



## ANÁLISE DE SENSIBILIDADE QUANTO À DISTORÇÃO DA MALHA DO ELEMENTO FINITO DE CASCA QUADRILATERAL QUADRÁTICO COM REFINAMENTO HIERÁRQUICO

### **Amarildo Tabone Paschoalini**

UNESP Ilha Solteira – Departamento de Engenharia Mecânica  
Av. Brasil Centro, 56 – 15385-000 – Ilha Solteira – SP  
tabone@dem.feis.unesp.br

### **Loir Afonso Moreira**

UNICAMP – FEM – Departamento de Projeto Mecânico  
loir@fem.unicamp.br

### **Silmara Cassola**

USP São Carlos – Departamento de Engenharia Mecânica  
cassola@sc.usp.br

**Resumo.** Este trabalho apresenta um elemento subparamétrico hierárquico baseado na versão  $p$  do método dos elementos finitos para a análise de placas e cascas. O primeiro nível de aproximação da solução é obtido através do elemento finito quadrilateral quadrático de nove nós da família Lagrangeana, baseado na degeneração de um elemento sólido tridimensional e na formulação de Reissner-Mindlin, com integração numérica consistente. Para outros níveis de aproximação, sucessivos refinamentos hierárquicos são usados, objetivando remover a característica de rigidez excessiva do elemento na análise de placas e cascas finas. Tal formulação é aplicada na análise estática de placas e cascas. O objetivo deste trabalho é analisar a sensibilidade quanto à distorção da malha do elemento finito subparamétrico. Exemplos numéricos são apresentados e os resultados obtidos nos exemplos de aplicação são comparados com soluções analíticas e outras técnicas numéricas, disponíveis na literatura.

*Palavras-chave:* elementos finitos, versão  $p$  hierárquica, casca, malha distorcida.

## **1. INTRODUÇÃO**

Embora a análise de estruturas compostas por placas e cascas pelo Método dos Elementos Finitos já se estenda por mais de três décadas, o estabelecimento de um modelo que seja confiável, eficiente e aplicável a qualquer situação (placas e cascas finas ou placas e cascas moderadamente grossas) ainda continua a ser objeto de estudo de muitos autores. Bathe *et al.* (1985 e 1986) resumiram os requisitos que devem ser encontrados no desenvolvimento de um elemento finito confiável e eficiente para análise de casca:

1. o elemento deve satisfazer os requisitos usuais de invariância e convergência (Zienkiewics, 1977);
2. o elemento deve ser formulado sem o uso de uma teoria específica, de maneira que possa ser aplicável em qualquer situação de placa ou casca;
3. o elemento deve ser simples, barato e utilizar, considerando a análise de cascas, cinco ou seis graus de liberdade por nó;

4. o elemento deve ser "numericamente seguro", isto é, não deve conter qualquer modo espúrio, e deve estar livre do efeito de bloqueio;
5. o elemento não deve ser baseado em fatores de ajuste numérico;
6. o elemento deve ser relativamente insensível às distorções geométricas;
7. o elemento deve ter a capacidade de proporcionar soluções precisas e eficientes.

A formulação para análise de casca baseada na degeneração de um elemento sólido tridimensional através da redução de sua dimensão na direção da espessura (Ahmad *et al.*, 1970) tem sido escolhida por um grande número de pesquisadores nos últimos anos com o objetivo de satisfazer os requisitos acima e, baseado nessa formulação, o elemento de nove nós da família Lagrangeana (Fig. (1)) tem sido usado como base para o desenvolvimento de muitos elementos finitos para análise de casca. Em parte, isto se deve às seguintes observações: na análise de tensões no plano o elemento isoparamétrico de nove nós é menos sensível a distorções geométricas que o elemento de oito nós (Cook, 1981 e Verheghe *et al.*, 1986) e, para o caso geral de flexão de placas o elemento de nove nós tem um ótimo desempenho se comparado a outros elementos quadrilaterais lineares, quadráticos e cúbicos (Pugh *et al.*, 1978). Além disso, os elementos de nove nós para análise de cascas são geralmente considerados como vantajosos em casos onde existem grandes variações de tensões, onde as deformações por flexão dominam a solução, e onde a geometria é curva (Park *et al.*, 1986).

Entretanto, é bem conhecido que os resultados obtidos através do elemento de nove nós para análise de cascas apresentam diversas deficiências (Oñate, 1992). A integração exata do elemento quadrilateral quadrático de nove nós exige  $3 \times 3$  pontos de integração na quadratura de Gauss-Legendre para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à flexão e  $3 \times 3$  pontos de integração para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à cortante (*integração numérica consistente*). Os resultados obtidos são excelentes para situações de placas e cascas moderadamente grossas, contudo, com a redução da espessura o elemento torna-se excessivamente rígido e os resultados não tendem àqueles da teoria clássica de Kirchhoff para placas e cascas finas. A *integração numérica reduzida* ( $2 \times 2$  pontos de integração para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à cortante) elimina em muitos casos o efeito de bloqueio na análise de placas e cascas finas, mas pode gerar elementos com modos espúrios facilmente propagáveis em toda malha para várias condições de contorno, que distorcem a solução.

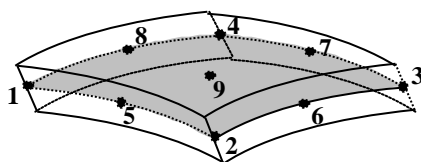


Figura 1. Elemento finito de casca quadrilateral quadrático da família Lagrangeana.

