CONTROLE DE VIBRAÇÕES CAÓTICAS DE UM PÊNDULO EXCITADO

N. J. PERUZZI
Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Projeto Mecânico, C P 6122, 13083-970, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil. E-mail: piru@saoluis.br

J. M. BALTHAZAR
Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro-SP, Po Box,178, 13500-230. Rio Claro-SP, Brasil e Professor visitante do Departamento de Projeto Mecânico, UNICAMP, Campinas-SP.
E-mail: jmbaltha@rc.unesp.br

1. RESUMO
Neste trabalho, determinamos as regiões de estabilidade/instabilidade de um pêndulo simples com excitação vertical do suporte em termos da freqüência natural e amplitude de excitação. A análise da estabilidade está baseada nos multiplicadores de Floquet, que foram obtidos a partir da expansão polinomial de Chebyshev e na iteração de Picard. A aplicação da transformação L-F ao sistema reduz a parte linear à forma invariante no tempo, tornando-o mais conveniente para simplificações obtidas a partir da aplicação da redução à Variedade Central e à teoria da Forma Normal. A equação do pêndulo pôde, então, ser reduzida a uma forma completamente invariante do tempo e sua solução calculada na forma fechada. A análise da dinâmica da solução na forma fechada, no ponto de bifurcação, é equivalente ao da dinâmica sistema original.

2. PALAVRAS-CHAVE
Transformação Lyapunov-Floquet; Polinômio de Chebyshev; iteração de Picard; Forma Normal; Variedade Central.

3. INTRODUÇÃO
Muitos problemas de engenharia têm sido modelados por equações diferenciais não-lineares com coeficientes periódicos no tempo cujas dinâmicas, em geral, têm comportamentos imprevisíveis e muito complexos quando atuam dentro de certas faixas de operação.
Por outro lado, é conhecido que, às vezes, a performance da dinâmica de um sistema pode ser consideravelmente melhorada quando os parâmetros do sistema o levam a operar numa vizinhança da fronteira de estabilidade. Porém, deve haver a garantia de que, para pequenas vibrações, se a fronteira de estabilidade for rompida, o sistema não perderá a estabilidade de maneira catastrófica. Portanto, a solução do sistema dinâmico e a respectiva análise de estabilidade são questões fundamentais para que haja bom desempenho de um projeto.
A análise da estabilidade pode ser feita através dos autovalores da Matriz de Transição de Estado (**S**tates **T**ransformation **M**atrix - STM) calculada no final do período principal. Porém, a obtenção da STM, na maioria dos casos, não é uma tarefa trivial.
Recentemente [9;13], foi desenvolvida uma técnica relativamente simples, porém eficiente para a obtenção da STM, empregando a expansão polinomial de Chebyshev e a iteração de Picard. Além disso, a matriz STM pode ser fatorada como produto de duas matrizes, cujos fatores representam a

amplitude - $\phi(t)$ e o decaimento - e^{Rt} do sistema. A matriz $\phi(t)$ é conhecida como matriz de transformação L-F, cuja aplicação ao sistema com coeficientes periódicos irá reduzir a parte linear T-periódica desse sistema a uma forma equivalente, que é invariante no tempo. A vantagem do sistema invariante no tempo é que este se torna mais conveniente, por exemplo, para a aplicação da redução à Variedade Central e à teoria da Forma Normal.

Em recentes estudos, Sinha [7-14] desenvolveu um método analítico que não é restrito a pequenos parâmetros e é muito preciso na predição do ponto de bifurcação bem como na dinâmica pós-bifurcação. Nesses estudos, mostrou-se que, para sistemas de co-dimensão de bifurcação 1, é sempre possível construir formas invariantes no tempo equivalentes às equações periódicas no tempo, tal que as características de bifurcação e estabilidade são completamente preservadas.

