

# APLICAÇÃO DO TEOREMA DO LIMITE SUPERIOR NO CORTE TRI-DIMENSIONAL.

**Código resumo-21005**

**Resumo.** Uma nova avaliação do corte tri-dimensional é proposta utilizando-se o Teorema do Limite Superior e o Princípio do Trabalho Virtual. As velocidades ocorridas no cavaco durante o processo são avaliadas e suas relações são obtidas através do diagrama de velocidades. Com as velocidades obtidas é desenvolvido um modelamento matemático do processo através do Teorema do Limite Superior. A teoria é desenvolvida utilizando-se a hipótese da condição de incompressibilidade, ou seja, não há variação de volume durante o processo, ocorrendo apenas variação de forma. É definidos o trabalho virtual e o trabalho plástico necessário para que ocorra a deformação do cavaco, ou seja, o trabalho de deformação plástica no cisalhamento. Através do Limite Superior, é definido uma relação entre as forças durante o processo com as velocidades.

**Palavras chave:** Corte tri-dimensional, Limite Superior, Usinagem.

## 1-INTRODUÇÃO.

Conforme (Astakhov, 2001), durante muito tempo, as pesquisas voltadas para o processo de fabricação por usinagem tem sido direcionadas à redução de custos, uma melhoria no acabamento superficial das peças e no desgaste das ferramentas de corte. Porém, um número muito pequeno de pesquisas tem sido realizadas no sentido de conhecer as bases teóricas do processo, fazendo com que fique muito difícil uma avaliação teórica do processo. Essa avaliação do processo é de extrema importância para um melhor acompanhamento do processo e assim se possa antecipar aos problemas inerentes do processo. Assim, é extremamente difícil uma previsão antecipada do processo, já que a maioria das pesquisas são direcionadas para o lado prático do processo, ficando o lado teórico desconhecido.

O presente trabalho apresenta um modelamento através de um Método de Energia pelo Teorema do Limite Superior, utilizando-se de diagramas de velocidades e o princípio do Trabalho Virtual aplicados na Zona de Corte para que se obtenha melhores relações com o processo de corte por usinagem.

## 2-O MÉTODO DO LIMITE SUPERIOR.

No método do limite superior, o principal objetivo é encontrar uma geometria de fluxo expressa através de um campo de velocidades que descreva cinematicamente o processo em estudo. As únicas restrições impostas ao campo de velocidades são as de satisfazer a condição de incompressibilidade, ou seja, é admitida a hipótese do volume ser constante e que a descontinuidade na velocidade de fluxo ocorram somente tangenciais aos limites do campo de velocidades cinematicamente admissível.

O método do limite superior baseia-se em um teorema da Mecânica do Contínuo, que estabelece que: “existindo um campo de velocidades cinematicamente admissível, as cargas necessárias para a implantação deste campo de velocidades constituem um limite superior para a solução real”.

Obviamente existem vários campos de velocidades possíveis para a descrição aproximada do processo, sendo assim o campo mais adequado será o que conduzir ao menor limite superior.

### 3-MECANISMO DE CORTE.

Toda a Teoria do Corte gira em torno do mecanismo de formação do cavaco. O modelo mais usado é o modelo do Plano de Cisalhamento Primário. O mecanismo do Plano de Cisalhamento Primário pode ser explicado considerando a Fig. (1).

A ação da ferramenta recalca o volume “ABCD”, nesse ponto, o metal começa a sofrer deformações elásticas. Com o prosseguimento do processo, o limite de escoamento do material é vencido e o material passa a se deformar plasticamente (Machado, 1996). Deformações plásticas continuam acontecendo até que as tensões não sejam mais suficientes para manter este regime. Assim fica definida uma zona de cisalhamento que é chamada de zona de cisalhamento primária e é representada pela linha “OX” da figura. Conforme (Astakhov, 2001), o processo de formação do cavaco é cíclico e possui três estágios distintos: 1-compressão do material da peça pela ferramenta, 2-formação de uma superfície de descontinuidade na velocidade e 3-fratura e deslizamento do cavaco.

