

CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS DE UM SISTEMA MULTICORPO FORMADO POR UM BRAÇO ROBÓTICO NÃO-RÍGIDO COM DOIS ELOS, INCLUINDO A AÇÃO DA GRAVIDADE

Víctor Orlando Gamarra Rosado

Afonso Henrique Castiho

UNESP – Campus de Guaratinguetá

Departamento de Mecânica, CP 205

E-mail: victor@feg.unesp.br

afonsohc@terra.com.br

Resumo. *Apresenta-se neste trabalho o modelo dinâmico de um braço planar, com dois elos não-rígidos e duas juntas revolutas. O braço se movimenta no plano vertical, portanto, considera-se a ação da gravidade neste equacionamento. Utiliza-se a formulação de Newton-Euler e a teoria elementar das vigas, junto com o método dos elementos finitos. A obtenção de um modelo matemático bastante apurado é necessário e de grande importância devido à análise de estabilidade do sistema e na definição de uma estratégia de controle.*

Palavras-chave: *Modelagem dinâmica, Braço não-rígido, Robótica.*

1. INTRODUÇÃO

A maioria das análises e dos controles de robôs industriais é baseada na concepção de que o braço do robô é composto por um conjunto de corpos rígidos, e que sejam capazes de levantar cargas de pesos variáveis. Assim, a idéia básica, deste trabalho, é estudar o comportamento de um braço robótico leve, o que é conseguido com o emprego de material adequado e dimensões - área da seção reta - bastante reduzidas. O braço, neste caso, tornar-se-á flexível o que, inevitavelmente, causará o aparecimento de deflexões ou, pelo menos, vibrações, acarretando vários problemas de precisão e de estabilidade no seu posicionamento. Por isso a determinação de um modelo matemático para um braço não-rígido e o correspondente projeto do seu sistema de controle tem exigido muito dos engenheiros que trabalham nesta área.

Vários estudos a este respeito já foram desenvolvidos e dentre eles pode-se destacar: Hollerbach 1980, Sunada e Dubowsky 1983, Cannon e Schmitz 1984, Book 1984, Wang e Vidyasagar 1987, e Chang e Hamilton 1991. Em todos estes trabalhos existem duas coisas em comum. A primeira é que o braço robótico era composto de um único elemento, com seu centro de rotação sobre o eixo dos z e varrendo o plano horizontal (x,y). A segunda é que o braço era flexível e modelado como uma viga cuja deflexão é representada por uma série em termos da função de auto-valores (modo normal). Lee e Wang 1988, obtiveram as equações dinâmicas e projetaram o sistema de controle para um braço único que tinha dois graus de liberdade, na rotação e na translação. Estes autores estudaram o movimento da extremidade livre do braço em movimento no espaço tridimensional. Usoro *et. al.* 1986, empregaram a aproximação do Lagrangeano e o método dos elementos finitos para a modelagem matemática de um manipulador com dois braços flexíveis. Neste estudo, foram levantadas as equações dinâmicas para um braço flexível, com dois elos no plano vertical (x,z). Como em outras pesquisas do gênero (Gamarra-Rosado *et. al.* 1996), o método dos elementos

finitos, baseado na teoria elementar das vigas, também foi empregado na determinação do modelo matemático deste sistema.

No caso particular dos manipuladores, a análise dinâmica desempenha um papel importante no projeto mecânico e no sistema de controle. A flexibilidade existente nos elos, acoplamentos ou transmissões, atuadores, etc. resultam em vibrações o que aumentam a instabilidade e reduzem a performance do sistema. Assim, neste trabalho, apresenta-se a dinâmica de um braço não-rígido o qual considera os efeitos da gravidade junto com a carga na extremidade livre do braço. O modelo é obtido através da superposição do movimento elástico de pequenas amplitudes, deslocamento elástico, em relação a configuração rígida.

2. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

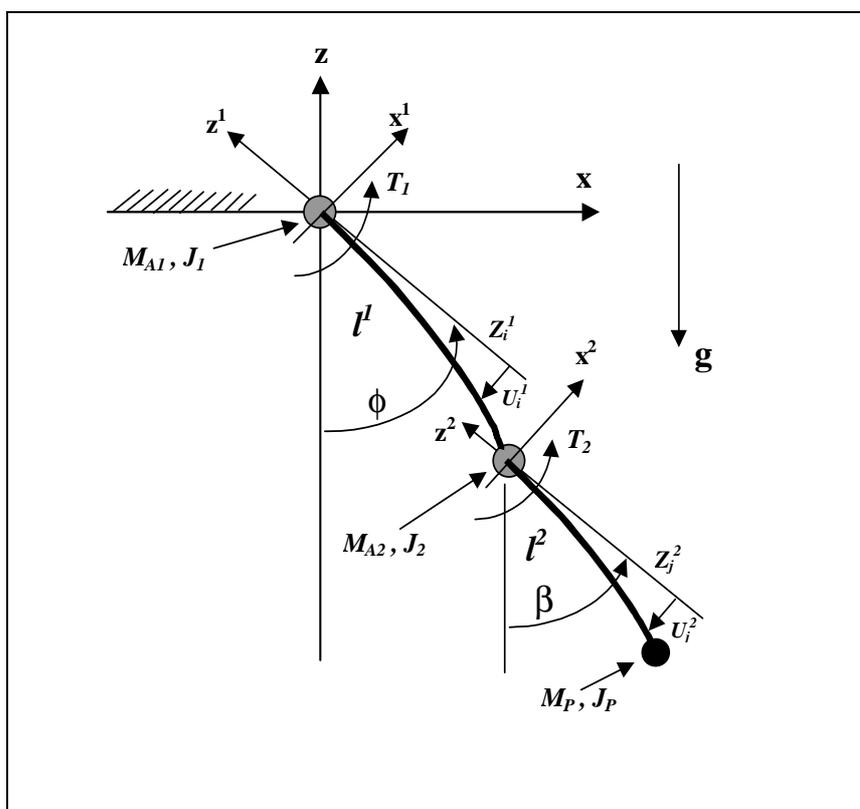


Figura 1. Configuração do braço robótico.

Conforme a Fig. (1), o elo assinalado com l^1 será denominado *superior* e todas as grandezas relativas a este braço serão identificadas com o expoente “1”. O identificado por l^2 é o elo *inferior* e todas as grandezas que apresentarem o expoente “2” são relativas a este elo. Para o estabelecimento do modelo matemático deste trabalho considera-se que o braço se movimenta somente ao longo do plano vertical (x,z). O elo superior faz um ângulo ϕ com o eixo z, que é representado na vertical e o elo inferior faz um ângulo β com a mesma direção vertical. O sistema inercial (x,z) será denominado de sistema de referência ou global e os sistemas de coordenadas locais (x^1, z^1) e (x^2, z^2) estão afixados no elo superior e no inferior, respectivamente, e são móveis. Para o cálculo das forças e momentos que atuam no braço, a massa própria do elo superior será dividida em n elementos infinitesimais de massa e a do elo inferior, em m elementos. Cada um destes pontos de concentração de massa será denominado ponto nodal. Portanto, no sistema como um todo, existirá um total de $(n+m+1)$ pontos nodais. A carga da extremidade livre do braço inferior será considerada como uma carga concentrada e localizada no último ponto nodal do elo inferior. As massas dos atuadores são consideradas como massas concentradas nos pontos nodais iniciais de

cada elo. Assim, a massa do atuador 1, representada por M_{A1} , estará concentrada no ponto nodal 1 do elo superior e a M_{A2} , no ponto nodal 1 do elo inferior. M_P representa a massa da carga na extremidade livre do braço. É conveniente esclarecer que, o índice * está relacionado com o último ponto nodal de cada elo, de modo que f_*^1 representa a força que atua no último ponto nodal do elo superior e f_*^2 , a força que age no último ponto nodal do elo inferior. As massas dos atuadores são consideradas como massas concentradas nos pontos nodais iniciais de cada elo.