No processo de refinamento  $h$  a malha de elementos é refinada através da diminuição sucessiva do tamanho dos elementos. Neste processo o número e o tipo de funções de interpolação sobre cada elemento permanecem fixos. A utilização deste tipo de refinamento tende a aumentar o custo da análise (novos nós e elementos têm de ser gerados) e produzir erros associados à subdivisão excessiva da malha de discretização.

Ao contrário, no processo de refinamento  $p$  hierárquico o número e a distribuição de nós e elementos sobre a malha discretizada permanecem fixos, no entanto, o número e o grau das funções de interpolação são aumentados progressivamente. As matrizes de rigidez produzidas nos estágios anteriores àquele da aproximação pretendida são iguais e não precisam ser calculadas. A qualidade de aproximação da solução e o custo computacional são vantagens que a versão  $p$  hierárquica de refinamento oferece em relação à versão  $h$ .

Este trabalho apresenta uma formulação do tipo hierárquica, baseada no conceito de aproximação  $p$ . O primeiro nível de aproximação da solução é obtido através do elemento isoparamétrico quadrilateral quadrático de 9 nós da família Lagrangeana, formulado a partir da teoria de Reissner-Mindlin, com integração numérica consistente. Para outros níveis de

aproximação são realizados sucessivos refinamentos hierárquicos com o propósito de retirar a característica de rigidez excessiva do elemento isoparamétrico na análise de placas e cascas finas. O objetivo deste trabalho é analisar a sensibilidade quanto à distorção da malha do elemento finito subparamétrico. Exemplos numéricos são apresentados e os resultados obtidos nos exemplos de aplicação são comparados com soluções analíticas e outras técnicas numéricas, disponíveis na literatura.

## 2. FORMULAÇÃO




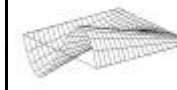

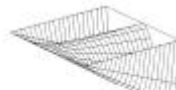








De acordo com Zienkiewicz *et al.* (1971), o campo de deslocamento do elemento de casca é interpolado a partir das funções de forma  $N_i(\xi, \eta)$  quadrilaterais quadráticas, e é dado por:

$$\bar{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \bar{\mathbf{d}}_i + \mathbf{z} \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{\mathbf{v}}_{1i} \cdot \mathbf{a}_i - \mathbf{z} \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{\mathbf{v}}_{2i} \cdot \mathbf{b}_i \quad (1)$$

na qual o deslocamento  $\bar{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{z})$  é um vetor coluna de componentes  $u, v$  e  $w$ , nas direções X, Y e Z, respectivamente, de um sistema de referência global associado ao elemento e, da mesma maneira  $u_i, v_i$  e  $w_i$ , as componentes do deslocamento  $\bar{\mathbf{d}}_i$ . Neste trabalho o campo de deslocamento do elemento de casca será interpolado a partir das funções de forma  $N_i(\xi, \eta)$  quadrilaterais quadráticas de nove nós da família Lagrangeana, portanto  $n=9$ .

O refinamento da expansão quadrática especificada pela Eq. (1) pode ser conseguido adicionando-se a ela funções de forma hierárquicas  $M_{pk}(\xi, \eta)$  de ordem superior a dois (Babuska *et al.*, 1981). As funções  $M_{pk}(\xi, \eta)$  são polinômios de grau  $p$  associados a cada um dos lados do elemento ( $k = 1, 2, 3$  e  $4$ ) ou são polinômios de grau  $p$ , do tipo bolha, associados ao elemento ( $k = 5, 6, 7, \dots$ ). Neste trabalho o refinamento da expansão quadrática foi feito adicionando-se funções de forma hierárquicas de 3º, 4º e 5º graus. As funções de forma utilizadas foram definidas em termos das integrais dos Polinômios de Legendre (Szabo *et al.*, 1991), conforme mostra a Tab. (1).

Tabela 1. Funções de forma hierárquicas de 3º, 4º e 5º graus.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$p = 3$						
$p = 4$						
$p = 5$						

Desta forma o deslocamento  $\bar{\Delta}$  dado pela Eq. (1) para o caso do elemento isoparamétrico, torna-se:

$$\bar{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^9 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \bar{\mathbf{d}}_i + \mathbf{z} \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{\mathbf{v}}_{1i} \cdot \mathbf{a}_i - \mathbf{z} \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{\mathbf{v}}_{2i} \cdot \mathbf{b}_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 M_{pk}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \bar{\mathbf{d}}_{pk} \quad (2)$$

para o caso de elemento paramétrico do tipo hierárquico. Nesta expressão  $\bar{\mathbf{d}}_{pk}$ , de componentes  $a_{pk}$ ,  $b_{pk}$  e  $c_{pk}$  segundo os eixos X, Y e Z do sistema de referência global, é o vetor constituído dos

parâmetros hierárquicos. As funções  $M_{pk}(\xi, \eta)$  quando inseridas na Eq. (1) não modificam o nível de aproximação do elemento, no entanto, a incógnita  $\bar{d}_{pk}$  deixa de ter o significado físico de variável nodal. Na realidade, as componentes de  $\bar{d}_{pk}$  são parâmetros dependentes das incógnitas nodais  $\bar{d}_i$ ,  $a_i$  e  $b_i$ . De uma maneira compacta, a Eq. (2) pode, ainda, ser dada por:

$$\{u\} = [N] \cdot \{a\} \quad (3)$$

na qual  $\{u\}$  é uma matriz constituída dos deslocamentos  $u(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $v(\xi, \eta, \zeta)$  e  $w(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $[N]$  é uma matriz constituída das funções de forma  $N_i(\xi, \eta)$  e  $M_{pk}(\xi, \eta)$ , e  $\{a\}$  é uma matriz constituída dos deslocamentos nodais  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$ ,  $a_i$  e  $b_i$  e dos parâmetros hierárquicos  $a_{pk}$ ,  $b_{pk}$  e  $c_{pk}$ .