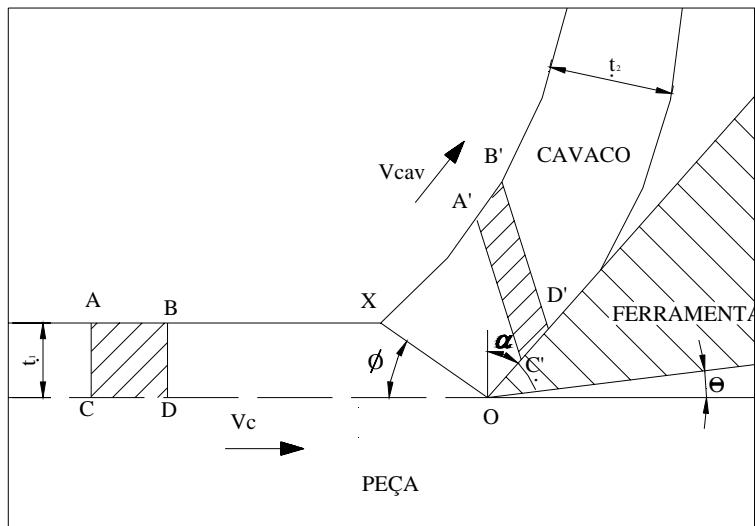


Figura 1. Mecanismo da Cunha de Corte.

Após o material entrar no regime plástico, o avanço da ferramenta faz com que as tensões ultrapassem o limite de resistência do material, ainda dentro da zona de cisalhamento primária, promovendo o cisalhamento que se inicia no ponto “O” e se estende até o ponto “X” (Machado, 1996). Ao passar pela linha “OX”, o material sofre um cisalhamento, passando de uma espessura  $t_1$  (profundidade de corte), para uma espessura  $t_2$  (espessura do cavaco). Assim, por geometria o ângulo de cisalhamento ( $\phi$ ) pode ser definido por:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\cos(\phi - \alpha)}{\beta - \operatorname{sen} \alpha} \quad (1)$$

O termo  $\beta$  é definido como sendo a razão entre a espessura do cavaco e a profundidade de corte, ou seja:

$$\beta = \frac{t_2}{t_1} = \frac{OX \cos(\phi - \alpha)}{OX \sen \alpha} = \frac{\cos(\phi - \alpha)}{\sen \alpha} \quad (2)$$

Após passar pela região de cisalhamento primária, o volume “ABCD” movimenta sobre a superfície de saída da ferramenta e sai como um componente ou lamela do cavaco. No entanto ao atravessar a zona de cisalhamento primária ele se deforma para um novo formato “A’BC’D’”, com velocidade diferente da velocidade anterior.

#### 4-O CORTE OBLÍQUO.

Estudos do processo de usinagem geralmente tem sua atenção voltada para um caso simplificado que é o corte ortogonal. O corte ortogonal é uma forma simplificada do corte tridimensional, sendo o ângulo de inclinação da ferramenta ( $\lambda$ ) é igual a zero. O cavaco é formado em condições de deformações planas com fluxo na direção normal a aresta de corte, ou seja, o ângulo de saída do cavaco ( $n_c$ ) é igual a zero. O modelo do corte ortogonal é muito utilizado, devido a complexidade existente na análise do corte tri-dimensional.

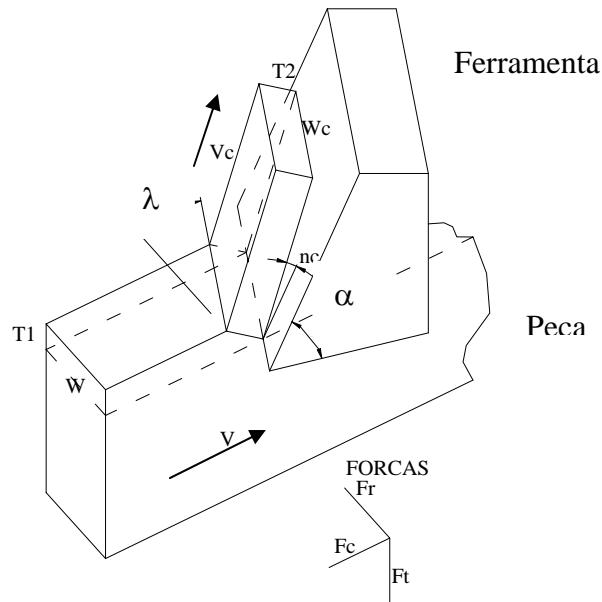


Figura 2. O corte oblíquo.

