

# **ESCOAMENTO LAMINAR EM UM CANAL COM UMA MATRIZ POROSA MODELADA POR UM ARRANJO DE HASTES QUADRADAS**

**Renato A. Silva<sup>1</sup>**

**Marcelo J.S. De-Lemos<sup>2\*</sup>**

Departamento de Energia - IEME

Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

12228-900 - São José dos Campos - SP – Brasil

E-mail: <sup>1</sup>renatoas@mec.ita.br, <sup>2</sup>delemos@mec.ita.br

\* Corresponding author

**Resumo.** O presente trabalho apresenta resultados referentes a um escoamento laminar completamente desenvolvido através de uma matriz porosa, sendo esta modelada como um arranjo periódico composto de hastes quadradas. O objetivo deste trabalho é validar a metodologia através da comparação com os valores encontrados na literatura e investigar a influência da porosidade, do número de Reynolds e da morfologia no comportamento da queda de pressão macroscópica. As equações que regem o escoamento são discretizadas através do método de volumes finitos e o sistema de equações algébrico é resolvido pelo método SIP. Para o acoplamento pressão-velocidade, o método SIMPLE é aplicado.

**Palavras-chave:** matriz porosa, solução numérica, escoamento laminar, hastes sólidas, propriedades macroscópica.

## **1. INTRODUÇÃO**

Em função da grande aplicação tecnológica envolvendo o escoamento de fluidos em meios porosos, é de extrema importância o estudo do comportamento macroscópico das propriedades ao longo da estrutura porosa.

Kuwahara *et. al.* (1994) e Nakayama *et. al.* (1995) testaram vários modelos numéricos de meios porosos formados por hastes cilíndricas, quadradas e esféricas, e encontraram que o modelo bi-dimensional e o tri-dimensional levam a expressões semelhantes para a permeabilidade.

Kuwahara *et. al.* (1998), utilizando um modelo de turbulência de baixo Reynolds (modelagem microscópica), resolveram o escoamento interno a um meio poroso infinito formado por hastes quadradas com um arranjo espacialmente periódico. Eles constataram a presença de turbulência para  $Re_H > 10^4$  e que, nessas condições, o modelo estendido Darcy-Forchheimer apresenta bons resultados.

Pedras e de Lemos (2001a-b) desenvolveram um modelo macroscópico de turbulência onde uma constante foi introduzida na equação da energia cinética de turbulência. O valor desta constante foi obtido através de experimentação numérica aplicada a um meio poroso formado por hastes cilíndricas com um arranjo espacialmente periódico. Esta constante foi ajustada para hastes elípticas longitudinais e transversais em Pedras e de Lemos (2001c) e Pedras e de Lemos (2003).

Prinos *et. al.* (2003) analisaram numérica e experimentalmente as características do escoamento turbulento em um canal aberto com uma camada porosa, donde concluíram que a estrutura da camada porosa (“staggered” e “non-staggered”) tem pouca influência na característica do escoamento próximo à interface entre os meios limpo e poroso.

Este trabalho além de validar a metodologia numérica empregada através da comparação com os dados de Kuwahara *et. al.* (1998), investiga a influência da porosidade, do número de Reynolds e da morfologia da matriz porosa no comportamento da queda de pressão macroscópica.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

### 2.1 GEOMETRIA E CONDIÇÕES DE CONTORNO

O escoamento em consideração é esquematicamente mostrado na Figura 1a, sendo o meio poroso formado por hastes quadradas com arranjo espacialmente periódico. Este tipo de meio poroso satisfaz à condição de homogeneidade e, dependendo do ângulo de incidência do escoamento, sua permeabilidade pode ser representada por uma constante (“isotropia”). A estrutura deste meio poroso infinito será representada por uma única célula com condições de contorno simétricas e periódicas (Figura 1b).