Nesse trabalho, consideramos a aplicação do método S-W para um pêndulo excitado estudado anteriormente em [9], sendo organizado como se segue: na seção 4, nós apresentamos os principais resultados utilizados pelo método de S-W. Na seção 5, discute-se o modelo matemático para o sistema com vibração aqui usado e a análise de estabilidade do sistema original. Ainda, aplicou-se a redução da dinâmica do sistema a sua forma normal invariante no tempo, e, finalmente, na seção 6, concluiu-se com breves observações.

4. MATRIZ FUNDAMENTAL VIA MÉTODO S-W

Considere um sistema dinâmico não-linear com coeficientes *T*-periódicos no tempo dado descrito pela equação diferencial:

$$\dot{x} = f(x,\alpha,t), \tag{1}$$

onde $x \in \Re^n$, $f(x,\alpha,t+T) = f(x,\alpha,t)$ é uma função não-linear *T*-periódica no tempo e $\alpha \in \Re^m, (m \le n)$ contém os parâmetros do sistema.

Assumindo que $x = 0$ é um ponto de equilíbrio, o sistema (1) pode ser expandido em série de Taylor em torno deste ponto e transformado na forma de espaço-estado, assumindo a forma:

$$\dot{x} = A(t)x + F(x,\alpha,t), \tag{2}$$

onde $A(t)$ é uma matriz nxn dos coeficientes periódicos do termo linear e $F(.)$ é um vetor com os termos não-lineares.

A estabilidade/instabilidade de (2) pode ser verificada através dos autovalores μ (chamados multiplicadores de Floquet) da Matriz de Transição de Floquet, isto é, da matriz de transição de estados calculada no final do período principal T. Uma aproximação para a matriz de transição de estados foi proposta em [13], podendo ser obtida via polinômio de Chebyshev e o método iterativo de Picard, através da expressão:

$$\phi^{(gr_{cheb},\, it_{pic})}(t) = \hat{T}^T [\hat{I} + (\sum_{i=1}^{it_{pic}} [L]^{i-1})P], \tag{3}$$

onde gr_{cheb} é grau do polinômio de Chebyshev alterado de primeiro tipo, it_{pic} o número da iteração de Picard e as matrizes do segundo membro de (3) estão definidas no apêndice.

Cada um dos multiplicadores de Floquet fornece uma medida da convergência/divergência local da órbita ao longo de uma direção particular sobre o período T da solução periódica.

A matriz $\phi(\cdot)$ pode ser reescrita na forma fatorada como $\phi(t) = Q(t)e^{Rt}$, onde se observa que a matriz *Q(t)* indica as oscilações, e a matriz *R,* o decaimento exponencial da solução periódica.

5. Análise da Estabilidade Estrutural do Pêndulo Excitado Parametricamente

Considere o sistema com um grau de liberdade consistindo em um pêndulo simples forçado parametricamente mostrado a seguir.

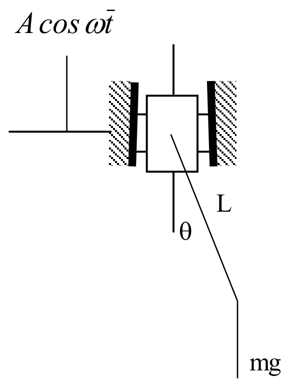

Figura 1: Pêndulo com suporte excitado parametricamente

Este problema, cujo pêndulo é livre para oscilar ou girar num plano, cujo pivô é verticalmente conduzido por uma força periódica, foi estudado por Bishop e Clifford [1996] pela equação:

$$\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} - (1 - p\,cos(\omega t))sen\theta\,, \tag{4}$$

onde θ é a medida do deslocamento angular, $p\,cos(\omega t)$ força externa aplicada ao pivô, com p e ω amplitude e freqüência, e β é o coeficiente de amortecimento.

