# SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BURGERS BIDIMENSIONAL NÃO-LINEAR

**Edlene Cenedese**
edlene@aluno.feis.unesp.br

**Cássio Roberto Macedo Maia**
cássio@dem.feis.unesp.br

**João Batista Campos Silva**
jbcampos@dem.feis.unesp.br

**João Batista Aparecido**
jbaparecido@dem.feis.unesp.br

UNESP – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica
Av. Brasil, n.º 56, Ilha Solteira, CEP: 15385-000, Brasil.

**Resumo:** A equação de Burgers não-linear pode ser usada como um modelo matemático auxiliar para a análise de diversos problemas hidrodinâmicos de interesse tais como o estudo de turbulência, ondas de choques e desenvolvimento hidrodinâmico, entre outros tipos de escoamentos. O termo não-linear na equação de Burgers dá origem a uma onda de amplitude apreciável que se move em alguma direção. Esta onda eventualmente se dissipa e a solução não-linear tende à mesma forma da solução linearizada, porém, com uma amplitude menor. O termo não-linear aumenta abruptamente o gradiente da velocidade, entretanto, por causa do efeito de amortecimento, nenhuma descontinuidade ocorre. Para o presente trabalho, a Técnica da Transformada Integral Generalizada TTIG será aplicada para resolver formalmente a equação de Burgers não-linear sobre domínios bidimensionais. A TTIG é uma ferramenta poderosa para a resolução de equações diferenciais parciais de segunda ordem e vem sendo aplicada em problemas que apresentam diversos níveis de complexidade, tais como aqueles que apresentam equações com coeficientes não-separáveis, problemas com condições de contorno que apresentam coeficientes variáveis, problemas com domínios irregulares e problemas que apresentam não-linearidades de naturezas diversas.

**Palavras-chave:** Equação de Burgers, Transformada Integral, Não-Linear.

## 1. INTRODUÇÃO

A equação de Burgers não-linear bidimensional é uma equação diferencial parcial parabólica, a qual consiste de apenas uma variável primitiva, a velocidade, e serve como uma equação modelo para estudos das equações de Navie-Stokes turbulento, ondas de choque, entre outros fenômenos. A solução de tal equação será desenvolvida aplicando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG), que é um método híbrido analítico-numérico, para transformar uma equação diferencial parcial original em um sistema de equações diferenciais ordinários acoplado e infinito, que depois de truncado em uma determinada ordem, pode ser resolvido numericamente. Esta técnica é uma ferramenta poderosa que permite a resolução dos mais variados e complexos problemas difusivos e convectivo-difusivos. Problemas puramente difusivos, hidrodinâmicos ou térmicos, modelados por equações diferenciais elípticas lineares, definidos em domínios irregulares, ou seja, aqueles onde não se consegue encontrar um sistema de coordenadas ortogonais que coincidam com a geometria do problema, foram resolvidos por Aparecido e Cotta (1987, 1990b), Aparecido, Cotta e Ozisik (1989), Cotta, Leiroz e Aparecido (1992), e Aparecido, Viera e Campos-Silva (2000, 2001), utilizando a TTIG. Para problemas convectivo-difusivos, envolvendo convecção, hidrodinamicamente desenvolvida e termicamente em desenvolvimento, são matematicamente modelados por equações diferenciais parciais de segunda ordem, do tipo parabólico bidimensional ou tridimensional. Estes tipos de problemas foram resolvidos por Aparecido (1997), Aparecido & Cotta (1990a, 1990c,1992), Aparecido & Ozisik (1996, 1998), Dias Júnior & Aparecido (1999), Lindquist & Aparecido (1999, 2002), e Maia, Aparecido & Milanez (2000, 2001) utilizando a TTIG.

Neste trabalho, será apresentada uma solução analítica formal da equação de Burgers sobre domínio bidimensional, utilizando a TTIG. Posteriormente, em outros trabalhos, tal equação será implementada numericamente.

