

# SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS COM SUPERFÍCIE LIVRE UTILIZANDO FORMULAÇÕES IMPLÍCITAS

C. M. Oishi, J. A. Cuminato, V. G. Ferreira, M. F. Tomé, A. Castelo

Instituto de Ciências Matemática e Computação, ICMC, USP, 13560-970, São Carlos, SP,  
{oishi, jacumina, pvgf, murilo, castelo}@icmc.usp.br

N. Mangiavacchi

Departamento de Engenharia Mecânica, UERJ, 20550-900, Rio de Janeiro, RJ,  
nmangiavacchi@superig.com.br

**Resumo.** Neste trabalho, formulações implícitas (FI) são adaptadas à metodologia GENS-MAC, para a solução numérica de escoamentos bidimensionais, transientes, newtonianos e incompressíveis. Usando a formulação velocidade-pressão e variações do método de projeção, o ambiente de simulação FreeFlow2D é utilizado para resolver numericamente as equações de conservação, no contexto de diferenças finitas. Os termos difusivos nas equações de Navier-Stokes são tratados implicitamente por meio das formulações Implícita Regressiva (IR), Crank-Nicolson (CN) e Adams-Bashforth/Crank-Nicolson (AB/CN). Os termos convectivos são tratados explicitamente por um esquema upwind de alta ordem limitado. Para escoamentos em canais e jatos com superfícies livres a baixos números de Reynolds, as formulações são robustas e possibilitam um aumento considerável no tamanho do passo temporal. Resultados numéricos que comparam muito bem com soluções analíticas são apresentados.

**Palavras-chave.** Formulações Implícitas, Simulação Numérica, Equações de Navier-Stokes.

## 1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas muitos esforços têm sido dirigidos na obtenção de soluções numéricas de escoamentos de fluidos viscosos incompressíveis. Uma dificuldade bastante comum aparece se esses escoamentos apresentam superfícies livres, pois a presença desses contornos envolve problemas como: a própria configuração da superfície livre deve ser determinada a cada passo no tempo e o movimento da superfície livre é geralmente influenciado por fenômenos interfaciais. Apesar desses inconvenientes existem vários métodos disponíveis na literatura especializada para se resolver essa classe de problemas. A maioria desses métodos foram influenciados pelo método MAC (Harlow and Welch, 1965). Métodos como de (Tomé and McKee, 1994) e outros são exemplos de técnicas numéricas baseadas no método MAC. A metodologia GESNMAC, descrita por (Tomé and McKee, 1994) utiliza a técnica de variáveis primitivas utilizando a formulação velocidade-pressão e foi baseado no método de projeção de Chorin (Chorin, 1967).

Atualmente, uma dificuldade na metodologia GENS-MAC é sua formulação explícita, pois geralmente, a aplicação de métodos explícitos requer um número elevado de ciclos computacionais e, como resultado, pode consumir grande quantidade de memória, tempo de processamento elevado e bastante espaço de armazenamento. Esses problemas ocorrem, freqüentemente, em simulações onde o valor do número de Reynolds é baixo ( $Re \ll 1$ ) ou quando o refinamento da malha é necessário para se obter uma solução numérica mais precisa, pois o passo temporal  $\delta t$  se torna muito pequeno. O valor de  $\delta t$  se torna muito restrito devido à condição de estabili-

dade imposta pelos métodos explícitos, que envolvem o número de Reynolds e o espaçamento da malha. Uma alternativa para resolver esse inconveniente é aplicar formulações implícitas para resolver as equações de Navier-Stokes. Uma motivação para o uso de métodos implícitos para as equações de Navier-Stokes é explorar a propriedade favorável de estabilidade. O uso dos métodos implícitos para as equações diferenciais parciais iniciou-se em 1947, quando Crank e Nicolson (Crank and Nicolson, 1947) empregaram para a equação da difusão um método incondicionalmente estável. Logo após, em 1955 Peaceman e Rachford (Peaceman and Rachford, 1955) e (Douglas and Rachford, 1960) introduziram o primeiro método ADI (Alternating Direction Implicit). A formulação implícita em muitos problemas é a preferida, pela possibilidade de avançar no tempo com  $\delta t$  maiores do que dos métodos explícitos. Entretanto, usar a formulação implícita não significa dizer que se pode usar qualquer tamanho do passo temporal, pois quando resolve-se mais de uma equação, o problema do acoplamento pode limitar severamente o  $\delta t$ . Outra limitação que pode surgir é nos problemas com superfícies livres, pois nesse tipo de contorno requer uma atenção especial em seu tratamento. Portanto, estudos do refinamento de  $\delta t$ , para se determinar uma solução independente de  $\delta t$  num dado nível de tempo, devem sempre ser conduzidos.

