



O Overshoot e o Undershoot em Sistemas de Controle Lineares Contínuos no Tempo: Um Tutorial.

Célia Aparecida dos Reis*

Neusa Augusto Pereira da Silva*

Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira⁺

* Departamento de Matemática;

+ Departamento de Engenharia Elétrica;

Universidade Estadual Paulista - UNESP, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - FEIS, C.P. 31, 15385-000 - Ilha Solteira - SP, Brasil.

Resumo – Este trabalho trata de um tutorial relativo às condições que permitam avaliar extremos, overshoot e undershoot na resposta a degrau de sistemas de controle lineares contínuos no tempo. Em termos de contribuições dos autores, apresenta-se uma condição necessária e suficiente para a determinação de extremos na resposta a uma entrada degrau unitário de uma classe de sistemas contínuos de terceira ordem, mediante o uso da configuração de pólos-zeros da correspondente função de transferência. Apresenta-se, também uma classe de sistemas de terceira ordem, com pólos e zeros reais negativos, exibindo o efeito do undershoot.

Palavras-chaves: Extremos, overshoot, undershoot, pólos, zeros.

1. INTRODUÇÃO.

O conhecimento das características da resposta a degrau é importante em engenharia de controle. De fato, existem alguns problemas tais como problemas de controle do eixo de máquinas ferramentas e problemas em que um robô necessita seguir uma trajetória pré-definida, onde as respostas a degrau não podem apresentar extremos (Howell, 1996, 1997; Rachid, 1995; Leon de la Barra, 1994). Dessa forma, o estudo de condições que permitam avaliar overshoot e undershoot na resposta a degrau é de grande importância na teoria de controle. Muitas contribuições teóricas recentes têm sido feitas no sentido de clarificar a influência dos zeros e das localizações de pólos e zeros da planta na parte transiente da resposta a degrau (Widder, 1934; Mita, e Yoshida, 1981; Mangalvedekar, 1987; Middleton, 1991; El-Khoury 1993, Rachid, 1995, 1999a; Howell, 1996, 1997; León de la Barra, 1992, 1994, 1994a, 1996, 1998; Moore, 1990; Hauksdóttir, 1996; Lin e Fang, 1997).

Apesar de bastante valiosas, essas contribuições ainda não oferecem um quadro claro de como e quais variações extensas nas localizações de pólos e zeros podem influenciar o overshoot e o undershoot. Por exemplo, o problema de determinar o número exato de extremos da resposta a degrau permanece em aberto (El-Khoury, 1993). Além da não existência de técnicas que permitam classificar os extremos da resposta a degrau, faltam condições necessárias e suficientes para a determinação de overshoot e undershoot em sistemas contínuos. Dessa forma, o objetivo desse trabalho é efetuar uma discussão dos resultados existentes na literatura relativos a extremos, overshoot e undershoot na resposta a degrau de sistemas de controle lineares contínuos no tempo, além de apresentar as

contribuições dos autores com relação ao assunto.

Este artigo é organizado como segue. Apresenta-se, na seção dois, um estudo relativo a extremos na resposta a uma entrada degrau de sistemas lineares invariantes no tempo. Na seção três são tratados resultados relativos a overshoot e na seção quatro, resultados relativos a undershoot. Na seção cinco apresentam-se as conclusões do trabalho.

2. OS EXTREMOS NA RESPOSTA A DEGRAU DE SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO.

O efeito dos zeros na resposta a degrau de sistemas lineares invariantes no tempo e a relação dos mesmos com os extremos da resposta a degrau, tem merecido atenção de vários pesquisadores desde os anos 30. É fato conhecido que quando os pólos da função de transferência são reais e negativos, sua resposta a degrau apresenta um número finito de extremos. Widder (1934), prova que o número de zeros da função de transferência, no intervalo de convergência, é pelo menos igual ao número de extremos que pode ocorrer na resposta a degrau do sistema linear estável. Mais precisamente, considere a função de transferência racional

$$G(s) = g \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad (1)$$

com pólos reais $p_n < \dots < p_1 < 0$ e zeros reais $z_i, i = 1, 2, \dots, m$. $G(s)$ em (1) é estável e além disso, estritamente própria e sem cancelamento de zeros. O pólo p_1 é o pólo dominante e o pólo p_n é o pólo mais rápido. A resposta a degrau de $G(s)$ é definida como

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right], \quad t \in [0, +\infty), \quad (2)$$

com a condição inicial $y(0) = 0$, onde L^{-1} é o operador transformada inversa de Laplace. Introduz-se em El-Khoury (1993), a seguinte definição de extremo local na resposta a degrau.