O vetor posição de um i -ésimo ponto nodal do elo superior deformado, expresso no sistema local deste elo é,

$$x_i^1 = (x_i^1, z_i^1) = (U_i^1, Z_i^1) \quad (1)$$

onde, x e z representam as coordenadas genéricas nas direções x^1 e z^1 do sistema local do elo superior, e U e Z correspondem aos valores destas coordenadas. De forma análoga, o vetor posição de um j -ésimo ponto nodal do elo inferior deformado é dado por:

$$x_j^2 = (x_j^2, z_j^2) = (U_j^2, Z_j^2) \quad (2)$$

Usando-se a notação matricial, o vetor posição x de algum ponto do elo superior, expresso em coordenadas do sistema global é dado por,

$$x = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ \text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ z^1 \end{bmatrix} = Q^1 \begin{bmatrix} x^1 \\ z^1 \end{bmatrix} = Q^1 x^1 \quad (3)$$

onde, Q^1 representa a matriz de transformação ortogonal ou matriz de rotação do elo superior. Esta matriz atende a seguinte propriedade: $(Q^1)^{-1} = (Q^1)^T$. O vetor velocidade de algum ponto do elo superior, expresso em coordenadas do sistema global (x,y) , é dado por,

$$v = \dot{Q}^1 x^1 + Q^1 v^1 \quad (4)$$

Similarmente, o vetor aceleração de um ponto qualquer do elo superior, expresso no sistema global (x,z) , é dado por,

$$a = \ddot{Q}^1 x^1 + 2\dot{Q}^1 v^1 + Q^1 a^1 \quad (5)$$

O vetor posição x de um ponto qualquer do elo inferior, expresso em coordenadas do sistema global (x,y) , é dado por,

$$x = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ \text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -U_*^1 \\ -Z_*^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta & -\text{sen } \beta \\ \text{sen } \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ z^2 \end{bmatrix} = Q^1 x_*^1 + Q^2 x^2 \quad (6)$$

A matriz de rotação do elo inferior é dado por Q^2 . Esta matriz de rotação também atende à propriedade $(Q^2)^{-1} = (Q^2)^T$. Os vetores velocidade e aceleração para qualquer ponto do elo inferior, no sistema global, são dadas pelas expressões:

$$v = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \dot{Q}^1 x_*^1 + Q^1 v_*^1 + \dot{Q}^2 x^2 + Q^2 v^2 \quad (7)$$

$$a = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \ddot{Q}^1 x_*^1 + 2\dot{Q}^1 v_*^1 + Q^1 a_*^1 + \ddot{Q}^2 x^2 + 2\dot{Q}^2 v^2 + Q^2 a^2 \quad (8)$$

Para as equações acima, considera-se que:

$$x^2 = \begin{bmatrix} x^2 \\ z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U^2 \\ -Z^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad v^2 = \begin{bmatrix} \dot{x}^2 \\ \dot{z}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{U}^2 \\ -\dot{Z}^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad a^2 = \begin{bmatrix} \ddot{x}^2 \\ \ddot{z}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{U}^2 \\ -\ddot{Z}^2 \end{bmatrix}$$

$$x_*^1 = \begin{bmatrix} x_*^1 \\ z_*^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_*^1 \\ -Z_*^1 \end{bmatrix} \quad ; \quad v_*^1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_*^1 \\ \dot{z}_*^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{U}_*^1 \\ -\dot{Z}_*^1 \end{bmatrix} \quad ; \quad a_*^1 = \begin{bmatrix} \ddot{x}_*^1 \\ \ddot{z}_*^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{U}_*^1 \\ -\ddot{Z}_*^1 \end{bmatrix}$$

3. ESFORÇOS QUE AGEM NO SISTEMA, INCLUSIVE A GRAVIDADE

A força total que age num ponto genérico do sistema é representada pela seguinte expressão,

$$f = M \left(a - \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \right) \quad (9)$$

