



UTILIZAÇÃO DE SÉRIES TRIGONOMÉTRICAS NO ESTUDO DE DEFLEXÕES EM VIGAS

Celso Pinto Morais Pereira

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, SP - Brasil

celpin@feg.unesp.br

José Elias Tomazini

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, SP - Brasil

tomazini@feg.unesp.br

Resumo: *Este trabalho mostra como melhor escolher uma função forma para a análise de deflexões em vigas. Essas funções são representadas por séries trigonométricas que normalmente apresentam uma convergência rápida. Este método aproximado fornece uma boa precisão à análise de deflexões em vigas de soluções exatas difíceis, e também apresenta uma importante vantagem pelo fato de que uma simples expressão pode ser aplicada ao longo de toda a viga.*

Palavras-Chave: *Deflexões, Vigas, Séries trigonométricas*

1. INTRODUÇÃO

A equação da curva elástica de uma viga prismática submetida à flexão pode ser representada, de maneira alternativa, por meio de uma série trigonométrica, tendo várias aplicações, como por exemplo, no estudo de vigas submetidas à flexão e carregamento axial (esforço normal excêntrico), e também na análise de vibrações de vigas.

Quando a estrutura apresenta um número grande de graus de liberdade, é possível aproximar a forma verdadeira da deflexão da estrutura por uma forma de deflexão estimada, sendo esta configuração expressa como uma função denominada *função forma*, que contém um ou mais “parâmetros de deslocamento” indeterminados. Pode-se inferir facilmente que a escolha apropriada da função forma é um passo importante para garantir boa precisão nos resultados finais.

Essa função forma tem como condição necessária satisfazer as “condições geométricas de contorno” da estrutura, além de apresentar uma forma semelhante à curva elástica da estrutura. Quando esta última não ocorre, pode-se *inserir uma função ponderada* às séries trigonométricas para que esta se aproxime da configuração da curva elástica da estrutura estudada. As funções trigonométricas e polinomiais são as mais convenientes de serem utilizadas. Os valores aproximados das reações de apoio e das tensões normais resultantes são facilmente calculados aplicando-se o método da energia potencial, que se adapta a análise aproximada de estruturas, quando se torna difícil encontrar uma solução exata.

2. EMPREGO DAS SÉRIES TRIGONOMÉTRICAS

Como mencionado, a equação da curva elástica de certas vigas prismáticas submetidas à flexão, pode ser representada por séries trigonométricas que permitem *amenizar* a solução de certos problemas. Estas séries podem ser associadas às propriedades das séries de Fourier, ou empregando-se somente considerações energéticas elementares. A grande vantagem deste método

aproximado reside no fato de que *uma única expressão* pode ser aplicada ao longo de todo o comprimento.

Vamos considerar que a curva deflexão para uma viga simplesmente apoiada (isostática) possa ser representada por uma função senoidal de Fourier. Então, a *função forma* para este caso pode ser escrita como:

$$v(x) = p_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + p_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} + p_3 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} \dots = \sum p_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (1)$$

cujas condições de contorno são satisfeitas para uma viga simplesmente apoiada ($v=0$, $v'=0$ para $x=0$ e $x=L$) em condições de carregamento qualquer.

Os três primeiros termos da série são representados pelas curvas da Fig. 1, onde p_1 , p_2 , p_3 representam os valores máximos de suas ordenadas e, o índice n indica o número de meias-ondas nas curvas senoidais.

