

# **VIBRAÇÕES DE UM SISTEMA EXCITADO POR UM MOTOR ELÉTRICO DE CORRENTE CONTÍNUA DE POTÊNCIA LIMITADA (NÃO-IDEAL), MODELADO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE.**

**Karen de Lolo Guilherme**

Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Projeto Mecânico, C P 6122, 13083-970, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil. E - mail: [karen@fem.unicamp.br](mailto:karen@fem.unicamp.br)

**José Manoel Balthazar**

Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação, UNESP- Rio Claro, CP 178, 13500-230 Rio Claro, SP, Brasil e Prof. Visitante Departamento de Projeto Mecânico, Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, Campinas, Brasil. E-mail: [jmbaltha@rc.unesp.br](mailto:jmbaltha@rc.unesp.br)

**Masayoshi Tsuchida**

Departamento de Ciências da Computação e Estatística, UNESP- São José do Rio Preto, Rua Cristóvão Colombo, no. 2265, 15054-000 São José do Rio Preto, SP, Brasil. E-mail: [tsuchida@dcce.ibilce.unesp.br](mailto:tsuchida@dcce.ibilce.unesp.br)

**Resumo.** Neste trabalho desenvolve-se o estudo de um sistema dinâmico, constituído por dois blocos, conectados por molas e amortecedores. Um motor elétrico de corrente contínua do tipo não-ideal, isto é, com potência limitada, é acoplado a um dos blocos com o intuito de perturbar o sistema, caracterizando um problema não ideal. Uma escolha conveniente dos parâmetros físicos deste sistema proporciona condições ressonantes entre suas frequências naturais e, através de integrações numéricas é possível obter oscilações regulares e comportamento caótico, os quais dependem da escolha destes parâmetros. Uma solução analítica é obtida através da análise de perturbações, o que torna possível uma comparação entre os resultados numéricos e analíticos.

**Palavras-chave:** sistemas não lineares, sistemas não ideais, método da média, potência limitada, ressonância.

## **1. INTRODUÇÃO**

O primeiro relato que se tem a respeito da interação entre um sistema oscilante e a fonte de energia é apresentado por Sommerfeld em 1904 (Kononenko, 1969). Em seu experimento, constituído por uma mesa e um motor elétrico (o qual servia como fonte de excitação), ele observou que a velocidade do motor não era uma função suave que dependia apenas da energia inserida ao sistema. Quando a amplitude atingia o seu valor máximo, na região de ressonância, o gasto de energia crescia aproximadamente o dobro. Por outro lado, após a ressonância, a amplitude decrescia bruscamente, enquanto a velocidade do motor rapidamente crescia. A este fenômeno atribuiu-se o nome de Efeito Sommerfeld. Em 1969, Kononenko dedica um livro a este assunto, o qual faz referência a vários trabalhos e experimentos na área (Kononenko, 1969).

Recentemente, a formulação de sistemas dinâmicos como não ideais tem sido explorada de forma intensiva. Balthazar e colaboradores (2003) apresentam uma rica revisão bibliográfica sobre sistemas

não ideais e apresentam vários sistemas mecânicos recentemente analisados com formulações não ideais. Uma revisão completa de diferentes teorias sobre sistemas vibrantes não ideais é apresentada.

Muitas das equações diferenciais que descrevem sistemas vibratórios são não lineares e sua solução analítica dificilmente pode ser encontrada. Por esse motivo, o estudo de vibrações em sistemas mecânicos geralmente restringe-se a soluções numéricas, baseadas em algoritmos adequados, sujeitas a uma condição inicial. Porém, muitas vezes deseja-se encontrar tais soluções a partir de métodos analíticos, já que sua existência é garantida pelo teorema da existência e unicidade de soluções de equações diferenciais. Este trabalho propõe o uso do método da média para encontrar uma solução analítica aproximada de um sistema dinâmico não ideal. Este sistema é constituído por duas massas acopladas por molas e amortecedores, e um motor de corrente contínua é acoplado a uma das massas com o intuito de perturbar o sistema, como apresentado no esquema do próximo capítulo. Ele foi anteriormente apresentado com uma formulação não ideal em (Balthazar et al, 2001). Foi proposta uma técnica de controle, usando técnicas de regularização de Tikhonov, para evitar o mal condicionamento do problema. Algumas simulações numéricas foram efetuadas, preliminarmente nas regiões de ressonância 1:1 e 1:2 em (Guilherme et al, 2001, 2002), (Tsuchida et al, 2003(a), 2003 (b)).