No sistema de referência (x,z) a força total que age num ponto nodal qualquer do elo superior é, $f_i = Q^1 f_i^1$. Assim, a expressão que calcula a força total no ponto i, no sistema local (x^1, z^1), é dado por,

$$f_i^1 = (Q^1)^T f_i \quad (10)$$

Combinando-se as equações (9) e (10) obtém-se de uma forma mais explícita:

$$f_i^1 = M_i^1 \left[(Q^1)^T \ddot{Q}^1 x^1 + 2(Q^1)^T \dot{Q}^1 v^1 + (Q^1)^T Q^1 a^1 - (Q^1)^T \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \right] \quad (11)$$

A posição, a velocidade e a aceleração, em termos das coordenadas locais, são:

$$x_i^1 = \begin{bmatrix} x_i^1 \\ z_i^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_i^1 \\ -Z_i^1 \end{bmatrix}; \quad v_i^1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_i^1 \\ \dot{z}_i^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{U}_i^1 \\ -\dot{Z}_i^1 \end{bmatrix}; \quad a_i^1 = \begin{bmatrix} \ddot{x}_i^1 \\ \ddot{z}_i^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{U}_i^1 \\ -\ddot{Z}_i^1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Portanto, substituindo-se as matrizes de rotação e suas derivadas na equação (11), obtém-se,

$$f_i^1(x) = M_i^1 \left(\dot{\phi} \dot{\phi} U_i^1 + \ddot{\phi} Z_i^1 + 2\dot{\phi} \dot{Z}_i^1 - \ddot{U}_i^1 - g \sin \phi \right) \quad (13)$$

$$f_i^1(z) = M_i^1 \left(-\ddot{\phi} U_i^1 + \dot{\phi} \dot{\phi} Z_i^1 - 2\dot{\phi} \dot{U}_i^1 - \ddot{Z}_i^1 - g \cos \phi \right) \quad (14)$$

A força total que age num ponto qualquer do elo inferior, expressa em coordenadas locais (x^1, z^1) , é calculada da seguinte forma:

$$f_j^{21} = (Q^1)^T f_j, \quad \text{sendo} \quad f_j = M_j^2 \left(a - \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \right) \quad (15)$$

Assim, as componentes da força nas direções x e z são:

$$\begin{aligned} f_j^{21}(x) = & M_j^2 [\dot{\phi}\dot{\phi}U_*^1 + \ddot{\phi}Z_*^1 + 2\dot{\phi}\dot{Z}_*^1 - \ddot{U}_*^1 + (-\dot{\beta}U_j^2 + \dot{\beta}\dot{\beta}Z_j^2)\text{sen}(\phi - \beta) + \\ & + (\dot{\beta}Z_j^2 + \dot{\beta}\dot{\beta}U_j^2)\text{cos}(\phi - \beta) - 2\dot{\beta}\dot{U}_j^2\text{sen}(\phi - \beta) + 2\dot{\beta}\dot{Z}_j^2\text{cos}(\phi - \beta) - \ddot{U}_j^2\text{cos}(\phi - \beta) - \\ & - \ddot{Z}_j^2\text{sen}(\phi - \beta) - g\text{sen}\phi] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} f_j^{21}(z) = & M_j^2 [-\ddot{\phi}U_*^1 + \dot{\phi}\dot{\phi}Z_*^1 - 2\dot{\phi}\dot{U}_*^1 - \ddot{Z}_*^1 + (-\dot{\beta}Z_j^2 - \dot{\beta}\dot{\beta}U_j^2)\text{sen}(\phi - \beta) + \\ & + (-\dot{\beta}U_j^2 + \dot{\beta}\dot{\beta}Z_j^2)\text{cos}(\phi - \beta) - 2\dot{\beta}\dot{U}_j^2\text{cos}(\phi - \beta) - 2\dot{\beta}\dot{Z}_j^2\text{sen}(\phi - \beta) + \ddot{U}_j^2\text{sen}(\phi - \beta) - \\ & - \ddot{Z}_j^2\text{cos}(\phi - \beta) - g\text{cos}\phi] \end{aligned} \quad (17)$$

