

# FENÔMENOS BIFURCACIONAIS EM UM SISTEMA DINÂMICO NÃO-IDEAL

**D. BELATO, J. M. BALTHAZAR**

**Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, CP 178, CEP 13500-230, Rio Claro, SP, Brasil**

**H. I. WEBER**

**DEM - Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, CEP 22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil**

**Resumo:** Neste trabalho, um sistema dinâmico particular consistindo de um pêndulo simples é estudado. O pêndulo é excitado horizontalmente por um mecanismo biela-manivela conectado em um motor de corrente continua, considerado de potência limitada. Nestas condições o sistema é dito não-ideal e os parâmetros como força externa e freqüência não são constantes arbitrárias, mas são definidos por uma equação diferencial aumentando assim os graus de liberdade do sistema. Investiga-se numericamente o comportamento deste sistema principalmente através do diagrama de bifurcação, detectando as principais características não lineares próximo à região de ressonância fundamental.

**Palavras-chave:** caos, sistema não-ideal, boundary crisis.

## 1. INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos não lineares possuem como característica principal uma variedade de soluções cuja complexidade estão expressas em um atrator estranho. Esta variedade não linear concentra-se na existência de soluções periódicas, multi-periódicas, quase-periódicas e caóticas. Já a suposição de não idealidade oferece uma representação matemática mais precisa do movimento do sistema dinâmico real em questão, visto que engloba um número maior de efeitos dinâmicos. No entanto, para a investigação de um sistema dinâmico particular deve-se primeiramente verificar se o aumento de variáveis independentes (ou seja, de graus de liberdade) e o aumento na complexidade das equações justificam a adoção de tal suposição. No entanto, vê-se que o caminho natural para o aperfeiçoamento da análise de sistemas não lineares está no aumento da precisão das equações matemáticas que os representa; que embora ganhe em complexidade, espera-se que as equações forneçam respostas mais próximas à realidade em determinadas fases de funcionamento do mecanismo. Porém, ainda falta muito para alcançar um estágio de análise com equações mais completas, já que o aumento no número de termos não lineares nas equações complica em muito sua análise numérica.

Condições não-ideais de movimento são obtidas quando os parâmetros do motor o definem como de potência limitada, além da interação entre as partes (Kononenko, 1969). Com isso aparecem diversas situações, visto que efeitos dinâmicos outras vezes desprezados afetam o movimento do sistema, podendo torná-lo irregular (ou até mesmo caótico). Em certas faixas de ressonância, a suposição de não idealidade impõe a condição ao sistema de conservar altas amplitudes de oscilação do pêndulo, fazendo com que o movimento de estado-estacionário do sistema preserve as mesmas características irregulares da resposta transiente. Isto é observado

durante a ressonância fundamental (onde a freqüência de excitação é mais baixa), em que o amortecimento aplicado ao sistema não-ideal *não é suficiente para tornar o movimento completamente assintótico*; fato que acontece para o modelo ideal associado nas mesmas condições de movimento onde se obtém um estado-estacionário regular, Belato (2002). Desta forma, tal suposição pode afetar a duração temporal da solução transiente em domínios críticos de variação do parâmetro de controle, oferecendo novas alternativas para o alcance de uma solução diferente.

Este trabalho divide-se em: na seção 2 apresentam-se as equações de movimento do sistema eletromotor-pêndulo; na seção 3 estão os resultados numéricos que subdividem no cálculo e análise da curva de ressonância, cálculo dos multiplicadores de Floquet e análise dos diagramas de bifurcação; segue-se na seção 4 as conclusões e comentários finais.

