



## DESEMPENHO DO ESQUEMA WILSON- $\theta$ EM PROBLEMAS DE ELASTODINÂMICA ESCALAR FORMULADOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM DUPLA RECIPROCIDADE

**Gustavo Adolfo Velázquez Castillo**

Universidade Federal do Espírito Santo – DEM – PPGEM – Av. Fernando Ferrari, s/n.- Vitória – ES – Brazil velaznet@bol.com.br

**Carlos Friedrich Loeffler Neto**

Universidade Federal do Espírito Santo – DEM – PPGEM – Av. Fernando Ferrari, s/n.- Vitória – ES – Brazil. loeffler@npd.ufes.br

**Resumo.** *O Método dos Elementos de Contorno apresenta algumas limitações na abordagem de casos fisicamente não homogêneos e com cargas ou fontes distribuídas no domínio, entre os quais se incluem os problemas dinâmicos, devido à força de inércia. Diferentes aproximações foram desenvolvidas para resolver este problema. A mais difundida é a Dupla Reciprocidade, que consiste basicamente na utilização de funções auxiliares que facilitem a transformação de integrais de domínio em outras de contorno. Em problemas de impacto, o controle dos altos modos de vibração demanda ainda grande atenção dos pesquisadores, pois devido à formulação mista, a influência destes modos, geralmente mal representados, pode distorcer significativamente o cálculo das tensões. Inicialmente foram implementados algoritmos que controlam o amortecimento fictício exclusivamente pela magnitude do passo de integração, tal como o algoritmo de Houbolt; porém, o aumento do passo de integração geralmente acarreta significativas perdas na precisão. Com a finalidade de aprimorar a resposta das tensões realizaram-se diversos testes com algoritmos que possuem controle paramétrico do amortecimento fictício, tais como Diferença Central Incondicionalmente Estável, HHT-**a** (Método **a**), CHL-**b** e Wilson-**q**. O presente trabalho apresenta os resultados obtidos através do algoritmo de melhor desempenho: Wilson-**q**. Avaliou-se a qualidade da resposta através da simulação de dois exemplos da dinâmica escalar, examinando as influências do refinamento da malha, do passo de integração e do parâmetro **q**.*

**Palavras-chave:** *Elastodinâmica escalar, Métodos Numéricos, Método dos Elementos de Contorno, Dupla Reciprocidade*

### 1. INTRODUÇÃO

A utilização da Dupla Reciprocidade, uma técnica do MEC inicialmente idealizada para a resolução de problemas de vibração livre (Nardini e Brebbia, 1982), permite a obtenção de um sistema de equações matriciais de forma análoga à resultante da aplicação do MEF, com a diferença de que nenhuma integração no domínio é efetuada. Por outro lado, o avanço temporal no MEC exige a utilização de esquemas portadores de amortecimento fictício, capazes de filtrar a presença de modos elevados mal caracterizados que distorcem significativamente a qualidade das respostas, principalmente no caso das tensões. Nos casos mais comuns da dinâmica estrutural, os modos mais altos não participam da solução e sua eliminação em nada prejudica a resposta. O problema passa a ser crítico quando a resposta de fato possui um conteúdo modal mais elevado, como os casos transientes relacionados ao impacto e à propagação de ondas (Loeffler et al, 1991), pois a inclusão de amortecimento geralmente acarreta diminuição na precisão das respostas.

Neste trabalho serão apresentados os resultados concernentes a dois problemas escalares bidimensionais submetidos a carga de impacto. A escolha deste tipo de sollicitação é importante para avaliação do desempenho do método, pois a resposta do carregamento é de difícil representação, especialmente na avaliação das tensões.

## 2. EQUAÇÕES BÁSICAS

Considere a equação que governa a propagação de ondas em meios elásticos homogêneos, dada por:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = 0 \quad (1)$$

Onde  $u$  é o deslocamento e  $c$  é a velocidade de propagação da onda. Os sistemas são constituídos de um domínio  $\Omega(X)$ , onde  $X$  representa as variáveis espaciais do campo, definido por um contorno  $\Gamma(X)$ , sujeito às seguintes condições:

$$u(X, t) = \bar{u}(X, t) \quad \text{em } \Gamma_u(X) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(X, t)}{\partial n} = \frac{\partial \bar{u}(X, t)}{\partial n} = \bar{q}(X, t) \quad \text{em } \Gamma_q(X) \quad (3)$$

De modo geral,  $\Gamma_u(X)$  é a parte do contorno pertencente a  $\Gamma(X)$  onde são prescritas as condições de contorno essenciais (deslocamentos); de forma complementar  $\Gamma_q(X)$  representa as regiões onde são conhecidas as condições de contorno naturais associadas às forças de superfície. A característica dinâmica do problema requer condições iniciais em  $\Omega(x)$  do tipo:

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x) \quad (4)$$

## 3. FORMULAÇÃO INTEGRAL BÁSICA DO MEC

Inicialmente, escreve-se a equação (1) na forma integral, ponderada pela solução fundamental  $u^*(\xi; x)$ . Então, tem-se:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} u \ddot{u}^* d\Omega \quad (5)$$