Expandindo a função $sen\theta$ em série de Taylor até a terceira ordem, em torno da origem, e transformando a equação (4) na forma espaço-estado, de modo que $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, temos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + p\,cos(\omega t)) & -\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{(1 + p\,cos(\omega t))}{6} x_1^3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Análise da Estabilidade Estrutural

Para analisar a estabilidade estrutural do sistema com vibração paramétrico, basta considerar somente a parte linear do sistema (5), isto é:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + p\,cos(\omega t)) & -\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

A estabilidade do sistema linearizado (6) é analisada pelos autovalores μ da Matriz de Transição de Floquet, a qual pode ser obtida calculando os autovalores da Matriz de Transição de Estados (3) para $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$, ou seja, $\Phi(T)$, onde T é o período fundamental do sistema.

No espaço de parâmetros $p - \omega$, pode-se obter o diagrama de estabilidade, isto é, varia-se os parâmetros p e ω de a modo obter $|\mu| = 1$. Para obter o diagrama de estabilidade, foi usado o polinômio de Chebyshev alterado de 1^0 tipo de grau $gr_{cheb} = 20$ e o número de iterações de Picard $it_{pic} = 40$. Consideramos os parâmetros p e ω nos intervalos $0 < p < 3$ e $0.5 < \omega < 3$, respectivamente, e $\beta = 0.1$, obtendo:

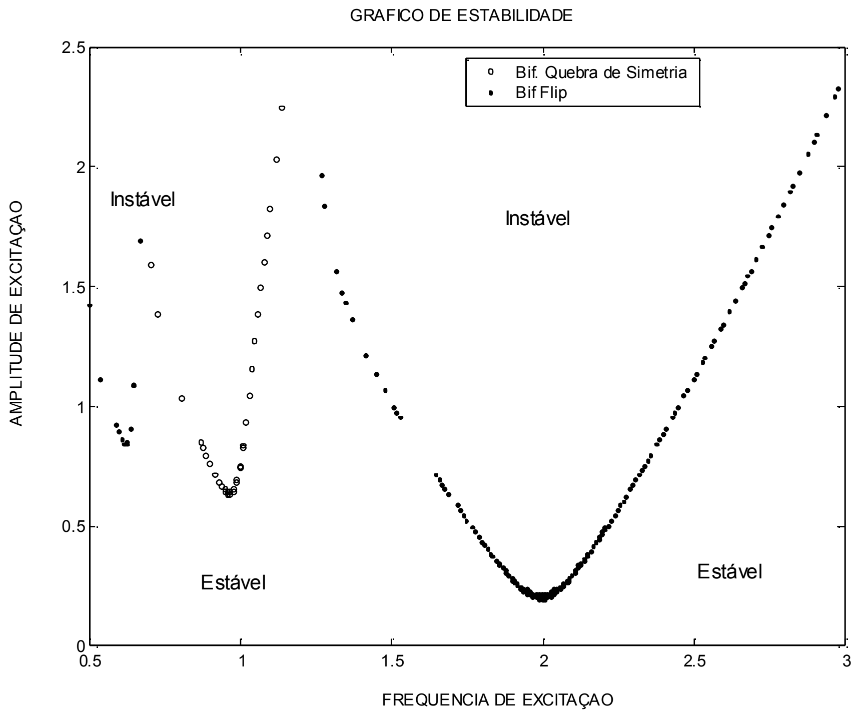

Figura 2 – Gráfico de estabilidade para $0 < p < 3$ e $0.5 < \omega < 3$

Observam-se no gráfico, dois tipos de fronteiras que determinam mudança qualitativa na dinâmica do sistema, isto é: a bifurcação por quebra de simetria e a bifurcação com duplicação do período (flip). O diagrama de bifurcação mostrado na Figura 3 foi obtido fixando a amplitude $p = 2$ e variando a freqüência de excitação $0.5 \leq \omega \leq 3$.