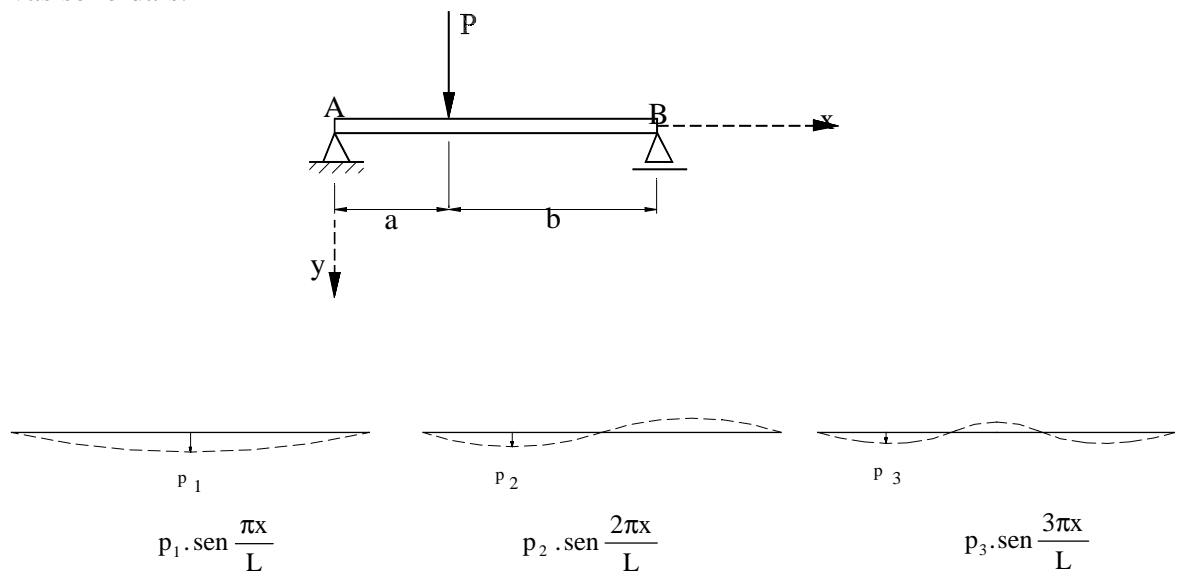


Figura 1. Viga simplesmente apoiada e curvas senoidais para $n=3$ diferentes configurações

Interpretando fisicamente a Fig. 1, observa-se que a Eq. (1) considera como curva de deflexão para a viga, sendo a superposição de curvas senoidais com n diferentes configurações; e, se os coeficientes p_n forem adequadamente determinados, a série dada por essa equação pode ser usada para representar qualquer curva de deflexão.

Fica claro que, quanto maior for o número de termos da série, melhor será a precisão; entretanto, estas séries convergem rapidamente, de tal forma que se obtém uma boa aproximação somando apenas uns poucos termos, e até mesmo, em alguns casos, considerando apenas o primeiro.

Para avaliar os coeficientes p_n , estes coeficientes tem inicialmente que representar a forma de equilíbrio da viga à flexão; então, a sua energia total, composta pelo trabalho interno de deformação U_i e pela energia potencial das cargas, *deve ser mínima*.

Diante de alterações muito pequenas nesta configuração, ocorrerão mudança de valores de alguns coeficientes p_n ; entretanto, o incremento do trabalho interno de deformação dU_i será igual ao trabalho externo dU_e realizado pelas cargas, podendo-se então aplicar o princípio do trabalho virtual. A energia de deformação do sistema poderá ser expressa por :

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} p_n \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} \right]^2 dx \quad (2)$$

Para um deslocamento virtual da viga, uma pequena variação infinitesimal δp_n , é suposta correspondente ao coeficiente p_j ; então, a variação da energia de deformação envolvida é:

$$\delta U = EI \int_0^L \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) dx \quad (3)$$

mas, como:

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (4)$$

e portanto,

$$\delta \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) = -\frac{\pi^2}{L^2} j^2 \sin \frac{j\pi x}{L} \delta p_j \quad (5)$$

Introduzindo as Eqs. (4) e (5) na Eq. (3), obtém-se:

$$\delta U = \frac{\pi^4 EI}{L^4} \int_0^L \left\{ p_1 \sin \frac{\pi x}{L} + \dots + (n)^2 p_n \sin \frac{n\pi x}{L} + \dots \right\} \cdot \left\{ j^2 \cdot \sin \frac{j\pi x}{L} \delta p_j \right\} dx \quad (6)$$

Considerando as propriedades de ortogonalidade das funções $\sin (n\pi x)/L$ e $\sin (j\pi x)/L$, pode ser mostrado por integração direta que:

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot \sin \frac{j\pi x}{L} dx = 0 \quad \text{se } (n \neq j) \quad (7)$$

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot \sin \frac{j\pi x}{L} dx = \frac{L}{2} \quad \text{se } (n = j)$$

então, a Eq. (6) se reduz a:

$$\delta U = \frac{\pi^4 EI}{2L^3} n^4 p_n \delta p_n \quad (8)$$

O trabalho virtual realizado pelas forças externas, neste caso representando o trabalho da força P , será igual ao incremento de energia de deformação da viga, dada por δU :

$$\delta U = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i = P \cdot [\delta v]_{x=a} = P \cdot \sin \frac{n\pi a}{L} \delta p_n \quad (9)$$