## 2.MODELO MATEMÁTICO

Em forma adimensional e conservativa, as equações que modelam problemas de escoamentos de fluidos newtonianos incompressíveis são

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

em que  $t$  é o tempo,  $\mathbf{u} = [u(x, y, t), v(x, y, t)]$  é o vetor campo de velocidades,  $p = p(x, y, t)$  é a pressão dividida pela massa específica e  $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$  é o campo gravitacional. Os parâmetros adimensionais  $Re = LU/\nu$  e  $Fr = U/\sqrt{gL}$  correspondem aos números de Reynolds e de Froude, respectivamente, em que  $L$  e  $U$  são, respectivamente, as escalas características de comprimento e de velocidade, e  $\nu$  é o coeficiente de viscosidade do fluido.

## 3.MÉTODO NUMÉRICO

Os métodos numéricos propostos neste trabalho para resolver as equações de conservação Eq.(1) e Eq.(2) são, basicamente, alterações do método GENSMAC. O método GENSMAC utiliza uma variante do método de projeção de Chorin (Chorin, 1967) para sua formulação matemática. Inicialmente, considera-se uma pressão tentativa  $\tilde{p}$ , imposta como sendo zero na região de fluido, e calculada para as superfícies livres através das condições de contorno apropriadas. Logo, a partir da equação Eq.(1) define-se um campo de velocidade intermediário como

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = \left\{ -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \right\}. \quad (3)$$

Geralmente, o campo de velocidade  $\tilde{\mathbf{u}}$  não é solenoidal, pois  $\tilde{p} \neq p$ . Para  $t = t_0$ , considera-se  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0)$  satisfazendo as mesmas condições de contorno.

Neste trabalho, as principais alterações na metodologia GENSMAC foram as *FI* aplicadas em duas variações dos métodos de projeção. O primeiro método de projeção utilizado pelas *FI* na metodologia GENSMAC é o método de projeção baseado em (Chorin, 1967) e conhecido como *métodos de projeção sem-pressão*, e aqui denotado como *P1*. Este método elimina o gradiente de pressão tentativo da equação Eq.(3). Outra modificação nesta equação é a aplicação de métodos implícitos para os termos viscosos, tornando a equação Eq.(3) de natureza implícita na integração temporal. Os métodos implícitos utilizados para o método *P1* foram os tradicionais Implícito Regressivo (*IR*) (ou Euler implícito) e Crank-Nicolson (*CN*). Com o objetivo de tentar melhorar a precisão temporal, um método Adams de passo múltiplo também foi utilizado. Este método utiliza o método *CN* para os termos viscosos e o método Adams-Bashforth, que é uma técnica explícita, para os termos convectivos da equação Eq.(3). Desta forma, este método é conhecido como Adams-Bashforth/Crank-Nicolson (*AB/CN*). Portanto a equação Eq.(3), na forma discreta no tempo, aplicando o método *P1* e utilizando as formulações implícitas, é reescrita da seguinte forma

- *P1 - Método IR*

$$\tilde{\mathbf{u}} - \frac{\delta t}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \delta t \left\{ -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^n + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^n \right\}. \quad (4)$$

- *P1 - Método CN*

$$\tilde{\mathbf{u}} - \frac{\delta t}{2Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \delta t \left\{ -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^n + \frac{1}{2Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^n \right\}. \quad (5)$$

- *P1 - Método AB/CN*

$$\tilde{\mathbf{u}} - \frac{\delta t}{2Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \delta t \left\{ -\frac{3}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^n + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^{n-1} + \frac{1}{2Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^n \right\}. \quad (6)$$

Utilizando a teoria dos métodos de projeção, tem-se que um campo de velocidade final é decomposto por um campo de velocidade intermediário  $\tilde{\mathbf{u}}$  e um gradiente de um potencial escalar  $\nabla\psi$ . No método *P1*, a função escalar  $\psi$  é calculada em todo domínio.