Por conveniência, utilizou-se a notação indicial e omitiram-se os argumentos. O lado esquerdo da equação (5) tem um desenvolvimento analítico bem conhecido na literatura (**Loeffler, 1988**), que transforma a integral de domínio em integrais de contorno. A função  $u^*(\xi; x)$ , denominada solução fundamental, é a solução em um domínio infinito de uma equação de Poisson com termo fonte concentrado, representado por uma função delta de Dirac em  $X = \xi$ . Para problemas bidimensionais:

$$u^*(\mathbf{x}; X) = -\frac{1}{2p} \ln r(\mathbf{x}; X) \quad (6)$$

Sendo  $r(\xi; X)$  a distância euclidiana entre o ponto  $\xi$  de aplicação de carga, denominado ponto forte, e um ponto  $X$  genérico do domínio, chamado ponto campo. Integrando-se por partes o lado esquerdo da equação (5), aplicando-se o Teorema da Divergência e utilizando-se as propriedades da função delta de Dirac, chega-se à seguinte expressão:

$$C(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma = -\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega \quad (7)$$

Mais detalhes em relação ao procedimento matemático utilizado pode ser obtido nas referências tradicionais sobre o MEC, tais como (Brebbia, 1978) e (Brebbia et al, 1984).

#### 4. APLICAÇÃO DA DUPLA RECIPROCIDADE

A integral de domínio do lado direito da equação (7) pode ser aproximada através de integrais de contorno utilizando o método da Dupla Reciprocidade (Partridge et al, 1992). Primeiramente, representa-se o deslocamento  $u$  por uma soma finita de funções, na forma:

$$\ddot{u}(X, t) \cong \ddot{\mathbf{a}}^j(t) F^j(X), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

Tal procedimento assemelha-se a uma separação de variáveis, onde as funções  $F^j$  são arbitrárias. Uma opção adequada consiste na distância euclidiana entre dois pontos, comumente denominada função radial simples. Conseqüentemente, a integral de domínio pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega \cong \ddot{\mathbf{a}}^j \int_{\Omega} F^j u^* d\Omega \quad (9)$$

Introduzindo-se funções  $\psi^j(X)$ , que são primitivas de  $F^j(X)$ , tais que:

$$\mathbf{y}_{,ii}^j = F^j \quad (10)$$

e substituindo-se a equação (10) na equação (9), pode-se efetuar operações análogas àquelas realizadas anteriormente para a equação de Laplace. Assim, após elaborado procedimento matemático:

$$\int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega \cong \ddot{\mathbf{a}}^j \left[ -C(\mathbf{x}) \mathbf{y}^j(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \mathbf{y}^j q^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{h}^j u^* d\Gamma \right] \quad (11)$$

$$\text{Onde } \mathbf{h}^j = \mathbf{y}_{,i}^j n_i = \frac{\partial \mathbf{y}^j}{\partial n} \quad (12)$$

Finalmente tem-se a forma integral completa da equação de governo escrita em termos de integrais de contorno:

$$C(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma = \left[ C(\mathbf{x}) \mathbf{y}^j(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \mathbf{y}^j q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{h}^j u^* d\Gamma \right] \frac{\ddot{\mathbf{a}}(t)}{c^2} \quad (13)$$

No seguinte passo efetua-se a divisão do contorno  $\Gamma(\mathbf{x})$  em elementos discretos, em cada um dos quais os parâmetros do problema são considerados constantes, lineares ou quadráticos. Aqui será considerada apenas a formulação para elementos constantes. Ressalta-se que além dos deslocamentos  $u$  e as forças de superfície  $q$  serem considerados constantes ao longo de cada elemento, o mesmo ocorre com as funções  $\mathbf{y}^j$  e  $\mathbf{h}^j$ , por simplicidade, pois poderiam ser calculados exatamente. Assim, a equação (13) pode ser escrita para cada elemento do contorno gerando um conjunto de equações que, utilizando a notação matricial resulta em:

$$[H] [u] - [G] [q] = \frac{1}{c^2} \left\{ [H] [\mathbf{y}] - [G] [\mathbf{h}] \right\} [\ddot{\mathbf{a}}] \quad (14)$$

Escolhendo-se um número de funções  $F^j$  igual ao número de nós de discretização, a função  $\ddot{\mathbf{a}}$  pode ser substituída e escrita em termos de  $\ddot{u}$ , de acordo com a equação (8):

$$[\ddot{\mathbf{a}}] = [F]^{-1} [\ddot{\mathbf{u}}] \quad (15)$$

Definindo-se:

$$[M] = \frac{1}{c^2} \{ [G] [\mathbf{h}] - [H] [\mathbf{y}] \} [F]^{-1} \quad (16)$$

Finalmente obtém-se um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, que pode ser escrito da seguinte maneira:

$$[M] [\ddot{\mathbf{u}}] + [H] [\mathbf{u}] = [G] [\mathbf{q}] \quad (17)$$

## 5. DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL COM O ALGORITMO DE WILSON-q

Nos problemas de propagação de ondas, normalmente a discretização temporal e o posterior avanço no tempo são feitos através de métodos de integração direta. Estes métodos buscam definir uma relação adequada, que permita calcular valores futuros a partir de resultados anteriores de uma forma consistente. Assim, enquanto a solução exata satisfaz a equação diferencial em qualquer instante  $t \in [0, t_f]$ , para a solução aproximada deseja-se satisfazer essa equação em instantes discretos,  $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_f$  (Loula et al, 1982). O intervalo de tempo  $\Delta t$  é denominado passo de integração.