Portanto, da Eq. (8) e (9), tem-se:

$$P \cdot \text{sen} \frac{n\pi a}{L} \delta p_n - \frac{\pi^4 EI}{2L^3} n^4 p_n \delta p_n = 0 \quad (10)$$

que produz, o coeficiente genérico p_n :

$$p_n = \frac{2 PL^3}{\pi^4 EI} \frac{1}{n^4} \text{sen} \frac{n\pi a}{L} \quad (11)$$

onde a é a distância da carga P até o apoio esquerdo da viga apoiada. Por substituição da Eq. (11) na Eq. (1) nós obtemos a expressão da curva de deflexão:

$$v(x) = \frac{2 PL^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \text{sen} \frac{n\pi a}{L} \cdot \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (12)$$

Assim, por exemplo, se P atua no ponto médio da viga ($a = L/2$), a eq. (12) torna-se:

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{2 PL^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\text{sen} \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{(3)^4} \text{sen} \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{(5)^4} \text{sen} \frac{5\pi x}{L} \dots \right] = \\ &= \frac{2 PL^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n + 1}{(2n-1)^4} \text{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{L} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

A deflexão resultante é:

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{2 PL^3}{\pi^4 EI} \left[1 + \frac{1}{(3)^4} + \frac{1}{(5)^4} + \dots \right] = \frac{2 PL^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)^4} \right] \quad (14)$$

Como esta série converge muito rapidamente, tomando-se apenas o primeiro termo da série, tem-se:

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL^3}{48,7 EI} \quad (15)$$

que é 1,46% acima do valor exato. Se tomarmos os dois primeiros termos, o denominador torna-se 48,11, com um erro apenas 0,23%. Se for considerada a série completa, que vale $\pi^4/96$, obtém-se o valor exato $PL^3/48EI$.

3. METODOLOGIA E GENERALIZAÇÃO

Como para pequenas deformações é válido o *princípio da superposição de efeitos* e a Lei de Hooke, pode-se estudar qualquer distribuição de cargas superpondo os efeitos. No caso de várias cargas concentradas P_1, P_2, \dots, P_n , basta que sejam somados os valores dos coeficientes genéricos dados pela Eq. (11) aplicado às diferentes cargas. Assim, a expressão dos coeficientes de (11), será:

$$p_n = \frac{2L^3}{\pi^4 EI} \frac{1}{n^4} \left[P_1 \sin \frac{n\pi a_1}{L} + P_2 \sin \frac{n\pi a_2}{L} + \dots \right] \quad (16)$$

No caso de uma carga distribuída qualquer, q , definida pela função $q = q(a)$, desde $a = 0$ até $a = L$, ou ainda pelas funções $q = q_1(a)$, $q = q_2(a)$, ... nos intervalos de 0 a a_1 , de a_1 a a_2 etc, um elemento da viga fica submetido a uma carga $P = q(a)$. Conseqüentemente, pela Eq. (11), obtém-se a seguinte expressão para os coeficientes da Eq. (1) :

$$p_n = \frac{2L^3}{\pi^4 EI} \frac{1}{n^4} \left[\int_0^{a_1} q_1(a) \sin \frac{n\pi a}{L} da + \int_{a_1}^{a_2} q_2(a) \sin \frac{n\pi a}{L} da + \dots \right] \quad (17)$$

Por análise similar, para uma viga de comprimento L , apoiada nas extremidades e submetida a uma carga triangular crescente da esquerda para a direita, em toda a sua extensão, obtém-se a expressão dos coeficientes da eq. (1), como:

$$p_n = \frac{2L^3}{\pi^4 EI} \frac{1}{n^4} \frac{q_{\max}}{L} \int_0^L a \sin \frac{n\pi a}{L} da = \pm \frac{2 q_{\max} L^4}{\pi^5 EI} \frac{1}{n^5} \quad (18)$$

sendo o sinal positivo ou negativo, conforme n seja par ou ímpar, respectivamente.

Para o caso de uma viga apoiada sujeita a vários momentos M_1, M_2, \dots aplicados a distâncias a_1, a_2, \dots da extremidade esquerda de uma viga, tem-se:

$$p_n = \frac{2L^3}{\pi^4 EI} \frac{1}{n^3} \left[M_1 \cos \frac{n\pi a_1}{L} + M_2 \cos \frac{n\pi a_2}{L} + \dots \right] \quad (19)$$

Até agora se utilizou séries trigonométricas no estudo de deflexões em vigas isostáticas simplesmente apoiadas. Entretanto, para uma viga que apresente um número grande de graus de liberdade, será possível aproximar a forma verdadeira da curva elástica a uma curva de deflexão presumível.

Esta provável configuração pode ser expressa por uma *função forma* representada por uma série trigonométrica, que deve conter um ou mais parâmetros de deslocamentos desconhecidos e , que podem ser determinados através da aplicação do *princípio da mínima energia potencial total*.