Baseado em um *método de projeção com acréscimo da pressão*, as *FI* foram aplicadas para uma segunda variação dos métodos de projeção. A conservação do gradiente de pressão tentativa na equação Eq.(3) é a diferença fundamental do método *P1*. No presente trabalho, o método que conserva o gradiente de pressão será denotado como *P2*. Da mesma forma que no método de *P1*, os termos viscosos foram implicitados, reescrevendo a equação Eq.(3) para *P2*, da seguinte forma

- *P2 - Método IR*

$$\tilde{\mathbf{u}} - \frac{\delta t}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \delta t \left\{ -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^n - \nabla \tilde{p} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^n \right\}. \quad (7)$$

- *P2 - Método CN*

$$\tilde{\mathbf{u}} - \frac{\delta t}{2Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \delta t \left\{ -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^n + \frac{1}{2Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n - \nabla \tilde{p} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^n \right\}, \quad (8)$$

- *P2 - Método AB/CN*

$$\tilde{\mathbf{u}} - \frac{\delta t}{2Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \delta t \left\{ -\frac{3}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^n + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^{n-1} + \frac{1}{2Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n - \nabla \tilde{p} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^n \right\}. \quad (9)$$

O desenvolvimento do método *P2* utilizando *FI*, é análogo ao método *P1*, com a diferença que agora,  $\tilde{p} \neq 0$  e será calculada.

No método GENSMAC, a equação de Poisson para o potencial  $\psi$  é aplicada para todo o domínio que contém fluido, com as devidas condições de contorno descritas em (Tomé and McKee, 1994). Nos métodos *P1* e *P2* utilizando *FI*, além da equação de Poisson, uma nova equação é imposta sobre o potencial  $\psi$  para as superfícies livres. Essa nova equação é calculada pela equação da pressão nas superfícies livres

$$-p + \frac{2}{Re} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} n_x^2 + \frac{\partial v}{\partial y} n_y^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x n_y \right] = 0, \quad (10)$$

onde  $(n_x, n_y)$  é o vetor unitário normal à superfície, com as velocidades implícitas, ou seja, as condições de contorno nas superfícies livres também são implicitadas.

A aplicação dos métodos *P1* e *P2* para as formulações implícitas no GENSMAC resulta em 3 sistemas lineares esparsos: 2 devido as equações que calculam as velocidades intermediárias e 1 devido ao cálculo do potencial escalar  $\psi$ . Quando se aplica as formulações implícitas, como o método *IR* ou *CN*, os termos viscosos são tratados de forma implícita, e desta forma é necessário resolver os sistemas provenientes das velocidades  $\tilde{u}$  e  $\tilde{v}$ . Os sistemas lineares resultantes das equações Eq.(4), Eq.(5), Eq.(6), Eq.(7), Eq.(8) e Eq.(9) são esparsos, definidos positivos e simétricos. Devido a essas propriedades, um método iterativo eficiente é o método dos Gradientes Conjugados (GC). O sistema linear resultante para o calculo de  $\psi$  é esparsos, mas não-simétrico, e portanto o método iterativo utilizado foi o método dos Gradientes Bi-conjugados com Precondicionamento (GBCP). Além do método GBCP existem outras alternativas recomendadas na literatura para problemas esparsos: os métodos GMRES (Generalized Minimal Residual), PCGS (Preconditioned Conjugate Gradiente Squared) entre outros. Entretanto, parece não haver consenso de um método que seja claramente melhor.

### 3.1. Estabilidade dos Métodos *P1* e *P2* utilizando Formulações Implícitas

O uso de uma integração temporal explícita na metodologia GENSMAC impõe severas restrições aos valores permitidos de  $\delta t$  em problemas onde os termos viscosos da equação Eq.(1) são predominantes. Em particular, esse tipo de problema ocorre quando o escoamento apresenta número de Reynolds baixo, os chamados *creep flow*.

A restrição do tratamento explícito dos termos viscosos exige que

$$\delta t_{visc} \leq \frac{Re}{2} \left( \frac{1}{(\delta x)^2} + \frac{1}{(\delta y)^2} \right)^{-1}, \quad (11)$$

onde  $\delta t_{visc}$  é o passo temporal permitido pela condição sobre os termos viscosos. A aplicação das formulações implícitas, apresentadas neste trabalho, sobre os termos viscosos, como foi feita nas equações Eq.(4), Eq.(5), Eq.(6), Eq.(7), Eq.(8) e Eq.(9), a princípio pode eliminar a restrição Eq.(11). Desta forma, as restrições sobre  $\delta t$  para os métodos *P1* e *P2* utilizando *FI*, são mais relaxadas que na metodologia GENSMAC.

