

# ANÁLISE DINÂMICA TRIDIMENSIONAL DO ACOPLAMENTO FLUXO DEFORMAÇÃO EM MEIOS GEOTÉCNICOS SATURADOS

**Prof. Msc. Joaquim Mário Caleiro Acerbi**

Universidade Federal de Uberlândia  
Campus Santa Mônica-Bloco 1Y –38400-089  
Uberlândia /MG –Brasil  
e-mail: [acerbi@ufu.br](mailto:acerbi@ufu.br)

**Prof. Dsc Ricardo Fortes de Miranda**

Universidade Federal de Uberlândia  
Campus Santa Mônica-Bloco 1Y –38400-089  
Uberlândia /MG –Brasil

**Prof. Dsc. Milton Biage**

Universidade Federal de Uberlândia  
Campus Santa Mônica-Bloco 1Y –38400-089  
Uberlândia /MG –Brasil

**Resumo.** *É feito um estudo tridimensional do acoplamento fluxo – deformação em meios geotécnicos saturados com fluido compressível. Supondo inicialmente um maciço semi - infinito, poroso, homogêneo e isotrópico, e com o uso do conceito de tensões efetivas de Terzaghi, e com a aplicação dos parâmetros de pressão neutra de Skempton, temos como condição inicial, pressão neutra em todo meio poroso, expresso matematicamente. O campo de tensões causados por um carregamento dinâmico na superfície do maciço produz ondas e fluxo no interior do meio poroso acoplado à deformação devido à expulsão do fluido dos poros, à deformação das próprias partículas do fluido e das partículas sólidas constituintes do maciço, e principalmente, devido à diminuição dos vazios, como consequência de um rearranjo interno do solo ou da rocha em análise. O estudo é feito sem o uso explícito da equação da onda. Através das equações desenvolvidas é possível calcular o campo de deslocamentos em qualquer ponto do maciço e na superfície, o campo de tensões, e o campo de velocidade do fluido no meio poroso, no domínio espacial e temporal. Como exemplo numérico é apresentado a comparação com o caso clássico do adensamento unidimensional para solos argilosos.*

**Palavras – chaves:** *fluido, acoplamento, deformações, fluxo, meios- porosos.*

## 1.INTRODUÇÃO

O que apresentamos neste estudo é o desenvolvimento das equações para abordagem dinâmica de um problema de engenharia geotécnica, que é a do carregamento concentrado cíclico na superfície do maciço, induzindo um estado tridimensional de tensão e de deformação no interior do maciço.

Esta formulação tem como objetivo apresentar um conjunto de equações que permitam avaliar o efeito de um carregamento cíclico e variável em módulo, usando as equações da dinâmica na forma

diferencial e indicial, a teoria da elasticidade, a lei de Darcy, a equação da continuidade de uma maneira que permita estudar o acoplamento tensão-deformação-fluxo no interior do maciço, tanto para solos, quanto para rochas, à três dimensões, mas levando-se em consideração as compressibilidades do fluido, das partículas sólidas e da estrutura porosa.

Um maciço geotécnico horizontal, semi-infinito, homogêneo e de comportamento linear elástico é analisado para o caso deste maciço estar completamente saturado por um fluido compressível. A determinação da deformação da estrutura porosa está associada a expulsão do fluido dos poros e ou fraturas, e também à própria deformação das partículas sólidas e do próprio fluido. O fluxo no meio poroso é suposto laminar e, por conseguinte, dentro do regime de validade da lei de Darcy para fluxo em meios porosos. Através do conceito de geração de poro – pressão de Skempton (1953), estimamos a pressão neutra gerada em todo domínio do maciço devido ao carregamento, como condição inicial.

As equações desenvolvidas são muito semelhantes às apresentadas por Biot (1956), no seu clássico trabalho sobre teoria da propagação de ondas elásticas com baixa frequência, em meios porosos saturados, com a diferença que o mesmo considerava fluxo no meio poroso como de Poiseuille, e tratava as equações para a matriz porosa separada das equações para o fluido. Neste trabalho utilizamos as equações acopladas.