## 2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Considera-se a equação de Burgers para as funções velocidades $u(x,y,t)$ e $v(x,y,t)$, respectivamente, na forma:

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}=\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right]-u(x,y,t)\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}-v(x,y,t)\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y} \tag{1a}$$

$$\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial t}=\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2}\right]-u(x,y,t)\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial x}-v(x,y,t)\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial y} \tag{1b}$$

definido no domínio $(x,y)\in \Re^2$, submetido as condições inicial e de contorno, dadas respectivamente, por

$$u(x,y,t)=0, \quad t=0; \qquad v(x,y,t)=0, \quad t=0\ ; \tag{2a,b}$$

$$u(0,y,t)=u_0; \qquad \left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right|_{x=l_x}=0\,; \qquad u(x,0,t)=0\,; \qquad u(x,l_y,t)=0\,; \tag{2c,d,e,f}$$

$$v(0,y,t)=0; \qquad \left.\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial x}\right|_{x=l_x}=0\,; \qquad v(x,0,t)=0\,; \qquad v(x,l_y,t)=0\,. \tag{2g,h,i,j}$$

Define-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$U(X,Y,\tau)=\frac{u(x,y,t)}{u_0}; \qquad V(X,Y,\tau)=\frac{v(x,y,t)}{u_0}; \qquad Y=\frac{y}{l_y}; \qquad X=\frac{x}{l_y}; \qquad L_x=\frac{l_x}{l_y};$$

$$L_y=1; \qquad \tau=\frac{u_0 t}{l_y}.$$

Atualizando-se as variáveis adimensionalizadas acima definidas, as equações (1) e (2), tornam-se:

$$\frac{\partial U(X,Y,\tau)}{\partial \tau}=\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 U(X,Y,\tau)}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U(X,Y,\tau)}{\partial Y^2}\right]-U(X,Y,\tau)\frac{\partial U(X,Y,\tau)}{\partial X}-V(X,Y,\tau)\frac{\partial U(X,Y,\tau)}{\partial Y} \tag{3a}$$

$$\frac{\partial V(X,Y,\tau)}{\partial \tau}=\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 V(X,Y,\tau)}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V(X,Y,\tau)}{\partial Y^2}\right]-U(X,Y,\tau)\frac{\partial V(X,Y,\tau)}{\partial X}-V(X,Y,\tau)\frac{\partial V(X,Y,\tau)}{\partial Y} \tag{3b}$$

$$U(X,Y,\tau)=0\,,\quad \tau=0\,; \qquad V(X,Y,\tau)=0\,,\quad \tau=0\,; \tag{4a,b}$$

$$U(0,Y,\tau)=u_0\,; \qquad \left.\frac{\partial U(X,Y,\tau)}{\partial X}\right|_{X=L_X}=0\,; \qquad U(X,0,\tau)=0\,; \qquad U(X,L_Y,\tau)=0\,; \tag{4c,d,e,f}$$

$$V(0,Y,\tau)=0\,; \qquad \left.\frac{\partial V(X,Y,\tau)}{\partial X}\right|_{X=L_X}=0\,; \qquad V(V,0,\tau)=0\,; \qquad V(X,L_Y,\tau)=0\,; \tag{4g,h,i,j}$$

O problema apresentado acima que envolve a equação de Burgers é resolvido a seguir, utilizando a Técnica da Transformada Integral generalizada (TTIG).

## 3. TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (TTIG)

A Técnica da Transformada Integral Clássica (TTIC) é uma ferramenta eficiente para resolver problemas lineares encontrado, por exemplo, em aplicações de transferência de calor, apresentado por Mikhailov e Ozisik (1984), e Ozisik (1993). As limitações da técnica se evidenciaram quando não era possível transformar uma equação diferencial parcial original em um sistema de equações diferenciais ordinárias devido aos problemas envolverem dificuldades de diversas naturezas, tais como: coeficientes variáveis, geometrias irregulares e sistemas de autovalores não separáveis. Por outro lado, tais limitações foram eliminadas pela TTIG, a qual pode manipular tais problemas usando um formalismo similar a TTIC. Desde, o trabalho pioneiro de Ozisik e Murray (1974) associado a soluções de problemas de difusão que envolve problemas com condições de contorno com coeficientes variáveis, avanços significativos foram obtidos e a TTIG passou a ser aplicada em uma grande variedade de problemas na área da engenharia. Todo o desenvolvimento da TTIG pode ser encontrado na monografia de Cotta (1993).