## 2. APRESENTAÇÃO DO SISTEMA NÃO IDEAL DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

O sistema não ideal de dois graus de liberdade estudado neste trabalho é apresentado na Fig. (1). Investiga-se os regimes de vibração deste sistema dinâmico formado por dois blocos de massas  $m_1$  e  $m_2$ , sobrepostos e separados por uma mola de coeficiente de elasticidade  $k_2$  e um amortecedor de coeficiente de amortecimento  $c_2$ . O bloco inferior, de massa  $m_1$ , é sustentado por uma mola e um amortecedor de coeficientes  $k_1$  e  $c_1$  respectivamente, e a este bloco é fixado um motor de potência limitada (DC motor), como mostrado na Fig. (1). O motor é dotado de uma massa  $m_0$  a uma distância  $r$  do eixo de rotação, de modo que, quando acionado, gera vibrações e transforma o sistema em um problema não ideal. As equações (1) descrevem o movimento do sistema dinâmico apresentado na Fig. (1) (Balthazar et al, 2001):

$$c_1'' = -c_1 - h_1 c_1' + m(c_2 - c_1) + h_2(c_2' - c_1') + \bar{w}^2 \cos \bar{J} + \bar{w}' \sin \bar{J} \quad (1)$$

$$c_2'' = -q^2(c_2 - c_1) - \frac{q^2}{m} h_2(c_2' - c_1')$$

$$\bar{w}' = l + r c_1'' \sin \bar{J}$$

$$l' = -al - b\bar{w} + u \quad (2)$$

com

$$h_1 = c_1 / \sqrt{k_1 m_1}, \quad h_2 = c_2 / \sqrt{k_1 m_1}, \quad m = k_2 / k_1, \quad q^2 = m m_1 / m_2,$$

$$r = m_0^2 r / J m_1, \quad a = a \sqrt{\frac{m_1}{k_1}}, \quad b = b \frac{m_1}{J k_1},$$

sendo  $a$  e  $b$  parâmetros que definem a potência do motor. Escolhendo-se convenientemente os parâmetros físicos, é possível obter as frequências naturais  $\bar{w}_1$  e  $\bar{w}_2$  em ressonância. O efeito Sommerfeld, que é caracterizado pelo aumento brusco das vibrações, ocorre quando a frequência  $\bar{w}$  do rotor coincide com as frequências naturais do sistema (Guilherme et al, 2001, 2002). Esse fenômeno pode ser observado através da passagem pela ressonância, que consiste em variar

continuamente o valor de  $\bar{\omega}$ , desde um valor menor até um valor maior que  $\bar{\omega}_1$  e  $\bar{\omega}_2$ . Quando  $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$  (ressonância interna 1:1) temos apenas uma passagem, e em geral, a passagem pela ressonância 1:1 ( $\bar{\omega}$  igual à frequência natural do sistema) é a mais importante (Tsuchida et al, 2003(a)), mas outras passagens em diferentes ressonâncias podem ser analisadas (Tsuchida et al, 2003(b)).

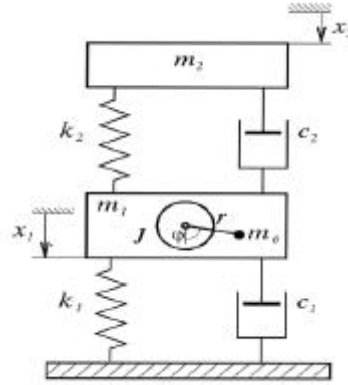


Figura 1. Sistema dinâmico com dois graus de liberdade. Os blocos vibram pela ação da massa excêntrica  $m_0$  do motor de potência limitada.

### 3. MÉTODO DA MÉDIA

Originalmente criado por Krylov e Bogoliubov, o método da média é um dos métodos que podem ser utilizados para obter uma solução analítica de equações diferenciais. Aplicável particularmente a problemas em oscilações não lineares, este é um método de perturbação que consiste em considerar certas quantidades como funções que variam suavemente no tempo. O método da média contém uma grande vantagem: ele permite um maior domínio quanto às regiões de estabilidade (ou instabilidade) do sistema dinâmico, a partir do conhecimento analítico de seus parâmetros físicos. Ou seja, a solução é totalmente voltada para a física do problema, facilitando assim o entendimento do seu comportamento.