De acordo com as hipóteses básicas da teoria de placa e casca (Timoshenko *et al.*, 1959) e em função da sollicitação do elemento, um ponto genérico vai apresentar, segundo o sistema de referência local  $(x', y', z')$ , a ele associado, o seguinte estado de deformação específica:

$$\begin{Bmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ g_{x'y'} \\ g_{y'z'} \\ g_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_{x'}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_{y'}} & 0 \\ \frac{1}{l_{y'}} & \frac{1}{l_{x'}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_{z'}} & \frac{1}{l_{y'}} \\ \frac{1}{l_{z'}} & 0 & \frac{1}{l_{x'}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ou ainda,

$$\{e'\} = [L] \cdot \{u'\} \quad (5)$$

na qual,  $\{u'\}$  corresponde aos deslocamentos segundo o sistema de referência local e  $[L]$  é o operador linear. Os deslocamentos  $\{u'\}$  podem ser dados em função dos deslocamentos globais  $\{u\}$  de acordo com a seguinte expressão:

$$\{u'\} = [q]^T \cdot \{u\} \quad (6)$$

sendo que  $[q]$  é uma matriz (3×3) constituída dos cossenos diretores do sistema de referência local com relação ao sistema de referência global. Pode-se rescrever a Eq. (6) como:

$$\{e'\} = [L] \cdot [q]^T \cdot \{u\} = [L] \cdot [q]^T \cdot [N] \cdot \{a\} \quad (7)$$

Definindo-se como  $[B]$  a matriz que relaciona as deformações específicas com os deslocamentos e as rotações nodais, tem-se que:

$$[B] = [L] \cdot [q]^T \cdot [N] \quad (8)$$

ou, de uma maneira compacta,

$$\{e'\} = [B] \cdot \{a\} \quad (9)$$

na qual  $\{e'\}$  é uma matriz coluna (5×1), constituída das deformações específicas e distorções em um ponto genérico do elemento segundo o sistema de referência local,  $[B]$  uma matriz (5×87) constituída das derivadas das funções de forma e  $\{a\}$  uma matriz coluna (87×1) constituída dos deslocamentos nodais e dos parâmetros hierárquicos.

Aplicando o *Princípio dos Trabalhos Virtuais* e o *Princípio de D'Alembert*, chega-se à determinação das matrizes de rigidez e de massa do elemento, e do seu vetor de carga:

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot |J(x, h)| \cdot dx \, dh \, dz \quad (10)$$

$$[M^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho \cdot [N]^T \cdot [N] \cdot |J(x, h)| \cdot dx \, dh \, dz \quad (11)$$

$$\{f_b^e\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T \cdot \{b\} \cdot |J(\mathbf{x}, \mathbf{h})| \cdot d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{h} \cdot d\mathbf{z} \quad (12)$$

$$\{f_q^e\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T \cdot \{q\} \cdot r_3(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \cdot d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{h} \quad (13)$$

na qual,  $[D]$  é uma matriz quadrada (5×5), simétrica, constituída das constantes elásticas do material,  $|J(\mathbf{x}, \mathbf{h})|$ , o determinante da matriz jacobiano da transformação global-local,  $r_3(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ , o módulo do vetor  $\bar{r}_3(\mathbf{x}, \mathbf{h})$  normal à superfície média. De uma forma compacta, pode-se escrever a equação que representa o equilíbrio do sistema:

$$[M^e] \cdot \{\ddot{a}\} + [K^e] \cdot \{a\} = \{f_q^e\} + \{f_b^e\} + \{f_r^e\} \quad (14)$$

na qual  $[M^e]$  é a matriz de massa do elemento,  $\{\ddot{a}\}$  é um vetor coluna constituído das acelerações nodais e dos parâmetros hierárquicos,  $[K^e]$  é a matriz de rigidez do elemento,  $\{a\}$  é um vetor coluna constituído dos deslocamentos nodais e dos parâmetros hierárquicos,  $\{f_q^e\}$  é o vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento,  $\{f_b^e\}$  é o vetor de carga correspondente à ação das forças de corpo e  $\{f_r^e\}$  o vetor de carga correspondente às cargas concentradas. As matrizes de massa e rigidez do elemento são obtidas usando a Eq. (10) e a Eq. (11) e são respectivamente:

$$[M^e] = \begin{bmatrix} [M_{ij}] & [M_{i,mn}] \\ [M_{kl,j}] & [M_{kl,mn}] \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{ij}] & [K_{i,mn}] \\ [K_{kl,j}] & [K_{kl,mn}] \end{bmatrix} \quad (16)$$

