

UMA NOTA SOBRE A VERIFICAÇÃO DE CAOS HOMOCLÍNICO EM UM SISTEMA ROBÓTICO DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE E SEU CONTROLE

Jeferson Cassiano

Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Projeto Mecânico, C. P. 6122, 13083-970, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil. E - mail: jeferson@fem.unicamp.br

José Manoel Balthazar

Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação, UNESP- Rio Claro, CP 178, 13500-230 Rio Claro, SP, Brasil e Prof. Visitante Departamento de Projeto Mecânico, Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, Campinas, Brasil. E-mail: jmbaltha@rc.unesp.br

Resumo. *Este trabalho visa verificar, através do método de Poincaré - Mel'nikov, a ocorrência de caos (cenário homoclínico) em um sistema robótico de dois graus de liberdade, problema, este que foi objeto de estudo de Nakamura e outros em um trabalho publicado no ano de 1995. Este trabalho visa verificar analiticamente tais resultados e propor algumas estratégias de controle.*

Palavras-chave: *órbitas homoclínicas, separatriz, estabilidade, robô.*

1. INTRODUÇÃO

Nakamura e colaboradores implementaram uma simulação numérica e validação de um sistema robótico, modelado com dois graus de liberdade (Nakamura et al, 1995). Ao simular numérica e experimentalmente, o sistema Hamiltoniano associado a este problema, constataram a total ausência de irregularidade no comportamento topológico deste sistema dinâmico.

Neste estudo os autores, ao introduzir uma entrada periódica, verificaram, numericamente, via mapa de Poincaré, o gradual processo de colapso da integridade do sistema com o aumento da amplitude do sinal. Este colapso verificado pelos autores (denominado pelos mesmos de *transitividade topológica*) é caracterizado pela destruição dos toros invariantes do sistema ou, da mesma forma, da quebra da integrabilidade do mesmo. Com o sistema operando sob tais condições, os autores propõem uma técnica de controle para estabilizar uma dada órbita do mesmo.

O objetivo deste trabalho é o estabelecer as condições para a ocorrência de órbitas heteroclínicas (contornos homoclínicos) com vistas à utilização do critério de Poincaré - Mel'nikov (Mel'nikov, 1963) para a verificação analítica da ocorrência de caos no cenário homoclínico. Os detalhes da metodologia aplicada podem ser encontradas em, por exemplo em (Guckheimer e Holmes, 1983), (Wiggins, 1988), (Dantas e Balthazar, 2002, 2003), (Koiller, 1985), etc.

1. MODELAMENTO MATEMÁTICO

Seja o sistema robótico com dois graus de liberdade, definido pela Fig. (1)

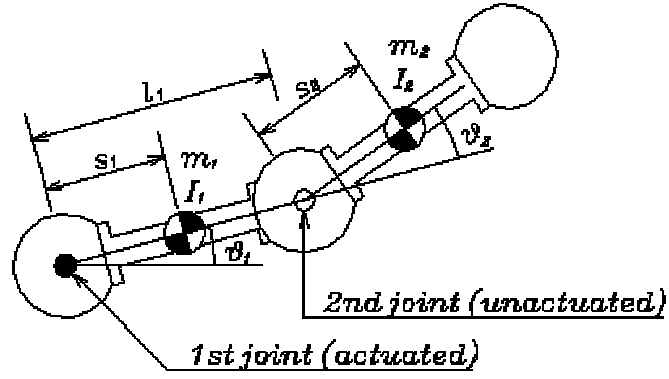


Figura 1: Esquema do robô (Nakamura,1995)

onde definem-se os seguintes parâmetros

$$a = m_1 s_1^2 + m_2 l_1^2 + I_1, \quad b = m_2 l_2 s_2, \quad c = m_2 s_2^2 + I_2 \quad (1)$$

s_i : distância entre o vínculo e o centro de gravidade do i -ésimo tramo;

l_i : distância entre os vínculos do i -ésimo tramo;

m_i : massa do i -ésimo tramo;

I_i : momento de inércia do tramo i .

e cujo Hamiltoniano, então, é dado por

$$H: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \mapsto \frac{aJ_2^2 + 2bJ_2(J_2 - J_1)\cos\theta_2 + c(J_2 - J_1)^2}{2(ac - b^2 \cos^2 \theta_2)} \quad (2).$$

J_i : i -ésimo *momentum* generalizado;