A FIG. 2 mostra o modelo do corte oblíquo utilizado neste trabalho, onde o ângulo de inclinação da ferramenta é diferente de zero e o fluxo do cavaco não é perpendicular a aresta de corte. Em virtude disso, teremos três componentes de força, no corte ortogonal tínhamos apenas duas componentes. A largura ( $w$ ) e a espessura do cavaco ( $t$ ) também variam.

## 5-CAMPO DE VELOCIDADES.

Pelo plano normal temos o campo de velocidades da FIG. 2

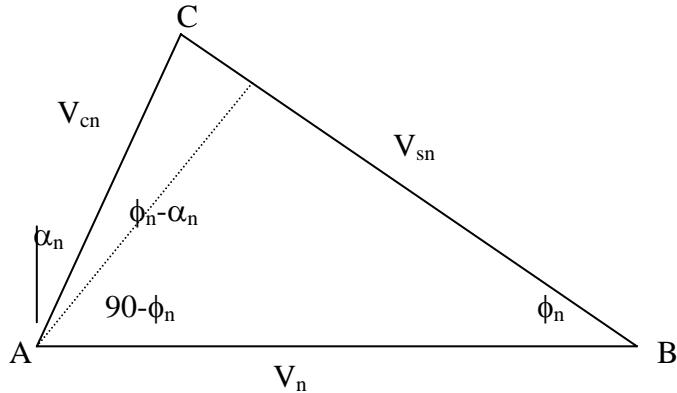


Figura 3. Campo de velocidades no plano normal.

Pelo  $\Delta ABC$  da FIG 3, temos:

$$V_{sn} = V_n \cos \phi_n + V_{cn} \sin(\phi_n - \alpha_n) \quad (1)$$

Considerando o volume constante, conforme a FIG 3, temos:

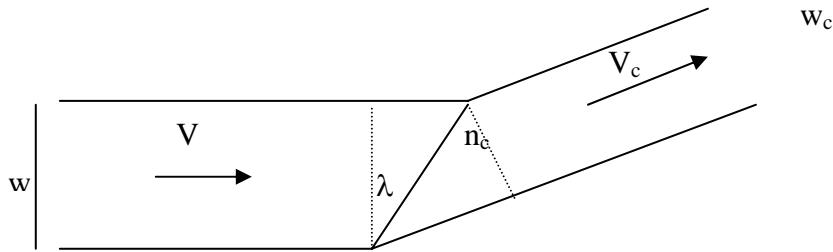


Figura 3. Fluxo do cavaco.

$$\frac{w}{\cos \lambda} = \frac{w_c}{\cos n_c} \Rightarrow w_c = w \frac{\cos n_c}{\cos \lambda} \quad (2)$$

$$V \cdot w \cdot T_1 = V_c w_c T_2 \quad (3)$$

Substituindo 2 em 3, temos:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_c \cos n_c}{V \cos \lambda} \quad (4)$$

Novamente no plano normal, temos:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sin \phi_n}{\cos(\phi_n - \alpha_n)} \quad (5)$$

Igualando 4 com 5, temos o valor de  $V_c$ .

$$V_c = V \frac{\cos \lambda \sin \phi_n}{\cos n_c \cos(\phi_n - \alpha_n)} \quad (6)$$

Assim, definimos as outras velocidades:

$$V_{cn} = V_c \cos n_c \quad (7)$$

$$V_n = V \cos \lambda \quad (8)$$

Substituindo 6 em 7, temos:

$$V_{cn} = V \frac{\cos \lambda \sin \phi_n}{\cos(\phi_n - \alpha_n)} \quad (9)$$

Substituindo 7 e 8 em 1, temos:

$$V_{sn} = V \frac{\cos \lambda \cos \alpha_n}{\cos(\phi_n - \alpha_n)} \quad (10)$$