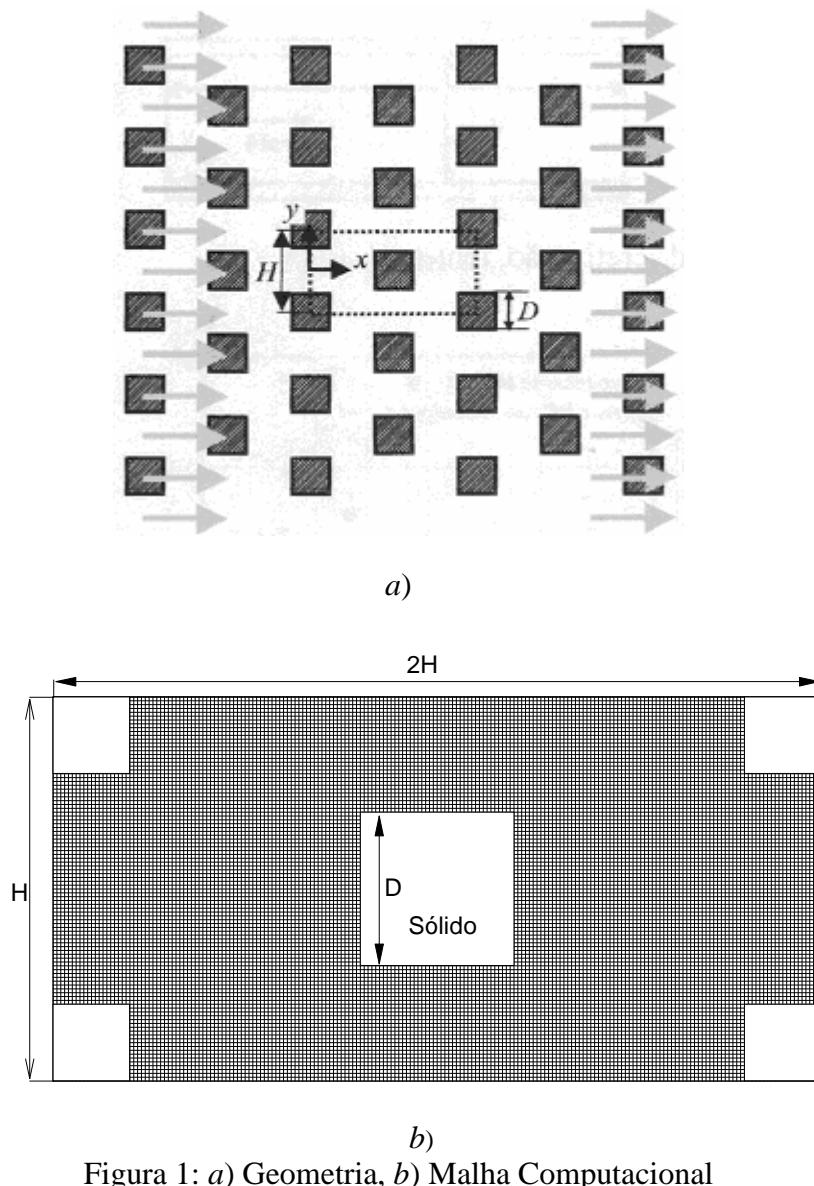


Figura 1: a) Geometria, b) Malha Computacional

Para que o escoamento fosse macroscopicamente desenvolvido e unidimensional na direção longitudinal,  $x$ , foram aplicadas, na célula periódica (Figura 1b), as seguintes condições de contorno para as equações (3) e (4):

Nas paredes das hastes,

$$\mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

em  $y=0$  e  $y=H$  linhas de simetria:

$$u|_{x=0} = u|_{x=2H}, v|_{x=0} = v|_{x=2H} = 0 \quad (2)$$

## 2.2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

A equação da continuidade microscópica para um fluido incompressível é dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

A equação da quantidade de movimento (Navier-Stokes) para um fluido com  $\rho$  e  $\mu$  constantes, pode ser escrita como:

$$\mathbf{r} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4)$$

## 3. MÉTODO NUMÉRICO

O método numérico utilizado para a resolução das equações que integram o modelo do escoamento é baseado num código computacional em volumes finitos em coordenadas generalizadas, embora a malha utilizada seja cartesiana. A Figura 2 mostra um volume de controle genérico juntamente com as coordenadas generalizadas  $\eta$ - $\xi$ . A discretização de uma equação de conservação bidimensional e em regime permanente para uma quantidade  $j$  qualquer, pode ser expressa como:

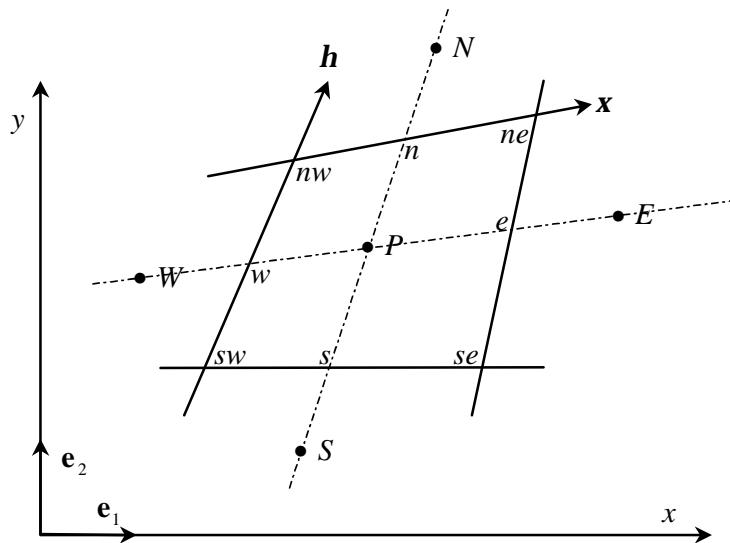


Figura 2: Notação e Volume de Controle.

$$I_e + I_w + I_n + I_s = S_j \quad (5)$$

$I_e$ ,  $I_w$ ,  $I_n$  e  $I_s$  representam, respectivamente, os fluxos de j faces leste, oeste, norte e sul do volume de controle e  $S_j$  o seu termo fonte. Uma divulgação da metodologia numérica desenvolvida está apresentada em Pedras e de Lemos (2001b). Neste trabalho, todos os resultados numéricos foram convergidos até que os valores dos resíduos para as variáveis dependentes do problema atingissem um valor menor que  $10^{-7}$ , onde o resíduo é definido como a diferença entre o lado esquerdo e o direito da equação algébrica correspondente.

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os cálculos foram efetuados variando o número de Reynolds,  $Re_H = \frac{|\mathbf{u}_D|H}{\nu}$ , onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática,  $H$  é o comprimento característico,  $\mathbf{u}_D$  é a velocidade de Darcy ou superficial e o valor da porosidade,  $f = 1 - \frac{D^2}{H^2}$ , onde  $H$  é a altura do canal e  $D$  é o tamanho do lado da haste quadrada.

Usando a relação de Dupuit-Forchheimer,  $\mathbf{u}_D = f \langle u \rangle^i$  chega-se a velocidade de Darcy, onde  $\langle u \rangle^i$  é a média intrínseca. A média intrínseca é a média volumétrica de uma propriedade qualquer,  $\phi$ , associada ao fluido, ponderada pelo volume de fluido  $\Delta V_f$ , contido num volume elementar representativo,  $\Delta V$ :

$$\langle \mathbf{j} \rangle^i = \frac{1}{\Delta V_f} \int_{\Delta V_f} \mathbf{j} dV \quad (6)$$