Pode-se introduzir ao sistema (1) um balanceamento de ordem (Evan-Iwanowski, 1976), considerando as forças de amortecimento, as forças de inércia e os momentos de inércia muito menores em relação às outras forças e momentos envolvidos no sistema. Considera-se que esses termos são pequenos e então introduz-se um pequeno parâmetro  $\epsilon$  e escreve-se o sistema dinâmico (1) na forma matricial:

$$\begin{aligned} M\ddot{u}(t) + Ku(t) &= \epsilon f(t) - \epsilon C\dot{u}(t) \\ \ddot{\varphi} &= \epsilon \lambda + \epsilon \rho \chi_1'' \sin \varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

sendo  $u = [c_1 \ c_2]^T$  o vetor adimensional de deslocamento do sistema,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_2 & -\eta_2 \\ -\frac{\theta^2}{\mu}\eta_2 & \frac{\theta^2}{\mu}\eta_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{bmatrix} 1 + \mu & -\mu \\ -\theta^2 & \theta^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema adimensional (1). A função vetorial  $f$  contém os termos não lineares, acoplados e forçados das duas primeiras equações do sistema adimensional (1). Pode-se observar que para  $\epsilon = 0$ , obtém-se um sistema não perturbado, que neste caso, apresenta termos acoplados em sua matriz de rigidez  $k$  (4). Para aplicar o método da média de Krylov-Bogoliubov no sistema dinâmico apresentado na Fig. (1), é conveniente que as equações do sistema dinâmico estejam na forma normal. Para remover o acoplamento no lado esquerdo da equação (3), introduz-se a coordenada  $v = [v_1 \ v_2]^T$ , através da transformação linear  $u = Pv$ , onde  $P$  é uma matriz quadrada de ordem 2, cujas colunas  $p_i = [p_{i1} \ p_{i2}]^T$  são os autovetores correspondentes aos autovalores  $I_1$  e  $I_2$  de  $Kp_i = \bar{w}_i^2 Mp_i$ . O sistema completo com a parte não perturbada desacoplada é

$$\begin{aligned} I\ddot{v} + \Lambda v &= \epsilon [Q \dot{v} + f \cos \bar{\varphi} + h \sin \bar{\varphi}], \\ \ddot{\bar{\varphi}} &= \epsilon [\lambda + \rho (\dot{v}_1 + \dot{v}_2) \sin \bar{\varphi}], \end{aligned} \quad (5)$$

com

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_2 + \eta_1 p_{21} & \eta_1 + \eta_2 + \eta_1 p_{22} \\ \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 + p_{21}) & \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 + p_{22}) \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \dot{\bar{\varphi}}^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\varphi}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

#### 4. Método da Variação de Parâmetros e o Método da Média

O segundo passo para a aplicação do método da média é transformar o sistema dinâmico (5) na forma padrão, utilizando o método da variação de parâmetros. O termo "forma padrão" foi introduzido por Bogoliubov e consiste em tomar um sistema na forma (5) e, utilizando o método da variação de parâmetros, construir a transformação  $s$  para  $z$ , sendo  $s = [v_1 \ \dot{v}_1 \ v_2 \ \dot{v}_2 \ \bar{w}]^T$  as coordenadas do sistema original  $\dot{s} + Ls = \hat{I}F(s, \dot{s}, t)$ , e  $z = [a_1 \ \dot{b}_1 \ a_2 \ \dot{b}_2 \ \bar{w}]$  as coordenadas do sistema padrão  $\dot{z} = \hat{I}f(z, t) + O(\hat{I}^2)$ .

As coordenadas  $a_i$  e  $\dot{b}_i$  de  $z$  representam as amplitudes e fases das oscilações das coordenadas  $v_i$  e  $\bar{w}$  a frequência de rotação do motor. Assume-se que a solução particular do sistema de equações diferenciais (5) é a solução das equações diferenciais homogêneas correspondentes, acrescidas de outros termos. Assim, introduz-se as substituições:

$$a) \ v_i = a_i \cos(\varphi + \beta_i), \quad b) \ \dot{v}_i = -\dot{a}_i \bar{\omega}_i \sin(\varphi + \beta_i), \quad c) \ \ddot{\bar{\varphi}} = \bar{\omega}, \quad (8)$$

as quais transformam a variável dependente  $s$  na nova variável dependente  $z$ . Para  $\hat{\mathbf{I}}=0$  considera-se que as coordenadas de  $z$  são funções que variam suavemente no tempo. Deriva-se as equações em  $t$  sob essas considerações. Comparando a derivada de primeira ordem obtida a partir desta derivação, com a equação (8 b), obtém-se uma restrição que deve ser aplicada ao sistema. Substituindo esta restrição, as equações (8) e a derivada de segunda ordem obtida da equação (8 b) no sistema (5), obtém-se o sistema na forma padrão em  $\mathbf{\bar{f}}$  :