H : Hamiltoniana;

θ_i : i -ésima posição generalizada;

Logo, tem-se as equações de Hamilton

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b \sin \theta_2 [bJ_1 \cos \theta_2 - (a + b \cos \theta_2)J_2]}{(ac - b^2 \cos^2 \theta_2)^2} \\ \frac{cJ_1 - (b \cos \theta_2 - c)J_2}{ac - b^2 \cos^2 \theta_2} \\ \frac{(a + b \cos \theta_2)J_2 - bJ_1 \cos \theta_2 - [cJ_1 - (b \cos \theta_2 + c)J_2]}{ac - b^2 \cos^2 \theta_2} \end{bmatrix} \quad (3).$$

Pode-se notar que a integração da primeira equação de Eq. (3) é trivial ($J_1 = \text{constante}$). As equações restantes passam, então, a envolver efetivamente apenas as variáveis J_2 e θ_2 (que será representado por θ) o que permite desacoplar a terceira equação do sistema integrando-a a posteriori

(o sistema possui simetria radial). Chamando $t = J_1 t/b$, $J = J_2/J_1$, $\alpha = a/b$ e $\beta = c/b$ o sistema resultante adimensional fica:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} J \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sin \theta [\cos \theta - (\alpha + \cos \theta)J] [\beta - (\cos \theta + \beta)J]}{(\alpha\beta - \cos^2 \theta)^2} \\ \frac{(\alpha + \beta + 2 \cos \theta)J - \cos \theta - \beta}{\alpha\beta - \cos^2 \theta} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\beta - (\cos \theta - \beta)J}{\alpha\beta - \cos^2 \theta} \quad (4).$$

Note que o sistema resultante é autônomo e de segunda ordem. Apenas esta constatação já é suficiente para descartar o comportamento caótico deste sistema pois é demonstrável que sistemas dinâmicos contínuos no tempo apresentam irregularidade apenas para ordem igual ou superior a três (Guckheimer e Holmes, 1983). Pode-se perceber que o sistema resultante consiste de um fluxo em um cilindro ($\mathbb{R} \times S$).

6. ESTUDO DA ESTABILIDADE E BIFURCAÇÕES

Os pontos fixos do primeiro sistema de Eq. (4) são facilmente determinados pela expressão

$$\begin{bmatrix} J_1^* \\ \theta_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta + 1}{\alpha + \beta + 2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} J_2^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta - 1}{\alpha + \beta - 2} \\ \pi \end{bmatrix} \quad (5).$$

Faz-se uso, aqui, do Teorema de Hartman – Grobman que permite inferir resultados do fluxo de um sistema analisando o fluxo linear na vizinhança de pontos fixos hiperbólicos. As matrizes Jacobianas do sistema e suas respectivas equações características associadas nos pontos fixos, são dadas por

$$\mathbf{D}_x \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} J_1^* \\ \theta_1^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{(\alpha + \beta + 2)^2} \\ \frac{\alpha + \beta + 2}{\alpha\beta - 1} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda^2 + \frac{1}{(\alpha\beta - 1)(\alpha + \beta + 2)} = 0$$

$$\mathbf{D}_x \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} J_2^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(\alpha + \beta - 2)^2} \\ \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha\beta - 1} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda^2 - \frac{1}{(\alpha\beta - 1)(\alpha + \beta - 2)} = 0 \quad (6).$$

O universo de parâmetros factíveis do sistema é definido como $U = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > 0 \wedge \beta > 0\}$ pois é aí que os mesmos tem algum significado físico. O conjunto U assim definido pode ser dividido em subconjuntos segundo a natureza da estabilidade.

Seja o conjunto $A = \{(\alpha, \beta) \in U : \alpha + \beta < 2\}$. Analisando os polinômios característicos verifica-se que os dois pontos fixos são do tipo sela hiperbólica (um subespaço expande e o outro contrai, fato verificável pela matriz Jacobiana admitir pares de autovalores reais e opostos: $\lambda = \pm [(1 - \alpha\beta)(\alpha + \beta + 2)]^{-1/2}$ e $\lambda = \pm [(1 - \alpha\beta)(2 - \alpha - \beta)]^{-1/2}$). Sendo assim o sistema, para este conjunto de parâmetros, é globalmente instável.