## 4. DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

No presente trabalho, para resolver numericamente as equações Eq.(1) e Eq.(2) utilizam-se formulações implícitas na metodologia GENSMAC. A malha utilizada é a malha deslocada ou diferenciada ("staggered grid") de Harlow e Welch (Harlow and Welch, 1965). Nesse tipo de malha, a numeração das incógnitas na célula, como a pressão (ou outra componente  $\phi$  do fluido),

segue a mesma numeração da célula, e as velocidades, tem numeração fracionária. A técnica de discretização utilizada para resolver o conjunto de equações Eq.(1) e Eq.(2) é o método de diferenças finitas. No presente trabalho, os termos viscosos das equações Eq.(4), Eq.(5) e Eq.(6), Eq.(7), Eq.(8) e Eq.(9) são tratados de forma implícita e são aproximados por diferenças centrais de segunda ordem. A derivada temporal, dessas equações, é aproximada pelo método de Euler explícito, enquanto que o gradiente de pressão, presente apenas nas equações Eq.(7), Eq.(8) e Eq.(9), é aproximado por diferenças centrais. Os termos convectivos das equações Eq.(4), Eq.(5), Eq.(6), Eq.(7), Eq.(8) e Eq.(9) são aproximados pelo esquema monotônico e anti-difusivo VONOS (Ferreira et al., 2002). A equação de Poisson é aproximada pelo operador Laplaciano de cinco pontos.

## 5.RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, os métodos *P1* e *P2* utilizando Formulações Implícitas são agora aplicados na simulação de escoamentos de fluidos newtonianos incompressíveis com superfícies livres. Em geral, os números de Reynolds envolvidos nesses problemas são baixos ( $Re \ll 1$ ) ocasionando dificuldades na determinação das soluções quando aplica-se o método explícito. Essa dificuldade ocorre devido às restrições de estabilidade em  $\delta t$  dos métodos explícitos. Tais restrições podem ser reduzidas utilizando formulações implícitas na metodologia GENSMAC. Porém, um cuidado na aplicação desses métodos implícitos é na escolha do passo temporal, para que não interfira na precisão dos resultados. Nesta seção, apresentam-se os resultados de simulações numéricas obtidas com as formulações implícitas, para problemas bidimensionais na presença de contorno rígidos e/ou livres, para comparações com o método explícito original. As comparações têm como objetivo principal, mostrar a eficiência dos métodos *P1* e *P2* utilizando as formulações *IR*, *CN* e *AB/CN*, em relação ao método explícito em problemas de escoamentos com  $Re \ll 1$ . Tal eficiência é clara nos resultados apresentados para o passo temporal, o número de iterações, o tempo de processamento e outras propriedades importantes para comparar as formulações explícitas e implícitas. Além das comparações entre os métodos que utilizam as formulações implícitas e explícita, os resultados numéricos mostraram a diferença entre a formulação *IR* e *CN*, para diferentes problemas e simulações. Em particular, os métodos numéricos foram aplicados aos seguintes problemas: Escoamento em um canal, para validar as técnicas numéricas, e jato incidindo sobre uma superfície rígida, para verificar a eficiência dos métodos em problemas com superfícies livres.

Para o estudo da validação dos resultados numéricos fornecidos pelos métodos *P1* e *P2* utilizando Formulações Implícitas, considera-se o escoamento de um fluido entre duas placas paralelas. A solução analítica para este problema pode ser encontrada em (Batchelor, 1970). Como exemplo para a validação dos métodos numéricos deste trabalho, considere duas placas paralelas separadas a uma distância  $L = 1$ , formando um canal, que no início da simulação esta completamente vazio e o fluido é injetado na entrada do canal a uma velocidade prescrita e com perfil do tipo parabólico. Os métodos *P1* e *P2* utilizando as *FI* foram aplicados para o escoamento de *Hagen-Poiseuille* sobre malha de  $100 \times 20$  células computacionais ( $\delta x = \delta y = 0.05m$ ). A região considerada para a análise dos resultados numéricos com a solução analítica para a velocidade na direção  $x$ , dada por (Batchelor, 1970) é o meio do canal, após o escoamento estar plenamente desenvolvido. O escoamento atingiu o estado estacionário após  $t = 20s$ . Os valores de  $\delta t$  nas figuras e tabelas são apresentados em segundos. Para melhor avaliar os resultados numéricos, e mostrar a convergência dos métodos numéricos apresentados neste trabalho, foi feito o cálculo do erro relativo ( $E_{rel}$ ) na norma  $l_2$  entre as soluções numéricas

e a solução analítica. O erro relativo é dado pela equação

$$E_{rel} = \frac{\Sigma(u_{analítica} - u_{numérica})^2}{\Sigma(u_{analítica})^2}. \quad (12)$$