Definição 2.1: A função $y(t)$ tem um **extremo local** em t^* se existe $\epsilon > 0$ tal que $[y(t^*) - y(t^* - \mathbf{t})][y(t^*) - y(t^* + \mathbf{t})] > 0$, " $\mathbf{t} \in \hat{I}(0, \epsilon)$ ".

Seja o inteiro $h \geq 0$ o número de extremos locais de $y(t)$ para $t > 0$. Para especificar h , é conveniente classificar os zeros de $G(s)$ em quatro diferentes conjuntos, $M_1 = \{z : H(z) = 0, 0 < z < \infty\}$, $M_2 = \{z : H(z) = 0, p_1 < z \leq 0\}$, $M_3 = \{z : H(z) = 0, p_n < z < p_1\}$ e $M_4 = \{z : H(z) = 0, -\infty < z < p_n\}$. Seja $m_i, i = 1, 2, 3, 4$, o número de zeros pertencentes a uma dada classe M_i , tal que $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$. Daí, um limitante inferior para η é obtido (Widder (1934)).

Teorema 2.1: (Widder (1934)) (Teorema do Limitante Inferior) O número de zeros de $G(s)$ no intervalo de convergência é no máximo igual ao número de extremos locais de $y(t)$. Equivalentemente, $h \geq m_1 + m_2$.

Do Teorema 2.1, observa-se que os zeros localizados nas classes M_1 e M_2 causam extremos. Além disso, o problema de encontrar um limitante inferior para o número de extremos da resposta a degrau, foi resolvido.

Segundo El-Khoury (1993), nas aplicações em controle, o conhecimento de um limitante superior para o número de extremos é frequentemente mais importante do que o conhecimento de um limitante inferior. Por exemplo, quando o limitante superior é igual a zero, existe a garantia de que a resposta a degrau é monótona, o que implica na não existência de extremos. El-Khoury mostra que o número de extremos na resposta a degrau, para $t > 0$, é limitado superiormente por $m - p$, onde p é o número de vezes que um número ímpar de zeros ocorre entre dois pólos consecutivos. Para a apresentação desse resultado, é necessária a introdução das seguintes definições.

Definição 2.2: Um **pole bracket** é o intervalo aberto (p_{i-1}, p_i) entre dois pólos distintos e consecutivos $p_{i-1} < p_i$ de $G(s)$, e p o número de pole brackets contendo um número ímpar de zeros de $G(s)$.

Definição 2.3: Seja x um inteiro. Então a **paridade de (x)** := 0 se x é par e a **paridade de (x)** := 1 se x é ímpar.

Teorema 2.2: (El-Khoury (1993)) (Teorema do Limitante Superior) O número de extremos de $y(t)$, para $t > 0$ é limitado superiormente por $m_1 + m_2 + m_3 - p$. Além disso, a paridade do número de extremos é igual à paridade de $m_1 + m_2 + m_3 - p$. Equivalentemente, $h \equiv m_1 + m_2 + m_3 - p$ ou $\text{paridade}(h) = \text{paridade}(m_1 + m_2 + m_3 - p)$.

Os teoremas do limitante superior e inferior podem ser combinados e fornece o seguinte resultado geral de limitação.

Teorema 2.3: (El-Khoury (1993)) (Teorema de limitação Geral)

$$(i) \quad m_1 + m_2 \leq h \leq m_1 + m_2 + m_3 - p; \quad (3)$$

$$(ii) \quad \text{paridade}(h) = \text{paridade}(m_1 + m_2) = \text{paridade}(m_1 + m_2 + m_3 - p). \quad (4)$$

Do Teorema 2.3, podem ser deduzidos os seguintes resultados práticos:

- Se o sistema não tem zeros e possui apenas pólos reais, então não existe a possibilidade da ocorrência de extremos, incluindo tanto overshoot como undershoot;
- Os extremos da resposta a degrau podem também ser causados por zeros localizados entre o pólo dominante e o pólo mais rápido (conjunto M_3). Os zeros à esquerda do pólo mais rápido não causam extremos (conjunto M_4);
- A relação (4) estabelece que se a paridade $(m_1 + m_2) = 0$, então os valores ímpares entre o limitante inferior e o limitante superior fornecido por (3), exclui o conjunto de possíveis valores de h .

Apesar do Teorema 2.3 ser um resultado importante, o problema da determinação do número exato de extremos da resposta a degrau permanece um problema em aberto (El khoury, 1993). Rachid (1995) apresenta uma condição suficiente sobre os zeros para evitar extremos na resposta a degrau de sistemas lineares de ordem alta com zeros e pólos estáveis, as quais clarificam o relacionamento das posições entre pólos e zeros no semiplano s , para a ocorrência de extremos. Para detalhar tal resultado, considere um sistema de controle linear estável, descrito pela função de transferência com ganho unitário:

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (1 + t_i s)}{\prod_{j=1}^n (1 + T_j s)} \quad (5)$$

com zeros $z_i < 0$ e pólos $p_j < 0$. O Lema seguinte, que fornece uma seqüência de decomposição da expressão (5), e o teorema a seguir são encontrados em Rachid (1995).

