

SÍNTESE DO CONTROLE ÓTIMO PARA SISTEMA DE RÖSSLER

Marat Rafikov

Departamento de Estatística, Física e Matemática da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Rua São Francisco, 501, C.P. 560, CEP 98700-000, Ijuí – RS, Brazil. E-mail: rafikov@admijui.unijui.tche.br

José Manoel Balthazar

Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação da Universidade Estadual Paulista, C.P. 178, CEP 13500-230, Rio Claro, SP, Brasil. E-mail: jmbaltha@rc.unesp.br
Resumo - 43007

Resumo. Neste trabalho são propostas as estratégias de controle ótimo que dirigem o movimento caótico do sistema de Rössler para um ponto fixo desejado. O problema é formulado como um problema de síntese do controle ótimo não-linear com horizonte infinito. O fato novo é que este problema de controle é resolvido sem nenhuma linearização. Aplicando a Programação Dinâmica, o problema formulado foi reduzido à resolução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. A solução desta equação foi encontrada em forma analítica entre as funções de Lyapunov do sistema controlado.

Palavras-chave: sistema de Rössler, movimento caótico, síntese do controle ótimo, equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, função de Lyapunov.

1. INTRODUÇÃO.

Nos últimos anos foi observado um significativo interesse no controle dos sistemas não-lineares que exibem comportamento caótico. Entre estratégias de controle de caos com realimentação o mais popular é método OGY (Ott, Grebogi, York, 1990). Este método usa o mapa de Poincaré do sistema. Kapitaniak (1996) mostra que isto conduz a algumas limitações de sua aplicação. Um caminho que permite evitar estas limitações é uma síntese de controle ótimo para sistemas do tempo contínuo. Recentemente, uma metodologia baseada na aplicação da transformação de Lyapunov-Floquet foi proposta por Sinha et al (2000) para garantir a estabilidade local da órbita periódica desejada ou o ponto fixo de um sistema caótico. Este método está baseado em linearização de equações que descrevem o erro entre a trajetória atual e desejada.

Neste trabalho, são propostas as estratégias de controle ótimo que “dirigem” o movimento caótico do sistema de Rössler para qualquer ponto desejado. Este problema é formulado como um problema do controle ótimo para o sistema não-linear com horizonte infinito. . Um resultado novo é que este problema do controle ótimo é resolvido sem nenhuma linearização. Usando técnicas de Programação Dinâmica (Bellman, 1957), o problema formulado foi reduzido à resolução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (Braison and Ho, 1969). A função que satisfiz a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman foi encontrada entre funções de Lyapunov do sistema controlado.

2. PROBLEMA DE SÍNTESE DO CONTROLE ÓTIMO

Considere a dinâmica não-linear

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(x^*) = 0 \quad (1)$$

onde $x \in R^n$ designa o vetor do estado, $u \in R^m$ designa o vetor do controle e funções $f(x): R^n \rightarrow R^n$ e $g(x): R^n \rightarrow R^{n \times m}$ são continuamente diferenciáveis em relação de todos os argumentos. Pode ser formulado o seguinte problema do controle ótimo. Determinar o controle ótimo u que dirige o sistema (1) de qualquer estado de inicial para ponto fixo desejado x^* , minimizando o seguinte funcional:

$$J[u] = \int_0^{\infty} [q(x) + u^T R u] dt \quad (2)$$

para $q(x)$ continuamente diferenciável, positiva definida e a solução desejada é um controle com realimentação.

Para se resolver o problema acima formulado, é utilizada técnicas de Programação Dinâmica (Bellman, 1957), i.e., este problema reduz-se à resolução da seguinte equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi-Bellman (Braison and Ho, 1969).

$$\min_{u \in U} \left(\frac{dS}{dt} + w \right) = \left(\frac{dS}{dt} + w \right)_{u=u^0} = 0 \quad (3)$$

onde

$$w = q(x) + u^T R u$$

e S é geralmente chamada como a *função valor* e pode ser considerada como custo mínimo de deslocamento do estado corrente $x(t)$, isto é:

$$S(x(t)) = \min_{u \in U} \int_t^{\infty} [q(x) + u^T R u] dt \quad (4)$$

Num caso geral a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (3) é uma equação diferencial parcial não-linear e a resolução desta equação é muito difícil.

A seguir, discute-se o caso do oscilador de Rossler

3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA PARA SISTEMA DE RÖSSLER EXIBINDO CAOS

O sistema de Rossler tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + b x_2 \\ \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - a) \end{aligned} \quad (5)$$

Rössler (1976) descobriu que o sistema (5) tem comportamento caótico quando $b = 0.2$ e $a = 5.7$ [6]. O diagrama de fase que mostra o comportamento caótico do sistema (5) está na Fig. (1).