Um fato interessante ocorre quando aumentou-se o valor de  $\delta t$  para o método *P1*, pois o erro relativo, também aumentou, enquanto que para o método *P2*, mesmo com o aumento do  $\delta t$ , o erro permaneceu constante. Esse fato pode ser observado pelas figuras Fig.(1), Fig.(2) e Fig.(3), que apresentam o comportamento da convergência temporal dos métodos apresentados, para o escoamento de *Hagen-Poiseuille* com  $Re = 0.1$ . Portanto, pode-se concluir, que eliminando o gradiente de pressão da equação de conservação de movimento Eq.(1), o método *P1* utilizando *FI*, tem precisão inferior ao método *P2*, para valores de  $\delta t$  bem superiores ao permitido pelo método explícito. Por outro lado, o método *P2* utilizando as formulações *IR*, *CN* e *AB/CN*, apresentou resultados muito semelhantes entre suas formulações implícitas, com erros relativos pequenos e resultados em boa concordância com a solução analítica. Utilizando ainda o modelo do problema de *Hagen-Poiseuille* outras simulações foram realizadas sobre a malha intermediária, com diferentes valores de  $Re$ . Essas simulações tiveram o objetivo de analisar a estabilidade das formulações implícitas, quando o número de  $Re$  diminui, isto é, para problemas mais viscosos ou *creep flow*. A tabela Tab.(1) mostra os resultados dos valores máximos de  $\delta t$  permitidos pelas formulações implícitas e o pelo método explícito. Para os valores de  $\delta t$  apresentados na tabela, os métodos foram estáveis e não apresentaram oscilações. Novamente, os métodos que utilizam a formulação *IR* admitiram valores para  $\delta t$  maiores que as outras formulações, em particular, maiores que as formulações *CN* e *AB/CN*. Apesar da diferença de valores de  $\delta t$  das formulações implícitas, os métodos *P1* e *P2* admitiram valores para  $\delta t$  bem maiores que o método explícito, isto é, todas as formulações implícitas, como era esperado, superaram a restrição de estabilidade do método explícito GENSMAC.

Outra simulação realizada utilizando os métodos *P1* e *P2* com as *FI*, foi o preenchimento de uma caixa por um fluido newtoniano com  $Re = 0.01$ . Para este modelo, os parâmetros  $L$  (diâmetro do injetor que escoo o fluido) e  $U$  (velocidade de entrada do fluido no injetor) são, respectivamente, 0.05m e  $1.0\text{ms}^{-1}$ , uma malha de  $100 \times 100$  células computacionais ( $\delta_x = \delta_y = 0.00050\text{m}$ ) foi utilizada para todos os métodos, o campo gravitacional age sob o escoamento e o tempo final das simulações foi  $t = 5\text{s}$ . Mais uma vez foram realizadas comparações entre os métodos que utilizam as formulações implícitas e explícita, verificando o valor de  $\delta t$  permitido para cada método, o número de iterações e o tempo de processamento, para o tempo de simulação  $t = 0.28\text{s}$ . Os resultados são apresentados na tabela Tab.(2). Novamente, as formulações implícitas superaram a restrição de estabilidade do método explícito, como era esperado, e utilizaram menos iterações para se obter a solução no tempo  $t = 0.28\text{s}$ . Com relação ao tempo de processamento, os métodos *P1* e *P2* utilizando as *FI* foram bem mais rápidos que o método explícito, determinando a solução em  $t = 0.28\text{s}$ . Em particular, o método *P2* utilizando a formulação *IR*, apresentou melhores resultados de estabilidade entre as formulações implícitas. Em todas as simulações, a formulação *IR* com os métodos *P1* e *P2* apresentou-se mais estável que as formulações que utilizam o método *CN*. Esse fato ocorre porque o método *CN* tem seu erro contaminado com oscilações numéricas e o método *IR* não tem. Esse fato também foi observado por (Turek, 1996). Observa-se que o método GBCP, utilizado nos métodos *P1* e *P2* com as *FI*, convergiu para a solução com números razoáveis de iterações. Portanto, mesmo não existindo resultados que garantam sua convergência, o método GBCP mostrou-se eficiente.