Lema 2.1: A função de transferência $G(s)$ em (5) pode sempre ser reescrita sob a forma

$$G(s) = \prod_{i=1}^{r_1} G_{1i}(s) \prod_{i=1}^{r_2} G_{2i}(s) \text{ com } G_{1i}(s) = \frac{I}{I+T_{1i}s}, \quad G_{2j} = \frac{I+t_{2j}s}{I+T_{2j}s} \text{ e } r_1+r_2=n. \quad (6)$$

Teorema 2.3: a resposta a degrau do sistema (5) não tem extremos para $t \neq 0$ se o rearranjo (6) pode ser tomado tal que valem as condições $t_{2j} < T_{2j}$ para j pertencente a $[1, r_2]$.

Observe que do Teorema 2.3, obtém-se as seguintes conseqüências:

- Se o sistema (5) possui apenas um zero finito z , sua resposta a degrau não apresentará extremo se existe pelo menos um pólo p tal que $z < p$;
- Quando o sistema (5) tem dois zeros distintos e finitos z_1 e z_2 , não ocorrem extremos na resposta a degrau se existem dois pólos p_1 e p_2 , tais que $z_1 < p_1$ e $z_2 < p_2$. Note que não se exige que p_1 e p_2 sejam distintos, mas se $p_1 = p_2$, a multiplicidade de p_1 deve ser pelo menos dois.

Apesar de tornar mais claro o problema do relacionamento de pólos e zeros da função de transferência para a não ocorrência de extremos, o Teorema 2.3 é apenas uma condição suficiente. De fato, considere um sistema de segunda ordem, com dois zeros reais distintos z_1 e z_2 , e dois pólos reais distintos p_1 e p_2 , cuja função de transferência seja dada por:

$$G(s) = \frac{p_1 p_2 (s+z_1)(s+z_2)}{z_1 z_2 (s+p_1)(s+p_2)}. \quad (7)$$

Se a posição relativa entre os pólos e zeros de (7) for tal que $p_2 < z_2 < z_1 < p_1$, então $G(s)$ pode ou não apresentar extremos. A demonstração desse resultado é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 2.4: (Reis e Silva (2001)) O sistema cuja função de transferência é dada por (7) possui extremo se e somente se ocorre uma das seguintes condições:

$$(a) \quad z_2 < I_2 < I_1 < z_1 \text{ e } I_1 + I_2 > z_1 + z_2; \quad (8)$$

$$(b) \quad I_2 < I_1 < z_2 < z_1 \text{ ou } I_2 < z_2 < z_1 < I_1 \text{ e } I_1 + I_2 < z_1 + z_2; \quad (9)$$

O Teorema 2.4 apresenta uma condição necessária e suficiente para a ocorrência de extremos na resposta a degrau de sistemas de controle lineares de segunda ordem, contínuos no tempo, com pólos e zeros reais distintos. Além disso, este teorema é uma complementação ao resultado de Rachid (1995), sendo, portanto, uma de nossas contribuições nesse artigo. Para sistemas de ordem maior do que dois ocorrem situações semelhantes. De fato, seja $G(s)$ com pólos e zeros reais, dada por:

$$G(s) = -\frac{I^3 (s-z)^2}{z^2 (s-I)^3}. \quad (10)$$

Tem-se, então, o seguinte resultado.

Teorema 2.5: O sistema (10) possui extremos se e somente se $I < z$.

Prova: A prova segue do cálculo direto dos pontos críticos de $y(t)$.

Corolário 2.5: O sistema (10) não possui extremos se e somente se $z < I$.

Prova: Segue do fato de que os pontos críticos de $y(t)$ são negativos se e somente se $z < I$.

Observa-se que o resultado obtido no Corolário 2.5 coincide com os resultados obtidos por Rachid (1995), no Teorema 2.3. Observa-se, além disso, que os resultados desse corolário são provenientes da não existência de pontos críticos em tais sistemas.

3. O OVERSHOOT EM SISTEMAS CONTÍNUOS

Foram apresentados na seção dois, os resultados encontrados na literatura relativos a extremos de sistemas de controle contínuos no tempo. Apesar de importantes, essas contribuições ainda não oferecem um quadro claro de como e quais variações extensas nas localizações de pólos e zeros podem influenciar o overshoot e o undershoot. Por exemplo, o problema de determinar o número exato de extremos da resposta a degrau permanece em aberto (El-Khoury, 1993). Além disso, não é possível efetuar a classificação dos extremos da resposta a degrau. Daí a importância de se determinar condições necessárias e suficientes para a determinação de extremos, overshoot e undershoot em sistemas contínuos.