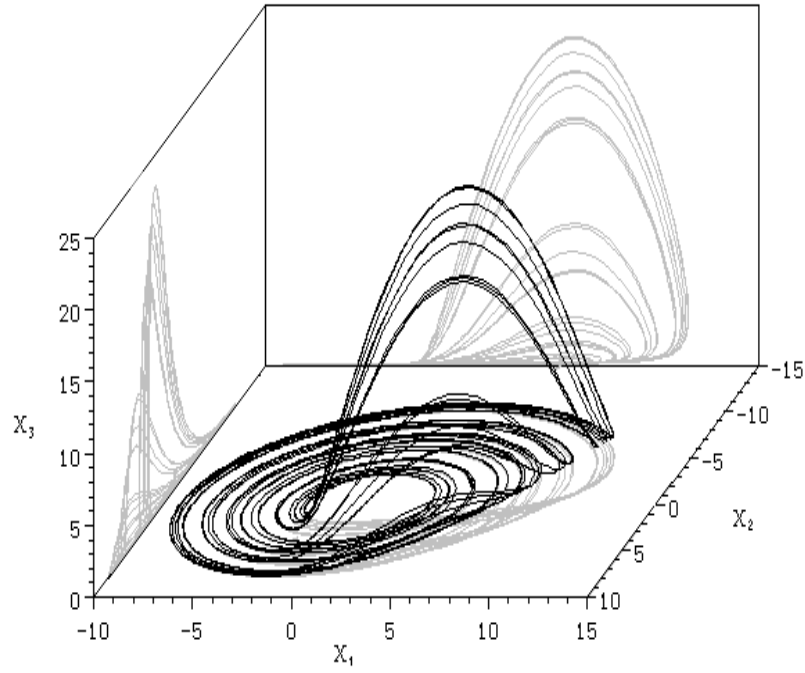


Figura 1. Diagrama de fase do sistema de Rossler sem controle

Seja

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} \quad (6)$$

ponto de equilíbrio desejado. Da Figura (1) é visto que para o sistema sem controle (5) a variável $x_3^* > 0$. Por isso para o sistema com controle também é considerado que $x_3^* > 0$.

São consideradas as funções de controle que consistem de duas partes. A parte u^* (controle *feedforward*) leva o sistema ao ponto desejado e a parte u é controle *feedback*.

O sistema de Rössler, com controle, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 + u_1^* + u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + bx_2 + u_2^* + u_2 \\ \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - a) + u_3^* + x_3u_3 \end{aligned} \quad (7)$$

onde o controle feedforward é escolhido como:

$$\begin{aligned} u_1^* &= x_2^* + x_3^* \\ u_2^* &= -x_1^* - bx_2^* \\ u_3^* &= -b - x_3^*(x_1^* - a) \end{aligned} \quad (8)$$

e o sistema de Rössler pode ser expresso na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -(x_2 - x_2^*) - (x_3 - x_3^*) + u_1 \\
\dot{x}_2 &= (x_1 - x_1^*) + b(x_2 - x_2^*) + u_2 \\
\dot{x}_3 &= x_3[(x_1 - x_1^*) + u_3]
\end{aligned} \tag{9}$$

Nota-se que o sistema (9), sem o controle feedback é instável. Logo, para encontrar as funções de controle u_i é formulado o seguinte problema do controle ótimo:

Encontrar o vetor – função de controle u que transfere o sistema (9) do estado inicial $x(0)$ ao ponto de equilíbrio desejado (6), minimizando o seguinte funcional:

$$J[u] = \int_0^{\infty} [Y^T Q Y + m(x_3 - x_3^*)^2 + r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + r_3 u_3^2] dt \tag{10}$$

onde $Y = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \end{bmatrix}$ e a matriz $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}$ é definida positiva.

4. RESULTADOS PRINCIPAIS

Conforme resultados de Programação Dinâmica [5] se existe o mínimo do funcional (10) e S é uma função suave (“smooth”) da condição inicial, o problema acima formulado reduz-se à resolução da seguinte equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) (3) com

$$w = Y^T Q Y + m(x_3 - x_3^*)^2 + r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + r_3 u_3^2 \tag{11}$$

A solução da equação HJB satisfaz a seguinte condição final:

$$S(\infty) = 0 \tag{12}$$

Como foi mencionado acima, a resolução desta equação é complexa.. Na bibliografia referente a este assunto (Osher e Shu, 1991, Bardi e Capuzzo-Dolcetta, 1997), existe um número de métodos numéricos de resolução do problema (3), (11), (12). Neste trabalho a função de Bellman S é procurada, em forma analítica. Esta função satisfaz a Eq. (3) com a condição final (12), por um lado, e estabiliza o sistema (9) no ponto desejado (6), por outro.