A força total que age em um ponto qualquer do elo inferior, expressa em coordenadas locais (x^2, z^2) é calculada da seguinte forma:

$$f_j^{22} = (Q^2)^T f_j, \quad \text{sendo} \quad f_j = M_j^2 \left(a - \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \right) \quad (18)$$

Assim, as componentes da força nas direções x e z são:

$$\begin{aligned} f_j^{22}(x) = & M_j^2 [U_*^1\ddot{\phi}\text{sen}(\phi - \beta) + U_*^1\dot{\phi}\dot{\phi}\text{cos}(\phi - \beta) + Z_*^1\ddot{\phi}\text{cos}(\phi - \beta) - Z_*^1\dot{\phi}\dot{\phi}\text{sen}(\phi - \beta) + \\ & + 2\dot{U}_*^1\dot{\phi}\text{sen}(\phi - \beta) + 2\dot{Z}_*^1\dot{\phi}\text{cos}(\phi - \beta) - \ddot{U}_*^1\text{cos}(\phi - \beta) + \ddot{Z}_*^1\text{sen}(\phi - \beta) + U_j^2\dot{\beta}\dot{\beta} + \\ & + Z_j^2\dot{\beta}\dot{\beta} + 2\dot{Z}_j^2\dot{\beta} - \ddot{U}_j^2 - g\text{sen}\beta] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} f_j^{22}(z) = & M_j^2 [-U_*^1\ddot{\phi}\text{cos}(\phi - \beta) + U_*^1\dot{\phi}\dot{\phi}\text{sen}(\phi - \beta) + Z_*^1\ddot{\phi}\text{sen}(\phi - \beta) + Z_*^1\dot{\phi}\dot{\phi}\text{cos}(\phi - \beta) - \\ & - 2\dot{U}_*^1\dot{\phi}\text{cos}(\phi - \beta) + 2\dot{Z}_*^1\dot{\phi}\text{sen}(\phi - \beta) - \ddot{U}_*^1\text{sen}(\phi - \beta) - \ddot{Z}_*^1\text{cos}(\phi - \beta) - U_j^2\dot{\beta}\dot{\beta} + \\ & + Z_j^2\dot{\beta}\dot{\beta} - 2\dot{U}_j^2\dot{\beta} - \ddot{Z}_j^2 - g\text{cos}\beta] \end{aligned} \quad (20)$$

Para conveniência de cálculos, a força total que age no elo inferior será calculada em um sistema de coordenadas (x_p^1, z_p^1) paralelo ao sistema local (x^1, z^1) e com origem na junta que liga os dois elos. As massas dos atuadores, M_{A1} e M_{A2} , e a massa da carga aplicada na extremidade livre do elo inferior M_p são consideradas nos pontos nodais correspondentes.

A força resultante no elo inferior será dada pelas componentes F_x e F_z , segundo a equação,

$$F_2 = \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^m f_j^{21} \quad (21)$$

onde, $F_x = \sum_{j=1}^m f_j^{21}(x)$ e $F_z = \sum_{j=1}^m f_j^{21}(z)$. Assim,

$$F_x = \sum_{j=1}^m M_j^2 (\dot{\phi}\dot{\phi}U_*^1 + \ddot{\phi}Z_*^1 + 2\dot{\phi}\dot{Z}_*^1 - \ddot{U}_*^1 - g \text{sen } \phi) + \\ + \sum_{j=1}^m M_j^2 [(\dot{\beta}Z_j^2 + \dot{\beta}\dot{U}_j^2 + 2\dot{\beta}\dot{Z}_j^2 - \ddot{U}_j^2)\cos(\phi - \beta) + (-\dot{\beta}U_j^2 + \dot{\beta}\dot{Z}_j^2 - 2\dot{\beta}\dot{U}_j^2 - \ddot{Z}_j^2)\text{sen}(\phi - \beta)] \quad (22)$$