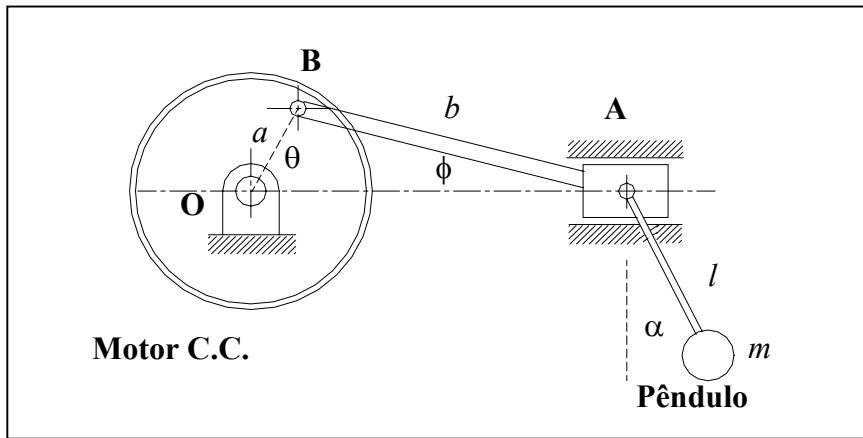


Figura 1. Esquema do Sistema Eletromotor-Pêndulo.

## 2. MODELO MATEMÁTICO DO MECANISMO ELETROMOTOR-PÊNDULO

O sistema considerado neste trabalho consiste de um pêndulo simples, horizontalmente forçado por um motor de corrente continua através de um mecanismo biela-manivela (Fig. 1), e as equações de movimento (Veja Belato (2002) e Belato *e outros* (2001) para detalhes), são dadas por:

$$\begin{aligned} (J + \beta_4 F^2 \sin^2 \alpha) \theta'' &= \beta_1 - (\beta_2 + \beta_3 F^2) \theta' - \beta_4 \sin^2 \alpha F F' \theta' - \beta_5 F (\cos \alpha + \alpha'^2) \sin \alpha \\ \alpha'' + \sin \alpha &= \epsilon_2 (F \theta'' + F' \theta') \cos \alpha - \beta_6 \alpha' \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $F = \left[ 1 + \frac{\epsilon_1 \cos \theta}{(1 - \epsilon_1^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \right] \sin \theta$ ,  $F' = \frac{dF}{dt^*}$ ,  $\beta_1 = \frac{K_T V}{R \omega_0^2}$  é o parâmetro de controle,

$$\beta_2 = \frac{K_E K_T}{R \omega_0} + \frac{c_m}{\omega_0}, \quad \beta_3 = \frac{\mu_A a^2}{\omega_0}, \quad \beta_4 = m a^2, \quad \beta_5 = m a l, \quad \beta_6 = \frac{\mu_l}{\omega_0 m l^2}, \quad \epsilon_1 = \frac{a}{b}, \quad \epsilon_2 = \frac{a}{l}; \quad \theta \text{ é o deslocamento angular do pêndulo, } \alpha \text{ é o deslocamento angular do pêndulo e as linhas denotam derivadas em relação a variável } t^* = \omega_0 t, \text{ onde } t^* \text{ é o tempo adimensional e } \omega_0 \text{ é a freqüência natural do pêndulo. També}m: J \text{ é o momento de inércia do rotor do motor (kgm}^2\text{), } m \text{ é a massa do pêndulo (kg), } l \text{ é o comprimento do pêndulo (m), } a \text{ é o comprimento do ponto O até B (m), } b \text{ é o comprimento da manivela (m), } c_A \text{ é o coeficiente de amortecimento do pino A (Ns/m), } \mu_l \text{ é o coeficiente de amortecimento do pêndulo (Nms), } V \text{ é a voltagem do motor (V), } L \text{ é a indutância (H), } R \text{ é a resistência elétrica (\Omega), } I \text{ é a corrente (A), } K_T \text{ é a constante de torque (Nm/A), } K_E \text{ é a}$$

deslocamento angular do pêndulo,  $\alpha$  é o deslocamento angular do pêndulo e as linhas denotam derivadas em relação a variável  $t^* = \omega_0 t$ , onde  $t^*$  é o tempo adimensional e  $\omega_0$  é a freqüência natural do pêndulo. També}m: J é o momento de inércia do rotor do motor (kgm<sup>2</sup>), m é a massa do pêndulo (kg), l é o comprimento do pêndulo (m), a é o comprimento do ponto O até B (m), b é o comprimento da manivela (m), c<sub>A</sub> é o coeficiente de amortecimento do pino A (Ns/m), μ<sub>l</sub> é o coeficiente de amortecimento do pêndulo (Nms), V é a voltagem do motor (V), L é a indutância (H), R é a resistência elétrica (Ω), I é a corrente (A), K<sub>T</sub> é a constante de torque (Nm/A), K<sub>E</sub> é a

constante de voltagem ( $V_s$ ),  $c_m$  é o coeficiente de perda interna no motor (Nms), e  $T_f$  é um torque de fricção no motor (Nm).