A aplicação da TTIG para os problemas mencionados acima pode ser sistematizada nas seguintes etapas básicas: 1) definir um ou mais problemas auxiliares de autovalor que deverão conter o máximo de informações sobre o problema original; 2) desenvolver os pares transformada-inversa apropriados; 3) aplicar as transformadas-inversas nas equações diferenciais parciais originais, resultando em um sistema de equações diferenciais ordinárias acoplados; 4) truncar e resolver numericamente o sistema de equações diferenciais ordinárias acoplados, em uma ordem suficientemente grande; 5) aplicar as fórmulas de inversão para determinar os potenciais originais.

Os passos mencionados acima são agora usados para solução da equação de Burgers.

## 4. APLICAÇÃO DA TTIG PARA A TRANSFORMAÇÃO DO PROBLEMA NA DIREÇÃO Y

Seguindo o formalismo da TTIG (Cotta, 1993); considera-se os seguintes problemas auxiliares de autovalores do tipo Sturm-Liouville (Aparecido,1997)e para as funções velocidades $U(X,Y,\tau)$ e $V(X,Y,\tau)$ e suas respectivas condições de contorno, como segue:

$$\frac{d^2\Psi_i(Y)}{dY^2}+(\mu_i^u)^2\Psi_i(Y)=0\,, \qquad 0<y<L_y\,; \tag{5}$$

$$\Psi(0)=0 \quad \text{e} \quad \Psi(L_y)=0\,, \tag{6}$$

$$\frac{d^2F_i(Y)}{dY^2}+(\mu_i^v)^2F_i(Y)=0\,, \tag{7}$$

$$\Phi_i(0)=0 \quad \text{e} \quad \Phi_i(L_y)=0. \tag{8}$$

Resolvendo os problemas de autovalores, obtém-se as seguintes autofunções normalizadas $\Psi_i(Y)$ e $\Phi_i(Y)$; as integrais de normalização $A_i^u$ e $A_i^v$ e os autovalores $\mu_i^u$ e $\mu_i^v$, respectivamente expressas por:

$$\Psi_i(Y)=A_i^u \operatorname{sen}(\mu_i^u Y)\ , \qquad A_i^u=\sqrt{\frac{2}{L_y}}, \qquad \mu_i^u=\frac{i\pi}{L_y}, \quad i=1,2,3,\ldots,\infty; \tag{9}$$

$$\Phi_i(Y)=A_i^v \operatorname{sen}(\mu_i^v Y)\ , \qquad A_i^v=\sqrt{\frac{2}{L_y}}\ , \qquad \mu_i^v=\frac{i\pi}{L_y}, \quad i=1,2,3,\ldots,\infty. \tag{10}$$

De acordo com os problemas de autovalores determinados anteriormente, obtém-se os pares transformada-inversa em relação ao eixo y, como segue:

$$\tilde{U}_i(x,\tau)=\int_0^{L_y}\Psi_i(Y)U(X,Y,\tau)dY\ , \qquad \text{(Transformada)} \tag{11}$$

$$U(X,Y,\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{U}_j(X,\tau)\Psi_j(Y)\ , \qquad \text{(Inversa)} \tag{12}$$

$$\tilde{V}_i(X,\tau)=\int_0^{L_y}F_i(Y)V(X,Y,\tau)dY\ , \qquad \text{(Transformada)} \tag{13}$$

$$V(X,Y,\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{V}_j(X,\tau)\Phi_j(Y)\ . \qquad \text{(Inversa)} \tag{14}$$