As submatrizes  $[K_{ij}]$  e  $[M_{ij}]$  estão relacionadas com os nós  $i$  e  $j$ , sendo que tanto  $i$  quanto  $j$  variam de 1 a 9; e caracteriza o elemento isoparamétrico. As submatrizes  $[K_{i,mn}]$  e  $[M_{i,mn}]$  estão relacionadas com o nó  $i$ , o grau  $m$  e o lado ou elemento  $n$ , sendo que  $i$  varia de 1 a 9,  $m$  de 3 a 5 e  $n$  de 1 a 6; e caracteriza o acoplamento entre o elemento isoparamétrico e a parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seus lados e elementos. As submatrizes  $[K_{kl,mn}]$  e  $[M_{kl,mn}]$  estão relacionadas com o grau  $k$ , o lado ou elemento  $l$ , o grau  $m$  e o lado ou elemento  $n$ , sendo que  $k$  e  $m$  variam de 3 a 5 e  $l$  e  $n$  variam de 1 a 6; e caracteriza o elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seus lados e elementos. As submatrizes  $[K_{kl,j}]$  e  $[M_{kl,j}]$  estão relacionadas com o nó  $j$ , o grau  $k$  e o lado ou elemento  $l$ , sendo que  $j$  varia de 1 a 9,  $k$  de 3 a 5 e  $l$  de 1 a 6; e caracteriza o acoplamento entre a parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seus lados e elementos e o elemento isoparamétrico.

Na obtenção dos vetores de carga, e das matrizes de rigidez e massa foi realizada a integração numérica nas direções,  $\xi$  e  $\eta$ , utilizando-se o processo da *Quadratura de Gauss-Legendre* (Zienkiewicz *et al.*, 1989) com diferentes números de pontos de integração dependendo do grau das funções de forma.

Encontradas as equações algébricas que descrevem as características de cada elemento do sistema estrutural, o próximo passo é combiná-las para formar um conjunto completo de equações, que governe a reunião de todos os elementos. O procedimento de montagem deste conjunto de equações é baseado no equilíbrio estático em todo o sistema. O processo de resolução do sistema linear consiste na obtenção dos deslocamentos  $\{a\}$ . Para tanto resolve-se, primeiramente, o sistema isoparamétrico:

$$[K_{iso}] \cdot \{a_{iso}\} = \{f_{iso}\} \quad (17)$$

na qual  $[K_{iso}]$  é a matriz de rigidez global do sistema,  $\{a_{iso}\}$  é o vetor relacionado com os deslocamentos nodais e  $\{f_{iso}\}$  é o vetor de carga global do sistema, correspondentes ao sistema isoparamétrico.

Pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da primeira reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquicas de terceiro, quarto e quinto graus:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] & [K_{iso,h4}] & [K_{iso,h5}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] & [K_{h3,h4}] & [K_{h3,h5}] \\ [K_{h4,iso}] & [K_{h4,h3}] & [K_{h4}] & [K_{h4,h5}] \\ [K_{h5,iso}] & [K_{h5,h3}] & [K_{h5,h4}] & [K_{h5}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_{iso}\} \\ \{a_{h3}\} \\ \{a_{h4}\} \\ \{a_{h5}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{iso}\} \\ \{f_{h3}\} \\ \{f_{h4}\} \\ \{f_{h5}\} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

na qual  $[K_{h3}]$ ,  $[K_{h4}]$  e  $[K_{h5}]$ , são matrizes de rigidez globais do sistema,  $\{a_{h3}\}$ ,  $\{a_{h4}\}$  e  $\{a_{h5}\}$ , são os vetores relacionados com os parâmetros hierárquicos e  $\{f_{h3}\}$ ,  $\{f_{h4}\}$  e  $\{f_{h5}\}$ , são os vetores de carga globais do sistema, correspondentes aos sistemas hierárquico para a primeira reanálise (3º grau), para a segunda reanálise (4º grau) e para a terceira reanálise (5º grau), respectivamente.

### 3. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos a partir do elemento finito hierárquico proposto para placas e cascas com algumas configurações de condições de contorno e relações entre espessura e dimensão característica. Foi feita, ainda, além da comparação dos resultados obtidos nas análises isoparamétrica ( $p=2$ ) e hierárquica de 3º grau ( $p=3$ ), 4º grau ( $p=4$ ) e 5º grau ( $p=5$ ), a comparação dos resultados obtidos com os elementos finitos **9URI**, isoparamétrico quadrilateral quadrático de nove nós com integração totalmente reduzida, e **Shell93**, isoparamétrico quadrilateral quadrático de oito nós com integração totalmente reduzida (Ahmad *et al.*, 1970, Cook, 1981) disponível no "software" comercial ANSYS 5.4. Todos os resultados obtidos com os vários elementos finitos descritos acima foram comparados com os obtidos analítica ou experimentalmente disponíveis na literatura.

Na prática raramente se encontram malhas "bem comportadas" e para avaliar a sensibilidade do elemento proposto quanto à distorção da malha, foi usada uma malha de discretização distorcida (Fig. (2)) adaptada da proposta em White *et al.* (1989).