No esquema Wilson- $\theta$  considera-se que a aceleração varia linearmente num intervalo estendido de cálculo  $\Delta s = \theta \Delta t$ . No MEF, valores de  $\theta > 1,37$  tornam o esquema incondicionalmente estável. Este esquema propõe o seguinte (Bathe, 1982):

$$u_s = u_n + \Delta s \dot{u}_n + \frac{\Delta s^2}{3} \ddot{u}_n + \frac{\Delta s^2}{6} \ddot{u}_s \quad (18)$$

$$\dot{u}_s = \dot{u}_n + \Delta s \ddot{u}_n + \frac{\Delta s}{2} \ddot{u}_s \quad (19)$$

Isolando  $\ddot{u}_s$  da equação (18) e substituindo na equação (17), caracterizada no instante “s”, obtém-se o sistema matricial final para o avanço no tempo da seguinte maneira:

$$\left[ H + \frac{6}{\Delta s^2} M \right] u_s = G q_s - M \left[ \frac{6}{\Delta s^2} u_n + \frac{6}{\Delta s} \dot{u}_n + 2 \ddot{u}_n \right] \quad (20)$$

Resolvendo esta última equação obtém-se  $u_s$  e através da equação (18) obtém-se  $\ddot{u}_s$ . A aceleração no final do passo de integração  $\Delta t$  ( $u_{n+1}$ ) é obtida por interpolação linear entre o valor de  $\ddot{u}_s$  e  $\ddot{u}_n$ , considerando o intervalo definido por  $\theta$ . Com esse valor da aceleração e utilizando expressões semelhantes a (18) e (19) com o intervalo  $\Delta t$ , determinam-se  $u_{n+1}$  e  $\dot{u}_{n+1}$ , que serão utilizados como condição inicial para o novo instante de cálculo.

## 6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

O desempenho deste esquema junto ao MEC é estudado a partir da simulação da resposta dinâmica de duas barras, a primeira de seção uniforme e outra de seção linearmente variável, solicitadas axialmente por uma carga de impacto constante aplicada permanentemente ao longo do tempo.

## 6.1. Barra de seção constante

As características geométricas são apresentadas na Fig. (1). Embora aparentemente simples, a solução numérica deste problema é difícil, pois há participação de todos os modos de vibração (Loeffler, 1988). Nas simulações numéricas, o contorno foi discretizado através de 18, 36 e 72 elementos. Foi analisada, também, a influência da inclusão de pólos (pontos internos de interpolação) na precisão dos resultados. Esta mesma figura mostra algumas das malhas utilizadas nas simulações. Outras discretizações além das mostradas sempre seguiram o mesmo padrão de regularidade.

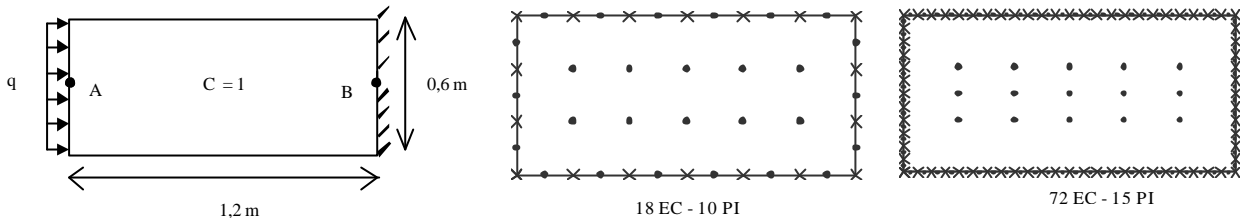


Figura 1. Características geométricas e algumas das malhas utilizadas para discretização.

Em problemas onde a quantidade de modos naturais excitados pelo carregamento é reduzida, a escolha do passo de integração é feita através da avaliação do período do modo mais elevado que efetivamente participa da solução. No entanto em problemas de propagação ondas, onde elevado número de modos naturais é excitado, existe dificuldade na identificação de todos eles. Portanto é geralmente mais efetivo utilizar as considerações feitas junto ao método de Diferenças Finitas aplicadas junto ao MEF para estabelecer um passo apropriado para a análise [Hughes, 1987]. Este valor do passo é definido pela seguinte expressão:

$$\Delta t_{recom} = \frac{\Delta L_{min}}{c} \quad (21)$$

Onde  $\Delta t_{recom}$  é o passo recomendado,  $\Delta L_{min}$  é o menor elemento de contorno utilizado na discretização e  $c$  é a velocidade de propagação da onda.