Obtidos os pares transformada-inversa para a equação de Burgers, multiplica-se as equações (1a) e (1b) pelas respectivas autofunções $\Psi_i(Y)$ e $\Phi_i(Y)$,correspondentes às funções velocidades $U(X,Y,\tau)$ e $V(X,Y,\tau)$, e na seqüência multiplica-se as equações (5) e (7) por $\frac{1}{Re}U(X,Y,\tau)$ e $\frac{1}{Re}V(X,Y,\tau)$, respectivamente. Somando, rearranjando e integrando tais equações no intervalo $[0,L_y]$, obtém-se os seguintes sistemas de equações diferenciais ordinárias não-lineares acoplados e infinito:

$$\frac{\partial\tilde{U}_i(X,\tau)}{\partial\tau}+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{ijk}\tilde{U}_j(X,\tau)\frac{\partial\tilde{U}_k(X,\tau)}{\partial X}+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}B_{ijk}\tilde{V}_j(X,\tau)\tilde{U}_k(X,\tau)=$$

$$=\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2\tilde{U}_i(X,\tau)}{\partial X^2}-(\mu_i^u)^2\,\tilde{U}_i(X,\tau)\right] \tag{15}$$

e

$$\frac{\partial \tilde{V}_i(X,\tau)}{\partial \tau}+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}C_{ijk}\tilde{U}_j(X,\tau)\frac{\partial \tilde{V}_k(X,\tau)}{\partial X}+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}D_{ijk}\tilde{V}_j(X,\tau)\tilde{V}_k(X,\tau)=$$

$$=\frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 \tilde{V}_i(X,\tau)}{\partial x^2}-(\mu_i^v)^2\tilde{V}_i(X,\tau)\right] \tag{16}$$

no qual

$$A_{ijk}=\int_0^{L_y}\Psi_i(Y)\Psi_j(Y)\Psi_k(Y)dY\,,\qquad B_{ijk}=\int_0^{L_y}\Psi_i(Y)\Phi_j(Y)\frac{\partial \Psi_k(Y)}{\partial Y}dY\,,$$

$$C_{ijk}=\int_0^{L_y}F_i(Y)?_j(Y)F_k(Y)dY \qquad \text{e} \qquad D_{ijk}=\int_0^{L_y}F_i(Y)F_j(Y)\frac{\partial F_k(Y)}{\partial Y}dY\,.$$

são determinados analiticamente.

Aplica-se a Transformada Integral sobre as condições inicial e de contorno do problema original, e em seguida faz-se a transformação na direção X.

## 6. TRANSFORMAÇÃO DO PROBLEMA NA DIREÇÃO X

Para a homogeneização da condição de entrada da Equação de Burgers é conveniente considerar a seguinte mudança de variável $\tilde{U}_i(X,\tau)=\tilde{U}_i^+(X,\tau)+\tilde{f}_i$, no qual $\tilde{f}_i=u_0\int_0^{L_y}\Psi_i(Y)dY$.

De forma análoga aos problemas auxiliares de autovalores para o eixo y, é considerado, agora, os seguintes problemas auxiliares de autovalores, Eqs. (17) e (19) e suas respectivas condições de contornos no eixo X, Eqs. (18) e (20) para as funções velocidades $\tilde{U}_i^+(X,\tau)$ e $\tilde{V}_i(X,\tau)$:

$$\frac{d^2\Psi_m(X)}{dX^2}+(\gamma_m^u)^2\Psi_m(X)=0\,,\qquad 0<x<L_x\,; \tag{17}$$

$$\Psi_m(0)=0 \quad \text{e} \quad \Psi_m(L_x)=0\,, \tag{18}$$

$$\frac{d^2\Phi_m(X)}{dX^2}+(\gamma_m^v)^2\Phi_m(X)=0\,, \tag{19}$$

$$\Phi_m(0)=0 \quad \text{e} \quad \Phi_m(L_x)=0\,. \tag{20}$$

Obtendo, assim, as seguintes autofunções $\Psi_m(X)$ e $\Phi_m(X)$; integrais de normalização $A_m^u$ e $A_m^v$ e os autovalores $\gamma_m^u$ e $\gamma_m^v$ respectivamente, como segue:

$$\Psi_m(X)=A_m^u\,\text{sen}(\gamma_m^u X)\,,\qquad A_m^u=\sqrt{\frac{2}{L_x}}\,,\qquad \gamma_m^u=\frac{m\pi}{L_X}\,,\quad m=1,2,3,\ldots,\infty\,; \tag{21}$$

$$\Phi_m(X) = A_m^v \operatorname{sen}(\gamma_m^v X), \qquad A_m^v = \sqrt{\frac{2}{L_x}}, \qquad \gamma_m^v = \frac{m\pi}{L_X}, \quad m = 1,2,3,\ldots,\infty. \tag{22}$$

De acordo com os problemas auxiliares de autovalores (17) e (19), determinam-se os pares transformada-inversa em relação ao eixo X, como segue:

$$\tilde{\tilde{U}}_{im}(\tau) = \int_0^{L_x} \Psi_m(X)\tilde{U}_i^+(X,\tau)dX, \qquad \text{(Transformada)} \tag{23}$$

$$\tilde{U}_i^+(X,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{U}}_{in}(\tau)\Psi_n(X), \qquad \text{(Inversa)} \tag{24}$$

$$\tilde{\tilde{V}}_{im}(\tau) = \int_0^{L_x} \Phi_m(X)\tilde{V}_i(X,\tau)dX, \qquad \text{(Transformada)} \tag{25}$$

$$\tilde{V}_i(X,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{V}}_{in}(\tau)\Phi_n(X). \qquad \text{(Inversa)} \tag{26}$$

Obtidos os pares transformada-inversa para as das funções velocidades $\tilde{U}_i^+(X,\tau)$ e $\tilde{V}_i(X,\tau)$, multiplica-se as equações (15) e (16) pelas autofunções $\Psi_m(Y)$ e $\Phi_m(Y)$, e em seguida, multiplica-se as equações (17) e (19) por $\frac{1}{Re}\tilde{U}_i^+(X,\tau)$ e $\frac{1}{Re}\tilde{V}_i(X,\tau)$, respectivamente. Somando, rearranjando e integrando tais equações no intervalo $[0, L_x]$, obtém-se os seguintes sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não-lineares acoplados e infinitos para as funções velocidades transformadas $\tilde{U}_i^+(X,\tau)$ e $\tilde{V}_i(X,\tau)$:

$$\frac{d\tilde{\tilde{U}}_{im}(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} A_{ijk}\tilde{\tilde{U}}_{jn}^+(\tau)\tilde{\tilde{U}}_{kp}^+(t)G_{mnp} + \sum_{j=1}^{\infty}\tilde{f}_j\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{ijk}\tilde{\tilde{U}}_{kn}^+(\tau)H_{mn} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} B_{ijk}\tilde{\tilde{V}}_{jn}(\tau)\tilde{\tilde{U}}_{kp}^+(\tau)I_{mnp} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{f}_k\sum_{n=1}^{\infty} B_{ijk}\tilde{\tilde{V}}_{jn}(\tau)J_{mn} =$$
$$= -\frac{1}{Re}\{[(\mu_i^u)^2 + (\gamma_m^u)^2]\tilde{\tilde{U}}_{im}(\tau) + (\mu_i^u)^2\tilde{f}_i K_m\} \tag{27}$$

e

$$\frac{d\tilde{\tilde{V}}_{im}(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} C_{ijk}\tilde{\tilde{U}}_{jn}^+(\tau)\tilde{\tilde{V}}_{kp}(\tau)L_{mnp} + \sum_{j=1}^{\infty}\tilde{f}_j\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{ijk}\tilde{\tilde{V}}_{kn}^+(\tau)M_{mn} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} D_{ijk}\tilde{\tilde{V}}_{jn}(\tau)\tilde{\tilde{V}}_{kp}(\tau)N_{mnp} = -\frac{1}{Re}\{[(\mu_i^v)^2 + (\gamma_m^v)^2]\tilde{\tilde{V}}_{im}(\tau)\} \tag{28}$$