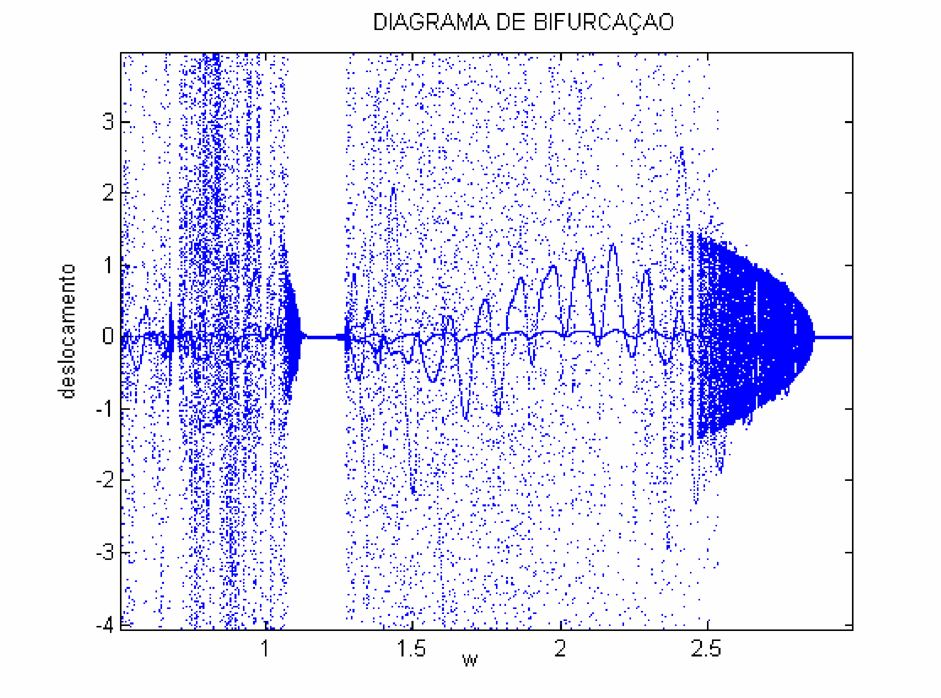

Figura 3: Diagrama de Bifurcação para $p = 2$ e $0.5 < \omega < 3$

Na região 2<ω<3 (Figura 4), observa-se o valor crítico $\omega_c = 2.86142$. Para esta freqüência, temos a bifurcação com duplicação de período, isto é, $\mu_c = -1$.

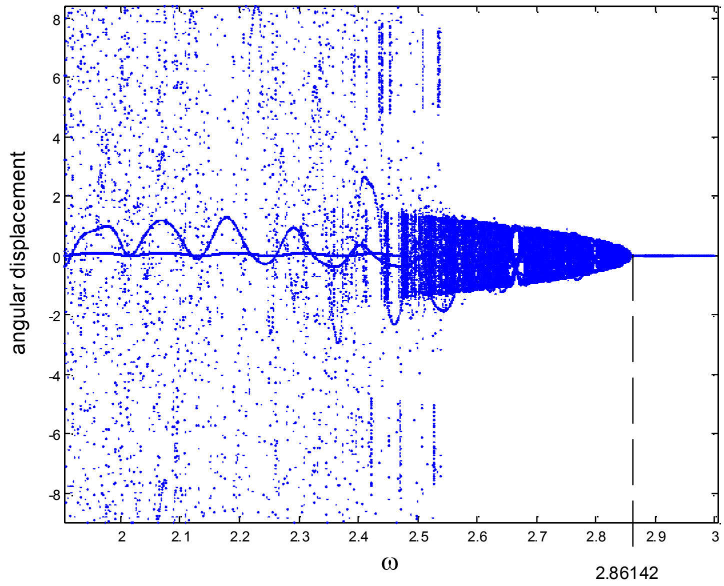

Figura 4: Refinamento do Diagrama de Bifurcação para $2 < \omega < 3$

ANÁLISE DA ESTABILIDADE NO PONTO DE BIFURCAÇÃO

Para a análise da dinâmica do sistema, é conveniente obter uma estimativa quantitativa das soluções no ponto de bifurcação, bem como numa vizinhança desse ponto. Com esse fim, vamos analisar a estabilidade do sistema (5) para o parâmetro crítico $\omega_c = 2.86142$ onde ocorre uma bifurcação flip.