## 2- DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO



Seja em um meio semi-infinito, poroso, homogêneo, isotrópico e totalmente saturado com um fluido compressível, submetido à um carregamento dinâmico concentrado de módulo  $F \cdot \cos[2\pi t]$  (kN/s), onde  $F$  é uma carga estática.

Escrevendo a equação da continuidade na forma diferencial para este meio:

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = -n \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \frac{\partial n}{\partial t} \quad (1)$$

Partindo da lei de Darcy, apresentado por Terzaghi (1943), da equação(1) e da definição de compressibilidade do fluido, do meio poroso e das partículas sólidas, depois de operações matemáticas, chegamos à:

$$b n \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{k b}{\mu} \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{b} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \right] \quad (2)$$

Onde para as equações acima:

$n$  a porosidade;

$\beta$  a compressibilidade do fluido que preenche os poros e/ou fissuras(kPa);

$\mu$  a viscosidade absoluta deste fluido(kPas);

$k$  a permeabilidade absoluta do meio( $m^2$ );

$\rho$  a massa específica do fluido(kN/m<sup>3</sup>);

$P$  a pressão do fluido nos poros ou vazios do meio(kPa);

$t$  o tempo(s);

$x, y$  e  $z$  são as variáveis independentes(m).

A Equação (2) pode ser modificada, se considerarmos o coeficiente de compressibilidade do fluido constante,  $\beta$ , constante e aplicar nessa equação, a seguinte relação:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\ln(n)}{\mathbf{b}} \right] = \frac{1}{\mathbf{b}n} \frac{\partial n}{\partial t} \quad (3)$$

Portanto, com o auxílio da equação (3) obtém-se outra relação:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ P + \frac{\ln(n)}{\mathbf{b}} \right] = \frac{k}{n\mu} \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{\mathbf{b}} \nabla^2 P \right] \quad (4)$$

A Equação (4) pode ser escrita numa forma mais adequada, como segue:

$$\frac{\partial n}{\partial t} \left[ \frac{\ln(n)}{\mathbf{b}} + P + \frac{1}{\mathbf{b}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right] = 0 \quad (5)$$

ou de maneira aproximada:

$$\left[ \frac{\ln(n)}{\mathbf{b}} + P + \frac{1}{\mathbf{b}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right]_{novo} = \left[ \frac{\ln(n)}{\mathbf{b}} + P + \frac{1}{\mathbf{b}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right]_{antigo} \quad (6)$$

Onde : U são os deslocamentos.

A Equação (6) não permite obter, explicitamente, as variáveis  $n$  e  $P$ , o que exige a utilização dessa equação numa forma modificada, tal que seja possível obter de forma iterativa um novo campo de pressão. Assim:

$$P_{novo} = - \left[ \frac{\ln(n)}{\mathbf{b}} + \frac{1}{\mathbf{b}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right]_{novo} + \left[ \frac{\ln(n)}{\mathbf{b}} + P + \frac{1}{\mathbf{b}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right]_{antigo} \quad (7)$$

Para o acoplamento da vazão mássica e a deformação no meio poroso, as componentes das tensões no meio devem satisfazer as equações diferenciais de equilíbrio do maciço poroso, pois, a vazão de massa através dos vazios causa um efeito de arrasto nas partículas sólidas (força de percolação), alterando a deformação.