Sendo

$$V_s = \frac{V_{sn}}{\cos \phi_L} \quad (11)$$

Substituindo 10 em 11, temos

$$V_s = V \frac{\cos \lambda \cos \alpha_n}{\cos \phi_L \cos(\phi_n - \alpha_n)} \quad (12)$$

$$V_{SL} = V_s \sin \phi_L \quad (13)$$

Substituindo 12 em 13, temos

$$V_{SL} = V \frac{\cos \lambda \cos \alpha_n \tan \phi_L}{\cos(\phi_n - \alpha_n)} \quad (14)$$

$$V_{CL} = V_c \sin n_c \quad (15)$$

Substituindo 6 em 15, temos

$$V_{CL} = V \frac{\cos \lambda \operatorname{sen} \phi_n tgn_c}{\cos(\phi_n - \alpha_n)} \quad (16)$$

Sendo,  $V_{SL} \rightarrow$  Velocidade de cisalhamento lateral.

$V_{CL} \rightarrow$  Velocidade lateral do cavaco.

$\phi_L \rightarrow$  Ângulo de cisalhamento lateral.

## 6-FORÇAS.

As forças principais  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  podem ser medidas.

Transformação em coordenadas:

$$\begin{bmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{bmatrix} = [C]^T \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (17)$$

Coeficientes:

$$a_1 = \cos \lambda \quad a_2 = \cos \alpha_n \operatorname{sen} \lambda \quad a_3 = -\operatorname{sen} \alpha_n \operatorname{sen} \lambda$$

$$b_1 = -\operatorname{sen} \lambda \quad b_2 = \cos \alpha_n \cos \lambda \quad b_3 = -\operatorname{sen} \alpha_n \cos \lambda$$

$$c_1 = 0 \quad c_2 = \operatorname{sen} \alpha_n \quad c_3 = \cos \alpha_n$$

$$F'_x = a_1 F_x + b_1 F_y + c_1 F_z \quad (18)$$

$$F'_y = a_2 F_x + b_2 F_y + c_2 F_z \quad (19)$$

$$F'_z = a_3 F_x + b_3 F_y + c_3 F_z \quad (20)$$

$$F'_x = F_x \cos \lambda - F_y \operatorname{sen} \lambda \quad (21)$$

$$F'_y = F_x \operatorname{sen} \lambda \cos \alpha_n + F_y \cos \alpha_n \operatorname{sen} \lambda + F_z \operatorname{sen} \alpha_n \quad (22)$$

$$F'_z = -F_x \operatorname{sen} \lambda \cos \alpha_n - F_y \operatorname{sen} \alpha_n \cos \lambda + F_z \cos \alpha_n \quad (23)$$

Força ao longo da ferramenta:

$$F_C = \left[ (F'_x)^2 + (F'_z)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

Força de cisalhamento:

$$F_S = \left[ (F'_x)^2 + (F_x \operatorname{sen} \lambda \cos \phi_n + F_y \cos \phi_n \cos \lambda + F_z \operatorname{sen} \alpha_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$F_S = \left[ (F_x \cos \lambda - F_y \operatorname{sen} \lambda)^2 + (F_x \operatorname{sen} \lambda \cos \phi_n + F_y \cos \phi_n \cos \lambda + F_z \operatorname{sen} \alpha_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

Força de cisalhamento normal:

$$F_{SN} = F_X \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \phi_n + F_Y \cos \lambda \operatorname{sen} \phi_n + F_Z \cos \phi_n \quad (26)$$

## 7-PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL.

Aplicando a Engenharia da Plasticidade e utilizando o método de energia durante o segundo e terceiro estágios de formação do cavaco, os problemas podem ser considerados quase estáticos, desde que se assuma que as forças de inércia do fluxo plástico possam ser desprezadas. Assim, de uma forma geral o trabalho virtual do elemento usada em muitas aplicações da teoria da plasticidade nas soluções de limite superior e linha de deslizamento, pode então ser expresso através da equação abaixo, (Al-Qureshi, 1991)

$$\int_s T_i v_j ds + \int_v X_i v_j dv = \int_v \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dv \quad (27)$$