Inicialmente, vamos fatorar a Matriz de Transição de Estados como $\Phi(t) = Q(t)e^{Rt}$, onde:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) \\ Q_{21}(t) & Q_{22}(t) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

de modo que a transformação de L-F $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q(t)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ transforma a parte linear do sistema (5) na forma invariante no tempo:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + Q^{-1}(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{(1+p\cos(\omega t))}{6}(Q_{11}(t)y_1 + Q_{12}(t)y_2)^3 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Aplicando a Transformação Modal $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ na equação (8), obtemos a equação na Forma de Jordan:

$$\begin{pmatrix}\dot z_1\\ \dot z_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}+ M^{-1}Q^{-1}(t)\begin{pmatrix}0\\ \frac{(1+p\cos(\omega t))}{6}[Q_{11}(t)(M_{11}z_1+M_{12}z_2)+Q_{12}(t)(M_{21}z_1+M_{22}z_2)]^3\end{pmatrix} \tag{9}$$

onde M_{ij} são as entradas da Matriz M, λ_1 e λ_2 correspondentes aos multiplicadores de Floquet crítico e estável, respectivamente. Como conseqüência dessa correspondência, vemos que $\lambda_1 = 0$.

Efetuando os produtos e desenvolvendo os termos de ordem cúbica, temos:

$$\begin{pmatrix}\dot z_1\\ \dot z_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_{11}(t)z_1^3+f_{12}(t)z_1^2z_2+f_{13}(t)z_1z_2^2+f_{14}(t)z_2^3\\ f_{21}(t)z_1^3+f_{22}(t)z_1^2z_2+f_{23}(t)z_2z_2^2+f_{24}(t)z_2^3\end{pmatrix}, \tag{10}$$

onde os $f_{ij}(t)$ são funções 2T-periódicas pois a matriz da transformação L-F $Q(t)$ também é 2T-periódica. Logo, tais funções podem ser calculadas em série de Fourier:

$$f_{ij}(t)=a_0^{ij}+\sum_{n=1}^{\ell}a_n^{ij}\cos(n\pi t)+\sum_{n=1}^{\ell}b_n^{ij}\,sen(n\pi t) \tag{11}$$

Pela teoria da Variedade Central, existe uma transformação não-linear com coeficientes periódicos da forma cúbica:

$$z_2 = H(z_1,t)=h_3(t)z_1^3, \tag{12}$$

onde $h_3(t)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}h_\nu e^{i\nu\pi t}z_1^3$ e $h_\nu=\dfrac{a_\nu}{i\nu\pi}$, com a_ν sendo os coeficientes de Fourier da função periódica contendo os monômios de z_1 com ordem 3.

A equação reduzida à Variedade Central tem a forma:

$$\dot z_1 = w(t)z_1^3, \tag{13}$$

A teoria da Forma Normal garante que existe uma transformação:

$$z_1 = v+\bar h_3(v,t), \tag{14}$$

onde

$$h_3(v,t)=\sum_{\nu=-q}^{q}h_\nu e^{i\nu\pi t}v^3 \ \text{ e } \ h_\nu=\frac{a_\nu}{i\nu\pi} \tag{15}$$

transforma o sistema de co-dimensão de bifurcação 1 num sistema completamente invariante no tempo [14].

De fato, é óbvio que a condição de redutibilidade de (15) é $\nu \neq 0$, isto é, o sistema pode ser reduzido a sua forma linear se $\nu = 0$. Como na equação (14) só temos o termo não-linear, a condição de ressonância $\nu = 0$ corresponde ao termo constante no tempo da expansão em série de Fourier desta função, isto é, $h_3(v,t)=\sum_{\nu=-q}^{q}a_0 v^3$.