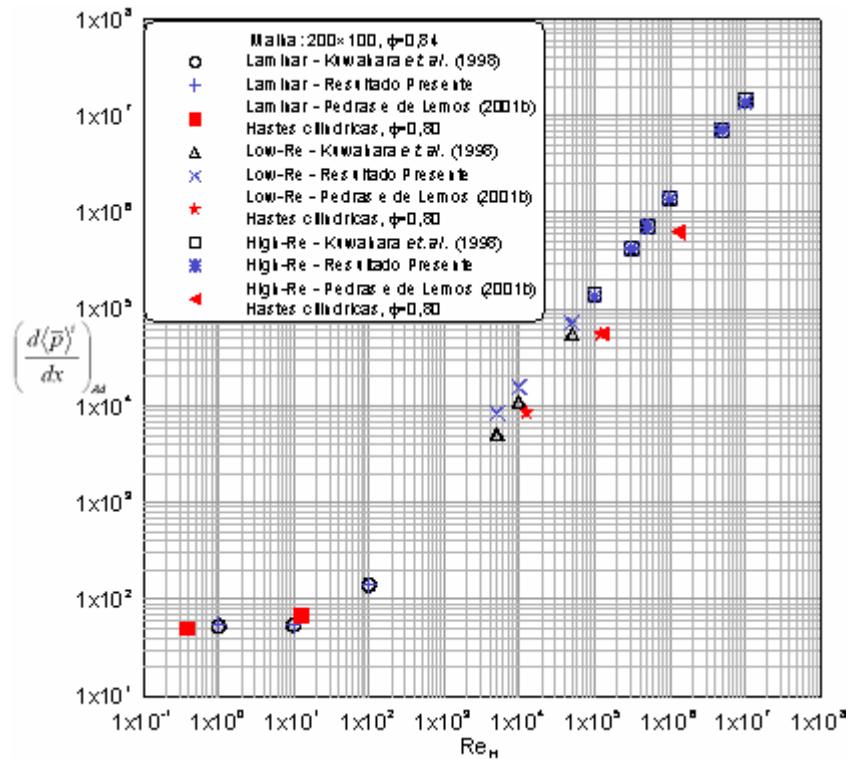


Figura 3: Queda de pressão como função do  $Re_H$  para a célula da Figura 1b.

Na Figura 3 o termo  $(d\langle \bar{p} \rangle^i / dx)_{Ad}$  representa o gradiente adimensional da média intrínseca da pressão,

$$\left( \frac{d\langle \bar{p} \rangle^i}{dx} \right)_{Ad} = - \frac{d\langle \bar{p} \rangle^i}{dx} \frac{H^2}{m|\bar{\mathbf{u}}|_D} \quad (7)$$

sendo que o gradiente da média intrínseca da pressão foi calculado através do campo de pressão microscópico,

$$\frac{d\langle \bar{p} \rangle^i}{dx} = \frac{1}{2H(H-D)} \int_{D/2}^{(H-D)/2} (p|_{x=2H} - p|_{x=0}) dy \quad (8)$$

Resultados para a queda de pressão em um largo intervalo de  $Re_H$  são apresentados na Figura 3 , sendo esses comparados com os resultados de Kuwahara *et. al.* (1998) e Pedras e de Lemos (2001b). Os resultados obtidos para escoamento laminar e para ambos os modelos de turbulência usados (low and high Re) apresentaram uma boa concordância com os dados numéricos de Kuwahara *et. al.* (1998) mostrados. Como esperado, os resultados apresentados por Pedras e de Lemos (2001b) apresentaram valores de pressão ligeiramente menores que os aqui apresentados. Isto parece ser devido à morfologia da estrutura porosa, que foi simulada utilizando um arranjo infinito de hastes cilíndricas.

A Figura 4 apresenta resultados para o efeito de  $Re_H$  e  $\phi$  para o gradiente de pressão adimensional. Para a mesma vazão a figura indica que a queda de pressão aumenta com a redução da porosidade, isto é, uma redução de  $\phi$  implica no aumento de  $\langle u \rangle^i$  para manter a mesma velocidade de Darcy,  $u_D$ . Além disso, comparando com os dados de Pedras e de Lemos (2001b) para haste cilíndrica, verifica-se que, para baixos valores de Reynolds, o comportamento da queda de pressão é similar. Para altos valores de Reynolds, porém, o efeito da morfologia começa a aparecer através do distanciamento das curvas. Conforme esperado, o gradiente de pressão necessário para superar a resistência do escoamento é aumentado.

As Figuras 5 e 6 mostram, respectivamente, o campo de velocidade e pressão para  $Re_H=123,88$  e  $\phi$  variando de 0,36 a 0,84. O tamanho dos vetores é uniforme para aumentar a visualização. O escoamento acelera nas fronteiras superior e inferior da haste quadrada e descola atrás. O aumento da pressão nas paredes frontal, superior e inferior e recuperação após o obstáculo. Para baixa porosidade e mesma vazão, o tamanho da região de esteira é reduzido drasticamente. É importante salientar que, devido ao aumento da velocidade de entrada, a queda de pressão aumenta ao invés de diminuir.