$$a) \frac{da_i}{d\bar{\varphi}} = \frac{\epsilon}{\bar{\omega}_i \bar{\omega}} \sin(\bar{\varphi} + \beta_i) [Tn_i], \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

$$b) \frac{d\beta_i}{d\bar{\varphi}} = \frac{\epsilon \alpha_i}{\bar{\omega}} + \frac{\epsilon}{a_i \bar{\omega}_i \bar{\omega}} \cos(\bar{\varphi} + \beta_i) [Tn_i], \quad i = 1, 2$$

$$c) \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{\varphi}} = \frac{\epsilon}{\bar{\omega}} [\lambda - Hn],$$

onde

$$Tn_1 = (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) a_1 \bar{\omega}_1 \sin(\bar{\varphi} + \beta_1) + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) a_2 \bar{\omega}_2 \sin(\bar{\varphi} + \beta_2) - \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\varphi}) \quad (10)$$

$$Tn_2 = \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 [(1 - p_{21}) a_1 \bar{\omega}_1 \sin(\bar{\varphi} + \beta_1) + (1 - p_{22}) a_2 \bar{\omega}_2 \sin(\bar{\varphi} + \beta_2)]$$

$$Hn = [\rho a_1 \bar{\omega}_1 \bar{\omega} \cos(\bar{\varphi} + \beta_1) + \rho a_2 \bar{\omega}_2 \bar{\omega} \cos(\bar{\varphi} + \beta_2) \sin(\bar{\varphi})].$$

Deseja-se obter uma aproximação de primeira ordem para a solução do sistema (1) sob condições de ressonância 1:1. Para isso são introduzidos os parâmetros de sintonia  $\mathbf{s}_1$  e  $\mathbf{s}_2$ , tal que  $\bar{\mathbf{w}}_2 = \bar{\mathbf{w}}_1 + \epsilon \mathbf{s}_1$  e  $\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{w}}_2 + \epsilon \mathbf{s}_2$ . Por simplificação foram adotadas as notações  $\epsilon \mathbf{a}_1 = -\epsilon (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)$  e  $\epsilon \mathbf{a}_2 = -\epsilon \mathbf{s}_2$ .

Pode-se observar que o sistema (9)-(10) determina que as equações diferenciais de  $a_i$ ,  $\mathbf{b}_i$  ( $i=1,2$ ) e  $\bar{\mathbf{w}}$  com relação a  $\mathbf{\bar{f}}$  são pequenas quantidades de  $\epsilon$ . Conseqüentemente, são funções que variam suavemente no tempo, e sua solução será da forma:

$$y = z + \epsilon U(z, \mathbf{\bar{f}}) \quad (11)$$

$z^T = [A_1 \mathbf{x}_1 A_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{W}]$ ,  $y^T = [a_1 \mathbf{b}_1 a_2 \mathbf{b}_2 \bar{\mathbf{w}}]$  são valores constantes que representam a solução estacionária do sistema (11)-(12), e  $\hat{\mathbf{I}} U^T(z, \mathbf{\bar{f}}) = [U_1(z, \mathbf{\bar{f}}) U_2(z, \mathbf{\bar{f}}) U_3(z, \mathbf{\bar{f}}) U_4(z, \mathbf{\bar{f}}) U_5(z, \mathbf{\bar{f}})]$  são pequenas funções periódicas de  $\mathbf{\bar{f}}$ . Obtém-se  $A_1$ ,  $\mathbf{x}_1$ ,  $A_2$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{W}$  através das equações médias, isto é, expande-se o lado direito das equações (11) e calcula-se a média utilizando a equação

$$\dot{y} = \epsilon \frac{1}{T} \int_0^T f(y, \mathbf{\bar{f}}) d\mathbf{\bar{f}} \quad (12)$$

