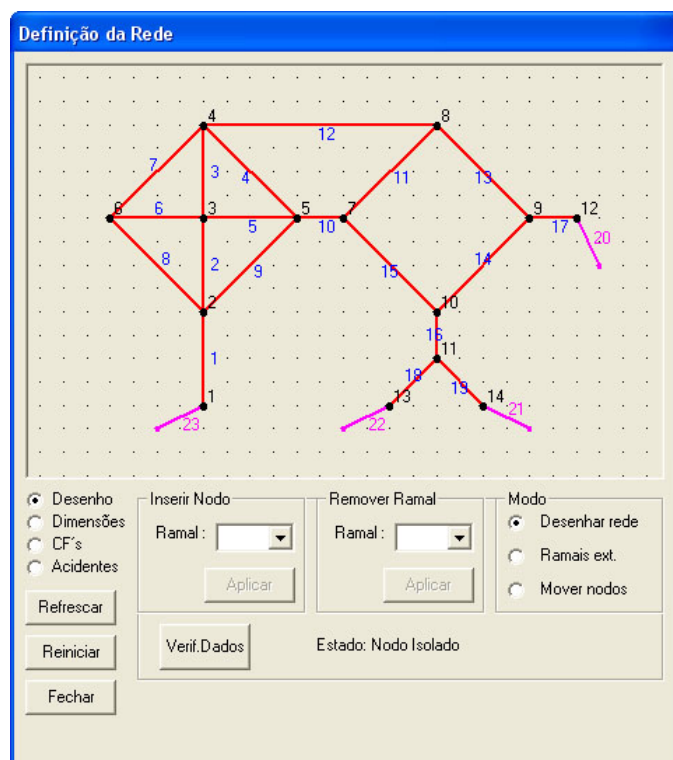


Figura 3. Caixa de Diálogo para a definição da rede

Tabela 1. Condições fronteira para a rede de exemplo.

Ramal	Diâmetro [cm]	Variáveis Impostas	Valor
22	1.0	Pressão e Caudal	1 kPa; 2 l/s
21	1.0	Pressão	5 kPa
20	1.0	Pressão	10 kPa
23	1.0	Nenhuma	--

Acidentes

Perdas localizadas ou bombas separam sub-ramais contíguos. A especificação das suas características é feita numa sub-janela da Caixa de Diálogo apresentada anteriormente, como se pode observar na Fig. 4. No presente exemplo, não existem acidentes.

Figura 4. Sub-janela para definição dos acidentes

A Interface de Cálculo

Pode ser observada, na Fig. 5, a Caixa de Diálogo de controlo do processo de cálculo. O utilizador tem a possibilidade de especificar diversos parâmetros, como sejam o número máximo de iterações e factores de sub-relaxação, entre outros. Durante o cálculo, pode ser monitorizada a evolução dos valores de algumas variáveis.

A convergência do processo iterativo é bastante rápida, como pode ser apreciado no gráfico da Fig. 6, o qual representa a evolução dos resíduos Δ (Eq. 18) em função do número de iterações “n”. Neste caso, com um factor de sub-relaxação de 0.8, um total de 39 iterações foi necessário para ser alcançada a convergência, a qual foi definida para um ajuste percentual máximo de caudal em cada ramal de $1e-5$. O tempo de cálculo para este exemplo é praticamente desprezável.

The screenshot shows a software window titled 'Cálculo' with a menu bar containing 'Ficheiro'. The main area displays a table of results for 15 internal branches. Below the table, there are three sections: 'Tipo Cálculo' with a dropdown set to 'Caudal', 'Cálculo caudal' with input fields for 'Num. max. iterações' (350), 'Max. var. %' (.00001), and 'Factor sub-rel.' (.5); and 'Dimensionamento' with input fields for 'Num. max. iterações' (50), 'Erro max. %' (.01), and 'Factor sub-rel.' (.6). There are also checkboxes for 'Especificações', 'Monit. resíduos', and a dropdown for 'Every iteration'. At the bottom are 'Calcular' and 'Fechar' buttons.

Ramal	Sub-ramal	Caudal [l/s]	Perda carga cont. [m]	Perda carga loc. [m]	Ganho carga loc. [m]
12	--	2.304026E-08			
13	--	-7.262777E-01			
14	--	-1.023899E-09			
Valores nos ramais interiores					
1	--	-1.000003E+00	2.038627E+02	0.000000E+00	0.000000E+00
2	--	-3.161174E-01	2.218026E+01	0.000000E+00	0.000000E+00
3	--	-1.966113E-01	9.103140E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
4	--	-4.196741E-02	5.664188E-01	0.000000E+00	0.000000E+00
5	--	-2.030998E-01	9.669558E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
6	--	8.359369E-02	1.911588E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
7	--	2.178079E-01	1.101473E+01	0.000000E+00	0.000000E+00
8	--	-3.014016E-01	2.026867E+01	0.000000E+00	0.000000E+00
9	--	-3.824843E-01	3.184982E+01	0.000000E+00	0.000000E+00
10	--	-6.275514E-01	4.119804E+01	0.000000E+00	0.000000E+00
11	--	-1.196544E-01	3.652621E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
12	--	-3.724518E-01	4.541708E+01	0.000000E+00	0.000000E+00
13	--	-4.921062E-01	5.157504E+01	0.000000E+00	0.000000E+00
14	--	3.562156E-02	4.263206E-01	0.000000E+00	0.000000E+00
15	--	-5.078970E-01	5.480135E+01	0.000000E+00	0.000000E+00