Inicialmente buscou-se validar os valores dos passos e de  $\theta$  propostos no MEF realizando experiências com  $\Delta t = 0,5, 1, \text{ e } 2$  s nas malhas de 72, 36 e 18 EC respectivamente e utilizando-se  $\theta = 1,4$ . Para as malhas de 18 e 36 EC foi possível realizar a integração nestas condições, mas na malha de 72 EC a integração foi possível apenas a partir de  $\theta = 1,6$ . Os resultados, apresentados na Fig. (2), mostram excessivo arredondamento da resposta em deslocamentos para a malhas de 18 EC, evidenciando-se a quantidade inadequada de amortecimento fictício juntamente com o conteúdo modal insuficiente, resultante do reduzido número de graus de liberdade. Na malha de 36 EC, estes erros são consideravelmente corrigidos e na malha de 72 EC não foi verificada nenhuma melhoria em relação à malha de 36 EC, nestas condições. É interessante notar que no primeiro ciclo da onda os erros foram bastante reduzidos, inclusive na malha de 18 EC, apesar da presença de maiores erros no período e na amplitude quando comparados com resultados das malhas mais refinadas. No caso das tensões, verifica-se que os passos utilizados, assim como os valores de  $\theta$ , são inadequados, especialmente na malha mais pobre (18EC) e na mais refinada (72 EC). Na primeira o valor do amortecimento introduzido é excessivo e na segunda é insuficiente para a elevada quantidade de modos de vibração introduzidos no modelo.

Além do refinamento da malha, as otimizações do passo e do parâmetro  $\theta$ , parâmetros que regulam o amortecimento fictício, permitem obter maior efetividade na melhora do resultado. Na Fig. (3), por exemplo, pode-se observar o efeito destes fatores na representação do deslocamento, utilizando-se malhas de 18 e 72 EC e valores de  $\Delta t$  e  $\theta$  distintos daqueles propostos para o MEF. Nota-se boa concordância entre os resultados numérico e analítico, principalmente no primeiro ciclo da onda. A malha de 18 EC apresenta maiores erros no período.

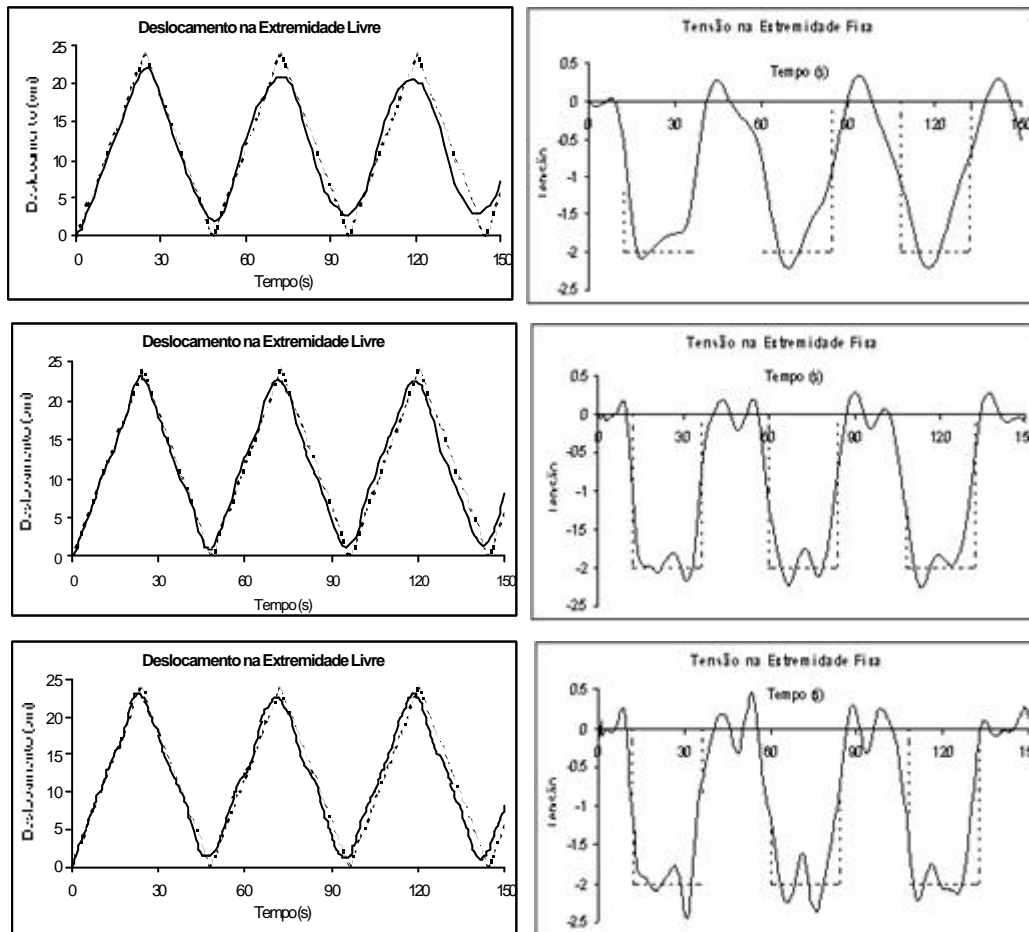


Figura 2 – Deslocamentos e tensões com passos calculados através de (21). Malhas de 18, 36 e 72 EC, sem PI e  $\Delta t = 2, 1$  e  $0,5$  s respectivamente.