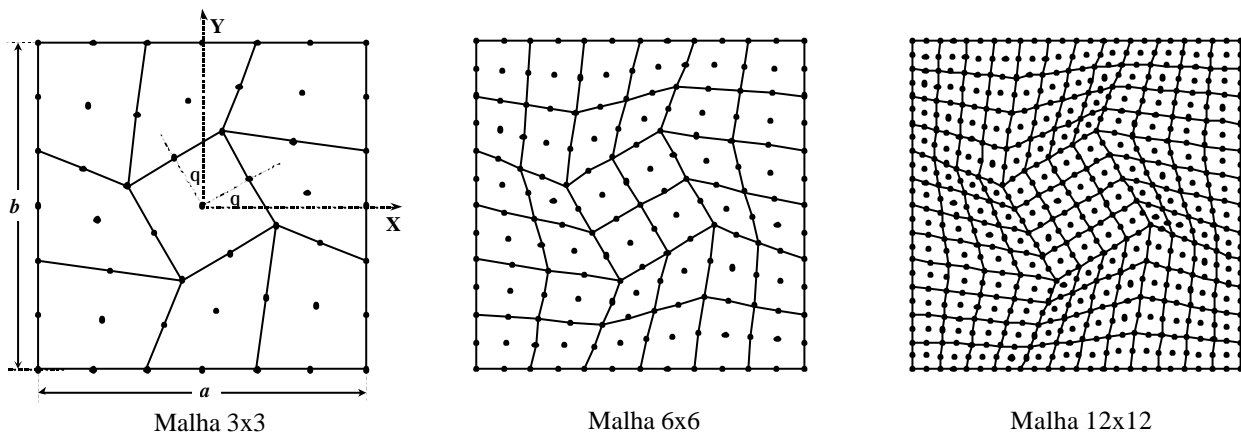
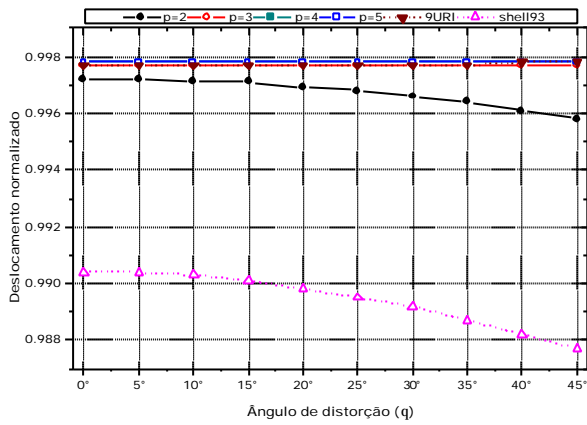


Figura 2. Malha de discretização com ângulo de distorção  $\theta$ .

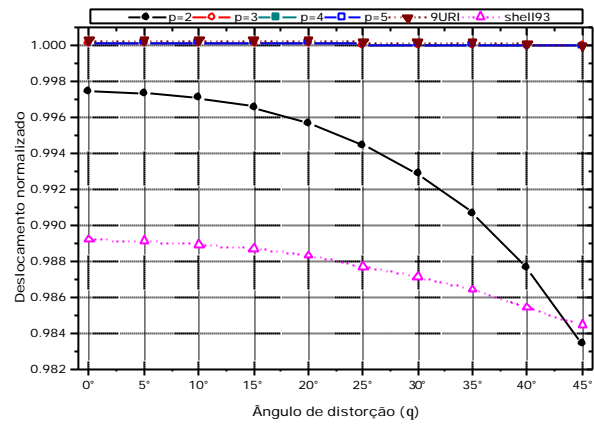
#### 3.1. Placa quadrada simplesmente apoiada nos lados com carga distribuída senoidal

Em função da simetria geométrica e de carregamento modelou-se apenas um quarto da placa com malha de discretização distorcida de 6x6 elementos para as relações entre espessura e dimensão característica:  $t/a = 0.1$  (placa moderadamente grossa) e  $t/a = 0.01$  (placa fina).

Apresenta-se o deslocamento normalizado no centro da placa quadrada ( $w/w_{exato}$ ). O resultado  $w_{exato}$  é obtido a partir da *Teoria da Elasticidade Tridimensional* (Timoshenko *et al.*, 1959), que, neste caso, fornece a solução exata, tanto para placas finas, como para placas moderadamente grossas. A Fig. (3) apresenta o deslocamento normalizado no centro da placa discretizada com vários ângulos de distorção ( $\theta=0^\circ$  representa a malha de discretização regular) para o elemento finito proposto com seus refinamentos ( $p=2$ ,  $p=3$ ,  $p=4$  e  $p=5$ ) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).



$t/a = 0.1$  (placa moderadamente grossa)



$t/a = 0.01$  (placa fina)

Figura 3. Deslocamento normalizado no centro da placa discretizada com vários ângulos de distorção  $\theta$ .

### 3.2. Cilindro puncionado com carga concentrada unitária

O problema do cilindro puncionado (Fig. (4)) representa um teste severo para avaliar a habilidade do elemento finito de casca representar estados complexos de tensão axial (tensão de membrana) e tensão de flexão. Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um oitavo do cilindro, utilizando malhas de discretização de  $6 \times 6$  e  $12 \times 12$  elementos.