Nesta integração T representa o período das equações (9) e  $A_I$ ,  $\mathbf{x}_I$ ,  $A_2$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{W}$  são consideradas constantes. As equações médias obtidas são

$$\begin{aligned}
 a) \frac{dA_1}{d\varphi} &= \frac{\epsilon}{2\bar{\omega}_1\Omega} [(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})\bar{\omega}_1 A_1 + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \cos(\xi_1 - \xi_2) - \Omega^2 \sin \xi_1] \\
 b) \frac{d\xi_1}{d\varphi} &= \frac{\epsilon}{2\bar{\omega}_1\Omega A_1} [2\bar{\omega}_1 A_1 \alpha_1 - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \sin(\xi_1 - \xi_2) - \Omega^2 \cos \xi_1] \\
 c) \frac{dA_2}{d\varphi} &= \frac{\epsilon}{2\bar{\omega}_2\Omega} \left[ \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 - p_{22}) \bar{\omega}_2 A_2 - \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 - p_{21}) \bar{\omega}_1 A_1 \cos(\xi_2 - \xi_1) \right] \\
 d) \frac{d\xi_2}{d\varphi} &= \frac{\epsilon}{2\bar{\omega}_2\Omega A_2} \left[ 2\bar{\omega}_2 A_2 \alpha_2 - \frac{\theta^2}{\mu} \eta_2 (1 - p_{21}) \bar{\omega}_1 A_1 \sin(\xi_2 - \xi_1) \right] \\
 e) \frac{d\Omega}{d\varphi} &= \frac{\epsilon}{2\Omega} [2\lambda + \rho \bar{\omega}_1 \Omega A_1 \sin \xi_1 + \rho \bar{\omega}_2 \Omega A_2 \sin \xi_2]
 \end{aligned} \tag{13}$$

Obtém-se as posições médias de equilíbrio (solução estacionária do sistema médio) fazendo as equações médias (13) iguais a zero. Utilizando identidades trigonométricas, após alguns algebrismos, obtém-se uma solução estacionária para as amplitudes estacionárias  $A_1$  e  $A_2$  para as fases  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ :

$$\sin(\xi_1) = (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \frac{\bar{\omega}_1 A_1}{\Omega^2} + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \frac{(1 - p_{22}) \bar{\omega}_2^2 A_2^2}{(1 - p_{21}) \Omega^2 \bar{\omega}_1 A_1}, \tag{14}$$

$$\cos(\xi_1) = \frac{2\alpha_1}{\Omega^2} \bar{\omega}_1 A_1 + \frac{2\alpha_2 \mu \bar{\omega}_2^2 A_2^2}{(1 - p_{21}) \eta_2 \theta^2 \Omega^2 \bar{\omega}_1 A_1}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 \sin(\xi_2) &= \frac{\bar{\omega}_2 A_2}{\Omega^2} \left[ (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \frac{(1 - p_{22})}{(1 - p_{21})} + \frac{4\alpha_1 \alpha_2 \mu}{(1 - p_{21}) \eta_2 \theta^2} \right] + \\
 &+ \frac{\bar{\omega}_2^3 A_2^3}{\bar{\omega}_1^2 A_1^2 \Omega^2} \left[ (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \frac{(1 - p_{22})^2}{(1 - p_{21})^2} + \frac{4\alpha_2^2 \mu^2}{(1 - p_{21})^2 \eta_2^2 \theta^4} \right]
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 A_1^2 &= \frac{\Omega_4}{\bar{\omega}_1^2} \left[ 1 + \frac{4\alpha_2^2 \mu^2}{(1 - p_{21})^2 \theta^4 \eta_2^2} \right] \left\{ \frac{4\alpha_2^2 \mu^2}{(1 - p_{21})^2 \theta^4 \eta_2^2} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \times \right. \\
 &\times \left[ 1 - \frac{2(1 - p_{21})^2 \theta^4 \eta_2^2}{(1 - p_{22})^2 \theta^4 \eta_2^2 + 4\alpha_2^2 \mu^2} \right] - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) + \frac{4\alpha_1^2}{(1 - p_{21})} + \\
 &+ 2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})(1 - p_{22}) \left[ \frac{1}{(1 - p_{21})} + \right. \\
 &+ \frac{(1 - p_{22})\theta^4 \eta_2^2}{(1 - p_{22})^2 \theta^4 \eta_2^2 + 4\alpha_2^2 \mu^2} + \frac{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})^2 (1 - p_{22})}{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})(1 - p_{21})^2} \left. \right] + \\
 &+ \frac{4\alpha_1 \alpha_2 \mu}{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})} \left[ \frac{\alpha_1 \alpha_2 \mu}{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})} - 2 \right] \left. \right\}^{-1}
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$A_2^2 = \frac{\Omega_4}{\bar{\omega}_2^2} \left\{ 2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})(1 - p_{22}) \left[ \frac{1}{(1 - p_{21})} + \frac{(1 - p_{22}) \theta^4 \eta_2^2}{(1 - p_{22})^2 \theta^4 \eta_2^2 + 4 \alpha_2^2 \mu^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21})^2 (1 - p_{22})}{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})(1 - p_{21})^2} \right] + \frac{4 \alpha_1 \alpha_2 \mu}{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})} \left[ \frac{\alpha_1 \alpha_2 \mu}{\theta^2 \eta_2 (1 - p_{21})} - 2 \right] - \right. \\ \left. - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) + \frac{4 \alpha_1}{(1 - p_{21})} + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \frac{4 \alpha_2^2 \mu^2}{\theta^4 \eta_2^2 (1 - p_{21})^2} \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 - \frac{2 \theta^4 \eta_2^2 (1 - p_{21})^2}{(1 - p_{22})^2 \theta^4 \eta_2^2 + 4 \alpha_2^2 \mu^2} \right] \right\}^{-1}. \quad (18)$$