### 3. ANÁLISE DO EQUILÍBRIO DO MACIÇO POROSO

Considera-se um elemento infinitesimal tridimensional dentro de um meio poroso, homogêneo e isotrópico. Esse meio é constituído de partículas sólidas incompressíveis e saturado com um fluido compressível, sendo, ainda, submetido a um estado de tensão e ao efeito de pressão do fluido que se desloca no interior seus poros e fissuras. Segundo Biot (1941) existe um parâmetro  $\mathbf{a}_B$ , que caracteriza a relação entre a pressão no fluido e as tensões, as quais o arcabouço sólido esteja submetido. Portanto, fazendo-se o equilíbrio de forças nas direções x, y e z, desprezando o efeito das forças de corpo (peso próprio constante, ou seja, considerando somente o efeito do carregamento na superfície), obtém-se em termos de deformações:

$$\tau \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = (\alpha + G) \left[ \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{U})}{\partial x_i} \right] + G \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} + \alpha_B \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (8)$$

Onde:  $U_i$  são os deslocamentos, notação indicial;  $\alpha$  e  $G$  são as constantes de Lamé;  $e_{ij}$  são as deformações, notação indicial e  $\alpha_B$  constante de Biot.

A Equação (8) representada as equações diferenciais de equilíbrio da dinâmica na forma tensorial para o meio poroso submetido à pressão e movimento de um fluido nos poros, a qual representa as três equações de equilíbrio para as três direções do sistema de referência em questão.

A Equação (5) assume a seguinte forma adimensional:

$$\left\{ A_1 \left[ \left( \frac{\partial P^*}{\partial x^*} \right)^2 \left( \frac{L_y}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{\partial P^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial P^*}{\partial z^*} \right)^2 \left( \frac{L_y}{L_z} \right)^2 \right] + A_2 \left[ \left( \frac{\partial^2 P^*}{\partial x^{*2}} \right) \left( \frac{L_y}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 P^*}{\partial y^{*2}} \right) + \left( \frac{\partial^2 P^*}{\partial z^{*2}} \right) \left( \frac{L_y}{L_z} \right)^2 \right] \right\} = n^* \frac{\partial}{\partial t^*} \left[ P^* + A_3 \left( \ln(n^*) \right) \right] \quad (9)$$

onde: o “\*” significa variável adimensional e  $A_1$  e  $A_2$  são também parâmetros adimensionais; e:

$A_1 = \{F \cdot k / C_v \cdot \eta, \mu\}$  e  $A_2 = \{k / C_v \cdot \eta, \mu\}$  onde:  $F$  é a carga estática;  $C_v$  é o coeficiente de adensamento;  $\eta$

é a porosidade e  $\mu$  a viscosidade absoluta do fluido,  $L_x$ ,  $L_y$  e  $L_z$  são as dimensões do bloco

poroso, nas direções x, y e z, respectivamente.

A Equação (7) assume a seguinte forma adimensional:

$$(P_{novo})^* = A_3 \left\{ - \left[ \ln(n^*) + (\vec{\nabla}^* \cdot \vec{U}^*) \right]_{novo} + \left[ \ln(n^*) + P^* + (\vec{\nabla}^* \cdot \vec{U}^*) \right]_{antigo} \right\} \quad (10)$$

Onde:  $A_3 = \{1/F \cdot \beta\}$ , e  $\beta$  é a compressibilidade do fluido.

Um código computacional escrito em Fortran foi desenvolvido usando diferenças finitas – método totalmente implícito – para resolver as equações (8), (9) e (10), que resolvem o problema em estudo. As condições de contorno das equações diferenciais são os pontos onde as deformações são praticamente nulas, ou seja, impondo a condição de que as derivadas dos deslocamentos em relação a x, y e z são menores do que  $10^{-4}$ .

#### 4. ESTUDO COMPARATIVO DOS RESULTADOS DA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO EFEITO DINÂMICO COM DADOS DE ADENSAMENTO UNIDIMENSIONAL CONVENCIONAL (ESTÁTICO)

Foi executado um ensaio tradicional de adensamento em um material silto - argiloso, moldado em laboratório, e ensaiado de acordo com método MB3336, ABNT, 1990, com objetivo de se obter parâmetros realistas e de se poder comparar resultados do efeito dinâmico com o efeito estático (efeito elástico mais efeito de adensamento).