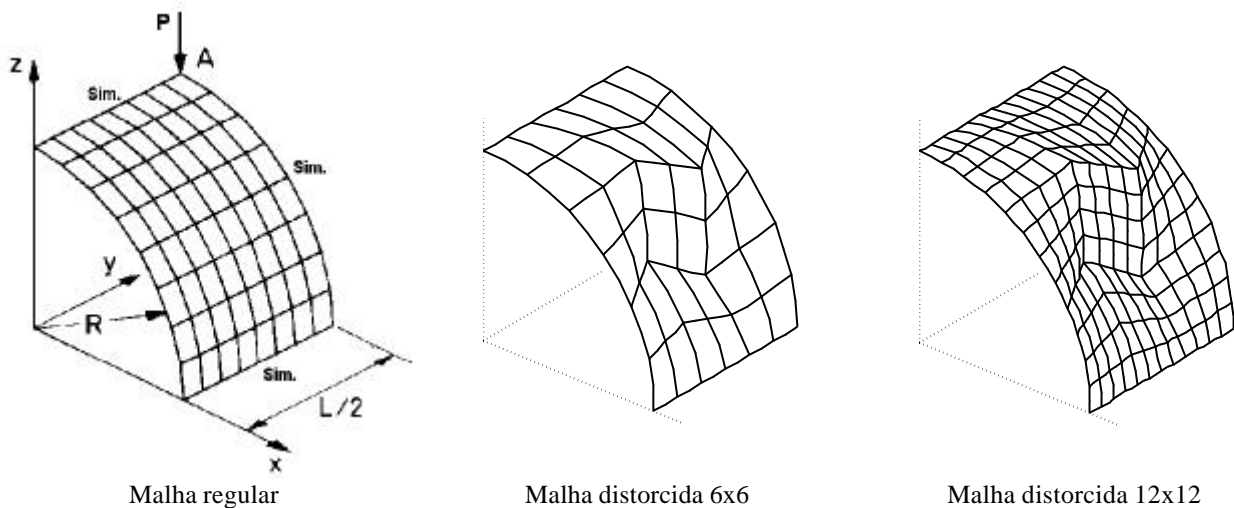
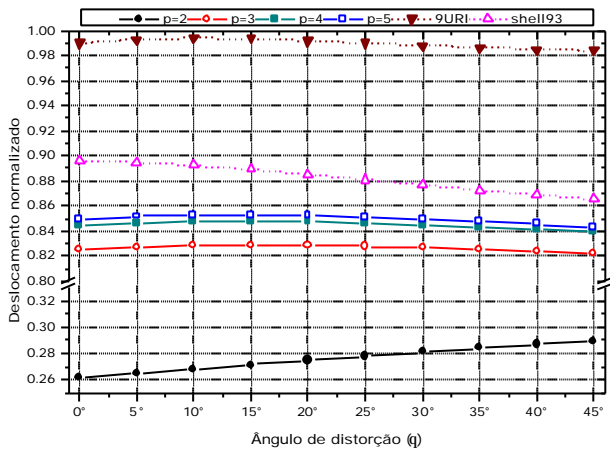


Figura 4. Cilindro puncionado com carga concentrada unitária.

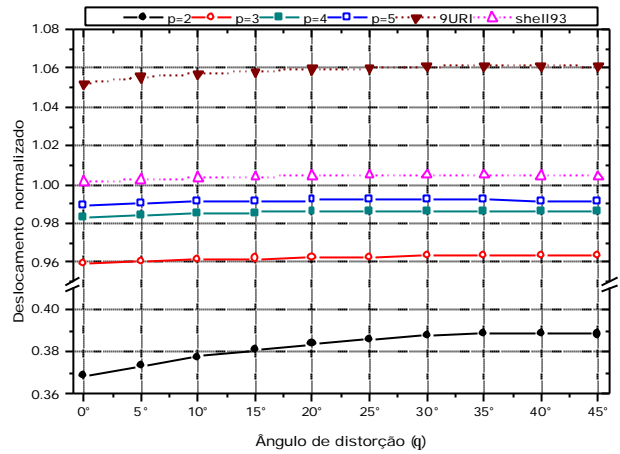
Apresentam-se os deslocamentos normalizados ( $w/w_{exato}$ ) do cilindro puncionado. O resultado  $w_{exato}$  é obtido analiticamente (Flügge, 1962).

Apresentam-se os deslocamentos normalizados do cilindro puncionado suportado por diafragmas rígidos em suas extremidades para as relações entre espessura e raio de curvatura  $t/R=0.01$  (Fig. (5)) e  $t/R=0.002$  (Fig. (6)), e também, os deslocamentos normalizados do cilindro puncionado engastado em suas extremidades para as relações entre espessura e raio de curvatura  $t/R=0.01$  (Fig. (7)) e  $t/R=0.002$  (Fig. (8)).

As Figuras (5-8) apresentam, de acordo com o sistema de referência global apresentado na Fig. (4), os deslocamentos normalizados (Flügge, 1962)  $w_A$  do cilindro puncionado discretizado com vários ângulos de distorção ( $\theta=0^\circ$  representa a malha de discretização regular) para o elemento finito proposto com seus refinamentos ( $p=2$ ,  $p=3$ ,  $p=4$  e  $p=5$ ) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).