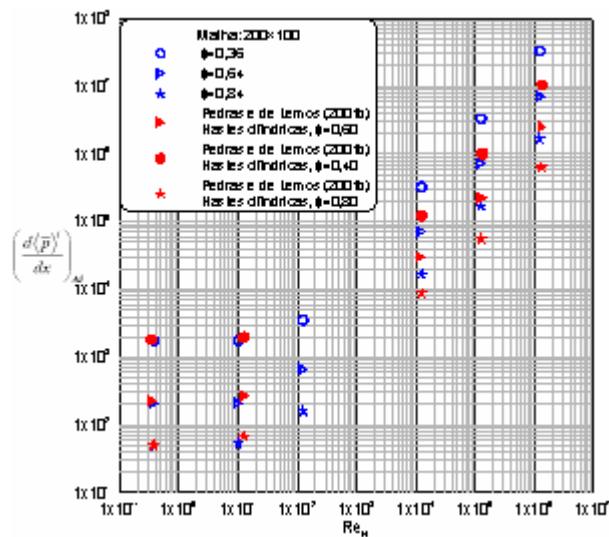


Figura 4: Gradiente da pressão adimensional como função da porosidade,  $\phi$  e  $Re_H$ .

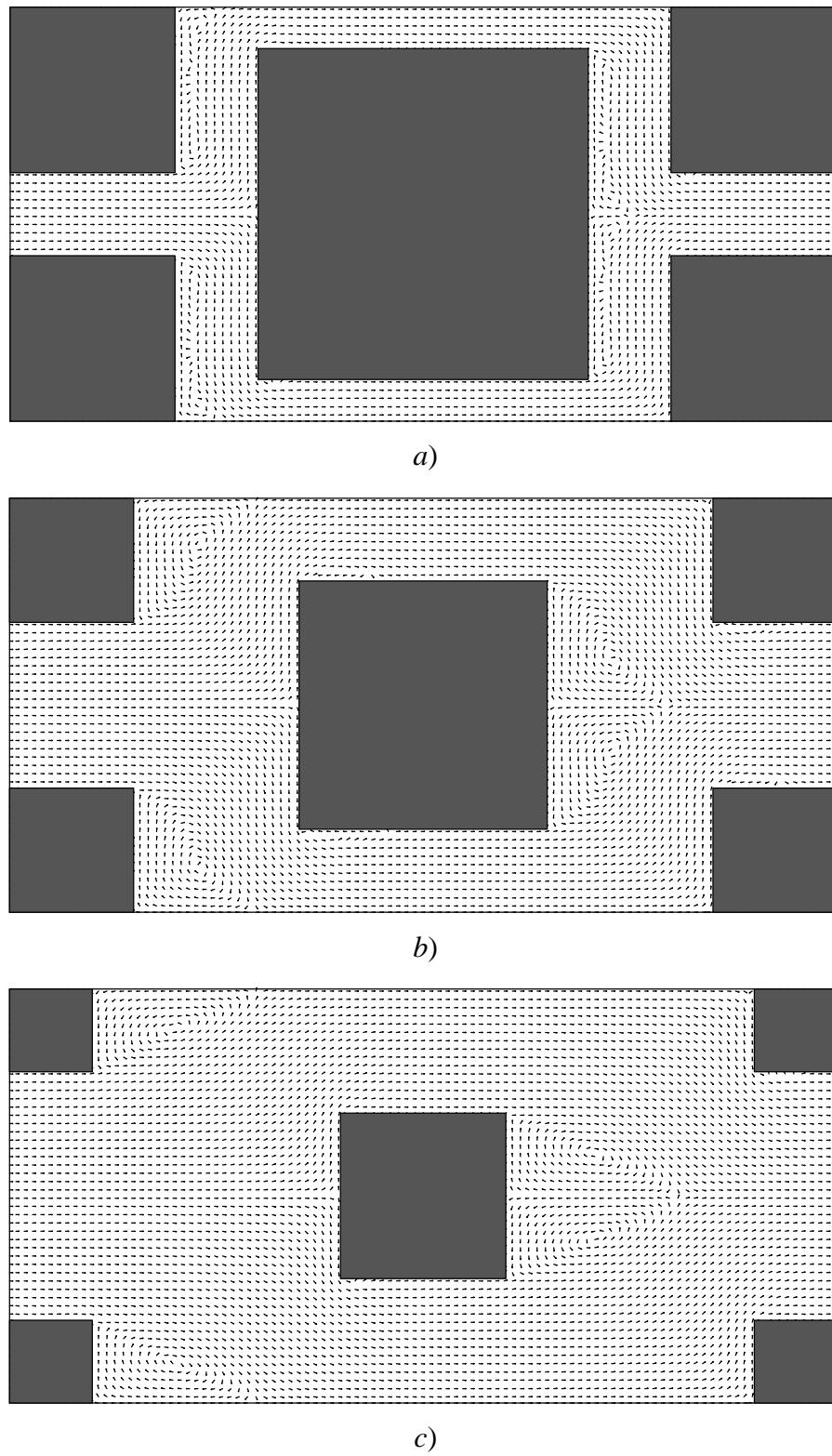


Figura 5: Campo de velocidade para  $Re_H=123,88$ : a)  $\phi=0,36$ , b)  $\phi=0,64$  e c)  $\phi=0,84$ .