Um disco de solo foi retirado da amostra compactada e colocada para ensaio. O corpo de prova foi confinado lateralmente. Uma carga  $F$  é aplicada instantaneamente no topo do solo ( $z=0$ ), forçando a coluna de solo se adensar enquanto permite que a água seja drenada para o topo e para base. A carga  $F$  é dobrada a cada 24 horas, medindo-se a deformação no topo, para vários tempos, de acordo com a norma brasileira, até 24 horas após a aplicação.

Os resultados do ensaio foram comparados com os resultados do processo dinâmico obtidos com a simulação numérica, usando diferenças finitas, método totalmente implícito, usando um código computacional escrito em linguagem Fortran. A carga  $F$ , conforme prescrita na norma

MB3336, dividida pela área de contato com o corpo de prova determina a tensão média em cada estágio, também especificada na mesma norma, essa tensão foi considerada cíclica, com frequência de 1 hertz, como teste para simulação numérica. Considerando as propriedades do material expressas na tabela (1), as condições iniciais e de fronteira do ensaio podem ser expressas por:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = e_0 = \frac{F}{I + 2G}; \quad p(0, t) = 0; \quad w(h, t) = w(0,032, t) = 0; \quad p(0,032, t) = 0 \quad P(z,0) = P_0 \quad (1)$$

Onde:  $w$  é o deslocamento na direção vertical  $z$ .

Tabela 1 – Propriedades mecânicas elásticas e hidráulicas médias do solo obtidas de ensaio de adensamento para obtenção de propriedades e comparação com efeito dinâmico calculado numericamente.

Variável/símbolo	Valor	Unidades
Índice de vazios inicial : $e_{04/1}$	0,7	-----
Porosidade : $n$	40	%
Coefficiente de Biot: $\alpha_B$	0.9	-----
Parâmetro de poropressão: $C$	1.04/1	-----
$CL = \lambda + 2G$ (média)	$5,3 \times 10^{11}$	KPa
Compressibilidade do fluido(água) : $\beta$	$0.2 \times 10^{-6}$	(1/kPa)
Compressibilidade das partículas sólidas : $\alpha_s$	$5 \times 10^{-8}$	(1/kPa)
Permeabilidade absoluta : $k$	$5 \times 10^{-15}$	$m^2$
Viscosidade absoluta: $\mu$	1,01	kPa.s
Condutividade hidráulica: $K$	$9 \times 10^{-9}$	m/s
Área do corpo de prova: $A$	0,005	$m^2$
Altura do corpo prova: $h$	0,032	m.
Coefficiente de adensamento do solo: $c_v$	2,65	$m^2$ /ano
Saturação real do solo inicial: $S$	97	%

Onde definimos:  $T$  fator adimensional,  $T$  tempo real,  $C_v$  coeficiente de adensamento,  $h$  altura de drenagem,  $k$  permeabilidade absoluta,  $\mu$  viscosidade absoluta,  $\lambda$  e  $g$  parâmetros de Lamé.

$$T = \frac{c_v t}{h^2} \quad (13)$$

onde :