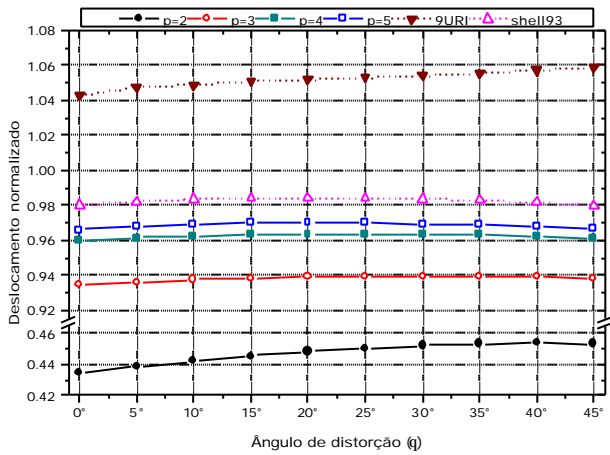


Malha 6x6 -  $t/R=0.01$

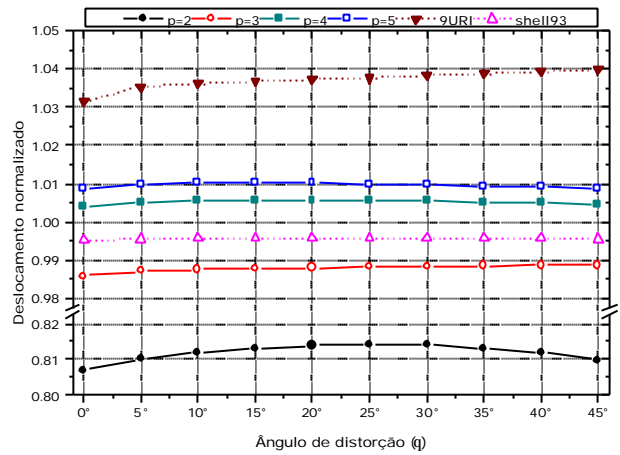


Malha 12x12 -  $t/R=0.01$

Figura 5. Deslocamento normalizado do cilindro puncionado ( $t/R=0.01$ ) suportado por diafragmas rígidos em suas extremidades com vários ângulos de distorção  $\theta$ .

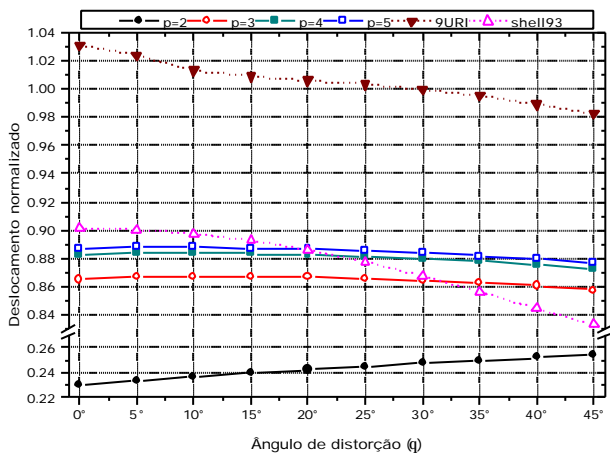


Malha 6x6 -  $t/R=0.002$

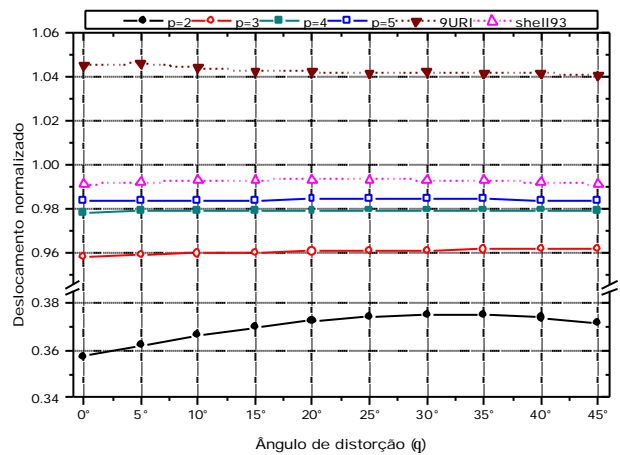


Malha 12x12 -  $t/R=0.002$

Figura 6. Deslocamento normalizado do cilindro puncionado ( $t/R=0.002$ ) suportado por diafragmas rígidos em suas extremidades com vários ângulos de distorção  $\theta$ .



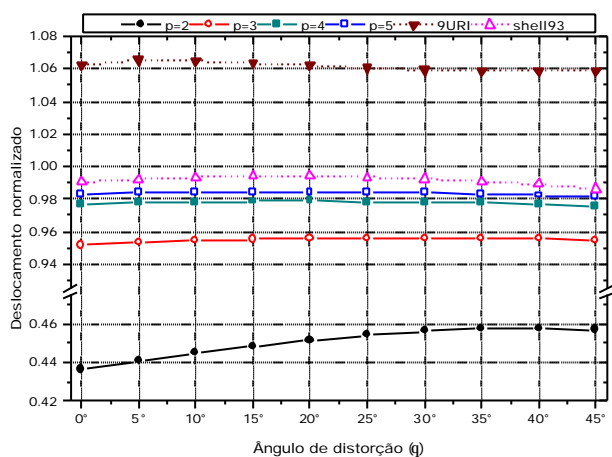
Malha 6x6 -  $t/R=0.01$



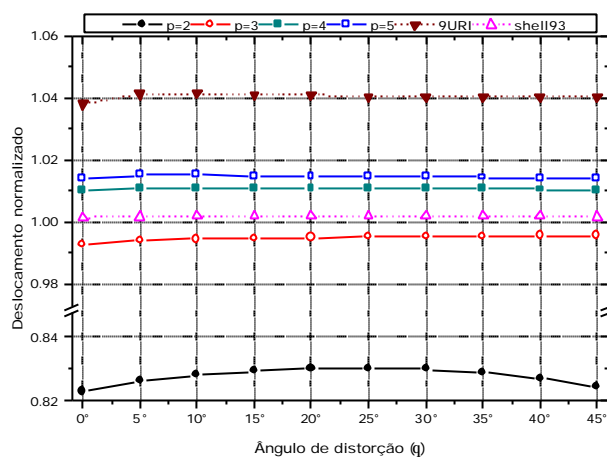
Malha 12x12 -  $t/R=0.01$

Figura 7. Deslocamento normalizado do cilindro puncionado ( $t/R=0.01$ ) engastado em suas extremidades com vários ângulos de distorção  $\theta$ .