Quando o sistema apresenta pólos e zeros reais, a resposta a degrau é uma combinação de exponenciais, daí a dificuldade da determinação direta de extremos e conseqüentemente a classificação dos mesmos. Isso justifica a escassez de resultados relativos a overshoot em sistemas contínuos, na literatura. Lin e Fang (1997) consideram um sistema linear de terceira ordem SISO com uma função de transferência não estritamente própria dada por:

$$\frac{y(s)}{R(s)} = K \frac{cs^3 + bs^2 + as + 1}{ps^3 + qs^2 + rs + 1}, \tag{11}$$

onde K pode ser assumido sem perda de generalidade igual a um. Mediante o uso dos coeficientes de (11), são obtidas condições necessárias e suficientes para um tal sistema não apresentar overshoot na resposta a degrau ou resposta a degrau monótona não decrescente, quando os pólos são reais. No caso de pólos complexos, uma condição suficiente e duas condições necessárias são obtidas para uma tal classe de sistemas não ter overshoot.

Middleton (1991) prova que pólos reais no semiplano aberto direito implicam overshoot na resposta a degrau da malha fechada. Tal resultado é apresentado a seguir.

Lema 3.1: (Middleton (1991)) Um sistema estável, com realimentação unitária que possui um pólo real p de malha aberta, situado no semiplano aberto direito, deve ter overshoot na sua resposta a degrau. Além disso, a quantidade de overshoot está relacionada ao tempo de subida do sistema e a localização do pólo p , no semiplano direito.

Reis e Silva (2001) apresentam a classificação dos pontos críticos da resposta a uma entrada degrau unitário de $G(s)$ em (7). Além disso, obtém-se condições necessárias e suficientes para existência de overshoot em tal sistema. Mais precisamente:

Teorema 3.1: (Reis e Silva (2001)) Sob as hipóteses do Teorema 2.4, o sistema (7) apresenta overshoot se e somente se $z_2 < I_2 < I_1 < z_1$ e $I_1 + I_2 > z_1 + z_2$.

Resultados análogos aos obtidos no Teorema 3.1 também foram obtidos para sistemas de segunda ordem, com um zero real e pólos reais. Além disso, uma expressão para o cálculo direto do overshoot é fornecida (Reis e Silva (2001) e Reis (1994)).

Atualmente, pesquisas estão sendo realizadas pelos autores, visando à obtenção de uma caracterização completa dos sistemas de segunda ordem, com pólos e zeros reais, pólos e zeros

complexos, no sentido da obtenção de condições necessárias e suficientes para determinação de extremos, overshoot e undershoot em tais sistemas.

4. SISTEMAS CONTÍNUOS NO TEMPO E DE FASE NÃO MÍNIMA.

Um sistema é chamado de **fase mínima**, se todos os seus zeros estão localizados no semiplano aberto esquerdo. Já os de **fase não mínima** ou **sistemas de reação reversa** são os sistemas lineares estáveis para os quais a função de transferência apresenta zeros no semiplano aberto direito do plano s (RHP). Tais sistemas são identificados da seguinte forma: na aplicação de um degrau na entrada, a saída inicialmente começa em direção contrária ao valor de regime.

Segundo Mita e Yoshida (1981), Leon de La Barra (1994) esses sistemas podem apresentar uma das seguintes características: undershoot inicial ou do tipo A, undershoot tipo B e undershoot do tipo r_u . A seguir, apresenta-se uma caracterização dessas características.

Seja um sistema racional SISO caracterizado pela função de transferência $G(s)$ contínua no tempo estritamente própria, assintoticamente estável e de fase não mínima, sem zeros na origem. Tem-se então a seguinte definição de undershoot inicial, encontrada em Leon de La Barra (1994).

Definição 4.1: Seja $G(s)$ como descrito anteriormente e com ganho não nulo k . Seja $y(t)$ a correspondente resposta no tempo a uma entrada degrau unitário positivo. Então $y(t)$ apresenta **undershoot inicial** se $y(t)k < 0$ para todo t tal que $0 < t < t_1$.

Mita e Yoshida (1981), contribuem com as definições de undershoot do tipo A e do tipo B.

Definição 4.2: Seja $y(t)$, $t \geq 0$, a resposta escalar no tempo, suficientemente suave, de um sistema dinâmico e assumamos que $y(0) = 0$ e se $y^{(h)}$ é a n -ésima derivada de $y(t)$, então:

(a) existe um inteiro positivo e finito h tal que:

$$y(+0) = \dots = y^{(n-1)}(t)|_{t=+0} = 0 \text{ e } y^{(n)}(t)|_{t=+0} \neq 0; \tag{12}$$

(b) O valor de regime de $y(t)$ existe e é diferente de zero.