Considere-se a seguinte função:

$$S(x, y) = Y^T S_1 Y + c \left(x_3 - x_3^* - x_3^* \ln \left(\frac{x_3}{x_3^*} \right) \right) \tag{13}$$

onde $S_1 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix}$ é [2x2] matriz simétrica, positiva definida e o coeficiente c é constante positiva. É fácil de observar que S é uma função de Lyapunov. A função S é definida positiva desde que seu segundo termo

$$S_2 = c \left(x_3 - x_3^* - x_3^* \ln \left(\frac{x_3}{x_3^*} \right) \right)$$

é positivo. É óbvio que S_2 tem o mínimo global $S_2 = 0$ em $x_3 = x_3^* > 0$. Da condição necessária do extremo segue que

$$\frac{dS_2}{dx_3} = c \left(1 - \frac{x_3^*}{x_3} \right) = 0 \text{ ou } x_3 = x_3^*.$$

A condição suficiente de mínimo é verificada

$$\frac{d^2 S_2}{dx_3^2} = c \frac{x_3}{x_3^*} > 0.$$

Desta forma, confirma-se que a função S_2 é definida positiva. Então a função S é definida positiva também. Por outro lado, se $u = u^o$ é controle ótimo, então a equação de Hamilton – Jacobi – Bellman torna-se:

$$\frac{dS}{dt} + w = 0.$$

De onde , segue:

$$\frac{dS}{dt} = -w$$

ao longo da trajetória ótima.

Levando-se em conta que w é definida positiva, a derivada $\frac{dS}{dt}$, calculada em virtude do sistema (9), é negativa definida. Isto confirma que S é a função de Lyapunov.

Calculando-se a derivada da função S e levando em conta (9), a equação de HJB pode ser obtida como

$$\begin{aligned} \min_{u \in U} \{ & 2v_{11}(x_1 - x_1^*)[-(x_2 - x_2^*) - (x_3 - x_3^*) + U_1] + 2v_{12}(x_1 - x_1^*)[(x_1 - x_1^*) + \\ & + b(x_2 - x_2^*) + U_2] + 2v_{12}(x_2 - x_2^*)[-(x_2 - x_2^*) - (x_3 - x_3^*) + U_1] + \\ & + 2v_{22}(x_2 - x_2^*)[(x_1 - x_1^*) + b(x_2 - x_2^*) + U_2] + c(x_3 - x_3^*)[(x_1 - x_1^*) + U_3] + w \} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Notando-se que as funções u_i não são limitadas, elas podem ser encontradas da condição:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \{ \dots \} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (15)$$

onde através de $\{ \dots \}$ é designada a expressão dentro das chaves da Eq. (14). Da Equação (15) pode ser obtido:

$$\begin{aligned} u_1^o &= -\frac{s_{11}}{r_1}(x_1 - x_1^*) - \frac{s_{12}}{r_1}(x_2 - x_2^*) \\ u_2^o &= -\frac{s_{12}}{r_2}(x_1 - x_1^*) - \frac{s_{22}}{r_2}(x_2 - x_2^*) \\ u_3^o &= -\frac{c}{2r_3}(x_3 - x_3^*) \end{aligned} \quad (16)$$

Levando-se as funções do controle ótimo Eq. (16) na HJB equação (14), comparando-se os termos semelhantes e admitindo-se que $s_{12} = 0$, pode encontrado o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
q_{11} - \frac{s_{11}^2}{r_1} &= 0 \\
q_{22} - \frac{s_{22}^2}{r_2} + 2bs_{22} &= 0 \\
m - \frac{3c^2}{4r_3} &= 0 \\
s_{22} - s_{11} + q_{12} &= 0 \\
s_{11} &= \frac{c}{2}
\end{aligned} \tag{17}$$

Considerando-se que $m, q_{11}, q_{12}, q_{22}$ e r_3 são conhecidos, pode ser obtido

$$\begin{aligned}
c^2 &= \frac{4r_3 m}{3} \\
s_{11} &= \frac{c}{2} \\
s_{22} &= s_{11} - q_{12} \\
r_2 &= \frac{s_{22}^2}{2bs_{22} + q_{22}} \\
r_1 &= \frac{s_{11}^2}{q_{11}}
\end{aligned} \tag{18}$$

Para se efetuar as simulações numéricas, foram considerados, os valores numéricos, $m = 1$, $q_{11} = 1$, $q_{12} = 0$, $q_{22} = 1$ e $r_3 = 3$.

Do sistema (18) foi obtido $c = 2$, $s_{11} = s_{22} = 1$, $r_1 = 0$, $r_2 = \frac{5}{7}$.

Logo, o sistema de Rössler controlado (9), toma a forma

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -(x_2 - x_2^*) - (x_3 - x_3^*) - (x_1 - x_1^*) \\
\dot{x}_2 &= (x_1 - x_1^*) + 0.2(x_2 - x_2^*) - \frac{5}{7}(x_2 - x_2^*) \\
\dot{x}_3 &= x_3[(x_1 - x_1^*) - \frac{1}{3}(x_3 - x_3^*)]
\end{aligned} \tag{19}$$

Figura (2) mostra a eficácia da estratégia ótima do controle que leva o sistema de Rössler ao ponto desejado (1,1,1).