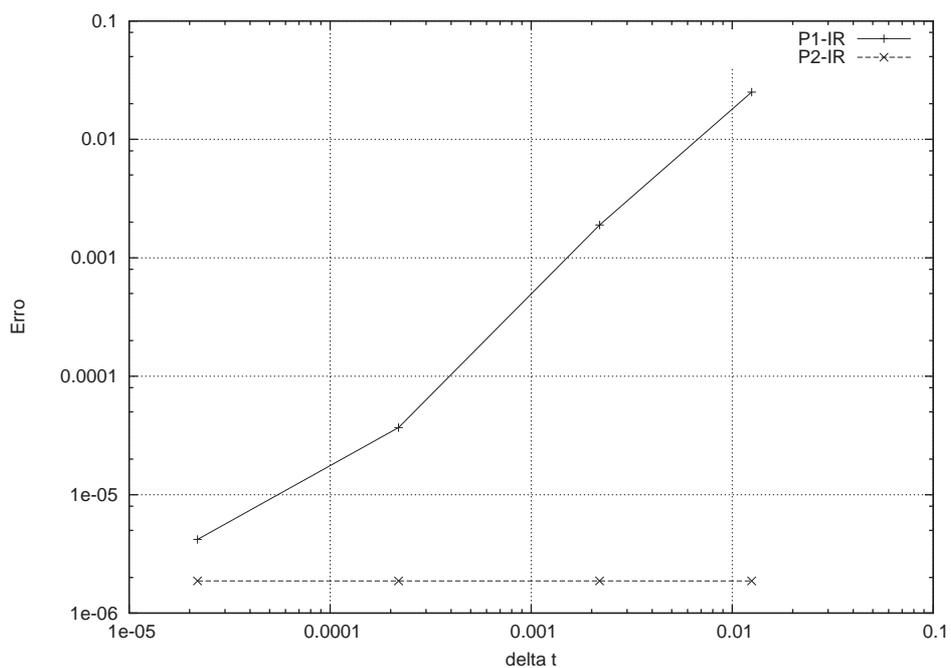


Figura 1: Erro relativo na norma  $l_2$ , para a velocidade  $u$  e os métodos  $P1$  e  $P2$  utilizando a formulação  $IR$ .

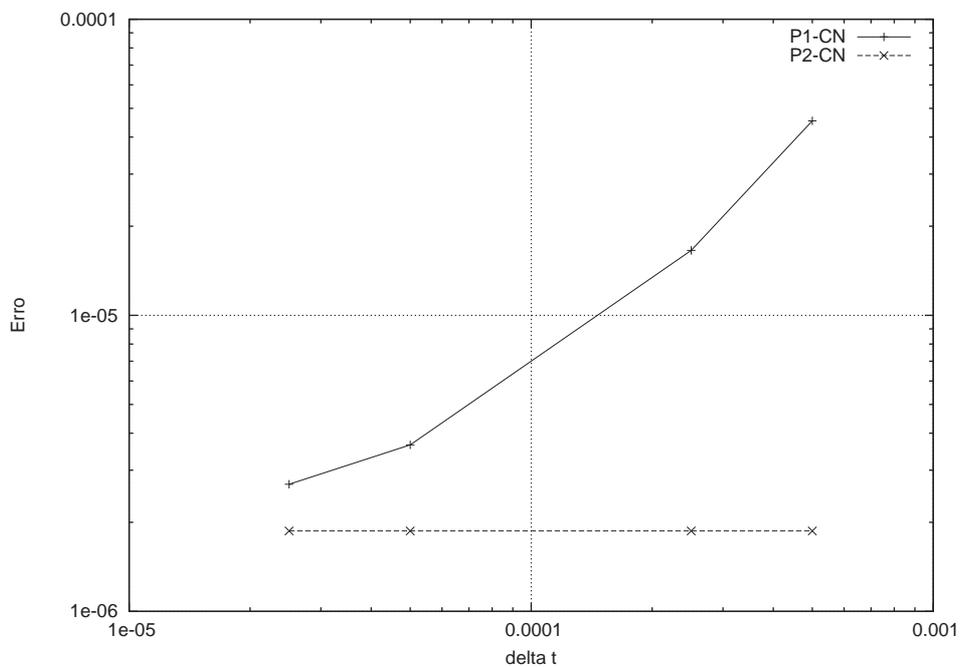


Figura 2: Erro relativo na norma  $l_2$ , para a velocidade  $u$  e os métodos  $P1$  e  $P2$  utilizando a formulação  $CN$ .