Então se diz que $y(t)$ possui **undershoot do tipo A** se $y^{(h)}(+0)y(\infty) < 0$.

Definição 4.3: Se não existe undershoot inicial e existe um intervalo (a, b) tal que $y(t)y(\infty) < 0$ para todo t pertencente a (a, b) , então diz-se que $y(t)$ apresenta **undershoot do tipo B**.

Segundo Vidyasagar (1986), a relação $y^{(h)}(+0)y(\infty) < 0$ é uma versão matemática natural do fato da resposta a degrau inicialmente começar em direção contrária ao valor de regime.

O undershoot do tipo B ocorre se não existe undershoot inicial e existe um intervalo aberto onde a resposta a degrau tem sinal oposto ao valor de regime. Já o undershoot do tipo r_u , (Leon de La Barra (1994)), fornece uma descrição mais detalhada do fenômeno do undershoot, mediante a especificação do número de vezes que a resposta a degrau apresenta undershoot para $t > 0$.

Definição 4.4: Seja $G(s)$ como descrita anteriormente e com ganho não nulo k , e $y(t)$ a sua resposta no domínio do tempo a um degrau unitário e positivo. Então diz-se que $y(t)$ apresenta **undershoot do tipo r_u** para $t > 0$ se as seguintes três condições são satisfeitas:

Existem exatamente r_u valores diferentes de t , $0 < t_1 < \dots < t_{r_u} < +\infty$ tais que

$$y(t_i) k < 0, \quad i = 1, \dots, r_u, \tag{13}$$

$$\dot{y}(t) |_{t=t_i} = 0, \quad i = 1, \dots, r_u, \tag{14}$$

$$k \ddot{y}(t) \Big|_{t=t_i} > 0, \quad i=1, \dots, r_u. \quad (15)$$

O Teorema seguinte, estabelece uma condição necessária e suficiente para a resposta a uma entrada degrau de uma planta SISO estável, apresentar undershoot inicial, encontrado em Vidyasagar (1986).

Teorema 4.1: (Vidyasagar (1986)) O sistema tem undershoot inicial se e somente se sua função de transferência tem um número ímpar de zeros reais RHP.

De acordo com Porter (1987), este fato foi provado por Norimatsu e Ito em 1961. Além disso, Mita e Yoshida (1981) também provaram tal resultado como um corolário de um teorema mais geral relativo ao fenômeno do undershoot em plantas MIMO estáveis.

Note que este teorema é também válido quando $G(s)$ tem pólos complexos conjugados. É também importante realçar que zeros complexos conjugados do semiplano aberto direito, não têm qualquer influência na determinação do undershoot inicial. Para uma discussão dessa regra na determinação de diferentes tipos de extremos, sugere-se como leitura, Leon de la Barra (1992).

Leon de La Barra (1994), contribui para uma caracterização posterior, fornecendo novos esclarecimentos das correlações entre zeros do semiplano aberto direito de uma função de transferência escalar contínua no tempo, e a natureza do undershoot na sua resposta a degrau, com o seguinte teorema.

Teorema 4.2: Seja $G(s)$ como anteriormente descrita, com ganho $k = 1$, e m_1 zeros reais no semiplano aberto direito. Então $y(t)$ apresentará pelo menos undershoot do tipo r_u para $t > 0$, com r_u dado explicitamente por $r_u \doteq \text{int}[(m_1 + 1)/2]$, onde $[.]$ denota a parte inteira.

É claro que se m_1 é par, $y(t)$ não apresenta undershoot inicial (Vidyasagar, 1986), então $y(t)$ será inicialmente positiva, revertendo necessariamente seu sinal depois. Por outro lado, se m_1 é ímpar, o sinal inicial de $y(t)$ será sempre oposto ao sinal de seu valor de regime, determinando assim, undershoot inicial. Este teorema também é válido para plantas tendo pólos complexos conjugados. Sob hipóteses adicionais relativas à configuração pólo-zero de $G(s)$, é possível estabelecer um resultado mais forte que o teorema anterior. Para tal, sejam m_1, m_2, m_3, m_4 e p como no Teorema de Limitação Geral.

Corolário 4.1: Se em adição as hipóteses do Teorema 4.2, $G(s)$ tem somente zeros reais e pólos reais simples que satisfazem a condição de bracketing $p = m_3$, junto com $m_2 \neq 1$, então $y(t)$ apresentará exatamente undershoot do tipo r_u para $t > 0$, com r_u como no Teorema 4.2.