no qual

$$G_{mnp} = \int_0^{L_x} \Psi_m(X)\Psi_n(X)\frac{\partial \Psi_p(X)}{\partial X}dX\,, \qquad H_{mn} = \int_0^{L_x} \Psi_m(X)\frac{\partial \Psi_n(X)}{\partial X}dX\,,$$

$$I_{mnp} = \int_0^{L_x} \Psi_m(X)\Phi_n\Psi_p(X)dX\,, \qquad J_{mn} = \int_0^{L_x} \Psi_m(X)\Phi_n dX\,,$$

$$K_m = \int_0^{L_x} \Psi_m(X)_i dX\,, \qquad L_{mnp} = \int_0^{L_x} \Phi_m(X)\Psi_n(X)\frac{\partial \Phi_p(X)}{\partial X}dX\,,$$

$$M_{mn} = \int_0^{L_x} \Phi_m(X)\frac{\partial \Phi_n(X)}{\partial X}dX \qquad \text{e} \qquad N_{mnp} = \int_0^{L_x} \Phi_m(X)\Psi_n(X)\Phi_p(X)dX\,.$$

As condições iniciais originais das funções velocidades $\tilde{U}_i^+(X,T)$ e $\tilde{V}_i(X,T)$, são transformadas respectivamente, da forma como segue:

$$\bar{\tilde{U}}_{im}^+(0) = \int_0^{L_x} [\Psi_m(X) - \tilde{f}_i]dX \tag{29}$$

$$\bar{\tilde{V}}_{im}(0) = 0 \tag{30}$$

## 7. TRUNCAMENTO DA EXPANSÃO EM SÉRIES FINITAS

Para determinar a solução dos sistemas dados pelas equações (27) e (28), estes serão truncados em uma ordem finita suficientemente grande, como segue:

$$\frac{d\bar{\tilde{U}}_{im}^+(\tau)}{dt} + \sum_{j,k=1}^{N_y^{(u)}}\sum_{n,p=1}^{N_x^{(u)}} A_{ijk}\bar{\tilde{U}}_{jn}^+(\tau)\bar{\tilde{U}}_{kp}^+(\tau)G_{mnp} + \sum_{j=1}^{N_y^{(u)}}\tilde{f}_j\sum_{k=1}^{N_y^{(u)}}\sum_{n=1}^{N_x^{(u)}} A_{ijk}\bar{\tilde{U}}_{kn}^+(\tau)H_{mn} +$$
$$+\sum_{j=1}^{N_j}\sum_{k=1}^{N_k}\sum_{n=1}^{N_n}\sum_{p=1}^{N_p} B_{ijk}\bar{\tilde{V}}_{jn}(\tau)\bar{\tilde{U}}_{kp}^+(\tau)I_{mnp} + \sum_{j=1}^{N_j}\sum_{k=1}^{N_k}\tilde{f}_k\sum_{n=1}^{N_n} B_{ijk}\bar{\tilde{V}}_{jn}(\tau)J_{mn} =$$
$$= -\frac{1}{Re}\{[(\mu_i^u)^2 + (\gamma_m^u)^2]\bar{\tilde{U}}_{im}(\tau) + (\mu_i^u)^2\tilde{f}_i K_m\} \tag{31}$$

e

$$\frac{d\bar{\tilde{V}}_{im}(\tau)}{dt} + \sum_{j=1}^{N_j}\sum_{k=1}^{N_k}\sum_{n=1}^{N_n}\sum_{p=1}^{N_p} C_{ijk}\bar{\tilde{U}}_{jn}^+(\tau)\bar{\tilde{V}}_{kp}(\tau)L_{mnp} + \sum_{j=1}^{N_j}\tilde{f}_j\sum_{k=1}^{N_k}\sum_{n=1}^{N_n} C_{ijk}\bar{\tilde{V}}_{kn}(\tau)M_{mn} +$$
$$+\sum_{j=1}^{N_j}\sum_{k=1}^{N_k}\sum_{n=1}^{N_n}\sum_{p=1}^{N_p} D_{ijk}\bar{\tilde{V}}_{jn}(\tau)\bar{\tilde{V}}_{kp}(\tau)N_{mnp} = -\frac{1}{Re}\{[(\mu_i^v)^2 + (\gamma_m^v)^2]\bar{\tilde{V}}_{im}(\tau)\}\,, \tag{32}$$