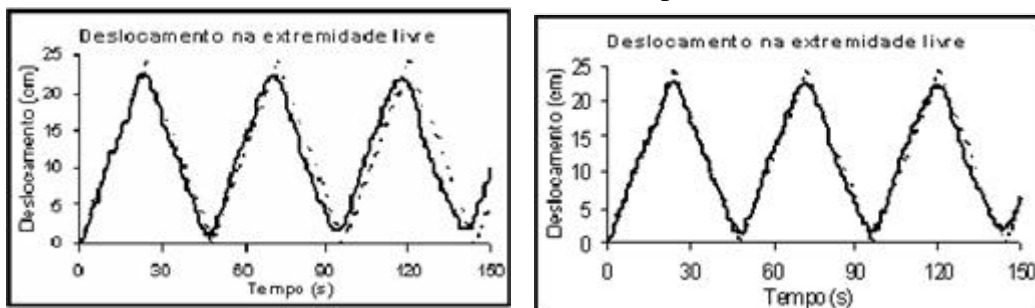


Figura 3. Efeito da alteração dos fatores  $\Delta t$  e  $\theta$  no cálculo dos deslocamentos. Malhas de 18 e 72 EC, sem PI e com  $\Delta t = 0,7$  s e  $\theta = 2$ .

Na malha de 72 EC, estes erros são bastante reduzidos, pelo menos nos primeiros dois ciclos e pode-se observar também pequena melhora no erro da amplitude, ligada à quantidade de amortecimento fictício. No caso das forças de superfície, a representação numérica oferece maior dificuldade e a otimização dos parâmetros citados, apesar de melhorar consideravelmente a resposta, gera resultados apenas razoáveis conforme mostrado na Fig. (4).

Um fator que auxilia positivamente a qualidade dos resultados é a inclusão de pontos internos interpolantes. A Fig. (5) apresenta resultados para tensão utilizando malhas de 18 e 72 EC com 21 pontos internos e  $\Delta t = 0,3$  s. As simulações mostraram que devido ao controle paramétrico do amortecimento fictício, através de  $\theta$ , pode-se utilizar passos menores do que aqueles utilizados no algoritmo de Houbolt, especialmente para malhas mais refinadas com mais pontos internos interpolantes. Apesar deste procedimento incrementar o custo da solução, é importante notar a significativa melhora dos resultados.

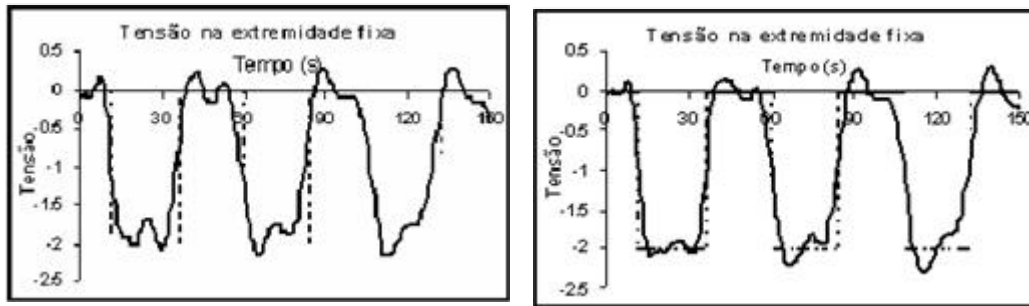


Figura 4. Efeito da alteração dos fatores  $\Delta t$  e  $\theta$  no cálculo das forças. Malhas de 18 e 72 EC, sem PI e com  $\Delta t = 0,7s$  e  $\theta = 2$ .

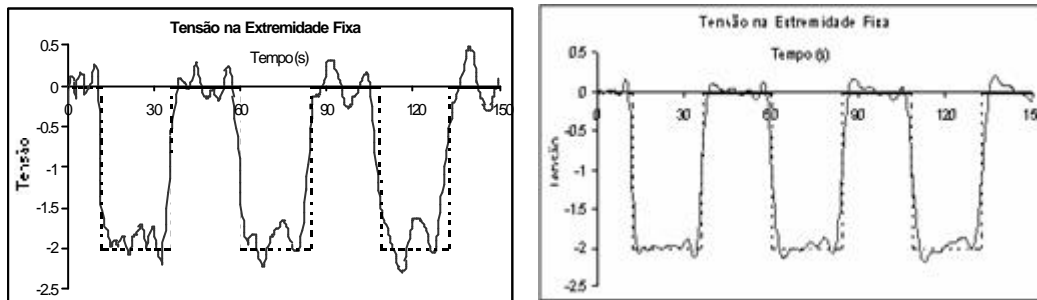


Figura 5. Efeito da inclusão de pólos e otimização do passo. Malhas de 18 e 72 EC,  $\Delta t = 0,3 s$ ,  $\theta = 2$  e 21PI.

## 6.2) Barra de seção linearmente variável

O segundo problema simulado consiste de uma barra de seção linearmente variável cujas características geométricas são mostradas na Fig. (6). Nesta mesma figura são apresentadas duas das malhas utilizadas, com 58 e 117 EC e inclusão de 38 PI. Outra malha, com 294 EC e 38 PI, também foi empregada, embora não esteja ilustrada na figura (6)

Nos gráficos mostrados a seguir a solução analítica foi retirada de (Loeffler, 1993) e é representada pela linha pontilhada, enquanto a solução numérica é apresentada pela linha cheia.