Observação: no caso do conjunto $B = \{(\alpha, \beta) \in U : \alpha + \beta = 2\} - \{(1, 1)\}$ o ponto fixo $[J_2^* \ \theta_2^*]^t$ torna-se impróprio ($J_2^* \rightarrow \infty$) e $J_1^* = (\beta + 1)/4$. Os elementos do conjunto B são, portanto, pontos de bifurcação.

Seja agora $C = \{(\alpha, \beta) \in U : \alpha + \beta > 2 \wedge \alpha\beta < 1\}$. O ponto fixo $[J_1^* \theta_1^*]^t$ permanece como ponto de sela ($\lambda = \pm [(1 - \alpha\beta)(\alpha + \beta + 2)]^{-1/2}$). Já $[J_2^* \theta_2^*]^t$ degenera para um centro (as raízes do polinômio característico são imaginárias puras: $\lambda = \pm j [(1 - \alpha\beta)(\alpha + \beta - 2)]^{-1/2}$).

Observação: no conjunto $\partial H = \{(\alpha, \beta) \in U : \alpha\beta = 1\}$ ambos pontos fixos são singulares ($\lambda \rightarrow \pm \infty$). Neste conjunto tem-se que $J_1 = 1/(1 + \alpha)$ e $J_2 = 1/(1 - \alpha)$ para $\alpha \neq 1$ e $J_2 = 1/2$ para $\alpha = 1$. Os elementos de D também são pontos de bifurcação e a bifurcação que aí ocorre é do tipo sela – malha ou homoclínica que é objetivo deste trabalho.

No conjunto $H = \{(\alpha, \beta) \in U : \alpha\beta > 1\}$ os pontos trocam de classificação entre si. $[J_1^* \theta_1^*]^t$ torna-se centro ($\lambda = \pm j [(\alpha\beta - 1)(\alpha + \beta + 2)]^{-1/2}$) e $[J_2^* \theta_2^*]^t$ passa a ser sela hiperbólica ($\lambda = \pm [(\alpha\beta - 1)(\alpha + \beta - 2)]^{-1/2}$). O conjunto $H^c = \{(\alpha, \beta) \in U : \alpha\beta \leq 1\}$ possui uma singularidade no campo vetorial ($\alpha\beta = \cos^2 \theta$). Tal singularidade inviabiliza a existência de órbitas homoclínicas sob a variedade. Por esta razão H é o conjunto de trabalho.

7. DETERMINAÇÃO DAS ÓRBITAS HOMOCLÍNICAS

Para a determinação do fluxo são necessárias duas integrais. A integral primeira é dada pelo Hamiltoniano que, adimensional, fica

$$h = \frac{bH}{J_1^2}, \quad h : \mathbb{R} \times S \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} J \\ \theta \end{bmatrix} \mapsto \frac{\alpha J^2 + 2J(J-1)\cos \theta + \beta(J-1)^2}{2(\alpha\beta - \cos^2 \theta)} \quad (7)$$

sendo o valor do Hamiltoniano correspondente às órbitas homoclínicas (valor sob o ponto de sela) dado por

$$h_0 = \frac{\alpha(\beta-1)^2 + 2(\beta-1)(\alpha-1) + \beta(\alpha-1)^2}{2(\alpha + \beta - 2)^2(\alpha\beta - 1)} \quad (8).$$

Da Eq. (7) e Eq. (8) determina-se $J = J(\theta)$ e substituindo na segunda equação de Eq. (4) tem-se

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2h_0(\alpha + 2\cos \theta + \beta) - 1}{\alpha\beta - \cos^2 \theta}} \quad (9).$$

Adotada, por exemplo, a seguinte condição inicial fica

$$\theta(0) = 0 \quad (10).$$

A solução na forma de integral explícita fica

$$t = \pm \int_0^{\theta(t)} \sqrt{\frac{\alpha\beta - \cos^2 \eta}{2h_0(\alpha + 2\cos \eta + \beta) - 1}} d\eta \quad (11).$$

A integral (5.11) não tem forma analítica conhecida e fornece implicitamente $\theta = \theta(t)$.