O Corolário 4.1 fornece, para uma classe maior de sistemas contínuos no tempo e de fase não mínima, o número exato de vezes que a resposta a degrau associada apresenta undershoot. A sua principal limitação está no fato que plantas com pólos complexos conjugados não estão incluídos na classe anteriormente referida. Além disso, pode-se observar, também com relação ao undershoot:

- Os resultados relativos a undershoot até então discutidos, relacionam o efeito na resposta a degrau causado por zeros de fase não mínima. No entanto, zeros do semiplano aberto esquerdo também podem causar extremos que acarretam o undershoot. Por exemplo, considere o sistema de fase mínima cuja função de transferência $G(s)$ seja dada por (10), com $z = -0.1$ e $p = -1$. Pelo Teorema 2.5, como $p < z$, $G(s)$ possui extremos. Mediante a análise da resposta a degrau $y(t)$, nota-se a existência de um ponto de mínimo negativo e um de máximo. Dessa forma, o undershoot apresentado por $y(t)$ é devido ao zero $z = -0.1$, que é um zero real negativo. Portanto, o sistema (10) é uma classe de sistemas de fase mínima apresentando o efeito do undershoot.

- Outro ponto é que a resposta a degrau $y(t)$ do sistema caracterizado pela função de transferência contínua no tempo pode apresentar undershoot em $t = t_0$ mas não satisfazendo a condição (15) da Definição 4.4. Uma discussão mais detalhada desse fato será efetuada na subseção 4.1.

4.1 Undershoot do tipo r_u Estendido na Resposta a Degrau

A Definição 4.5 de undershoot do tipo r_u , exige as seguintes hipóteses (León de la Barra, 1994).

Hipótese 1: Considere um sistema racional SISO caracterizado pela função de transferência contínua no tempo $G(s)$. $G(s)$ é também estritamente própria, assintoticamente estável e de fase não mínima, não possuindo zeros na origem do plano complexo.

Tal definição caracteriza o número de vezes em que a resposta a degrau apresenta undershoot, considerando o número de mínimos locais negativos de $ky(t)$. É fácil ver que as condições (13)-(15) são suficientes para a existência de um mínimo local negativo em $t = t_i$, mas em particular a condição (15) não é necessária. Considere por exemplo que as condições (13) and (14) são verificadas em $t = t_i$ e que $\dot{y}(t_i) = 0$. Suponha que existe uma constante positiva δ_i tal que para todo $t \in (t_i - \delta_i, t_i)$ tem-se $k\dot{y}(t) < 0$, e que para todo $t \in (t_i, t_i + \delta_i)$ tem-se $k\dot{y}(t) > 0$, respectivamente. Então, existe um mínimo local de $ky(t)$ em $t = t_i$ (Courant, (1965), pp. 242). Silva et al. (2001) encontra um exemplo dessa situação, o qual é apresentado a seguir.

Example 1: Considere a função de transferência $G(s)$ dada por:

$$G(s) = \frac{(s - z_0)(s - \tilde{z})(s - z) \prod_{i=1}^7 (s - z_i)(s - \bar{s}_i)}{(s+1)^6 [(s+1)^2 + \pi^2 J^2] [(s+1)^2 + 4\pi^2 J^4]} \quad (16)$$

sendo que $z_i, \bar{z}_i, i = 1, \dots, 7$ são zeros complexos conjugados de $G(s)$ e z_0, z, \tilde{z} são zeros reais. Os valores de z_0, z, \tilde{z} e $z_i, i = 1, \dots, 7$ são dados por $z_0 = -0.000699416, z = 1.41185, \tilde{z} = 24.4088, z_1 = -3.13916 + 7.79002j, z_2 = -1.36386 + 5.07124j, z_3 = -1.26717 + 2.83482j, z_4 = -0.485231 + 3.31632j, z_5 = -0.0500769 + 7.17647j, z_6 = -0.0449459 + 5.68491j$ e $z_7 = 0.350259 + 2.57319j$. Observa-se que $G(s)$ tem ganho $k = 1$. A Figura 1, mostra o gráfico $y(t)$, de onde se depreende que $y(t)$ tem um mínimo local negativo em $t = 1$ s. Silva et all (2001) mostra que $y(1) = -2p + 1 < 0, \dot{y}(1) = 0$, e $\ddot{y}(1) = 0$, respectivamente. Então, a condição (15) na Definição 4.4 não é satisfeita em $t=1$, mas pela Figura 1, a resposta a degrau exibe undershoot do tipo B.

Mediante os resultados obtidos no Exemplo 1, observa-se a necessidade de uma caracterização mais geral de undershoot múltiplo na resposta a degrau. Tal caracterização, dada a seguir, é uma das contribuições de Silva et all (2001), o undershoot do tipo r_u estendido.