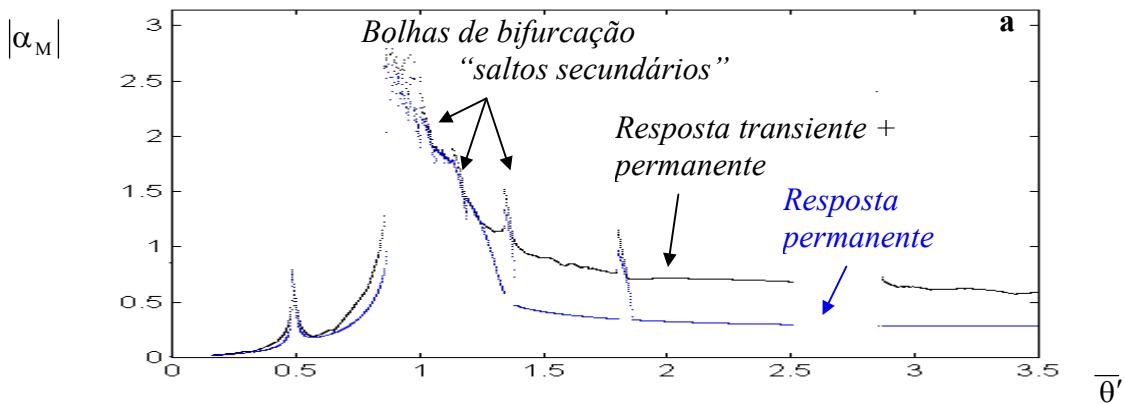
Ressalta-se que o modelo, acima descrito, foi analisado anteriormente por (Krasnopol'kaya e Yu, 1990). Neste trabalho os resultados são novos e não abordados anteriormente, principalmente no que se refere ao estudo bifurcacional e caótico do problema.

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados numéricos, listados a seguir, foram obtidos, utilizando-se o modelo definido pelas equações (1), utilizando-se integrador RK5, com passo variável do MATLAB-SIMULINK.

#### 3.1. Curva de Ressonância

A curva de ressonância (gráfico de resposta em freqüência) é uma das ferramentas de análise de sistemas dinâmicos mais vastamente usada e conhecida na literatura. Este gráfico descreve o comportamento de uma solução do sistema onde sua amplitude máxima de oscilação é disposta de acordo com a variação da freqüência de excitação. Para o sistema eletromotor-pêndulo, tal gráfico é obtido numericamente através da representação da amplitude máxima de oscilação do pêndulo  $|\alpha_M|$ , calculada para cada valor do parâmetro de controle em um dado domínio e dispostas consecutivamente em relação à variação da freqüência rotacional média do motor  $\bar{\theta}'$  ( $\bar{\theta}' = \left( \sum_{j=1}^r \theta'_j \right) / r$ ), possibilitando a identificação dos vários processos existentes no sistema.



**Figura 2.** Curva de ressonância  $|\alpha_M| \times \bar{\theta}'$  obtida com o valor:  $m = 0,03$  kg.

Escolhendo um conjunto de parâmetro, que se diferenciam basicamente pelo valor da massa do pêndulo, tem-se:  $a = 0,07$  m;  $l = 0,3$  m;  $b = 0,3$  m;  $m = 0,03$  kg, ou seja,  $\epsilon_1 = 0,2333$ ;  $\epsilon_2 = 0,2333$ ;  $\beta_2 = 0,005910$  kg.m<sup>2</sup>;  $\beta_4 = 1,47 \cdot 10^{-4}$  kg.m<sup>2</sup>;  $\beta_5 = 6,30 \cdot 10^{-4}$  kg.m<sup>2</sup> (Fig. 2). Neste gráfico são desenhadas duas curvas que correspondem respectivamente a: (a) máxima amplitude entre a solução transiente e a de estado-estacionário (representada por pontos em preto); e, (b) máxima amplitude da solução de estado-estacionário (em azul).