As expressões (17) e (18) são independentes entre si e dependem apenas da frequência de rotação  $\mathbf{W}$ , cuja expressão pode ser obtida de (13 e):

$$2\lambda + \rho \left\{ \frac{(1 - p_{22})}{(1 - p_{21})} [(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22})] + \right. \\ \left. (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \left[ 1 + \frac{4 \alpha_2^2 \mu^2}{\theta^4 \eta_2^2 (1 - p_{21})^2} \right] \frac{\theta^4 \eta_2^2}{(1 - p_{21})^2 \theta^4 \eta_2^2 + 4 \alpha_2^2 \mu^2} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{4 \alpha_2^2 \mu^2}{\theta^4 \eta_2^2} + (1 - p_{22})^2 (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \right] \right\} \frac{\bar{\omega}_2^2}{\Omega} A_2^2 = 0 \quad (19)$$

Observa-se que a expressão para  $\mathbf{W}$  depende apenas de  $A_2$ . Para aumentar a precisão da solução, usando (11), é preciso encontrar as funções periódicas  $\hat{\mathbf{I}} U_i (A_l, \mathbf{x}_l, A_2, \mathbf{x}_2, \mathbf{W}, \hat{\mathbf{f}})$ , para  $i=1,2,\dots,5$ . Seguindo o método proposto por Kononenko (1969) expande-se o lado direito das equações (9), utilizando (10), nas coordenadas  $A_l, \mathbf{x}_l, A_2, \mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{W}$ . Essas equações apresentam termos constantes e termos harmônicos em  $\hat{\mathbf{f}}$ . Integrando esses termos com relação a  $\hat{\mathbf{f}}$  obtém-se as funções  $\hat{\mathbf{I}} U_i (A_l, \mathbf{x}_l, A_2, \mathbf{x}_2, \mathbf{W}, \hat{\mathbf{f}})$ , para  $i=1,2,\dots,5$ . Substituindo-as em (11) obtém-se a solução

$$a) a_1 = A_1 + \frac{\epsilon}{4\bar{\omega}_1 \Omega} [\Omega^2 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_1) - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \bar{\omega}_1 A_1 \sin(2\bar{\varphi} + 2\xi_1) - \\ (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \bar{\omega}_2 A_2 \sin(2\bar{\varphi} + \xi_1 + \xi_2)] \quad (20)$$

$$b) \beta_1 = \xi_1 + \frac{\epsilon}{4\bar{\omega}_1 A_1 \Omega} [-\Omega^2 \sin(2\bar{\varphi} + \xi_1) - (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \bar{\omega}_1 A_1 \cos(2\bar{\varphi} + 2\xi_1) - \\ (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \bar{\omega}_2 A_2 \cos(2\bar{\varphi} + 2\xi_2)]$$

$$c) a_2 = A_2 - \frac{\epsilon \theta^2 \eta_2}{4\mu \bar{\omega}_2 \Omega} [(1 - p_{21}) \bar{\omega}_1 A_1 \sin(2\bar{\varphi} + \xi_1 + \xi_2) + (1 - p_{22}) \bar{\omega}_2 A_2 \sin(2\bar{\varphi} + 2\xi_2)]$$

$$d) \beta_2 = \xi_2 - \frac{\epsilon \theta^2 \eta_2}{4\mu A_2 \bar{\omega}_2 \Omega} [-(1 - p_{21}) \bar{\omega}_1 A_1 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_1 + \xi_2) + (1 - p_{22}) \bar{\omega}_2 A_2 \cos(2\bar{\varphi} + 2\xi_2)]$$

$$e) \bar{\omega} = \Omega + \frac{\epsilon \rho}{4} [\bar{\omega}_1 A_1 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_1) + \bar{\omega}_2 A_2 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_2)]$$