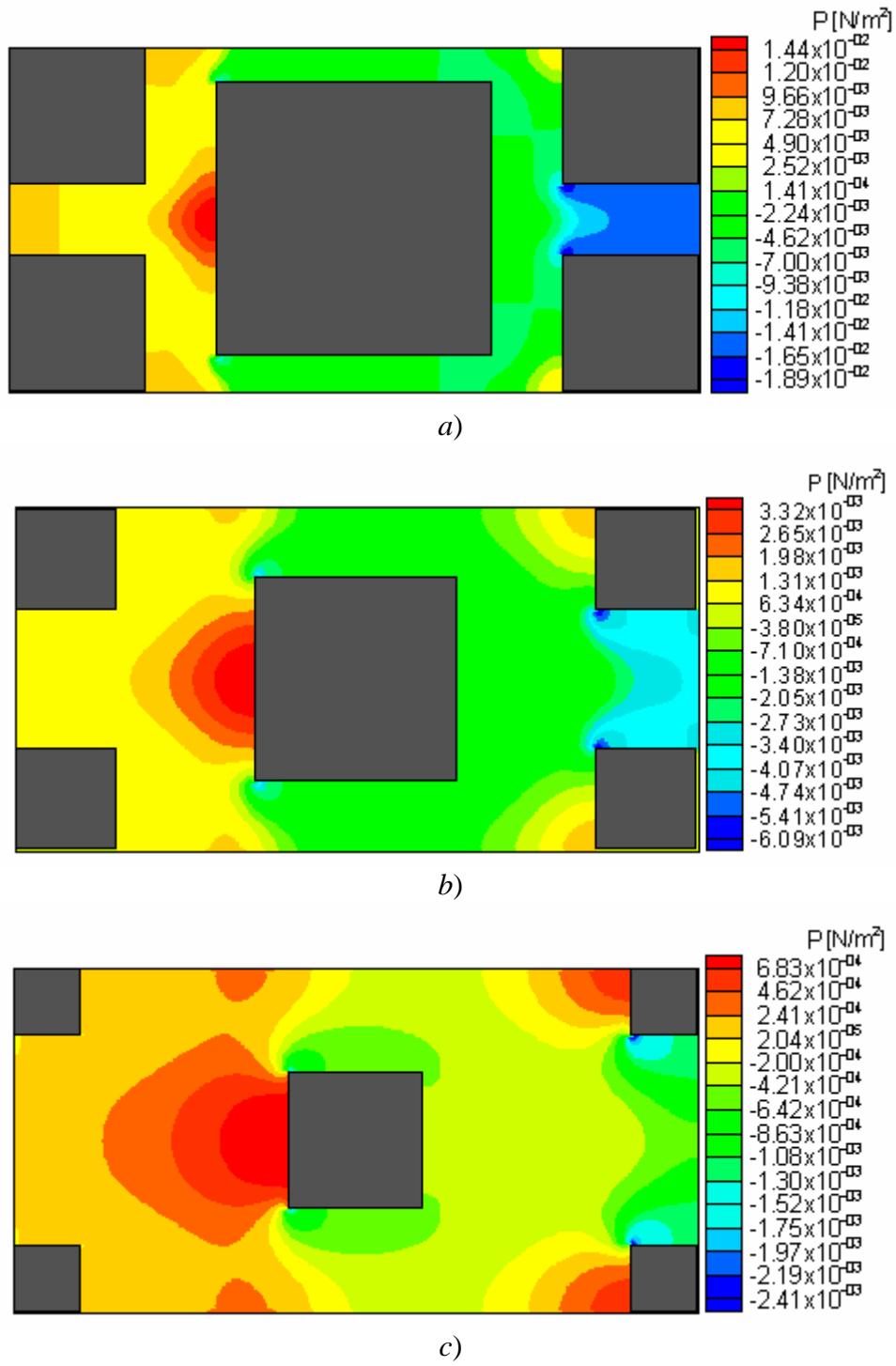


Figura 6: Campo de pressão para  $Re_H=123,88$ : a)  $\phi=0,36$ , b)  $\phi=0,64$  e c)  $\phi=0,84$

A Tabela 1 apresenta as médias intrínseca e volumétrica da velocidade, o gradiente de pressão e média intrínseca calculada segundo a Equação (8), o número de Reynolds e permeabilidade da estrutura porosa.

O valor da permeabilidade,  $K_{num}$ , mostrado na Tabela 1, foi obtido pelo cálculo do gradiente de pressão macroscópico através da célula periódica usando *creeping flow*,  $Re_H < 1$ , através da relação linear entre a vazão volumétrica e o gradiente de pressão hidráulico proposta por Darcy, (1856), e

também utilizando a correlação para hastes quadradas proposta por Kuwahara *et. al.* (1998) que é dada por:

$$K = \frac{f^3 D^2}{120(1-f)^2} \quad (9)$$

onde K é a permeabilidade, D é altura do obstáculo e,  $\phi$  é a porosidade.

Verifica-se que a permeabilidade,  $K_{\text{num}}$ , calculada, exceto para  $\phi=0,84$ , é maior que a permeabilidade,  $K_{\text{HC}}$ , apresentada por Pedras e de Lemos (2001b) para haste cilíndrica, com porosidade  $\phi=0,80$ . Este comportamento se deve ao fato da permeabilidade ser função da morfologia da estrutura porosa e é coerente com a correlações para hastes quadrada e cilíndrica proposta em Kuwahara *et. al.* (1998).