Como requisito mínimo, essa função forma deve ser escolhida de modo a satisfazer as condições geométricas de contorno da viga, ou seja, as condições relativas às deflexões e rotações devem ser observadas. Quanto mais precisa for a função forma escolhida, melhores serão os resultados dos cálculos. A solução encontrada é sempre um valor aproximado, isto porque essa função *assumida* emprega um número restrito de parâmetros desconhecidos.

Sabe-se que o *conceito de energia potencial* é muito importante em Mecânica Estrutural, uma vez que essa energia pode ser usada em análises aproximadas de estruturas, quando uma solução exata é impraticável. Essa *energia potencial total*, E_p^T , é constituída de duas parcelas: uma que é a energia potencial externa (ou das cargas externas) e , a outra é a de deformação U armazenada na estrutura carregada. Então, a energia potencial total de um sistema estrutural será expressa por:

$$E_p^T = U - \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta_i \quad (20)$$

Admitindo-se que a todas as cargas P_i correspondem a deslocamentos desconhecidos δ_i , obtém-se :

$$\frac{\partial E_p^T}{\partial \delta_i} = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} - P_i \quad (21)$$

Ainda, pelo primeiro teorema de Castigliano, sabe-se que :

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = P_i \quad (22)$$

então, podemos concluir que “a derivada parcial da E_p^T , em relação a qualquer um dos deslocamentos δ_i , será sempre nula”, ou seja:

$$\frac{\partial E_p^T}{\partial \delta_i} = 0 \quad (23)$$

Este resultado pode ser aplicado a cada um dos deslocamentos δ_i formando um “sistema de equações” cujas soluções são os valores dos deslocamentos desconhecidos desejados. Assim, obtém-se n equações simultâneas, que permitem determinar cada um dos deslocamentos $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$; ou seja:

$$\frac{\partial E_p^T}{\partial \delta_1} = 0; \quad \frac{\partial E_p^T}{\partial \delta_2} = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial E_p^T}{\partial \delta_n} = 0 \quad (24)$$

Estas equações representam o denominado “princípio de energia potencial estacionário”, e afirma que a estrutura estará em equilíbrio, quando os deslocamentos forem tais que levem a energia potencial total E_p^T alcançar um valor estacionário. Como usualmente a estrutura está em equilíbrio estável, a energia potencial total é um mínimo, sendo então, denominado “princípio da mínima energia potencial total”.

4. APLICAÇÃO

O procedimento aqui apresentado, embora simples, requer derivações e integrações de funções trigonométricas que podem ser trabalhosas. Para séries com poucos termos, o processamento algébrico realizado à mão não é difícil; no entanto, para séries com vários termos, tal procedimento torna-se laborioso. Desta forma optou-se por executar o procedimento mostrado a seguir utilizando o software Mathematica, o qual realiza todo o processamento algébrico de forma simbólica e numérica, obtendo-se rapidamente as deflexões desejadas.

Convém salientar que, através desse recurso computacional, é possível verificar a convergência da série trigonométrica utilizada como função forma, e facilmente pode-se *acrescentar* termos à série sem nenhum esforço do usuário. Todo trabalho é transferido ao computador que realiza as árduas tarefas de derivação e integração.

Para analisar e ilustrar todo este procedimento vamos supor uma viga, não prismática, estaticamente indeterminada que é submetida a uma carga P , como indicado na Fig. 2, e deseja-se um valor aproximado para a deflexão no ponto de aplicação da carga.

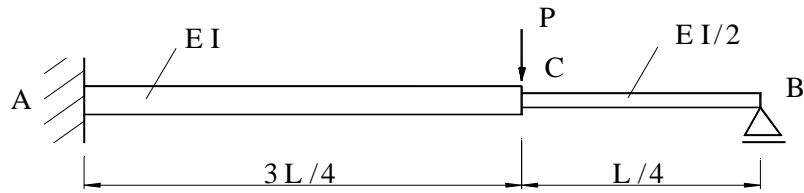


Figura 2. Viga estaticamente indeterminada e de seção variável.