Definição 4.1.1: Seja $G(s)$ como na hipótese 1 e com ganho não nulo k . Seja $y(t)$ resposta a um degrau unitário e positivo. Então diz-se que $y(t)$ apresenta undershoot do tipo r_u estendido para $t > 0$ se as seguintes três condições são satisfeitas:

Existem exatamente r_{ue} valores diferentes de $t, 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{r_{ue}} < +\infty$, tais que

$$(i) \quad y(t_i)k < 0, \quad i = 1, \dots, r_{ue}, \quad (17)$$

$$(ii) \quad \dot{y}(t) \Big|_{t=t_i} = 0, \quad i = 1, \dots, r_{ue}, \quad (18)$$

$$(iii) \quad k \dot{y}(t) \Big|_{t=t_i} > 0, \quad \text{ou} \quad (19)$$

$$\dot{y}(t) \Big|_{t=t_i} = 0, \text{ e existe uma constante positiva } \delta_i \text{ tal que,} \quad (20)$$

$$k \dot{y}(t) < 0, \text{ para todo } t \in (t_i - \delta_i, t_i) \quad \text{e} \quad (21)$$

$$k \dot{y}(t) > 0 \text{ para todo } t \in (t_i, t_i + \delta_i), \quad i = 1, \dots, r_{ue}. \quad (22)$$

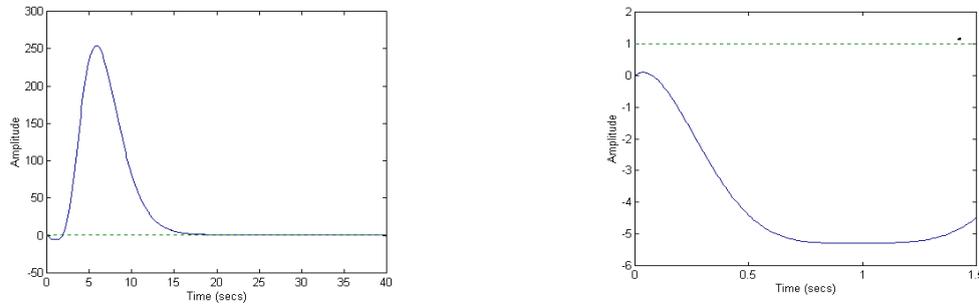


Figura 1: Resposta a degrau unitário para $G(s)$ dada por (16).

Tem-se então o seguinte teorema.

Teorema 4.1.2: (Silva et al. (2001)) Seja $G(s)$ como na Hipótese 1, com ganho unitário e m_l zeros reais no semiplano aberto direito. Então $y(t)$ apresentará pelo menos undershoot do tipo r_u estendido para $t > 0$ com r_{ue} , no sentido da Definição 4.1.1 e dado $r_{ue} = \text{int}[(m_l + 1)/2]$, onde $[.]$ denota a parte inteira.

5. CONCLUSÕES

Apresentou-se, nesse trabalho, um tutorial relativo ao estudo de extremos, overshoot e undershoot especificamente para sistemas de controle linear estáveis e contínuos no tempo. Dessa forma, são as seguintes as contribuições do trabalho:

- (i) apresentação dos resultados relativos a extremos, overshoot e undershoot e descritos na literatura, de uma forma didática, bem como a apresentação de referências bibliográficas;
- (ii) apresentação de um novo resultado relativo ao assunto para funções de transferência de sistemas de controle lineares estáveis e contínuos no tempo de terceira ordem, com pólos e zeros reais, a saber: Teoremas 2.5 e Corolário 2.5 (condição necessária e suficiente para a existência de extremos);
- (iii) a associação de zeros localizados no semiplano esquerdo a undershoot. Apresentou-se uma classe de sistemas possuindo apenas pólos e zeros reais localizados no semiplano aberto esquerdo, em que a resposta a uma entrada degrau unitário apresenta undershoot, o sistema de fase mínima (10). Observa-se que na literatura, os resultados relativos a undershoot estão associados apenas a zeros de fase não mínima.

Esse trabalho permitirá um melhor entendimento no que diz respeito ao posicionamento de pólos e zeros para a ocorrência de extremos, overshoot e undershoot em sistemas de controle lineares contínuos no tempo. Apesar dos resultados obtidos pelos autores serem apenas para sistemas de segunda e terceira ordem, com pólos e zeros reais, acredita-se que tais contribuições são importantes, visto que na prática, em diversas situações existe a necessidade de se efetuar a redução da ordem do sistema. Além disso, tais resultados podem ter várias aplicações em engenharia de controle e podem, por exemplo, serem usados em projetos de controladores sem overshoot (Moore, 1990).