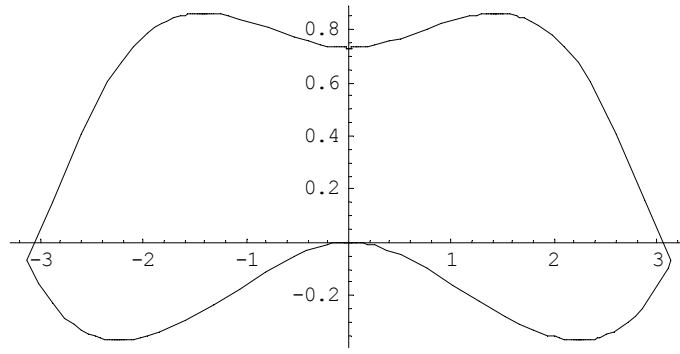


Figura 2: Órbitas Homoclínicas do cilindro projetadas no plano para $\alpha=2,32$ e $\beta=0,92$ (Nakamura, 1995)

Os valores adotados para as órbitas acima foram baseados nos valores utilizados por Nakamura *et al*, 1995 no ensaio experimental.

Expandindo o campo de Eq. (9) em série de Taylor em torno de zero tem-se

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha + \beta - 2)(\alpha\beta - 1)}} \left[2 - \left(\frac{\alpha\beta + 3}{\alpha\beta - 1} \right) \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 + o(\theta^4) \right] \quad (12).$$

Desprezando os termos de ordem superior a 2, a solução fica

$$\theta(t) = 2 \sqrt{2 \left(\frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 3} \right)} \tanh \left[\frac{t}{\alpha\beta - 1} \sqrt{2(\alpha\beta + 3)} \right] \quad (13).$$

8. CRITÉRIO DE POINCARÉ - MEL'NIKOV

O método utilizado para a verificação de comportamento caótico é o chamado *Crítério de Poincaré - Mel'nikov*.

Em sistemas fracamente perturbados cujo sistema não - perturbado associado dispõe de órbitas homoclínicas a ocorrência de *ferraduras* pode ser indicada pela quebra transversa de separatrizes. Define-se uma *função de Poincaré - Mel'nikov* como um estimador da separação entre sub - variedades instáveis e estáveis. Definindo uma função de Poincaré - Mel'nikov do tipo escalar o critério de Poincaré - Mel'nikov estabelece que se a função trocar de sinal, ocorrerá quebra transversal de separatriz.

Para analisar as condições de quebra de separatriz seja uma perturbação de Eq. (4) do tipo

$$\varepsilon g(t) = \varepsilon \begin{bmatrix} \sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (14).$$

Para esta entrada a função de Poincaré - Mel'nikov fica

$$M(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\tau) \sin(t + \tau) d\tau \quad (15).$$

Substituindo (13) em (15) tem-se que

$$\begin{aligned}
k_1 &= 2\pi \left(\frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 3} \right) \sqrt{(\alpha + \beta - 2)(\alpha\beta - 1)} \\
k_2 &= \frac{\pi}{4} (\alpha\beta - 1) \sqrt{2 \left(\frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha\beta + 3} \right)} \\
M(t) &= -k_1 \operatorname{sech}(k_2) \operatorname{cossech}(k_2) \cos(t)
\end{aligned} \tag{16}.$$

A derivada fica

$$M'(t) = k_1 \operatorname{sech}(k_2) \operatorname{cossech}(k_2) \sin(t) \tag{17}.$$

Portanto o sistema de Eq. (4), para uma perturbação do tipo Eq. (14), tem zeros simples e, por conseguinte, apresenta ferradura $\forall (\alpha, \beta) \in H$, ou seja, $\alpha\beta > 1$ (portanto $\alpha + \beta > 2$).

9. CONTROLE

Seja, então, o sistema autônomo

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} J \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{sen} \theta [\cos \theta - (\alpha + \cos \theta)J][\beta - (\cos \theta + \beta)J]}{(\alpha\beta - \cos^2 \theta)^2} + u \operatorname{sen} t \\ \frac{(\alpha + \beta + 2 \cos \theta)J - \cos \theta - \beta}{\alpha\beta - \cos^2 \theta} \end{bmatrix} \tag{18}.$$

Como provado no item anterior, este sistema possui ferradura. Sistemas deste tipo possuem certas propriedades (Koiller, 1985). Dentre tais propriedades, são enumeradas as seguintes que serão úteis para o controle:

- Existência de um conjunto denso de órbitas periódicas instáveis (selas hiperbólicas);
- Existência de uma órbita densa;
- Sensibilidade do sistema.