no qual $N_j, N_k, N_n, N_p$ são ordens de truncamento em cada somatório nas séries infinitas.

Uma vez truncado o sistema, este torna-se passível de solução, o qual é transformado em um sistema de equações não lineares. Desta forma, determina-se as velocidades transformadas $\tilde{\tilde{U}}^{+}_{im}(\tau)$ e $\tilde{\tilde{V}}_{im}(\tau)$ e utilizando a fórmula de inversão por duas vezes, obtém-se as funções velocidades $U(X,Y,T)$ e $V(X,Y,T)$, construindo-se a solução do problema original.

## 8. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi aplicada a Técnica da Transformada Integral Generalizada como método de solução analítica formal para a equação de Burgers. Para tanto, foram considerados problemas auxiliares de autovalores para cada uma das equações nas coordenadas x e y, as quais permitiram estabelecer os pares transformada-inversa. Em particular, para a componente da velocidade na direção do escoamento foi introduzida uma mudança de variável adequada para a homogeneização da condição de entrada. Com este procedimento, obteve-se um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não-linear acoplado e infinito para as componentes da velocidade transformadas. Para se obter a solução numérica do sistema resultante, o mesmo deve ser truncado em uma dada ordem finita de acordo com a precisão que se deseja da solução. Assim, as componentes da velocidade podem ser obtidas fazendo uso da fórmula de inversão, as quais permitirão a determinação dos diversos parâmetros físicos de interesse.

## 9. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem os apoios da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP, da Fundação de Desenvolvimento da Unesp – FUNDUNESP pelo parcial suporte financeiro para realização deste trabalho, e à CAPES pela bolsa de estudos.

## 10. REFERÊNCIAS

Aparecido, J.B., 1997, "How To Choose Eigenvalue Problems when Using Generalized Integral Transforms To Solve Thermal Convection-Diffusion Problems", In: Proc. of 14th Brazilian Congress of Mech. Eng., Bauru, SP, Brasil.

Aparecido, J. B. and Cotta, R. M., 1987, "Fully Developed Laminar Flow in Trapezoidal Ducts", Proceedings of 9th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, COBEM 87, Vol.1, pp. 25-28.

Aparecido, J. B. and Cotta, R. M., 1990a, "Thermally Developing Laminar Flow Inside Rectangular Ducts", International Journal Heat and Mass Transfer, vol. 33, No. 2, pp. 341-347.

Aparecido, J. B. and Cotta, R. M. 1990b, "Laminar Flow Inside Hexagonal Ducts", Computational Mechanics, vol.6, No. 2, pp. 93-100.

Aparecido, J. B. and Cotta, R. M., 1990c, "Analytical Solutions To Parabolic Multi-Dimensional Diffusion Problems within Irregularly Shaped Domains", In: Wrobel, L. C., Brebia, C. A., Nowac, A. J., (Eds.), Advanced Computational Methods in Heat Transfer, Berlin: Springer-Verlag, Vol.1, pp. 27-38.

Aparecido, J. B. and Cotta, R. M., 1992, "Laminar Thermally Developing Flow Inside Right-Angularly Triangular Ducts", Applied Scientific Research, 49, pp. 355-368.

Aparecido, J. B., Cotta, R. M. and Ozisik, M. N., 1989, "Analytical Solutions to Two-Dimensional Diffusion Problems within Irregular Domains", Journal of Franklin Institute, Vol. 326, pp. 421-434.