Voltando às variáveis iniciais do sistema, a dependência do ângulo  $\bar{f}$  com relação a  $t$ , devido ao movimento do motor, é dada pelas equações:

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \Omega + \frac{\varepsilon\rho}{4} [\bar{\omega}_1 A_1 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_1) + \bar{\omega}_2 A_2 \cos(2\bar{\varphi} + \xi_2)] \quad (21)$$

$$\bar{\varphi} = \Omega t + \frac{\varepsilon\rho}{8} [\bar{\omega}_1 A_1 \sin(2\Omega t + \xi_1) + \bar{\omega}_2 A_2 \sin(2\Omega t + \xi_2)] \quad (22)$$

Obtém-se então a solução analítica aproximada do sistema normal (5) nas variáveis  $v_1$  e  $v_2$ :

$$\begin{aligned} v_1 = & A_1 \cos(\Omega\tau + \xi_1) + \frac{\epsilon}{8\bar{\omega}_1\Omega} [\Omega^2 \cos(3\Omega\tau + 2\xi_1) - \bar{\omega}_1 A_1 (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{21}) \{ \sin(3\Omega\tau + 3\xi_1) + \\ & + \sin(\Omega\tau + \xi_1) \} - \bar{\omega}_2 A_2 (\eta_1 + \eta_2 + \eta_2 p_{22}) \{ \sin(3\Omega\tau + 2\xi_1 + \xi_2) + \sin(\Omega\tau + \xi_2) \} + \\ & + \Omega^2 \cos(\Omega\tau) ] ; \\ v_2 = & A_2 \cos(\Omega\tau + \xi_2) - \frac{\epsilon\theta^2\eta_2}{8\mu\bar{\omega}_2\Omega} [(1 - p_{21})\bar{\omega}_1 A_1 \{ \sin(3\Omega\tau + \xi_1 + 2\xi_2) + \sin(\Omega\tau + \xi_1) \} + \\ & + (1 - p_{22})\bar{\omega}_2 A_2 \{ \sin(3\Omega\tau + 3\xi_2) + \sin(\Omega\tau + \xi_2) \} ] . \end{aligned} \quad (23)$$

sendo  $A_1$ ,  $\xi_1$ ,  $A_2$ ,  $\xi_2$  e  $\Omega$  considerados constantes. As equações (22) e (23) são obtidas com a utilização da equação (21), aplicando-se um esquema de sucessivas aproximações. Para obter a solução do sistema (1) basta fazer

$$c_1 = v_1 + v_2 \text{ e } c_2 = p_{21}v_1 + p_{22}v_2 .$$

onde  $p_{21}$  e  $p_{22}$  são os elementos da segunda linha da matriz  $P$  utilizada na transformação linear de normalização do sistema ( $u=Pv$ ). As propriedades característica da solução analítica obtida são a presença de harmônicos de  $3W$  nas expressões (23) do movimento oscilatório do sistema e a presença de pequenos harmônicos de  $2W$  nas expressões (21) e (22), que representam a velocidade angular e a coordenada angular do motor, respectivamente.

## 10. CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho é encontrar uma solução analítica aproximada de um sistema não ideal constituído por duas massas, sustentadas por molas e amortecedores, sendo excitado por um motor elétrico de corrente contínua que está acoplado a uma das massas. Encontrar a solução numérica tem a desvantagem de que esta solução é apenas particular, para alguns valores paramétricos pré-determinados. Por esse motivo interessa-se por uma solução analítica, a qual permitirá uma vasta variabilidade dos parâmetros físicos do problema e, quando aplicado um estudo de estabilidade sobre ela, permitirá que essa escolha seja conveniente ao estudo realizado. A técnica de perturbação utilizada foi o método da média, que embora trabalhoso tem dado resultados satisfatórios pois em seu espaço de estados, ele preserva a topologia do sistema dinâmico original. Pela análise de estabilidade da solução obtida pode-se obter o fenômeno do salto e até mesmo bifurcações com a aplicação do



teorema de Sotomayor (Sotomayor, 1986) ou com critérios de estabilidade tais como o critério de Routh-Hurwitz. O teorema de Sotomayor estabelece condições para a existência de bifurcações estáticas tais como bifurcação sela-nó, transcritical, ou por quebra de simetria transversal em sistemas dinâmicos de primeira ordem tal como o sistema médio. Essas condições são baseadas no sinal de derivadas direcionais do sistema. Quando examina-se oscilações forçadas de um sistema não ideal uma série de fenômenos podem ser observados, tais como: o fenômeno do salto na curva de ressonância; a presença de condições instáveis de oscilações estacionárias na região de ressonância; a dependência dessas condições com relação ao sentido de variação de  $W$ . Outra característica intrínseca a esses sistemas é a presença de harmônicos de  $3W$  e  $2W$  nas expressões do movimento oscilatório do sistema, da velocidade angular e da coordenada angular do motor. Esta propriedade foi observada na solução analítica aproximada, obtida neste trabalho através do método da média.