A curva ressonante para ambas as respostas (transiente e estado-estacionário) apresenta alguns pequenos “trechos” descontínuos que indicam a presença de “bolhas de bifurcação”, responsáveis pelo aumento repentino da amplitude de oscilação do pêndulo (saltos secundários descontínuos). Cada bolha aparece pela ação de uma bifurcação tangente, sendo que sua ocorrência se intensifica à medida que a altura da amplitude máxima da solução estável diminui, provocando um aumento gradual na amplitude de cada salto sobre a curva ressonante (como é observado à medida que se

distância da região de ressonância fundamental quando a curva ressonante decresce). Acredita-se que cada bolha seja responsável por uma melhor disposição da solução dentro do retrato de fase, já que em um parâmetro crítico uma solução quase-periódica salta para alcançar uma solução sincronizada de maior amplitude, descrita por uma solução multi-periódica. O período de cada conjunto de soluções sincronizadas diminui à medida que a curva ressonante decresce (ou seja, na proporção em que se afasta da ressonância fundamental), culminando em uma solução bi-periódica quando  $\bar{\theta}' \approx 1,7968$ . Pela Fig. 2, também identificam-se as velocidades críticas médias do motor, a saber: uma super-harmônica ( $\bar{\theta}' \approx 0,5$ ), uma fundamental ou primária ( $\bar{\theta}' \approx 1$ ) e outra secundária ( $\bar{\theta}' \approx 2,5$ ), sendo este último valor dependente da escolha do comprimento do pêndulo. Cada uma destas regiões (definida por uma descontinuidade na curva de ressonância), evidencia a presença de bifurcações perigosas no sistema, as quais são identificadas pelos correspondentes multiplicadores de Floquet que são apresentados no item logo a seguir.

Para auxiliar na análise da curva de ressonância, apresenta-se na figura abaixo a característica dos respectivos atratores discretizados pelo mapa de Poincaré e dispostos consecutivamente em relação à variação do parâmetro de controle, de maneira a formar o respectivo diagrama de bifurcação. Este gráfico permite visualizar o tipo de atrator que aparece após um ponto de bifurcação (perda de estabilidade da solução). O domínio de variação do parâmetro de controle escolhido neste diagrama corresponde ao mesmo intervalo de variação da freqüência média do motor representado na Fig. 2.