$$C_v = \frac{k(I + 2G)}{m} \quad (14)$$

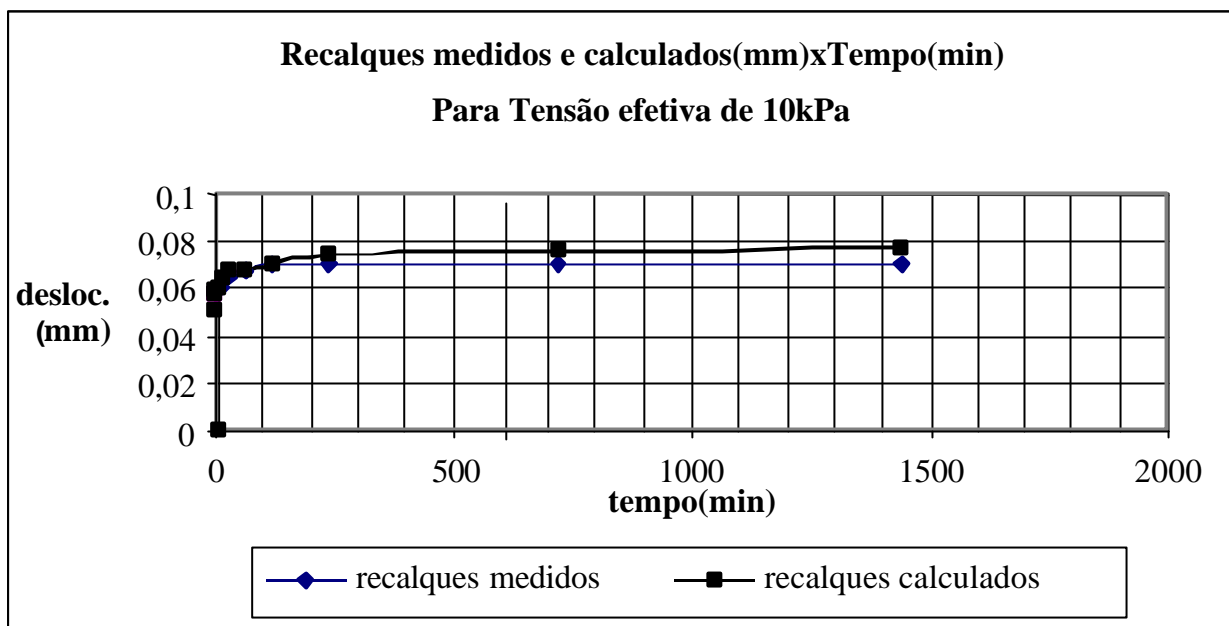


Figura 1 – Gráfico: Deslocamentos Estáticos (recalques medidos) e Deslocamentos Dinâmicos( recalques calculados) X Tempo (min) para um carregamento 10kPa.

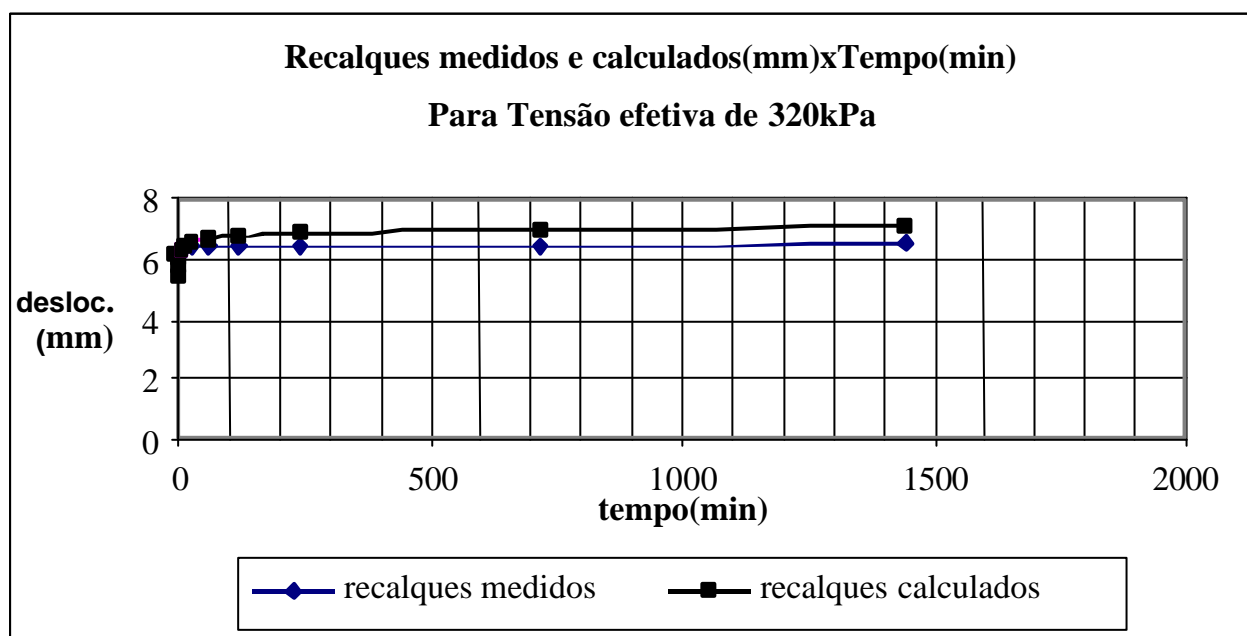


Figura 2 – Gráfico: Deslocamentos Estáticos (recalques medidosx 10-3mm e Deslocamentos Dinâmicos( recalques calculadosx10-3mm) X Tempo (min) para um carregamento 320kPa.