## 11. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo financiamento do trabalho.

## 12. REFERÊNCIAS

- Balthazar, J.M., Cheshankov, B.I., Ruschev, D.T., Barbanti, L., Weber, H.I., 2001, “Remarks on the passage through resonance of a vibrating system with two degrees of freedom, excited by a non-ideal energy source. Journal of Sound and Vibration”, Vol 239, No 5, p 1075-1085.
- Balthazar, J.M., Mook, D.T., Weber, H.I., Reyolando, M.L.R.F., Fenili, A., Belato, D., Felix, J.L.P., 2003, “An overview on non-ideal vibrations”. Meccanica.
- Evan-Iwanowski, R.M., 1976, “Resonance oscillations in mechanical systems”. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.
- Guilherme, K.L., Tsuchida, M., Balthazar, J.M., Silva, G.N., 2001, “Um estudo do comportamento de um sistema dinâmico não ideal durante a passagem pela ressonância”. Anais da I Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle, São Carlos, SP, Brasil, ABCM/SBMAC, ISBN: 85-85769-08-4., p. 1-18.
- Guilherme, K.L., Tsuchida, M., Balthazar, J.M., Silva, G.N., Cheshankov, B.I., 2002, “Estudo da Ressonância 1:1 em um Sistema Dinâmico não ideal”. Anais do I Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, Vol.1, São José do Rio Preto, SP, Brasil, ISBN: 85-86883-05-0, p.965-970.
- Kononenko, V.O., 1969, “Vibrating System of Limited Power Supply”. ILife.
- Sotomayor, J., 1986, “Generic Bifurcation's of Dynamical Systems”, In Peixoto, M.M. (ed.) Dynamical systems. Springer Verlag: N.Y., Heidelberg and Berlin.
- Tsuchida, M., Guilherme, K.L., Balthazar, J.M., Silva, G.N., 2003 (a), “Dinâmica Vibracional com Dois Graus de Liberdade. Anais do II Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, Vol.2, São José dos Campos, SP, Brasil, ISBN:85-86883-15-8, p.768-777.
- Tsuchida, M., Guilherme, K.L., Balthazar, J.M., Silva, G.N., Cheshankov, B.I., 2003 (b), “On regular and irregular vibrations of a non-ideal system with two degrees of freedom. 1:1 resonance”. Journal of Sound and Vibration, 260, p 949-960.

## 13. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo material impresso incluído no seu trabalho.

# **VIBRATION OF A SYSTEM EXCITED BY A DC MOTOR OF LIMITED SUPPLY (NONIDEAL), MODELED WITH TWO DEGREES OF FREEDOM.**

## **Karen de Lolo Guilherme**

Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Projeto Mecânico, C P 6122, 13083-970, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil. E - mail: [karen@fem.unicamp.br](mailto:karen@fem.unicamp.br)

## **José Manoel Balthazar**

Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação, UNESP- Rio Claro, CP 178, 13500-230 Rio Claro, SP, Brasil e Prof. Visitante Departamento de Projeto Mecânico, Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, Campinas, Brasil. E-mail: [jmbaltha@rc.unesp.br](mailto:jmbaltha@rc.unesp.br)

## **Masayoshi Tsuchida**

Departamento de Ciências da Computação e Estatística, UNESP- São José do Rio Preto, Rua Cristóvão Colombo, no. 2265, 15054-000 São José do Rio Preto, SP, Brasil. E-mail: [tsuchida@dcce.ibilce.unesp.br](mailto:tsuchida@dcce.ibilce.unesp.br)

**Abstract.** *In this work develop studies of a system constituted by two blocks connected by springs and dampers. The system is excited by a DC motor with limited power supply (Non-Ideal problem), and a suitable choose of physical parameters leads to resonance conditions between the natural frequencies of the dynamical system. By using numerical integrations we obtain regular and chaotic behavior by using suitable physical parameters. An analytical solution is also obtained through perturbation analysis with good agreement between with the numerical ones.*

**Keywords.** *Nonideal system, nonlinear system, average method, ressonance, limited power supply.*