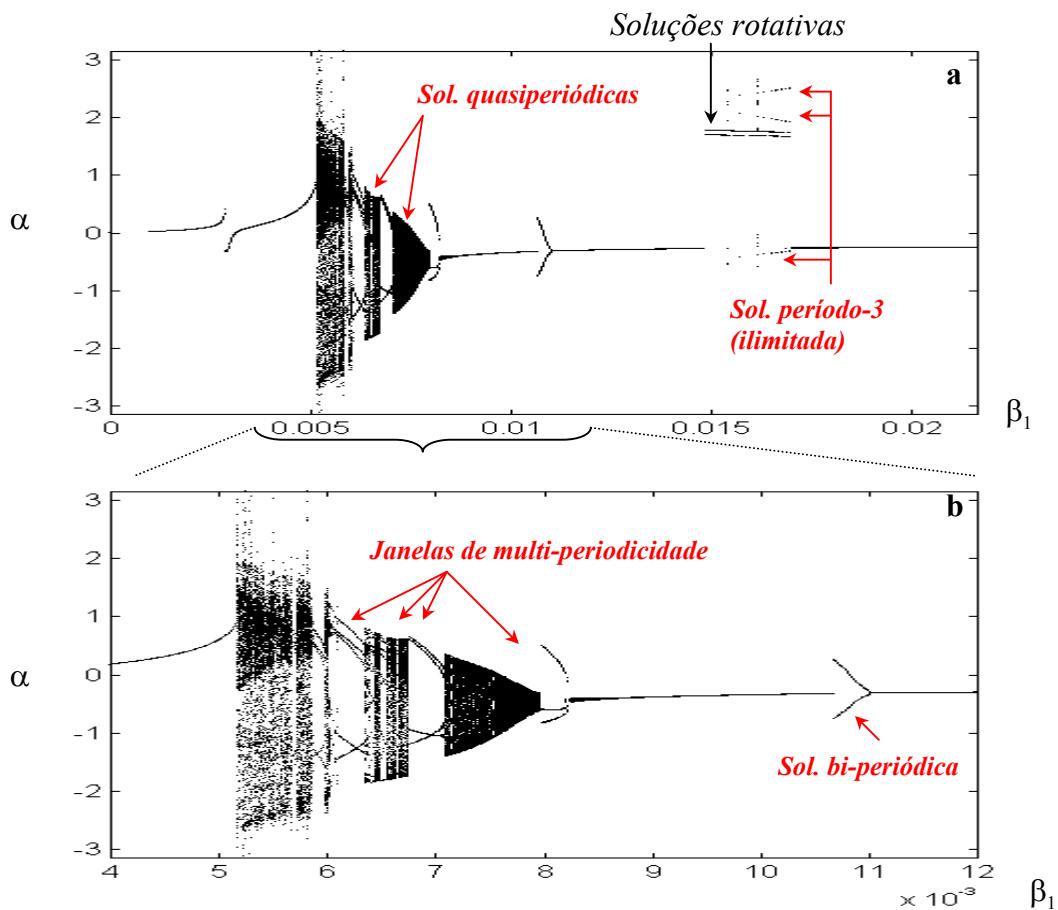


Figura 3. Diagrama de bifurcação para  $m = 0,03$  kg.

O diagrama de bifurcação retrata claramente o processo de “sincronização” das soluções, que corresponde ao aparecimento de soluções multi-periódicas após um ponto de bifurcação. Tais soluções estão posicionadas sobre a curva ressonante decrescente logo após a região de ressonância fundamental. Com o aumento do parâmetro de controle, a passagem entre uma e outra janela de

multi-periodicidade é marcada pela diminuição do período da solução sincronizada, culminando em uma solução tri-periódico que encerra o processo de multi-periodicidade neste domínio. Também detecta-se o aparecimento de uma solução bi-periódico próximo à  $\beta_1 \approx 10,6 \cdot 10^{-3}$ . Quando o parâmetro de controle é diminuído em cada domínio de multi-periodicidade, a perda de estabilidade de cada solução sincronizada ocorre pela ação de uma bifurcação de duplicação de período. Em (Grebogi et al., 1983) pode-se encontrar uma revisão deste assunto, no que se refere a crises, abordado, a seguir. Os resultados, apresentados, para o problema, em estudo, são novos.

### 3.2. Estabilidade das soluções – Multiplicadores de Floquet

Para a análise da estabilidade das soluções adotam-se os seguintes parâmetros para o sistema de equações (1):  $\epsilon_1 = 0,2333$ ;  $\epsilon_2 = 0,2333$ ;  $J = 0,011 \text{ kg.m}^2$ ;  $\beta_2 = 0,005910 \text{ kg.m}^2$ ;  $\beta_3 = 0$ ;  $\beta_4 = 1,47 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$ ;  $\beta_5 = 6,30 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$ ;  $\beta_6 = 0,01$  e  $\beta_1$  é o parâmetro de controle. Estes parâmetros são definidos quando a massa do pêndulo adotada é  $m = 0,03 \text{ kg}$ . Para as simulações numéricas, as condições iniciais são:  $\theta(0) = \theta'(0) = 0$ ;  $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$ .

A análise dos multiplicadores de Floquet<sup>1</sup>  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), junto à análise do diagrama de bifurcação na Fig. 3, revela a ocorrência de várias bifurcações, sendo que as mais importantes são dadas pelos seguintes parâmetros:

(I) Intermitênciia do tipo I –  $\beta_1 \approx 0,00518$

Bifurcação sela-nó –  $\beta_1 \approx 0,0052$

$$(\lambda_1 = 1,4524; \lambda_2 = -2,5268; \lambda_3 = 2,0350; \lambda_4 = -0,5956).$$

Esta consiste em uma rota para o caos e aparece no limiar da curva ressonante quando  $\overline{\theta}' \approx 0,81$ , na região de ressonância fundamental. Nesta faixa, a intermitênciia origina um transiente caótico e logo após uma bifurcação sela-nó, um atrator caótico aparece. Se o parâmetro de controle diminui, verifica-se que aparece um atrator caótico após uma crise interior em  $\beta_1 \approx 0,005535$  (Fig. 3).