Portanto, a redução à Forma Normal resultará numa equação independente do tempo com a forma:

$$\dot{v} = wv^3 \tag{16}$$

Para os parâmetros $p = 2$ e $\omega_c = 2.86142$, obtemos a forma de Jordan:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.2196 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11}(t)z_1^3 + f_{12}(t)z_1^2 z_2 + f_{13}(t)z_1 z_2^2 + f_{14}(t)z_2^3 \\ f_{21}(t)z_1^3 + f_{22}(t)z_1^2 z_2 + f_{23}(t)z_2 z_2^2 + f_{24}(t)z_2^3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Aplicando as reduções à Variedade Central e à Forma Normal, obtemos o sistema invariante no tempo:

$$\dot{v} = -23.0232v \tag{18}$$

A solução da equação (18) pode ser obtida facilmente na forma fechada como:

$$v(t) = \pm 0.14736 t^{-0.5} \tag{19}$$

Logo, pode-se concluir que o sistema é assintoticamente estável no ponto crítico $\omega_c = 2.86142$.

5. CONCLUSÕES

O pêndulo livre a oscilar ou a girar em um plano cujo pivô é excitado verticalmente por uma força periódica, é analisado. Para isso, foi construído o diagrama de estabilidade/instabilidade onde se observaram as regiões de fronteira com a bifurcação flip e a bifurcação por quebra de simetria. Para um valor do conjunto de parâmetro p=2 e $\omega_c = 2.86142$ (bifurcação flip), analisou-se a estabilidade neste ponto de bifurcação, reduzindo-se o sistema a uma forma invariante no tempo, cuja solução na forma fechada é facilmente calculada. A análise de estabilidade do pêndulo no ponto de bifurcação pode ser realizada.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem o CNPq e FAPESP, pela realização deste trabalho.

7. REFERÊNCIAS

1. Bishop, S.R., Clifford, M.J. “Zones of Chaotic Behavior in the Parametric Excited Pendulum”. Journal of Sound and Vibration, 189(1), p142-47, 1996.
2. Nayfeh, A H, Balachandran, B. “Applied Nonlinear Dynamics”, Wiley, 1994
3. Sinha, S.C., Henrichs, J.T., Ravindra, B. “A general approach in the design of active controllers for Nonlinear Systems Exhibiting Chaos”. Int. Journal of Bifurcation and Chaos, 10(1), n. 1, (2000) p. 165-178.
4. Bishop, S.C., M.J. Clifford. “Stabilizing the Parametric Excited Pendulum Onto High Order Periodic Orbits”. Journal of Sound and Vibration, 194(2), p287-93, 1996.
5. Sinha, S.C., Dávid, A.“Control of Chaos in Nonlinear Systems with Time-Periodic Coefficients”. American Control Conference, p. 764-768, June 2000.
6. Sinha, S.C., Dávid, A. ”Versal Deformation and Local Bifurcation Analysis of Time-Periodic Nonlinear Systems”. Nonlinear Dynamics, 21, p. 317-336, 2000.
7. Sinha, S.C., Wu, Der-Ho, “An Efficient Computational Scheme for the Analysis of Periodic Systems”. Journal of Sound and Vibration, 151(1), p. 91-117, 1991.