6. REFERÊNCIAS

- Courant, R., John F. (1965). *Introduction to Calculus and Analysis*, vol. 1., New York, Ny: John Wiley & Sons.
- El-Khoury, M et all. (1993). Influence of Zero Locations on the Number of Step-response Extrema, *Automatica*, vol. 29, nº 6, pp. 1571 - 1574.
- Hauksdóttir, A. S. (1996). Analytic Expressions of Transfer Function Responses and Choise of Numerator Coeficientes (Zeros), *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 41, nº 10, p. 1482 - 1488.
- Howell, J. R. (1996). Comment Regarding "On undershoot in SISO Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 41, nº 12, p. 1845 - 1846.
- Howell, J. R. (1997). Some classes of Step-response Model Without Extrema, *Automatica*, vol. 33, nº 7, p. 1427 - 1428.
- León de la Barra, B.A. (1992). Zeros and their influence on time and frequency domain properties of scalar feedback systems, Ph.D., dissertation, Dept. Electr. Comp. Eng., Univ. of Newcastle, Australia.
- León de la Barra, B.A. (1994). On undershoot in SISO systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 39, nº 3, pp. 578-581.
- León de la Barra, B.A., Fernández, M. A. (1994a). Transient Properties of Type m Continuous Time Scalar Systems, *Automática*, vol. 30, nº 9, pp. 1495-1496.
- León de la Barra, B.A., et all (1998). Linear Multivariable Servomechanisms Revisited: Systems Type and Accuracy Trade-offs, *Automática*, vol. 34, nº 11, pp. 1449-1452.
- Lin, S. and Fang, C. (1997). Nonovershooting and Monotone Nondecreasing Step Response of a Third-Order SISO Linear System, *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 42, nº 9, p. 1299-1303.
- Mangalvedekar, H.A. (1987). Comments on "On undershoot and nonminimum phase zeros", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 32, nº 8, p. 749.
- Middleton, R.H. (1991). Trade-offs in linear control system design, *Automatica*, vol. 27, nº 2, pp. 281-292.
- Mita, T. and Yoshida, H. (1981). Undershooting phenomenon and its control in linear multivariable servomechanisms, *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 26, nº 2, pp. 402-407.
- Moore, K. L and Bhattacharyya, S. P. (1990). A Technique for Choose Zero Locations for Minimal Overshoot, *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 35, nº 5, pp. 577-580.
- Porter, B. (1987). Comments on "On undershoot and nonminimum phase zeros", *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 32, nº 3, p. 271.
- Rachid, A. (1995). Some conditions on zeros to avoid step-response extrema, *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 40, nº 8, pp. 1501-1503.
- Rachid, A. Scali C., (1999a), "Control of overshoot in the response of chemical processes", *Computers & Chemical Engineering*, 23: S1003-S1006, Suppl. S Jun 1.
- Reis, C. A. (1994). *Determinação do sobre-sinal e tempo de manobra em sistemas lineares monovariáveis com zero ou autovalor múltiplo*. São Paulo, Tese (Doutoramento) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- Reis, C. A., Silva N. A. P. (2001). Condições Necessárias e Suficientes Para a Existência de Overshoot em Sistemas Lineares Contínuos e de Segunda Ordem, *Anais da 1ª Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle*, pp.176-179.
- Silva N. A. P., Reis, C. A. (2001), On The Definition of Type R_n Undershoot in The Step Response, *Anais da 1ª Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle*, pp.170-175.
- Vidyasagar, M. (1986). On undershoot and nonminimum phase zeros, *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 31, nº 5, p. 440.
- Widder, O. V. (1934). The Inversion of Laplace Integral and the Related Moment Problem, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 36, pp.107-200.

THE OVERSHOOT AND UNDERSHOOT IN THE LINEAR CONTROL CONTINUOUS TIME SYSTEM: A SURVEY

Célia Aparecida dos Reis*

celia@fqm.feis.unesp.br

Neusa Augusto Pereira da Silva*

neusa@fqm.feis.unesp.br

Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira⁺

marcelo@fqm.feis.unesp.br

* Departamento de Matemática;

+ Departamento de Engenharia Elétrica;

Universidade Estadual Paulista - UNESP, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - FEIS, C.P. 31,
15385-000 - Ilha Solteira - SP, Brasil.

Keywords: *Extrema, overshoot, undershoot, poles, zeros*

Abstract: *A survey about conditions to avoid overshoot and undershoot in the step-response of scalar continuous time transfer functions is presented. Additionally, one simple result is offered: one necessary and sufficient condition for the existence of extremes in the step-response of third order continuous time transfer functions, based on its poles and zeros. The authors presented also a class of minimum phase third order continuous time system with real open left half plane poles that exhibits undershoot in the step response.*