Tabela. 1: Parâmetros para análise microscópica.

Porosidade	$Re_H$	$\langle u \rangle^i$ [m/s]	$u_D$ [m/s]	$-\nabla \langle p \rangle^i$ [N/m <sup>3</sup> ]	Permeabilidade [m <sup>2</sup> ]
$\phi=0,36$	0,38	$1,53 \times 10^{-4}$	$5,52 \times 10^{-5}$	$1,71 \times 10^{-4}$	$K_{\text{num}}=5,78 \times 10^{-6}$ $K_{\text{eq. (9)}}=6,08 \times 10^{-6}$
	10,00	$2,27 \times 10^{-3}$	$1,46 \times 10^{-3}$	$4,61 \times 10^{-3}$	$\phi=0,40$ - cilindro
	123,88	$2,14 \times 10^{-2}$	$1,80 \times 10^{-2}$	$1,14 \times 10^{-1}$	$K_{\text{HC}}=5,22 \times 10^{-6}$
$\phi=0,64$	0,38	$8,63 \times 10^{-5}$	$5,52 \times 10^{-5}$	$2,13 \times 10^{-5}$	$K_{\text{num}}=4,64 \times 10^{-5}$ $K_{\text{eq. (9)}}=6,07 \times 10^{-5}$
	10,00	$2,28 \times 10^{-3}$	$1,46 \times 10^{-3}$	$5,49 \times 10^{-4}$	$\phi=0,60$ - cilindro
	123,88	$2,81 \times 10^{-2}$	$1,80 \times 10^{-2}$	$2,14 \times 10^{-2}$	$K_{\text{HC}}=4,45 \times 10^{-5}$
$\phi=0,84$	0,38	$6,57 \times 10^{-5}$	$5,52 \times 10^{-5}$	$6,93 \times 10^{-6}$	$K_{\text{num}}=1,43 \times 10^{-4}$ $K_{\text{eq. (9)}}=3,09 \times 10^{-4}$
	10,00	$1,74 \times 10^{-3}$	$1,46 \times 10^{-3}$	$1,42 \times 10^{-4}$	$\phi=0,80$ - cilindro
	123,88	$2,14 \times 10^{-2}$	$1,80 \times 10^{-2}$	$5,21 \times 10^{-3}$	$K_{\text{HC}}=1,97 \times 10^{-4}$