Figura 5. A interface de cálculo

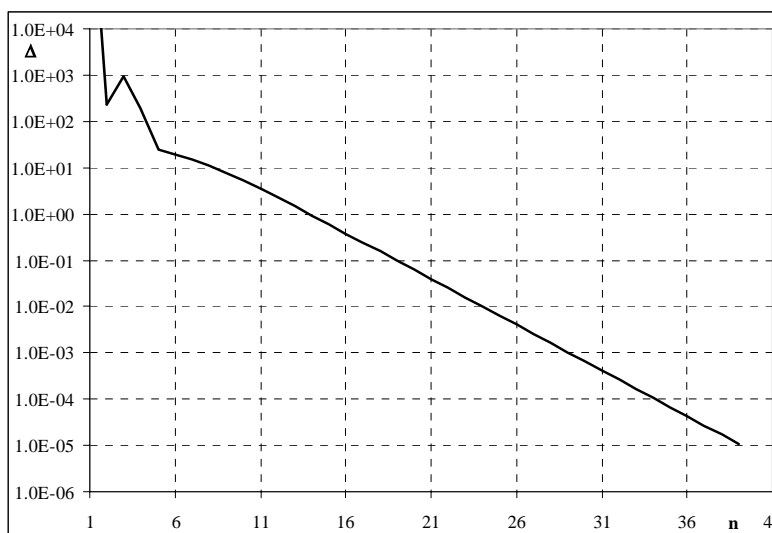


Figura 6. Historial de convergência

A Interface de Pós-Processamento

A Fig. 7 representa a interface de pós-processamento. Para além de dados relativos ao cálculo, tais como os circuitos abertos e fechados considerados, pode ser visualizada a direcção do escoamento em cada ramal, assim como dados de pressão, caudal e velocidade média do escoamento em localizações pontuais.

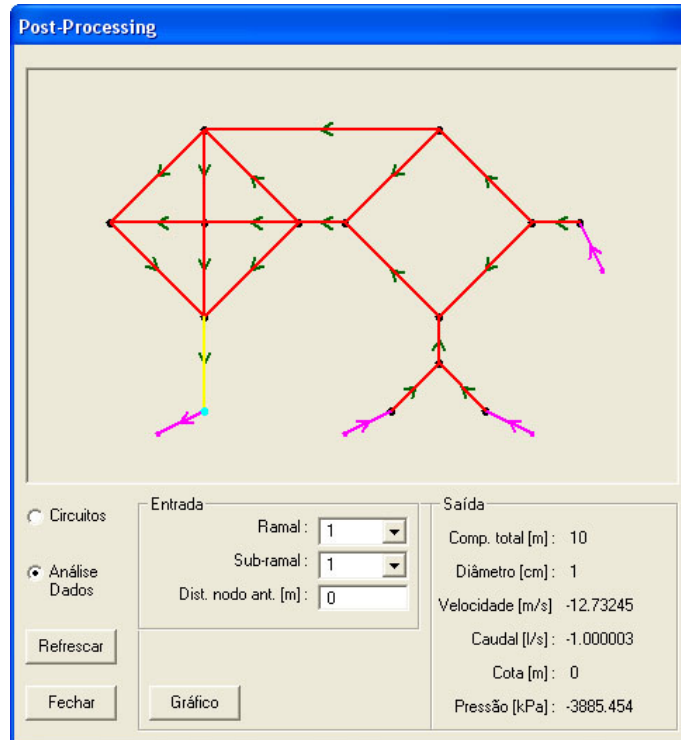


Figura 7. Interface de pós-processamento

5. CONCLUSÕES

O presente trabalho descreve uma implementação do método de Hardy-Cross para a resolução de redes de condutas, tendo sido apresentado, por limitações de espaço, somente um exemplo de aplicação. Uma das principais características do software é a sua capacidade para automaticamente construir os trajectos de circuitos abertos e fechados, ao longo dos quais a equação de conservação de energia é aplicada. As ferramentas de pós-processamento revelam-se também de grande utilidade na análise da solução obtida. Os testes feitos indicam que a convergência obtida pelo presente método é bastante boa. O software é particularmente vocacionado para aplicações académicas, permitindo ao utilizador resolver problemas de cálculo de caudal assim como problemas de dimensionamento da rede.

6. REFERÊNCIAS

- Cross, H., 1936, "Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors", Univ. Ill. Bull. 286, November 1936.
- Hodge, B. K. and Taylor, R. P. 2002, "Piping-System Solutions Using Mathcad", Computer Applications in Engineering Education, Vol. 10, N. 2, pp. 59-78.
- Huddleston, D.H. 2003, "Water Resource Engineering Illustrations Using Excel", ASEE-SE Section Annual Conference, 6-8 Abril.

IMPLEMENTATION OF THE HARDY-CROSS METHOD FOR THE SOLUTION OF PIPING NETWORKS

António M. Gameiro Lopes

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade de Coimbra

3030 Coimbra – Portugal

email: antonio.gameiro@dem.uc.pt

Abstract. *This paper describes a user-friendly software for the calculation of the flow in general piping networks. The computational method is based on the iterative procedure known as the Hardy-Cross algorithm. Solution is provided for pressure and flow-rate in each branch. Dimensioning problems, where pump characteristics or a pipe diameter are seek for achieving a pre-specified flow-rate condition, may also be tackled.*

Keywords: *Piping Networks, Hardy-Cross, Software*