A equação definida acima assume que as tensões e as velocidades são contínuas na zona de deformação, o que não é verdade. As descontinuidades nas tensões e nas velocidades são inevitáveis durante a deformação plástica (segundo e terceiro estágios de formação do cavaco), se fazendo necessário uma melhor definição para a equação 27. O Trabalho realizado pela tensão agindo na superfície de cisalhamento é dado pela Eq. (28).

$$w_s = \int_s \tau_s v^* ds \quad (28)$$

Assim, podemos redefinir a Eq. (27) incluindo na mesma o trabalho realizado na superfície onde ocorre a descontinuidade da velocidade e então a equação do trabalho virtual se tornará:

$$\int_s T_i v_j ds + \int_v X_i v_j dv = \int_v \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dv + \int_{SD} \tau_s v^* ds \quad (29)$$

## 8-TEOREMA DO LIMITE SUPERIOR APLICADO AO CORTE TRIDIMENSIONAL.

Considerando o trabalho externo realizado no fluxo de material, temos

$$\dot{w}_e = FcV \quad (30)$$

O trabalho realizado no plano de cisalhamento é dado por

$$w_i = F_s V_s \quad (31)$$

Igualando se os dois trabalhos, temos

$$\frac{F_c}{F_s} = \frac{V_s}{V} \quad (32)$$

Substituindo a equação 12 na equação 32, temos

$$\frac{F_c}{F_s} = \frac{\cos \lambda \cos \alpha_n}{\cos \phi_L \cos(\phi_n - \alpha_n)} \quad (33)$$

Analizando a equação 33, se o ângulo de inclinação da ferramenta ( $\lambda$ ) for igual a zero, teremos o corte ortogonal e se for igual a  $90^\circ$ , a força de corte será igual a zero. A foca de cisalhamento pode ser definida em função do material, da profundidade de corte e do avanço, assim podemos calcular a força de corte.

No plano normal podemos então definir a força de cisalhamento normal ( $F_{sn}$ ) conforme a equação 34 e na equação 35 temos a força de cisalhamento lateral ( $F_{sl}$ ).

$$\frac{F_c}{F_{sn}} = \frac{\cos \lambda \cos \alpha_n}{\cos(\phi_n - \alpha_n)} \quad (34)$$

No plano lateral, temos

$$\frac{F_c}{F_{sl}} = \frac{\cos \lambda \cos \alpha_n \operatorname{tg} \phi_L}{\cos(\phi_n - \alpha_n)} \quad (35)$$

## 9-CONCLUSÕES.

Um modelo para o Corte Oblíquo é proposto utilizando o Teorema do Limite Superior. Através deste modelamento é possível uma previsão antecipada da força de corte em função dos ângulos da ferramenta e do ângulo de cisalhamento. Através desta previsão os parâmetros do processo podem ser melhor previstos, bem como uma melhor escolha de ferramentas. Em um processo pouco conhecido do ponto de vista teórico (grande maioria dos estudos são realizados de forma prática) é de extrema importância estudos teóricos do fenômeno para juntamente com dados práticos tornar o processo mais eficiente.

## 9-REFERÊNCIAS.

- Astakhov, V.P., Osman, M.O.M., Hayajneh, M.T., "Re-evaluation of the basic mechanics of orthogonal metal cutting: Velocity diagram, virtual work equation and upper-bound theorem", International Journal of Machine Tools & Manufacture, 41 (2001) 393-418.
- Machado, A.R., Silva, M.B., "Usinagem dos Metais", Universidade Federal de Uberlândia, 1996.
- Al-Qureshi, H.A., "Teoria da Plasticidade", Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1991.

# APICATION OF UPPER BOUND THEOREM IN OBLIQUE CUTTING

**Código resumo-21005**

**Abstract:** This paper re-evaluates the oblique metal cutting through Upper Bound Theorem and Virtual Work. For re-evaluates, the velocity relationships of the ship formation through velocity diagram is proposed. Through relations of velocity diagram is developed the mathematic model with Upper Bound Theorem. The material is incompressible. The cut forces and the shear angle was argued.

**Keywords:** oblique cutting, upper bound theorem, machining