$$F_z = \sum_{j=1}^m M_j^2 (-\ddot{\phi}U_*^1 + \dot{\phi}\dot{\phi}Z_*^1 - 2\dot{\phi}\dot{U}_*^1 - \ddot{Z}_*^1 - g \cos \phi) + \\ + \sum_{j=1}^m M_j^2 [(-\dot{\beta}U_j^2 + \dot{\beta}\dot{Z}_j^2 - 2\dot{\beta}\dot{U}_j^2 - \ddot{Z}_j^2)\cos(\phi - \beta) + (-\dot{\beta}Z_j^2 - \dot{\beta}\dot{U}_j^2 - 2\dot{\beta}\dot{Z}_j^2 + \ddot{U}_j^2)\text{sen}(\phi - \beta)] \quad (23)$$

A força resultante no último ponto nodal do elo superior terá como componente na direção x^1 a soma $(f_*^1(x) + F_x)$ e na direção z^1 , a soma $-(f_*^1(z) + F_z)$.

O torque T_2 age no elo inferior e pode ser calculado no sistema de coordenadas local (x^2, z^2) , assim, com base na Fig. 1:

$$\sum T = 0 \Rightarrow T_2 + \sum_{j=1}^m [f_j^{22}(x)Z_j^2 + f_j^{22}(z)U_j^2] = 0 \quad (24)$$

$$T_2 = -\sum_{j=1}^m M_j^2 [(U_*^1\ddot{\phi} - Z_*^1\dot{\phi}\dot{\phi} + 2\dot{U}_*^1\dot{\phi} + \ddot{Z}_*^1)\text{sen}(\phi - \beta) + \\ + (U_*^1\dot{\phi}\dot{\phi} + Z_*^1\ddot{\phi} + 2\dot{Z}_*^1\dot{\phi} - \ddot{U}_*^1)\cos(\phi - \beta) - g \text{sen } \beta]Z_j^2 - \sum_{j=1}^m M_j^2 (U_j^2\dot{\beta}\dot{\beta} + Z_j^2\dot{\beta} + 2\dot{Z}_j^2\dot{\beta} - \ddot{U}_j^2)Z_j^2 - \\ - \sum_{j=1}^m M_j^2 [(-U_*^1\ddot{\phi} + Z_*^1\dot{\phi}\dot{\phi} - 2\dot{U}_*^1\dot{\phi} - \ddot{Z}_*^1)\cos(\phi - \beta) + (U_*^1\dot{\phi}\dot{\phi} + Z_*^1\ddot{\phi} + 2\dot{Z}_*^1\dot{\phi} - \ddot{U}_*^1)\text{sen}(\phi - \beta) - \\ - g \cos \beta]U_j^2 - \sum_{j=1}^m M_j^2 (-U_j^2\dot{\beta} + Z_j^2\dot{\beta}\dot{\beta} - 2\dot{U}_j^2\dot{\beta} - \ddot{Z}_j^2)U_j^2 \quad (25)$$

Da Figura e sabendo-se que o somatório dos torques é igual a zero, pode-se escrever a expressão do torque T_1 da seguinte forma:

$$\sum T = 0 \Rightarrow T_1 - T_2 + \sum_{i=1}^n [f_i^1(x)Z_i^1 + f_i^1(z)U_i^1] + F_x Z_*^1 + F_z U_*^1 = 0 \quad (26)$$