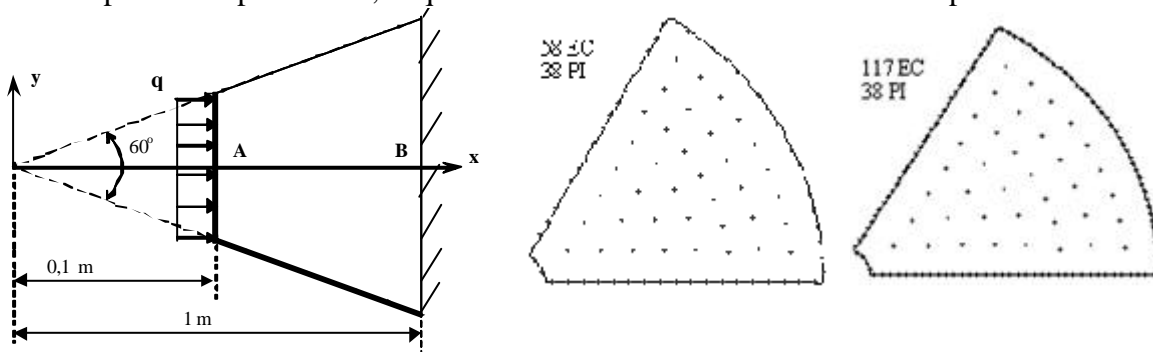


Figura 6. Características geométricas da barra de seção linearmente variável e malhas utilizadas.

Verificou-se que com os valores do passo propostos por (21), isto é  $\Delta t = 5, 2,5$  e  $1s$  respectivamente para as malhas de 58, 117 e 294 EC, foi possível efetuar a integração somente na malha mais pobre para  $\theta = 1,4$  e os resultados são bastante imprecisos, especialmente no caso das tensões conforme mostra a Fig. (7). Nas malhas de 117 e 294 com 38 PI a integração mostrou-se instável nos correspondentes passos. Na malha de 117 EC para este valor de  $\theta$  é possível efetuar a integração somente a partir de  $\Delta t = 5 s$  e para uma malha de 294 somente a partir de  $\Delta t = 4,5 s$  conforme mostrado na Fig. (8). Na malha mais refinada, os resultados para deslocamento apresentam considerável melhoria no primeiro ciclo, mas no caso das tensões os resultados mostram-se bastante imprecisos.

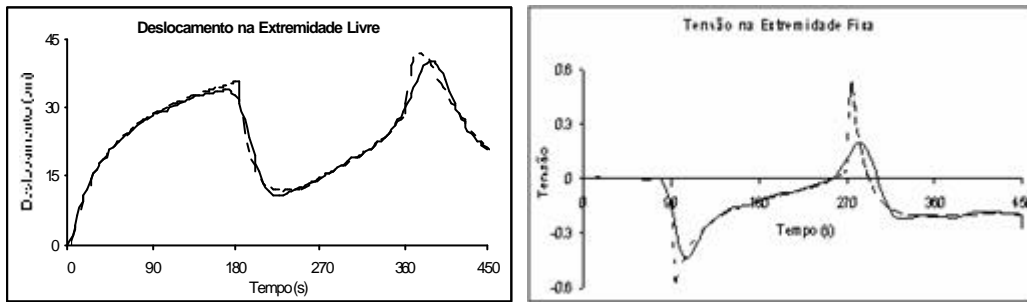


Figura (7) – Deslocamento e tensão com  $\Delta t$  calculado através de (21). Malha de 58 EC com 38 PI,  $\Delta t = 5$  s e  $\theta = 1,4$ .

O valor de  $\theta$  capaz de gerar uma resposta estável varia consideravelmente em relação ao caso da barra de seção constante. Por exemplo, para uma malha de 58 EC com 38 PI e  $\Delta t = 0,2$  s obteve-se resultados estáveis, mostrados na Fig. (9), somente a partir de  $\theta = 7,5$ . O melhor resultado para deslocamento nestas condições foi obtido para  $\theta = 10$ .

A surpreendente dificuldade em integrar-se as equações para passos reduzidos está ligada unicamente à aproximação introduzida pela Dupla Reciprocidade.