## 5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi mostrado a influência da porosidade  $\phi$  e do número  $Re_H$  na queda de pressão macroscópica. Foi também realizada a comparação deste trabalho com os resultados numéricos de Pedras e de Lemos (2001b) para hastes cilíndricas com porosidade,  $\phi=0,80$ , evidenciando o efeito da morfologia na queda de pressão. Além disso, os resultados aqui apresentados foram comparados com os dados apresentados em Kuwahara *et. al.* (1998), apresentando uma boa concordância e indicando, em última análise, a exatidão da metodologia numérica aplicada.

## 6. AGRADECIMENTOS

Os autores são gratos a FAPESP e ao CNPq, pelo suporte financeiro durante o curso desta pesquisa.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Darcy, H., 1856, “Les Fontaines Publiques de la Ville Dijon”, Victor Dalmond, Paris, France.  
 Kuwahara, F., Nakayama, A. and Koyama, H., 1994, “Numerical Modeling of Heat and Fluid Flow in a Porous Medium”. Proc. Int. Heat Transfer Conf., Vol. 5, pp. 309-314.

- Kuwahara, F., Kameyama, Y., Yamashita, S. and Nakayama, A., 1998, "Numerical Modeling of Turbulent Flow in Porous Media Using a Spatially Periodic Array". *Journal of Porous Media*, Vol. 1, nº 1, pp. 47-55.
- Nakayama, A., Kuwahara, F., Kawamura, Y. and Koyama, H., 1995, "Three-Dimensional Numerical Simulation of Flow Through a Microscopic Porous Structure". *ASME/JSM Thermal Engineering Conf.*, Vol. 3, pp. 313-318.
- Pedras, M.H.J., de Lemos, M.J.S., 2001a, "Macroscopic Turbulence Modeling for Incompressible Flow Through Undefinable Porous Media". *Intern. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 44, nº 6, pp. 1081-1093.
- Pedras, M.H.J., de Lemos, M.J.S., 2001b, "Simulation of Turbulent Flow in Porous Media Using a Spatially Periodic Array and a Low Re Two-Equation Closure". *Numerical Heat Transfer - Part A Applications*, Vol. 39, pp. 35-59.
- Pedras, M.H.J., de Lemos, M.J.S., 2001c, "On the mathematical Description and Simulation of Turbulent Flow in a Porous Medium Formed by an Array of Elliptic Rods". *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 123, nº 4, pp. 941-947.
- Pedras, M.H.J., de Lemos, M.J.S., 2003, "Computation of Turbulent Flow in Porous Media Using a Low Reynolds  $k-\epsilon$  Model an Infinite Array of Spatially Periodic Elliptic Rods". *Numerical Heat Transfer – Part A*, Vol. 43, pp. 585-602.
- Prinos, P., Sofialidis, D. and Keramaris, E., 2003, "Turbulent Flow Over and Within a Porous Bed". *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 129, nº 9, pp. 720-733.

## LAMINAR FLOW IN A CHANNEL WITH A POROUS MATRIX MODELED AS AN ARRAY OF SQUARE RODS

**Renato A. Silva<sup>1</sup>**

**Marcelo J.S. De Lemos<sup>2</sup>**

Departamento de Energia - IEIME

Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

12228-900 - São José dos Campos - SP – Brazil

<sup>1</sup>renatoas@mec.ita.br; <sup>2</sup>delemos@mec.ita.br

**Abstract.** Present work show results that refer to fully developed laminar flow through a porous media modeled as a spatially periodic array of square rods. The main objective of this work is to validate the present results with those available in the literature and investigate the influence of the porosity, Reynolds number and morphology on the behavior of the macroscopic pressure drop. The equations that govern the flow are discretized by control volume method and the obtained systems of algebraic equation are solved by the method SIP. For the pressure-velocity coupling SIMPLE method is applied.

**Palavras-chave:** porous matrix, numerical solution, laminar flow, solids rods, macroscopic properties.