(II) “Crisis-induced intermittency” -  $\beta_1 \approx 0,005682$

Bifurcação de duplicação de período -  $\beta_1 \approx 0,00572$

Nesta faixa, um atrator de período-7 perde estabilidade em uma bifurcação de duplicação de período, alcançando, após uma cascata de duplicação de período, um atrator caótico limitado. Quando  $\beta_1 \approx 0,005682$  este atrator caótico perde estabilidade e aparece outro atrator caótico de maior amplitude através de uma “crisis-induced intermittency”. Neste domínio também ocorre uma *boundary-crisis* próximo à  $\beta_1 \approx 0,00569645$ .

(III) Bifurcação sela-nó –  $\beta_1 \approx 0,0069$

$$(\lambda_1 = 1,4384; \lambda_2 = -1,8642; \lambda_3 = 2,7058; \lambda_4 = -0,0076).$$

Bifurcação de duplicação de período -  $\beta_1 \approx 0,00716$

$$(\lambda_1 = 1,2301; \lambda_2 = -2,4368; \lambda_3 = 0,3607; \lambda_4 = 0,0588).$$

Uma solução quase-periódica perde estabilidade pela ação de uma bifurcação sela-nó, fazendo com que a trajetória “salte” para um atrator de período-4. Na direção inversa quando o valor do parâmetro de controle diminui, o atrator de período-4 sofre uma bifurcação de duplicação de período.

---

<sup>1</sup> Lembrando que um sistema dinâmico autônomo *sempre* tem um multiplicador de Floquet igual a 1 (um).

(IV) Bifurcação sela-nó -  $\beta_1 \approx 0,00802$

$$(\lambda_1 = 1,1662; \lambda_2 = -0,9410; \lambda_3 = 1,3868; \lambda_4 = -0,0582).$$

Bifurcação de duplicação de período –  $\beta_1 \approx 0,00846$

$$(\lambda_1 = 0,9515; \lambda_2 = -1,0094; \lambda_3 = -0,1678; \lambda_4 = -0,0336).$$

Nesta fase, a bifurcação sela-nó leva à criação de um atrator tri-periódico, enquanto que a ação de uma bifurcação de duplicação de período leva à destruição deste atrator.

(V) Bifurcação de duplicação de período -  $\beta_1 \approx 0,01062$

$$(\lambda_1 = 0,9719; \lambda_2 = -1,0270; \lambda_3 = -0,4595; \lambda_4 = 0,0574).$$

A bifurcação de duplicação de período leva a criação de um atrator bi-periódico.

Entre as bifurcações IV e V existem dois domínios finitos de variação do parâmetro de controle onde aparecem soluções não-hiperbólicas.

(VI) “Boundary Crisis” –  $\beta_1 \approx 0,01616$

Bifurcação sela-nó –  $\beta_1 \approx 0,01483$

$$(\lambda_1 = 0,9875; \lambda_2 = 1,0847; \lambda_3 = 0,1376; \lambda_4 = -0,0023).$$

Bifurcação de duplicação de período –  $\beta_1 \approx 0,0172$

$$(\lambda_1 = 1,0599; \lambda_2 = -1,0183; \lambda_3 = -0,5416; \lambda_4 = 0,0142).$$

Nesta faixa com as C.I. adotadas, o escape do pêndulo do poço potencial local se torna inevitável de maneira que o pêndulo entra em rotação durante todo um domínio limitado de variação do parâmetro de controle, dado por:  $0,0015 \leq \beta_1 \leq 0,0017$ . Neste caso, a perda de estabilidade ocorre fora da vizinhança da solução de período-1 (não-hiperbólica) no centro do retrato de fase, que leva ao escape do pêndulo pela ação de uma bifurcação sela-nó onde a amplitude de oscilação da trajetória aumenta alcançando soluções rotativas. Detecta-se também pelo diagrama de bifurcação, a presença de uma solução ilimitada de período-3. Quando o parâmetro de controle diminui a perda de estabilidade da solução de período-3 ocorre pela ação de uma bifurcação de duplicação de período, seguida por um salto descontínuo, onde a trajetória limitada desaparece por completo do poço potencial local. Este evento ocorre durante a 1<sup>a</sup> ressonância secundária. Também ocorre um inevitável escape do pêndulo em  $\beta_1 \approx 0,01541$ .