Pode ser utilizado um controle chaveado segundo o seguinte critério: seja $\mathbf{x}^*(t) = [J^*(t) \theta^*(t)]^t$ onde $\mathbf{x}(t) = [J(t) \theta(t)]^t$ a órbita que se deseja estabilizar. Seja $\xi(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$, define-se $u(\xi)$ da seguinte forma: $u(\xi) = 1$ para $\|\xi\| \leq \delta$ e $u(\xi) = 0$ para $\|\xi\| > \delta$ sendo $\delta > 0$ uma constante. A lei de controle será da forma $u(\xi) \mathbf{K}(\xi)$. Como existe uma órbita não - periódica densa, existe $t > 0$ tal que $\mathbf{x}(t) \in B_\delta(\mathbf{x}^*(t))$. O controle, então, estabiliza tal órbita.

Fazendo, novamente, uso do Teorema de Hartman – Grobman, seja a matriz Jacobiana dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_x \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} J \\ \theta \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial J} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial J} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial f_1}{\partial J} &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{(\alpha\beta - \cos^2 \theta)} [2(\alpha + \cos \theta)(\beta + \cos \theta)J - (\alpha\beta + 2\beta \cos \theta + \cos^2 \theta)] \\
\frac{\partial f_1}{\partial \theta} &= \frac{1}{(\alpha\beta - \cos^2 \theta)^3} [[\beta - (\cos \theta + \beta)J][\cos \theta [\cos \theta - (\alpha + \cos \theta)]] - \\
&\quad - \operatorname{sen} \theta [(1 + J) \operatorname{sen} \theta + \alpha J] + J \operatorname{sen}^2 \theta [\cos \theta - (\alpha + \cos \theta)J] (\alpha\beta - \cos^2 \theta) - \\
&\quad - 4 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta [\beta - (\cos \theta + \beta)J][\cos \theta - (\alpha + \cos \theta)]]
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial J} = \frac{\alpha + \beta + 2 \cos \theta}{\alpha \beta - \cos^2 \theta}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \theta} = \frac{\sin \theta}{(\alpha \beta - \cos^2 \theta)} [(1 - 2J)(\alpha \beta - \cos^2 \theta) + 2[\beta + \cos \theta - (\alpha + \beta + 2 \cos \theta)J] \cos \theta]$$

Para estabilizar um ponto fixo pode-se dispor de várias técnicas clássicas como alocação de pólos, observadores de ordem completa ou reduzida, etc. Como exemplo seja o estado a ser estabilizado $\mathbf{x}^* = [J \ \theta]^t$. Chamando a matriz de Eq. (19) de \mathbf{A} e supondo $\mathbf{B} = [1 \ 0]^t$ tem-se que a matriz de controlabilidade é

$$[\mathbf{B} \ \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial f_1}{\partial J} \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial J} \end{bmatrix} \quad (20).$$

Fazendo uso da Alocação de Pólos que tem sido tradicionalmente utilizado para controle de sistemas caóticos (método OGY, Ott *et al*, 1993), a matriz de ganhos do sistema é

$$\mathbf{K}^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial J} + \frac{\partial f_2}{\partial \theta} - (\lambda_1 + \lambda_2) \\ \frac{1}{\frac{\partial f_2}{\partial J}} \left[\lambda_1 \lambda_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \frac{\partial f_2}{\partial J} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta} \right)^2 - \left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta} \right) (\lambda_1 + \lambda_2) \right] \end{bmatrix}; \quad \lambda_1, \lambda_2 < 0 \quad (21).$$

Além desta, poderiam ser utilizadas outras técnicas como observadores de estado ou controle ótimo.

No caso de estabilizar órbitas sob toros ressonantes faz-se uso da Teoria de Floquet. Para efeito de exemplo, o sistema será estabilizado na órbita $[\cos(\omega t) \ 0]^t$. Seja $\xi = [J - \cos(\omega t) \ \theta]^t$. Neste caso Eq. (19) reduz-se a

$$\mathbf{D}_\xi \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha[(\beta + 1)\cos(\omega t) - \beta]}{(\alpha\beta - 1)^2} \\ \frac{\alpha + \beta + 2}{\alpha\beta - 1} & 0 \end{bmatrix} \quad (22).$$

Note que, para estes valores, o sistema linearizado corresponde à conhecida *Equação de Mathieu*. Inicialmente seja a matriz de ganho

$$\mathbf{K}^t = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 - \frac{\alpha(\beta + 1)\cos(\omega t)}{(\alpha\beta - 1)^2} \end{bmatrix} \quad (23).$$