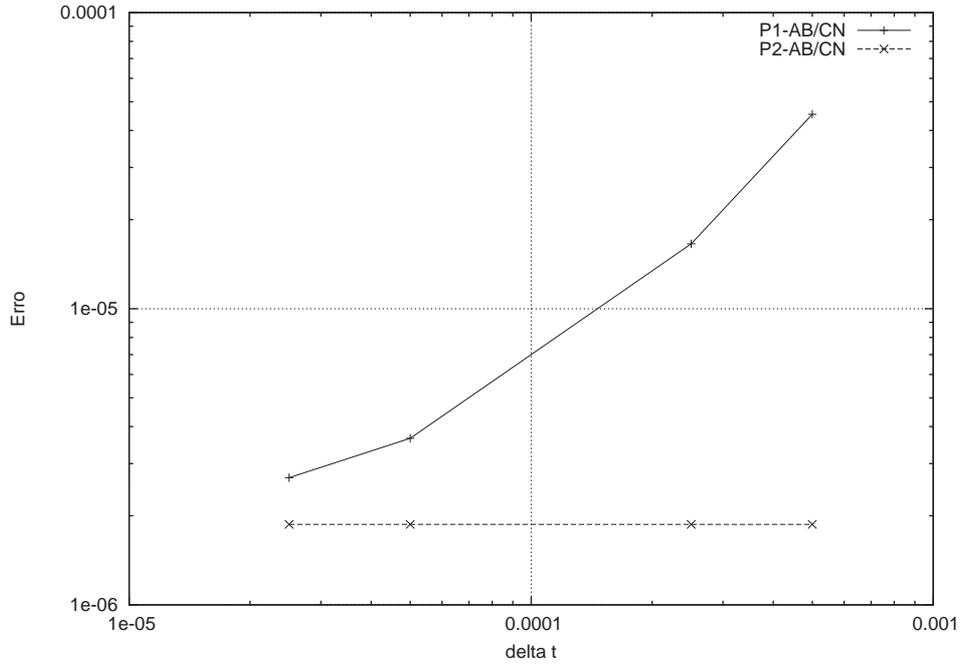


Figura 3: Erro relativo na norma  $l_2$ , para a velocidade  $u$  e os métodos  $P1$  e  $P2$  utilizando a formulação  $AB/CN$ .

Tabela 1: Limite de estabilidade para  $\delta t(s)$  no escoamento de *Hagen-Poiseuille*, com diferentes valores para  $Re$ .

Método	$Re = 0.1$	$Re = 0.01$	$Re = 0.001$	$Re = 0.0001$
Explícito	$2.5 \times 10^{-5}$	$2.5 \times 10^{-6}$	$2.5 \times 10^{-7}$	$2.5 \times 10^{-8}$
$P1-IR$	$1.25 \times 10^{-2}$	$1.25 \times 10^{-2}$	$1.25 \times 10^{-2}$	$1.25 \times 10^{-2}$
$P1-CN$	$5.0 \times 10^{-4}$	$5.0 \times 10^{-5}$	$5.0 \times 10^{-6}$	$5.0 \times 10^{-7}$
$P1-AB/CN$	$5.0 \times 10^{-4}$	$5.0 \times 10^{-5}$	$5.0 \times 10^{-6}$	$5.0 \times 10^{-7}$
$P2-IR$	$1.25 \times 10^{-2}$	$1.25 \times 10^{-2}$	$1.25 \times 10^{-2}$	$1.25 \times 10^{-2}$
$P2-CN$	$5.0 \times 10^{-4}$	$5.0 \times 10^{-5}$	$5.0 \times 10^{-6}$	$5.0 \times 10^{-7}$
$P2-AB/CN$	$5.0 \times 10^{-4}$	$5.0 \times 10^{-5}$	$5.0 \times 10^{-6}$	$5.0 \times 10^{-7}$

Tabela 2: Resultados para o escoamento de um jato preenchendo um caixa de  $L = 0.05m$ ,  $U = 1.0 \text{ ms}^{-1}$ ,  $Re = 0.01$  no instante  $t = 0.28s$ .

Método	$\delta t(s)$	Número de iterações	Tempo de processamento-(m:s)
Explícito	$5.0 \times 10^{-8}$	5599980	4326 : 43
$P1-IR$	$3.0 \times 10^{-6}$	112000	738 : 23
$P1-CN$	$1.0 \times 10^{-6}$	280000	1108 : 57
$P1-AB/CN$	$1.0 \times 10^{-6}$	280000	1149 : 01
$P2-IR$	$6.0 \times 10^{-5}$	8960	54 : 51
$P2-CN$	$1.0 \times 10^{-6}$	280000	1047 : 44
$P2-AB/CN$	$1.0 \times 10^{-6}$	280000	1059 : 18

## 6.CONCLUSÃO

As formulações implícitas apresentaram um desempenho satisfatório nos problemas transientes com superfície livre. Os métodos  $P1$  e  $P2$  apresentaram diferentes resultados na simu-