(VII) Bifurcação sela-nó –  $\beta_1 \approx 0,0375$

$$(\lambda_1 = 1,1477; \lambda_2 = 1,4623; \lambda_3 = -1,0854; \lambda_4 = 0,0285).$$

Esta bifurcação torna a posição para baixo do pêndulo instável e duas novas posições médias estáveis são criadas. Nesta fase, dependendo das C.I. escolhidas o pêndulo alcança uma destas duas posições de oscilação média diferente à posição média  $\alpha_m \approx 0$ .

Todas as bifurcações acima representam as mais importantes mudanças qualitativas do sistema eletromotor-pêndulo. Entre elas algumas são responsáveis pela alteração completa das soluções em domínios finitos de variação do parâmetro de controle, principalmente pelas catástrofes presentes na ressonância fundamental e na 1<sup>a</sup> ressonância secundária. Maiores detalhes sobre estas bifurcações são possíveis somente com a análise não linear das equações, o que não será abordado aqui. A figura abaixo ilustra e resume o que ocorre em cada uma destas duas ressonâncias.

O diagrama de bifurcação abaixo mostra a evolução da trajetória do pêndulo em relação à variação do parâmetro de controle escolhido (a voltagem do motor). Nota-se que ao aumentar o valor do parâmetro de controle, um atrator hiperbólico perde estabilidade devido a uma bifurcação sela-nó enquanto que diminuindo este valor o sistema perde estabilidade através de uma bifurcação de duplicação de período. Em seguida, vários outros eventos aparecem tornando a solução do sistema mais complicado. Deve-se ver que as variáveis da equação determinam a forma deste gráfico sendo que qualquer mudança faz variar as condições de estabilidade da solução. Já no

segundo gráfico abaixo, a solução perde estabilidade em uma bifurcação sela-nó quando o valor do parâmetro de controle é aumentado enquanto que esta sofre um salto descontínuo alcançando uma solução ilimitada dada por rotações do pêndulo. Cada solução reflete uma mudança nas características geométricas da superfície que as comportam, fazendo com que sua estrutura evolua com o tempo.