Aparecido, J. B. and Ozisik, M. N., 1998, “Laminar Forced Convection Inside Circular Sector Tube with Variable Boundary Condition”, 7th Brazilian Congress of Engineering and Thermal Science – ENCIT 98, Rio de Janeiro, RJ.

Aparecido, J. B., Vieira, E. D. R. and Campos-Silva, J. B., 2000, “Analysis of a Low Speed Wind Tunnel Contraction by Generalized Integral Transform Technique” In: ENCIT 2000 – 8th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences, Paper S01P10, Porto Alegre, Rs, Brazil, 10 p.

Aparecido, J. B., Vieira, E. D. R. and Campos-Silva, J. B., 2001, “Flowfield and Flow Parameters for Flow Inside a Low Speed Wind Tunnel Contraction with Circular Cross-Section”, In: Proc. of 16th Brazilian Congress of Mech. Eng., Paper TRB 2453, Urbelândia, MG, Brasil.

Cotta, R. M., 1993, “Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow”, Hardcover, CRC Press; ISBN: 0849386659.

Cotta,R. M., Leiroz, A. and Aparecido, J. B., 1992, “Steady State Diffusion Problems with Variable Equation Coefficients”, Heat and Tecnology, Vol.10, No. 3-4, pp.104-129.

Dias Júnior, T. and Aparecido, J. B., 1999, “Thermally Developing Laminar Flow inside Rectangular Ducts Submitted to Boundary Conditions of Third kind”, In: COBEM 99, Águas de Lindoya.

Lindquist, C. and Aparecido, J. B., 1999, “Laminar Forced Convection Through Rectangular Ducts with Uniform Axial and Peripheral Heat Flux”, In: COBEM 99, Águas de Lindoya.

Maia, C. R. M., Aparecido, J. B. and Milanez, L. F., 2000, “Heat Transfer in Laminar Forced Convection Inside Elliptical Tube with Boundary Condition of First Kind”, In: Proceedings of the 3rd European Thermal Science Conference, Heidelberg, Germany, 10-13 september, pp. 247-252.

Maia, C. R. M., Aparecido, J. B. and Milanez, L. F., 2001, “Heat Transfer in Laminar Forced Convection inside Elliptical Cross Section Ducts with Boundary Condition of Second Kind”, In: Proceedings of the XXII CILAMCE, paper CIL330, Campinas, SP, Brasil, November.

Mikhailov, M. D. and Ozisik, M. N., 1984, “Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion”, John Wiley, New York

Ozisik, M. N. (1993), “Heat Conduction”, John Wiley, New York.

Ozisik, M. N. and Murray. R. M., 1974, “On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Condition Parameters”, ASME Paper n. 74-HT.

## 11. DIREITOS AUTORAIS



# TWO-DIMENSIONAL NON-LINEAR BURGERS´ EQUATION SOLUTION

**Edlene Cenedese**
edlene@aluno.feis.unesp.br

**Cássio Roberto Macedo Maia**
cássio@dem.feis.unesp.br

**João Batista Campos Silva**
jbcampos@dem.feis.unesp.br

**João Batista Aparecido**
jbaparecido@dem.feis.unesp.br

**Abstract** Non-linear Burgers´ equation has no real flow meaning but it is a mathematical model of hydrodynamics. This is important in the study of turbulence, shock waves among other kind of flows. The non-linear term in the Burgers´ equation contributes to a wave of appreciable amplitude traveling in some direction. This wave eventually dissipates, and the non-linear solution tends to the same shape of the linearized solution, though with a smaller amplitude. The non-linear term steepens the velocity gradient; however, because of the damping effect, no discontinuity occurs. In this work we use the GITT to present a formal analysis on how to solve the non-linear Burgers´ equation over two-dimensional domains. The generalized integral transform technique (GITT) is a powerful tool to solve second order partial differential equations, and has been used to solve equations with special difficulties such as non-separable equation coefficients, variable boundary condition coefficients, irregular domains, non-linearities, and so on.

**Keywords:** Burgers' Equation, Integral Transform, Non-linear.