lação de um escoamento no canal. Como foi observado nas figuras Fig.(1), Fig.(2) e Fig.(3), o método *P1* utilizando as formulações implícitas apresentou erros maiores que o método *P2*. Os resultados mostram que é necessário diminuir o passo temporal  $\delta t$  no método *P1* para que este apresente erros a um nível aceitável. Nas simulações de jatos, os resultados numéricos obtidos pelos métodos *P1* e *P2* utilizando as formulações implícitas foram próximos entre si e daquele do método explícito. Os resultados comprovaram a capacidade desses métodos de simularem problemas com superfícies livres. Os resultados numéricos mostraram que as formulações implícitas superaram a condição de estabilidade do método explícito. Entretanto, as formulações *CN* e *AB/CN* introduziram oscilações, e como consequência, o valor de  $\delta t$  permitido foi mais restrito do que aquele da formulação *IR*. Embora as formulações *CN* e *AB/CN* tenham permitido um passo temporal maior que o método explícito, a formulação *IR* mostrou ser mais estável permitindo valores para  $\delta t$  bem maiores. Porém, recomenda-se escolher o valor do passo temporal com muito cuidado, para que a precisão numérica não seja afetada. Mesmo utilizando formulações implícitas, um estudo sobre  $\delta t$  a ser utilizado deve ser feito com muita atenção.

Um dos objetivos principais deste trabalho foi a comparação das formulações implícita e explícita. Propriedades como o valor do passo temporal  $\delta t$ , a precisão numérica, o número de iterações e o tempo de processamento foram apresentadas em tabelas comparativas. Em todas as simulações, as formulações implícitas superaram o valor do passo temporal do método explícito, sendo que em alguns casos, o  $\delta t$  foi aproximadamente 500000 vezes maior que o do método explícito. Os métodos *P1* e *P2* utilizando as formulações implícitas apresentaram erros próximos ao do método explícito com número de iterações bem menor. O tempo de processamento exigido pelas formulações implícitas foram significativamente menores que a formulação explícita.

## 7.AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPESP – processos 01/12540-2 e 00/03385-0 – pelo apoio financeiro.

## 8.REFERÊNCIAS

- Batchelor, G. K. 1970. “An Introduction to Fluid Dynamics”, Cambridge.
- Chorin, A. 1967. “A numerical method for solving incompressible viscous flow problems”, Journal of Computational Physics, Vol. 2, pp. 12–26.
- Crank, J. and Nicolson, P. 1947. “A practical method for numerical evaluation of solution of partial differential equations of the heat-conduction type”, Proc. Camb. Phi. Soc., Vol. 43, pp. 50–67.
- Douglas, J. and Rachford, H. 1960. “On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables”, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 82, pp. 421–439.
- Ferreira, V., Tomé, M., Castelo, A., Cuminato, J., Mangiavacchi, N., and McKee, S. 2002. “High order upwinding and the hydraulic jump”, International Journal of Numerical Methods in Fluids, Vol. 39, pp. 549–583.
- Harlow, F. and Welch, J. 1965. “Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface”, Physics of Fluids, Vol. 8, pp. 2182–2189.

Peaceman, D. and Rachford, H. 1955. "The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations", Journal Society Industrial and Applied Mathematics, Vol. 3, pp. 28–41.

Tomé, M. F. and McKee, S. 1994. "Gensmac: A computational marker-and-cell method for free surface flows in general domains", Journal of Computational Physics, Vol. 110, pp. 171–186.

Turek, S. 1996. "A comparative study of some time-stepping techniques for the incompressible Navier-Stokes equations: From fully implicit nonlinear schemes to semi-implicit projection methods", International Journal for Numerical Method in Fluids, Vol. 22, pp. 987–1011.

## NUMERICAL SIMULATION OF FREE SURFACE FLOWS USING IMPLICIT TECHNIQUES

**C. M. Oishi, J. A. Cuminato, V. G. Ferreira, M. F. Tomé, A. Castelo**

Instituto de Ciências Matemática e Computação, ICMC, USP, 13560-970, São Carlos, SP,  
{oishi, jacumina, pygf, murilo, castelo}@icmc.usp.br

**N. Mangiavacchi**

Departamento de Engenharia Mecânica, UERJ, 20550-900, Rio de Janeiro, RJ,  
nmangiavacchi@superig.com.br

**Abstract.** *In this work, implicit schemes are studied with the purpose of adapting them to the two-dimensional GENSMAC method, for the numerical solution of unsteady newtonian incompressible flows. Using the velocity-pressure formulation and different projection methods, the FreeFlow2D simulation system is employed to solve the conservation equations in the context of finite-difference. The viscous terms in the Navier-Stokes equations are implicitly treated via the Implicit Backward (IR), Crank-Nicolson (CN) and Adams-Bashforth/Crank-Nicolson (AB/CN) schemes. The convective terms are explicitly discretized by an upwind high-order limited scheme. For channel and jet flows with low Reynolds number and with free surfaces, the schemes are robusts and allow for larger time steps. Numerical results that compare very well with the analytic solutions are shown.*

**Keywords.** *Implicit Schemes, Numerical Simulation, Navier-Stokes Equations.*