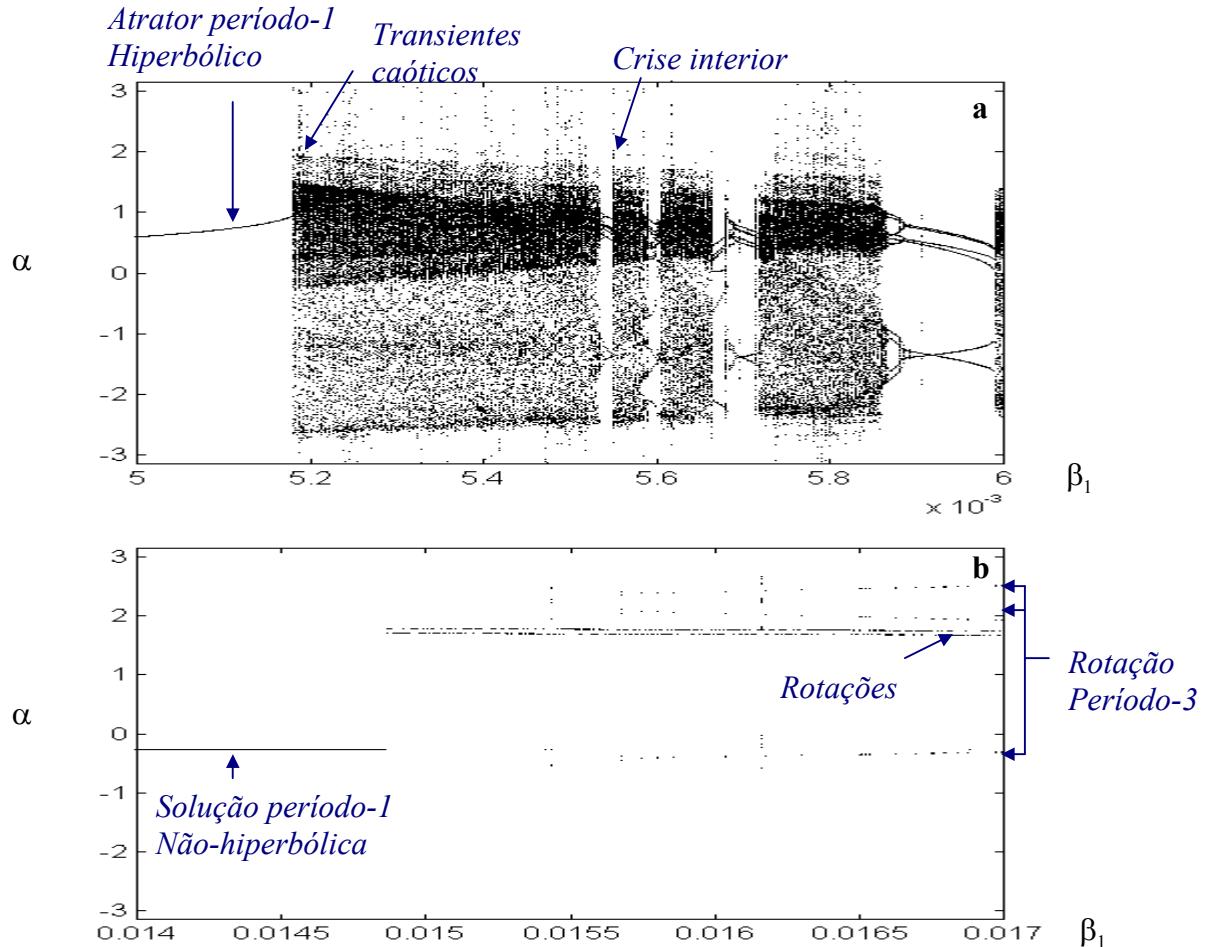


Figura 4. Diagrama de bifurcação para  $m = 0,03$  kg.  
(a) ressonância fundamental; (b) 1<sup>a</sup> ressonância secundária.

#### 4. CONCLUSÃO

Neste trabalho, as principais bifurcações de um particular mecanismo pendular não-ideal foram abordadas, mostrando as principais regiões de ressonância e perda de estabilidade do sistema. Constatou-se o aparecimento de uma solução não-hiperbólica limitada na segunda região de ressonância secundária, cuja escolha de condições iniciais fora da área que descreve sua bacia de atração no retrato de fase determina soluções rotativas do pêndulo.

#### 5. REFERÊNCIAS

Belato, D., 2002, “Análise Não linear de Sistemas Dinâmicos Holonômicos Não Ideais”, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, Campinas, São Paulo, Brasil. 186p.

- Belato, D., Weber, H.I., Balthazar, J.M., Mook, D.T., 2001, "Chaotic Vibrations of a Nonideal Electro-Mechanical System", Int. J. Solids and Structures vol. 38, pp. 1699-1706.
- Grebogi C., Ott E., Yorke J.A., 1983, "Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors, and Transient Chaos". Physica D, vol. 7, pp.181-200
- Krasnopol'kaya T.S., Shvets A Yu, 1990, "Chaos Interactions in a Pendulum-Energy Source System", Prikladnaya Mekhanika, v.26, n.5, p.90-96, 1990.
- Kononenko, VO, 1969, "Vibrating Problems with Limited Power Supply", Illife, London.

## **6. DIREITOS AUTORAIS**

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído em seu trabalho.

## **BIFURCATIONAL PHENOMENA IN A NON-IDEAL DYNAMICAL SYSTEM**

**D. BELATO, J. M. BALTHAZAR**

**Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, CP 178, CEP 13500-230, Rio Claro, SP, Brasil**

**H. I. WEBER**

**DEM - Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, CEP 22453-900, RJ, Brasil**

**Abstract:** In this work, it is studied a particular dynamic system consisting of a simple pendulum. The pendulum is horizontally excited by a crank-shaft mechanism connected in a DC motor, considered of limited power. In these conditions the system is called non-ideal and the parameters as external force and the frequency are not arbitrary constants, but they are defined by a differential equation that increases the degree of freedom of the system. We numerically investigate the behavior of this system using the bifurcation diagram, where we detected the main nonlinear features near the fundamental resonance region.

**Keywords:** chaos, non-ideal system, boundary crisis.