A *função forma* escolhida para a viga acima é:

$$v(x) = \sum_{n=1}^5 p_n \left[1 - \cos \frac{2n\pi x}{L} \right] \frac{1-x}{L} + \sum_{n=1}^5 q_n \left[\sin \frac{2n\pi x}{L} \right] \frac{x}{L} \quad (25)$$

O procedimento para a obtenção da deflexão é mostrado na rotina abaixo, escrita em linguagem do software Mathematica.

```

P=10000
L=4
ee= 200 (10)^9
ii=1,97e-5
ei=ee ii
ei1=ei
ei2=ei/2
v= (p1 (1- Cos[2 Pi x/L]) + p2 (1- Cos[4 Pi x/L]) + p3 (1 - Cos[6 Pi x/L]) + p4 (1 - Cos[8 Pi x/L]) +
p5 (1 - Cos[10 Pi x/L])) ((1-x)/L) + (q1 Sin[2 Pi x/L] + q2 Sin[4 Pi x/L] + q3 Sin[6 Pi x/L] + q4
Sin[8 Pi x/L] + q5 Sin[10 Pi x/L]) (x/L)
d2v=D[v,{x,2}]
U= (ei1/2) Integrate[d2v^2,{x,0,3 L/4}] + (ei2/2) Integrate[d2v^2,{x,3 L/4,1}]
vc=v/.x->3 L/4
W= - P vc
En= U+W
eq1= D[En,p1], eq2= D[En,p2], eq3= D[En,p3],
eq4= D[En,p4], eq5= D[En,p5], eq6= D[En,q1],
eq7= D[En,q2], eq8= D[En,q3], eq9= D[En,q4],
eq10=D[En,q5]
s=Solve[{eq1==0,eq2==0,eq3==0,eq4==0,eq5==0,eq6==0,eq7==0,eq8==0,eq9==0,eq10==0},{p1,
p2,p3,p4,p5,q1,q2,q3,q4,q5}]
v= v/. s
vc = vc/. s
vc=N[vc[[1]]]

```

Adotando-se $P= 10\,000\text{ N}$; $L= 4\text{ m}$; $E= 200\text{ GPa}$ e $I= 1,97 \times 10^{-5}\text{ m}^4$, o erro no valor da deflexão foi 2,1% em relação ao valor exato obtido pela teoria clássica. Adotou-se uma série trigonométrica com cinco termos, como uma presumível função forma, ajustando sua forma a provável curva elástica da viga, através de funções ponderadoras $f(x)= x/L$ e $f(x)=(1-x)/L$. A função (x/L) foi multiplicada pela série senoidal para “amplificar” seu efeito no extremo direito da viga; enquanto que, a função $(1-x)/L$ foi multiplicada pela série cossenoidal para “amplificar” seu efeito na extremidade esquerda da viga. O mesmo problema resolvido com uma série de quatro termos produziu um erro de 2,3%.

5. CONCLUSÕES

Como vimos, podemos determinar os valores aproximados dos esforços reativos, das tensões e das deflexões resultantes através do método apresentado, que com a utilização do software Mathematica, torna-se uma maneira alternativa e rápida, para a resolução de estruturas, quer sejam isostáticas ou estaticamente indeterminadas, para as quais uma solução exata é de difícil obtenção.

Este trabalho desperta ao estudante uma visão clara do emprego de séries trigonométricas para a determinação de deflexões em estruturas e, cria uma poderosa ferramenta a ser utilizada na Análise Estrutural, servindo também de base para o Método dos Elementos Finitos onde as funções pressupostas (função forma) são usadas para representar os deslocamentos de pequenos, porém finitos, elementos em que toda a estrutura é subdividida, para poder ser analisada.

O uso do software Mathematica para a solução do problema permite obter as deflexões de maneira rápida, utilizando as séries trigonométricas com um número grande de termos, o que seria muito trabalhoso se fosse realizado manualmente. Além disso, mostra ao usuário, as vantagens da aplicabilidade de um software na solução de um problema prático.

6. REFERÊNCIAS

- Courbon, J., 1969, “Tratado de Resistência dos Materiais”, vol.II, Aguilar, Madrid.
- Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., 1982, “Mechanics of Materials”, Wadsworth International Group, New York.
- Weaver Jr, W. and Gere, J. M., 1990, “Matrix Analysis of Framed Structures”, Van Nostrand Reinhold, 3rd, New York.
- Ugural, A . C. and Fenster,S.K.,1987, “Advanced Strength and Applied Elasticity”, 2rd Elsevier Science Publishing Co., Inc. , New York.

THE USE OF TRIGONOMETRIC SERIES IN THE BEAMS DEFLECTIONS STUDY

Celso Pinto Morais Pereira

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, SP - Brazil

celpin@feg.unesp.br

José Elias Tomazini

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, SP - Brazil

tomazini@feg.unesp.br

***Abstract:** This work shows how we can choose the adequate function form to the deflections analysis of beams. These functions are represented by trigonometric series that usually presents a fast convergence. This approach supplies a good precision to the exact deflections analysis of beams and, it also offers an important advantage by the fact that a simple expression can be applied along all the beam.*

***keywords:** Deflections, Beams, Trigonometric Series*