Note que a re - alimentação \mathbf{K} elimina os termos dinâmicos reduzindo o sistema a um invariante no tempo. Neste caso pode-se aplicar alguma das técnicas clássicas de controle como a alocação de pólos no sistema na matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\alpha + \beta + 2}{\alpha\beta - 1} & 0 \end{bmatrix} - \mathbf{B} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \quad (24).$$

Assim sendo, por alocação de pólos tem-se

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{(\alpha\beta - 1)(\lambda_1 + \lambda_2)}{\alpha + \beta + 2} \\ -\lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{Re}(\lambda_1), \text{Re}(\lambda_2) < 0 \quad (25).$$

Fazendo uso direto da Teoria de Floquet o problema é estabilizar o mapa: $\mathbf{x}_{n+1}(t) = \Phi(T)\mathbf{x}_n(t)$ sendo $\mathbf{x}_n(t) = \Phi(nt) \mathbf{x}_0$ e $\Phi(t)$ o fluxo gerado por $\mathbf{D}_x \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$. No caso geral $\Phi(t)$ não possui uma expressão analítica fechada. Um caso particular importante que admite soluções fechadas é o de sistemas ditos comutativos (Sinha *et al*, 1996). A estabilização do mapa pode ser feita por alocação de pólos (método OGY). O sistema controlado deverá ter como matriz de monodromia a matriz controlada $\Phi(T) - \mathbf{BK}^t$ sendo \mathbf{K} o ganho que aloca os pólos para o interior do círculo de raio unitário ($|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$).

Seja a matriz de monodromia do fluxo gerado por Eq. (19)

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}, \varphi_{ij} = \varphi_{ij}(\alpha, \beta, T) \quad (26).$$

Para esta matriz e com \mathbf{B} como definido anteriormente tem-se, por alocação de pólos, que o ganho é

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\varphi_{11} - \lambda_1 + \varphi_{22} - \lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 - \varphi_{11}\varphi_{22} + \varphi_{11} - \lambda_1 + \varphi_{22} - \lambda_2 + \varphi_{12}} \\ \varphi_{21} \end{bmatrix} \quad (27).$$

A técnica proposta por Sinha, 1996 faz uso das chamadas *Transformações de Lyapunov – Floquet* que transforma um problema periódico em um problema invariante no tempo. Todo grupo a um parâmetro $\{\Phi_t\}$ gerado por um campo linear $\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{A}(t)$ matriz T - periódica pode ser decomposto como segue: $\{\Phi_t\} = \{\mathbf{L}_t\} \oplus \{e^{Ct}\}$, $\Phi(t) = \mathbf{L}(t)e^{Ct}$ ($\mathbf{L}(t)$ T - periódica e \mathbf{C} constante ambas complexas) ou $\{\Phi_t\} = \{\mathbf{Q}_t\} \oplus \{e^{Rt}\}$, $\Phi(t) = \mathbf{Q}(t)e^{Rt}$ ($\mathbf{Q}(t)$ $2T$ - periódica e \mathbf{R} constante ambas reais). Note que os grupos $\{e^{Ct}\}$ e $\{e^{Rt}\}$ são gerados por campos invariantes ($\mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{R}\mathbf{x}(t)$ respectivamente). As matrizes $\mathbf{L}(t)$ e $\mathbf{Q}(t)$ são chamadas matrizes de transformação de Lyapunov – Floquet e, em geral, não podem ser obtidas de forma analítica. A idéia da técnica é propor um sistema de controle para estabilizar o sistema invariante ($e^{Ct}, e^{Rt} \rightarrow \mathbf{0}$ para $t \rightarrow \infty$). Para isto pode-se fazer uso das várias técnicas disponíveis (alocação de pólos, observadores, controle ótimo, etc). Em seguida faz-se a transformação inversa obtendo o sistema controlado. Seja a matriz

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) \\ q_{21}(t) & q_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (28).$$

Tem-se que $\mathbf{R} = [\ln \Phi^2(T)]/(2T)$. Seja \mathbf{R} dado por

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \quad (29).$$

O ganho da re – alimentação do sistema invariante controlado (alocação de pólos) é

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{r_{11} - \lambda_1 + r_{22} - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 - r_{11} r_{22} + r_{11} - \lambda_1 + r_{22} - \lambda_2 + r_{12}} + r_{12} \end{bmatrix} \quad (30).$$

A re – alimentação do sistema é dada por $\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^* \mathbf{Q}(t) \mathbf{B} \mathbf{K}^t \mathbf{Q}^{-1}(t) \mathbf{z}(t)$ sendo \mathbf{B}^* a inversa generalizada de \mathbf{B} .

10. CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi estabelecer as condições paramétricas para a ocorrência de caos no cenário homoclínico pela verificação de quebra transversa de separatrizes através do critério de Poincaré - Mel'nikov.

Num segundo momento o objetivo enfocado foi o controle. Como em sistemas caóticos existe uma órbita não periódica densa, esta permite se faça uma aproximação arbitrária de qualquer órbita do atrator. Como existe um conjunto denso enumerável de órbitas periódicas instáveis (tipo sela hiperbólica), pode-se aproximar arbitrariamente da órbita desejada estabilizando uma destas órbitas periódicas do atrator (pois para qualquer aberto que contém a órbita desejada existirá uma órbita do sistema caótico). A estabilização poderia ser realizada, por exemplo, através da Teoria de Floquet (Nayfeh e Balachandran, 1994) onde o controlador posicionará todos os expoentes característicos no interior do círculo de raio unitário. Foi escolhida uma órbita arbitrária e estabilizado o sistema na mesma.

Uma outra direção possível seria acoplar (3) pela adição de acoplamentos de amplitude limitada (motores de potência limitada) nas juntas e analisar as condições de quebra da integrabilidade do sistema.

11. AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo financiamento a este trabalho.

12. REFERENCIAS

- Y. Nakamura, T. Suzuki, M. Koinuma, "Nonlinear behavior and control of underactuated robotic mechanisms", Proc. of 7th International Symposium of Robotics Research, Munich, Germany, 1995, pp. 21-24.
- Melnikov, VK, " On the stability of the center for time-periodic perturbations", Transactions of Moscow Mathematical Society, pp. 1-57, 1963.

- Guckheimer, J, Holmes P, "Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation's of vector fields", Springer Verlag, 1983.
- Wiggins, S., 1998, "Global Bifurcations and Chaos", Springer Verlag
- Dantas, M. J. H., Balthazar, J. M., 2002, "Comportamento caótico de vibradores centrífugos", Proceedings of. the Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, João Pessoa, Brazil, CD ROM, 2000
- Dantas, M. J. H., Balthazar, J. M., 2003, " On Dynamical Behavior of Hard and Soft Spring in Nonideal Mechanical System", Proceedings of the IUTAM Symposium on Dynamical and Control of Systems and Processes in Mechanics, 8-13 June 2003, Rome, Italy, to appear.
- Koiller, J, 1985, "Caos em Mecânica", VII Escola de Matemática Aplicada, Teoria das Bifurcações e suas Aplicações, VII Escola de Matemática Aplicada, Laboratório Nacional de Computação Científica, Rio de Janeiro, Brazil, p. 159-311.
- Nayfeh A H, Balachandran, 1994, "Nonlinear Dynamics", Wiley.

13. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo material impresso incluído no seu trabalho, exceto a Fig. (1).

ONE NOTICES ON THE VERIFICATION OF HOMOCLINIC CHAOS IN A ROBOTIC SYSTEM OF TWO DEGREES OF FREEDOM AND ITS CONTROL

Jeferson Cassiano

Faculty of Engineering Mechanics, Department of Mechanical Design, C.P. 6122, 13083-970, State University of Campinas, Campinas, S.P., Brazil. E - mail: jeferson@fem.unicamp.br

José Manoel Balthazar

Department of Statistics, Applied Mathematics and Computation, UNESP – Rio Claro, C.P. 178, 13500-230 Rio Claro, SP, Brazil and visiting prof. Department of Design Mechanical, Faculty of Engineering Mechanics, UNICAMP, Campinas, Brazil. E-mail: jmbaltha@rc.unesp.br

Abstract. *This work aims at to verify, through the method of Poincaré – Mel'nikov, the occurrence of chaos (homoclinic scene) in a robotic system of two degrees of freedom, problem, this that were object of study of Nakamura and others in a work published in the year of 1995. This work aims at to verify such results analytical and to consider some strategies of control.*

Keywords. *homoclinics orbits, separatrix, stability, robot.*