8. Sinha, S.C. Wu, Der-Ho, Juneja,V. Joseph, P. "Analysis of Dynamic Systems with Periodically Varying Parameters via Chebyshev Polynomials"**.** Journal of Vibration and Acoustics, vol. 115, p. 96-102, Jan. 1993.
9. Sinha, S.C., Joseph, P. "Control of General Dynamic Systems with Periodically Varying Parameters Via Lyapunov-Floquet Transformation". Journal of Dynamic, Measurement, and Control, v.116, p.650-658, 1994.
10. Sinha, S.C., Pandiyan,R., Bibb, P.S. "Lyapunov-Floquet Transformation:Computations and Applications to Periodic Systems". Journal of Vibration and Acoustics. 118, p. 209-219, 1996.
11. Sinha, S.C., Butcher, E.A. "Symbolic Computation of Fundamental Solution Matrices for Linear Time-Periodic Dynamical Systems". Journal of Sound and Vibration**,** 206(1), p61-85, 1997.
12. Sinha, S.C., Butcher, E.A. "Construction of Dynamically Equivalent Time-Invariant Forms for Time-Periodic Systems"**.** Nonlinear Dynamics, 16, p. 203-221, 1998.
13. Sparis, P. D., Mouroutsos, S.G. "A Comparative Study of the Operational Matrices of Integration and Differentiation for Orthogonal Polynomial Series". International journal of control, 42(3), p 621-638, 1985.
14. Snyder, M.A. "Chebyshev Methods in Numerical Approximations". Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1966.

8. APÊNDICE

Considerando $$\phi^{(k,m)} = \hat{T}^T [\hat{I} + (\sum_{i=1}^{k} [L]^{i-1})P] \qquad (3)$$

onde

$$\hat{T}^T(t) = \begin{bmatrix} T_o^*(t)\ T_1^*(t) \ldots T_{m-1}^*(t) & 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 & T_o^*(t)\ T_1^*(t) \ldots T_{m-1}^*(t) \end{bmatrix} \qquad (A1)$$

$T_s^*(t)$, $s = 0,\ldots,m-1$, denotam os polinômios de Chebyshev de 1^0 tipo, sendo dados por:

$$T_s^*(t) = T_s(2t-1) \text{ onde } T_{s+1}(t) = 2tT_s(t) - T_{s-1}(t),$$

com $T_0(t) = 1$ e $T_1(t) = t$.

$\hat{I} := I_n \otimes (1\ \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{(m-1)})^T$ é uma matriz nmxn e $\otimes$ é produto de Kronecker.

A matriz L é dada por: $$L = \sum_{i=1}^{k} \overline{A}_i \otimes [G^T Q_{d_i}], \qquad (A2)$$

onde G e Q_{d_i} são dados por:

$$G = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1/6 & -1/4 & 0 & 1/12 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/16 & 0 & -1/8 & 0 & 1/16 & \cdots & 0 \\ -1/30 & 0 & 0 & -1/12 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1/4(m-1) \\ (-1)^m/2m(m-2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4(m-2) & 0 \end{bmatrix}_{mxm}$$

$$
Q_{d_i} = \begin{bmatrix}
d_0^i & \frac{d_1^i}{2} & \frac{d_2^i}{2} & \ldots & \frac{d_{m-1}^i}{2} \\
d_1^i & d_0^i + \frac{d_1^i}{2} & \frac{1}{2}(d_1^i + d_3^i) & \ldots & \frac{1}{2}(d_{m-2}^i + d_m^i) \\
d_2^i & \frac{1}{2}(d_1^i + d_3^i) & d_0^i + \frac{d_4^i}{2} & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
d_{m-1}^i & \frac{1}{2}(d_{m-2}^i + d_m^i) & \ldots. & \cdots & d_0^i + \frac{d_{2m-2}^i}{2}
\end{bmatrix},
$$

onde $d_i = \left[d_0^i \; d_1^i \ldots d_{m-1}^i\right]^T$ pode ser calculada através:

$$
d_r^i = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{f(t)T_s^*(t)}{\sqrt{t(1-t)}}dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(cos^2\phi)\, cos(2s\phi)d\phi.
$$

Finalmente, a matriz P é obtida por: $P = \sum_{i=1}^{k} \overline{A}_i \otimes [G^T Q_{d_i}]$. (A3)