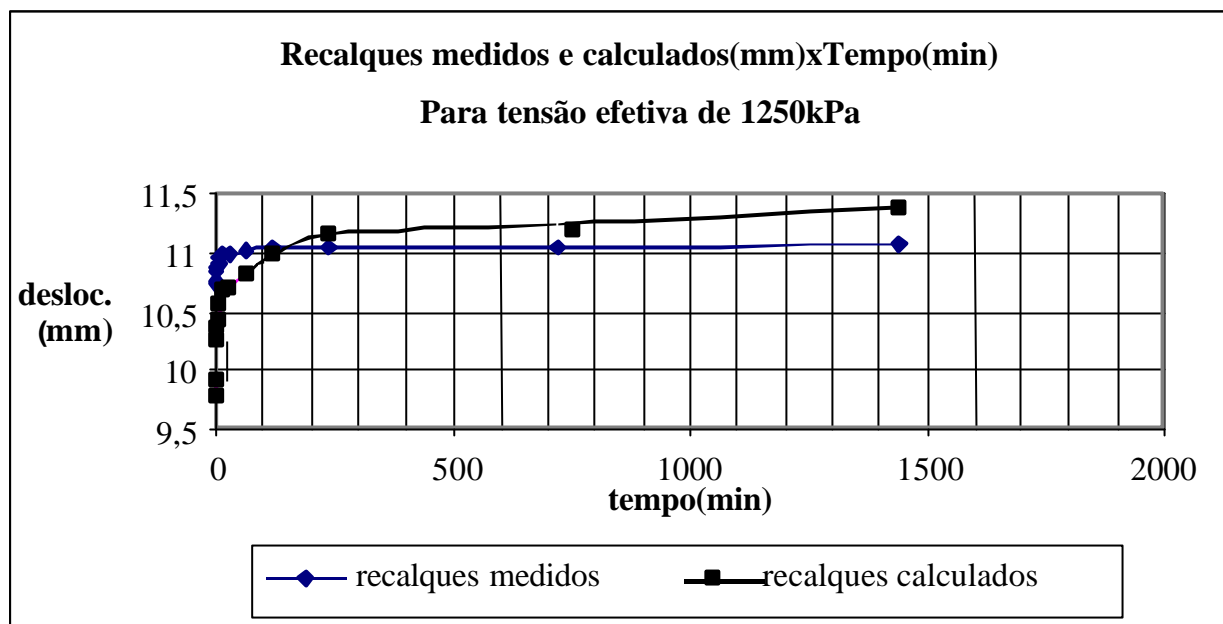


Figura 3 – Gráfico: Deslocamentos Estáticos (recalques medidosx 10-3mm e Deslocamentos Dinâmicos( recalques calculadosx10-3mm) X Tempo (min) para um carregamento 1250kPa.

## 5. ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES.

As equações desenvolvidas se aplicam bem para estimativas de deslocamentos superficiais dinâmicos dos solos, e também das tensões e fluxo de fluidos no interior de maciços, para casos dinâmicos e estáticos. É possível estender as aplicações para todos maciços geotécnicos de maneira geral, inclusive para casos anisotrópicos. O código computacional desenvolvido permite variar o carregamento de zero (0) até o valor desejado estático, e fazer a variação cíclica dinâmica de 1 até 30 hertz, valor de referência para se evitar ressonância, Biot (1956)., e a partir desse valor o fluxo de fluido deixaria de ser de Darcy, para se tornar, no caso da água, fluxo de Poiseuille, concordando com a teoria de Biot (1956). As simulações numéricas para 1 hertz permitiram concluir que as tensões e os deslocamentos são maiores nas condições dinâmicas do que estática, como era de se esperar, mas essas diferenças tendem a diminuir à medida em que o valor do carregamento estático aumenta.