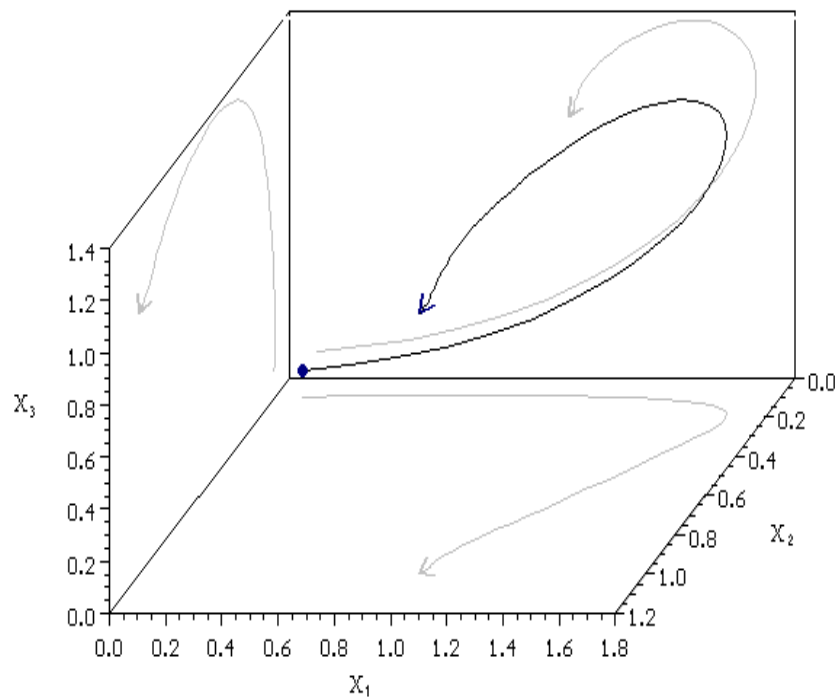


Figura 2. Diagrama de fase do sistema de Rössler com o controle ótimo (16)

5. CONCLUSÕES

Algumas novas idéias foram apresentadas para se efetuar o controle de caos, no sistema dinâmico de Rössler. Estas incluem a formulação do problema do controle ótimo não-linear, reduzido através do uso de técnicas de Programação Dinâmica à equação de HJB, a obtenção da função de Lyapunov que satisfaz esta equação e a determinação das funções do controle ótimo que “dirijam” o sistema caótico de Rössler para ponto fixo desejado arbitrário.

Foi proposta uma função de Lyapunov de tal forma que combina o termo de forma quadrática com o termo logarítmico em forma de Volterra. A estrutura da função corresponde à estrutura do sistema de Rössler, ou seja, o termo de forma quadrática corresponde a dois primeiros equações lineares do sistema de Rössler e o termo de forma logarítmica corresponde a última equação não-linear. Respectivamente, as funções do controle ótimo u_1 e u_2 são lineares e o controle ótimo $x_3 u_3$ é não-linear para este problema.

Os algoritmos propostos demonstram a efetividade deste esquema de controle que dirige o sistema de Rössler para o ponto fixo desejado

6. AGRADECIMENTOS

O segundo autor agradece ao CNPq, e FAPESP, pelo apoio através de Bolsa de Produtividade em pesquisa e Montagem de Laboratório.

7. REFERÊNCIAS

- Bardi, M. and Capuzzo-Dolcetta, I., 1997, “Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations, Birkhäuser, Boston.
- Bellman, R., 1957, “Dynamic Programming”, Princeton, New Jersey.
- Bryson, A.E. and Ho, Y.C., 1969, “Applied Optimal Control”, Blaisdell, Waltham, Mass.
- Osher, S. and Shu, C.W., 1991, “High-order Essentially Nonoscillatory Schemes for Hamilton Jacobi Equations”, SIAM J. Numerical Analysis, 28, pp. 907-922.
- Ott, E., Greboggi, C., Yorke, J. A., 1990, “Controlling Chaos”, Phys. Rev. Lett., 64, 1196-1199.

Kapitaniak, T., 1996, "Controlling Chaos: Theoretical and Practical Methods in Non-linear Dynamics", Academic Press., 165 p.

Rossler, O.E., 1976, "An Equation for Continuous Chaos", Phys. Lett. A, 57, pp. 397-398.

Sinha, S.C., Henrichs, J.T., Ravindra, B.A., 2000, "A General Approach in the Design of Active Controllers for Nonlinear Systems Exhibiting Chaos", Int. J. Bifur. Chaos, 10 (1), pp.165-178.