Malha 6x6 -  $t/R=0.002$



Malha 12x12 -  $t/R=0.002$

Figura 8. Deslocamento normalizado do cilindro puncionado ( $t/R=0.002$ ) engastado em suas extremidades com vários ângulos de distorção  $\theta$ .

#### 4. CONCLUSÕES

A partir dos resultados dos exemplos numéricos, verifica-se que o refinamento da solução do elemento isoparamétrico ( $p=2$ ), através da introdução de polinômios de terceiro ( $p=3$ ), quarto ( $p=4$ ) e quinto ( $p=5$ ) graus, apresenta excelentes resultados.

Os resultados obtidos com os refinamentos hierárquicos  $p=3$ ,  $p=4$  e  $p=5$  com malha distorcida ( $\theta = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots, 45^\circ$ ) são praticamente idênticos, diferenças menores que 0.01%, aos obtidos com malha regular ( $\theta = 0^\circ$ ). Os resultados obtidos com os elementos finitos 9URI e Shell93 com malha distorcida apresentaram pequenas variações, menores que 0.05%, quando comparados com os resultados obtidos com malha regular.

Considerando os exemplos numéricos analisados, pode-se dizer que o elemento subparamétrico proposto é praticamente insensível quanto à distorção da malha.

#### 5. REFERÊNCIAS

- Ahmad, S., Irons, B. M., Zienkiewicz, O. C., 1970, "Analysis of thick and thin shell structures by curved elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol.3, p.419-451.
- Babuska, I., Szabo, B.A. & Katz, I.N., 1981, "The p-version of the finite element method", SIAM J. Num. Anal., Vol.21, No.6, pp.1180-1207.
- Banerjee, U., Suri, M., 1992, "The effect of numerical quadrature in the p-version of the finite element method", Math. Comput., Vol.59, No.199, pp.1-20.
- Bathe, K.J. & Dvorkin, E.N., 1985, "A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.21, pp.367-383.
- Bathe, K.J. & Dvorkin, E.N., 1986, "A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.22, pp.697-722.
- White, D.W, Abel, J.F., 1989, "Testing of shell finite element accuracy and robustness", Finite Elements in Analysis and Design, Vol.6, pp.129-151.
- Cook, W.A., 1981, "The effect of geometric shape on two-dimensional finite elements", CAFEM 6, Proc. 6th Int. Seminar on Computacional Aspects of the FEM, Paris.
- Flügge, N., 1962, "Stresses in shells", Springer-Verlag.
- Oñate, E., 1992, "Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos - análisis estático lineal", CIMNE, Barcelona.
- Park, K.C. Stanley, G.M., 1986, "A curved  $C^\circ$  shell element based on assumed natural-coordinate strains", J. Appl. Mech., Vol.53, pp.278-290.

- Pugh, E., Hinton, E., Zienkiewicz, O.C., 1978, "A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.12, pp.1959-1979.
- Szabó, B.A. and Babuska, I., 1991, "Finite Element Analysis", Wiley-Interscience, New York.
- Timoshenko, P. & Woinowsky-Krieger, S., 1959, "Theory of plates and shells", 2ed., Kogakusha: McGraw-Hill.
- Verheghe, B. & Powell, 1986, "Control of zero-energy in 9-node plane element", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.23, pp.863-869.
- Zienkiewicz, O.C. & Taylor R.L., 1989, "The finite element method", 4ed., London: McGraw-Hill.
- Zienkiewicz, O.C., 1977, "The finite element method", 3rd ed., McGraw-Hill, New York.
- Zienkiewicz, O. C., Too J. & Taylor R. L., 1971, "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells", International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol.3, pp.375-390.

## **SENSITIVITY ANALYSIS TO DISTORTED MESH IN THE HIERARCHICAL QUADRILATERAL QUADRATIC SHELL FINITE ELEMENT**

### **Amarildo Tabone Paschoalini**

UNESP Ilha Solteira – Departamento de Engenharia Mecânica  
Av. Brasil Centro, 56 – 15385-000 – Ilha Solteira – SP  
tabone@dem.feis.unesp.br

### **Loir Afonso Moreira**

UNICAMP – FEM – Departamento de Projeto Mecânico  
loir@fem.unicamp.br

### **Silmara Cassola**

USP São Carlos – Departamento de Engenharia Mecânica  
cassola@sc.usp.br

***Summary.** The paper presents a subparametric hierarchical finite element based on the p-version concept for the analysis of plates and shells. The first level of approximation for the solution is obtained through the isoparametric quadrilateral quadratic nine-node Lagrangean shell finite element, based on the degeneration of three-dimensional solid element and the Reissner-Mindlin's formulation, with consistent numerical integration. For other approximation levels, successive hierarchical refinements are used, aiming to remove the characteristic of excessive rigidity of the isoparametric element in the analysis of thin plates and shells. Such formulation is applied to static analysis of plates and shells. Numerical examples are presented to show the accuracy, efficiency and advantages of present formulation. The objective of this work is the sensitivity analysis to distorted mesh in the hierarchical refinements of 3rd, 4th and 5th degrees. Numerical results obtained for the application examples are compared with analytical solutions and other numerical techniques, available in the open literature.*

**Keywords:** finite element, hierarchical p-version, numerical integration, shell, distorted mesh.