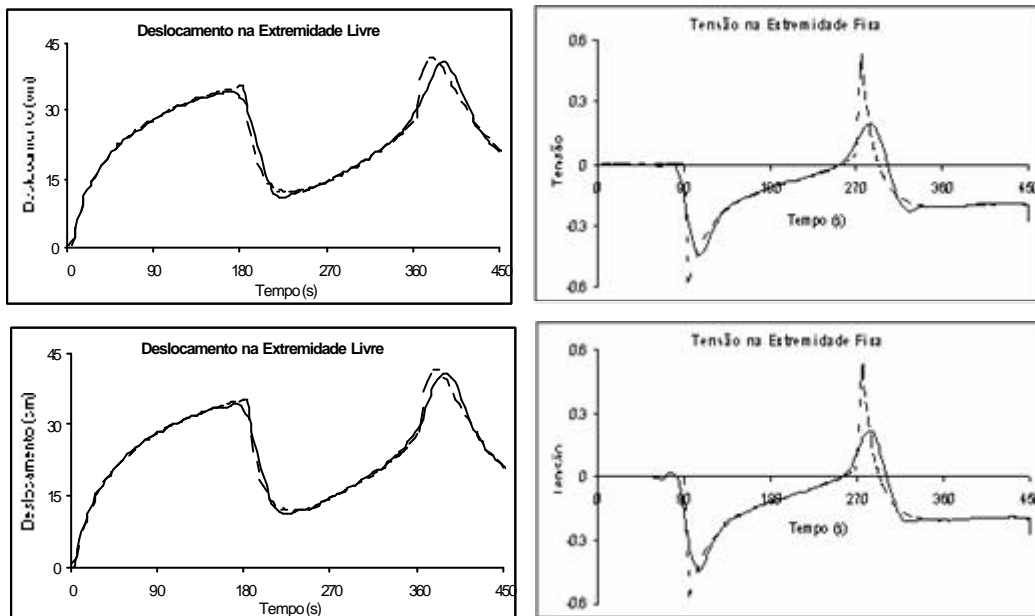


Figura (8) – Deslocamentos e tensões. Malhas de 117 e 294 EC com 38 PI,  $\theta = 1,4$  e  $\Delta t = 5$  e 4,5 s respectivamente.

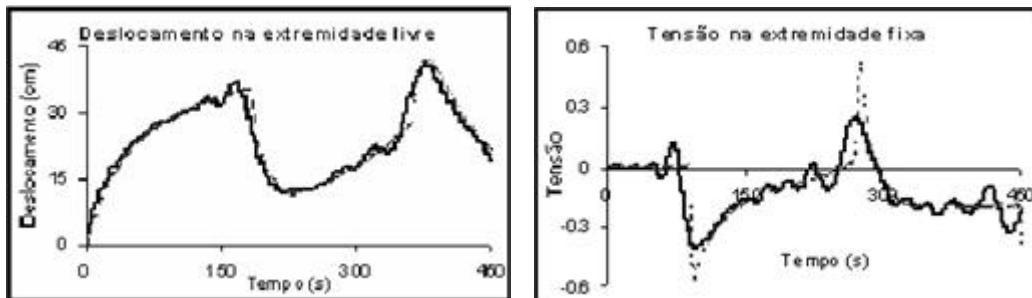


Figura 9. Deslocamento e tensão para uma barra de seção variável. Malha de 58EC com 38 PI,  $\Delta t = 0,2$  s e  $\theta = 7,5$ .

Aumentando-se o valor do passo é possível melhorar a representação das forças, mas o resultado continua apresentando arredondamentos ainda excessivos, que distorcem o resultado numérico em relação ao analítico, conforme pode-se observar na Fig. (10), na resposta para  $\Delta t = 0,5$  s. Nesta mesma figura pode-se notar que, nestas condições, a utilização de malhas mais refinadas não é um



recurso válido para reverter esta situação pois para uma malha de 117 EC não é possível observar melhoras significativas.

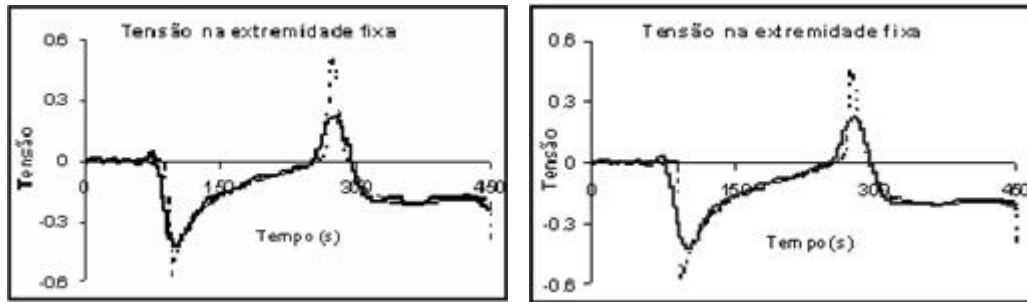


Figura 10. Tensões no ponto B da barra. Malhas de 58 e 117 EC, respectivamente com 58 PI,  $\Delta t = 0,5$  s e  $\theta = 7,5$ .

## 7. CONCLUSÕES

Demonstra-se, através da análise modal, que as tensões são mais afetadas pelos altos modos de vibração do que os deslocamentos. Como o MEC é um método misto, os deslocamentos e as tensões são calculados simultaneamente, mas a precisão de ambos é distinta, devido à influência diferenciada dos modos de vibração em cada uma dessas grandezas. Em todos os casos a representação precisa dos deslocamentos foi obtida sem muitas dificuldades, mas para o cálculo das tensões é preciso escolher com muito cuidado os parâmetros envolvidos, especialmente aqueles que regulam o amortecimento fictício. Por outro lado, a formulação com Dupla Reciprocidade possui outras aproximações além daquelas bem conhecidas nos métodos discretos, que estão relacionados à aproximação do campo de variáveis e da geometria. A interpolação produzida pela Dupla Reciprocidade introduz um erro adicional aos erros tradicionais referentes à aproximação do campo de funções e à discretização em si. Deste modo, alteram-se os critérios usuais de estabilidade do algoritmo de avanço temporal. É devido a esse erro que muitas simulações resultaram instáveis, quando foram usados intervalos de integração muito pequenos. Em alguns casos foi possível melhorar as condições de integração através da inclusão de pontos internos interpolantes que melhoram os erros introduzidos pela Dupla Reciprocidade.