## 6. REFERÊNCIAS

- ABNT, Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1990, MB3336-Método de Ensaio de adensamento.
- Biot, M. A. , 1941, “General Theory of Three-Dimensional Consolidation.” J. Applied Physics.12, páginas 151 - 164.
- Biot, M. A. , 1956, “Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. Part I. Low Frequency Range.” In J. Applied Physics. Vol 28, number 2 , 168-178.
- Terzaghi, K., 1943, “Theoretical Soil Mechanics”, Wiley, New York.
- Skempton, A. W., 1954, “The Pore Pressure Coefficient A and B”, Geotechnique, Vol. 4, 143-147.
- Timonshenko, S. P. & Goodier, J. N. ,1951, Theory of Elasticity, 2<sup>nd</sup> edn, New York.
- Chammas,R; Abraham, O;Cote, P; Pedersen, H. A; Semblat, J. F., 2002, “ Characterization of Heterogeneous Soils Using Surface Waves: Homogenization and Numerical Modeling”,

*Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC), Engineering Modelling Dept., Numerical Modelling Group, 15 Paris Cedex, France.*

*Liang, R. & Zeng, S; 2002, "Efficient Dynamic Analysis of Multilayered System during Falling Weight Deflectometer Experiments "Journal of Transportation Engineering, Vol. 128, No. 4, July/August 2002, pp. 366-374.*

*Xiao, M. & Reddi, L. N. , 2004, " Effect of Vibrations on Pore Fluid Distribution in Porous Media—Experimental Investigations", in Engineering, Construction, and Operations in Challenging Environments: Earth & Space 2004, pp. 333-339 , Conference Proceeding.*

## **7. DIREITOS AUTORAIS**

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## **THREE DIMENSIONAL ANALYSIS OF THE COUPLING FLOW DEFORMATION IN GEOTECHNICAL SATURATED POROUS MEDIA**

**Prof. Msc. Joaquim Mário Caleiro Acerbi**

Universidade Federal de Uberlândia  
Campus Santa Mônica-Bloco 1Y –38400-089  
Uberlândia /MG –Brasil  
e-mail: [acerbi@ufu.br](mailto:acerbi@ufu.br)

**Prof. Dsc Ricardo Fortes de Miranda**

Universidade Federal de Uberlândia  
Campus Santa Mônica-Bloco 1Y –38400-089  
Uberlândia /MG –Brasil

**Prof. Dsc. Milton Biagi**

Universidade Federal de Uberlândia  
Campus Santa Mônica-Bloco 1Y –38400-089  
Uberlândia /MG –Brasil

**Abstract.** A three-dimensional study of the coupling flow deformation in porous media saturated with a compressible fluid it is presented. Supposing a solid porous medium, infinite, homogeneous and isotropic. The concept of effective stress of Terzaghi is applied and using the parameters of generation of neutral pressure of Skempton, we have mathematically as initial condition, neutral pressure in every porous of the system. The field of tensions caused by a dynamic shipment in the surface of the solid induces waves, flow in the porous media coupled to the deformation of the own fluid and of the solid particles and, mainly, due to decrease of the emptiness, as consequence of an internal rearrange of the soil or rock in analysis. The applied mathematical procedure also allows the study of some anisotropic system through the determination of equivalent isotropic system, using the constants of Lamé. Also through the develop equations it is possible to calculate the field of displacement, in any point of the solid and in the surface, the field of tensions and the velocity of the fluid in porous media, in the space and time domain. As numeric example is presented the comparison with the classic case of the consolidation unidimensional test for soils. It is static effect in comparison with the dynamic process.

**Keywords:** *fluid, coupling, deformations, flow, porous-media.*