Os esquemas que permitem a inserção de amortecimento através de outros parâmetros, além do passo da integração, apresentam maior flexibilidade na escolha do passo para um certo nível de amortecimento, produzindo melhores resultados. Nos esquemas que não possuem controle paramétrico do amortecimento a escolha de um passo suficientemente pequeno para a integração precisa não introduz quantidades suficientes de amortecimento e apresenta resultados ruidosos. Por outro lado, a utilização de passos maiores, necessários para introduzir maiores quantidades de amortecimento, produzem resultados com consideráveis arredondamentos. No entanto, com o controle paramétrico é possível introduzir uma certa quantidade de amortecimento sem requerer passos de integração grandes, que tornariam a simulação grosseira.

No esquema Wilson- $\theta$ , a dosagem adequada de amortecimento permite a inclusão de maior número de pólos, melhorando as condições de integração em relação aos demais esquemas. As simulações mostraram que a flexibilidade maior na inclusão de amortecimento permite obter melhores resultados neste esquema, especialmente na integração com passos menores nas malhas mais refinadas.

## 8. REFERENCIAS

- Bathe, K. J., 1982, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis". Ed. Prentice-Hall, USA.
- Brebbia C. A., 1978, "The Boundary Element Method for Engineers". Ed. Pentech Press, London, UK.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C., 1984, "Boundary Element Techniques", Ed. Springer-Verlag, Berlin, DR.
- Chung J., Lee J. M., 1994, "A New Family of Explicit Time Integration Methods for Linear and

- Non-Linear Structural Dynamics", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, p. 3961 – 3976, march.
- Hughes, T. J. R., 1987 "The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Ed. Prentice-Hall, USA.
- Loeffler, C. F., 1988, "Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar", Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ.
- Loeffler, C. F., 1993, "Solução Analítica do Problema de Impacto em Barras de Seção Linearmente Variável", Tese de Professor Titular, Universidade Federal Fluminense, Departamento de Engenharia Mecânica, Niterói, RJ.
- Loeffler, C. F., Nogueira, F. C., 1991 "Resposta Dinâmica com o Método dos Elementos de Contorno Utilizando Superposição Modal", Revista Militar de Ciência e Tecnologia, vol. 8, nº 1, pp. 36 – 49, Jan/Mar.
- Loula, A. F., Galeão, A. C., 1982, "Dinâmica e Estabilidade em Mecânica – Métodos Qualitativos e Quantitativos", III Escola de Matemática – Laboratório de Computação Científica – CNPq, Jan./Fev.
- Partridge, P. W., Brebbia, C. A., Wrobel, L. C., 1992, "The Dual Reciprocity Boundary Element Method", Ed. CMP, USA.

## 9. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

### **PERFORMANCE EVALUATION OF SOME NEW TIME INTEGRATION METHODS IN ELASTODYNAMIC PROBLEMS FORMULATED BY DUAL RECIPROCITY BOUNDARY ELEMENT METHOD**

*Gustavo Adolfo Velázquez Castillo*

Universidade Federal do Espírito Santo – DEM – Av. Fernando Ferrari, s/n.- Vitória – ES - Brazil

*Carlos Friedrich Loeffler Neto*

Universidade Federal do Espírito Santo – DEM – Av. Fernando Ferrari, s/n.- Vitória – ES - Brazil

#### **Abstract.**

*The Boundary Element Method presents some limitations to deal with physically non-homogenous bodies, or with problems with domain loads, such as dynamic problems where inertial forces have to be considered. Some approaches have been developed to solve this problem, Dual Reciprocity being the most popular. Domain effects are accounted for in the Dual Reciprocity formulation by global auxiliary functions which facilitate transforming domain integrals into boundary integrals. In impact problems the presence of high vibration modes is a matter of concern of researches, as a bad representation of high modes can deteriorate stresses results. For a long time the Houbolt method was the only recommended by researches dealing with Dual Reciprocity approach as a method to control the explosive effects of artificial high modes. Algorithms such as the Houbolt method introduces fictitious damping which damps out high modes, the damping intensity being controlled by the time step length. Aiming a improving the stresses response, the authors carried out an study were algorithms which have parametric control of the fictitious damping were considered: Unconditionally Stable Central Difference, HHT-**a** (**a** method), CHL-**b** and Wilson-**q**. The present work presents results obtained through the Wilson-**q** method which gave the best results among the schemes studied. The performance of the Wilson-**q** method is discussed here, through the analyses of two examples of scalar wave propagation, where the influence of the mesh refinement, time-step and of the **q** parameter are analyzed.*

**Keywords.** *Scalar Wave Propagation, Numerical Methods, Boundary Elements Method, Dual Reciprocity.*