$$T_1 = -\sum_{j=1}^m M_j^2 [(U_*^1\ddot{\phi} - Z_*^1\dot{\phi}\dot{\phi} + 2\dot{U}_*^1\dot{\phi} + \ddot{Z}_*^1)\text{sen}(\phi - \beta) + (U_*^1\dot{\phi}\dot{\phi} + Z_*^1\ddot{\phi} + 2\dot{Z}_*^1\dot{\phi} - \ddot{U}_*^1)\cos(\phi - \beta) - g \text{sen } \beta]Z_j^2 - \\ - \sum_{j=1}^m M_j^2 (U_j^2\dot{\beta}\dot{\beta} + Z_j^2\dot{\beta} + 2\dot{Z}_j^2\dot{\beta} - \ddot{U}_j^2)Z_j^2 - \\ - \sum_{j=1}^m M_j^2 [(-U_*^1\ddot{\phi} + Z_*^1\dot{\phi}\dot{\phi} - 2\dot{U}_*^1\dot{\phi} - \ddot{Z}_*^1)\cos(\phi - \beta) + (U_*^1\dot{\phi}\dot{\phi} + Z_*^1\ddot{\phi} + 2\dot{Z}_*^1\dot{\phi} - \ddot{U}_*^1)\text{sen}(\phi - \beta) - g \cos \beta]U_j^2 -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^m M_j^2 \left(-U_j^2 \ddot{\beta} + Z_j^2 \dot{\beta} \dot{\beta} - 2\dot{U}_j^2 \dot{\beta} - \ddot{Z}_j^2 \right) U_j^2 - \sum_{i=1}^n M_i^1 \left(\dot{\phi} \dot{\phi} U_i^1 + \ddot{\phi} Z_i^1 + 2\dot{\phi} \dot{Z}_i^1 - \ddot{U}_i^1 \right) Z_i^1 + \\
& + \sum_{i=1}^n M_i^1 g \sin \phi Z_i^1 - \sum_{i=1}^n M_i^1 \left(-\ddot{\phi} U_i^1 + \dot{\phi} \dot{\phi} Z_i^1 - 2\dot{\phi} \dot{U}_i^1 - \ddot{Z}_i^1 \right) U_i^1 + \sum_{i=1}^n M_i^1 g \cos \phi U_i^1 - \\
& - \sum_{j=1}^m M_j^2 \left(\dot{\phi} \dot{\phi} U_*^1 + \ddot{\phi} Z_*^1 + 2\dot{\phi} \dot{Z}_*^1 - \ddot{U}_*^1 - g \sin \phi \right) Z_*^1 - \\
& - \sum_{j=1}^m M_j^2 \left[\left(\dot{\beta} Z_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} U_j^2 + 2\dot{\beta} \dot{Z}_j^2 - \ddot{U}_j^2 \right) \cos(\phi - \beta) + \left(-\dot{\beta} U_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} Z_j^2 - 2\dot{\beta} \dot{U}_j^2 - \ddot{Z}_j^2 \right) \sin(\phi - \beta) \right] Z_*^1 - \\
& - \sum_{j=1}^m M_j^2 \left(-\ddot{\phi} U_*^1 + \dot{\phi} \dot{\phi} Z_*^1 - 2\dot{\phi} \dot{U}_*^1 - \ddot{Z}_*^1 - g \cos \phi \right) U_*^1 - \\
& - \sum_{j=1}^m M_j^2 \left[\left(-\dot{\beta} U_j^2 + \dot{\beta} \dot{\beta} Z_j^2 - 2\dot{\beta} \dot{U}_j^2 - \ddot{Z}_j^2 \right) \cos(\phi - \beta) + \left(-\dot{\beta} Z_j^2 - \dot{\beta} \dot{\beta} U_j^2 - 2\dot{\beta} \dot{Z}_j^2 + \ddot{U}_j^2 \right) \sin(\phi - \beta) \right] U_*^1 \quad (27)
\end{aligned}$$

4. ANÁLISES ATRAVÉS DO MEF

Da teoria elementar das vigas junto com o método de elementos finitos (Clough e Penzien 1982), obtém-se a seguinte expressão para o elo inferior,

$$K^2 V^2 = f^{22} \quad (28)$$

onde, K^2 é a matriz de rigidez ($2m \times 2m$) para uma viga sujeita unicamente a esforços, e

$$\begin{aligned}
V^2 & \equiv \left(U_1^2, Z_1^2, U_2^2, Z_2^2, U_3^2, Z_3^2, \dots, U_m^2, Z_m^2 \right)^T; \mathbf{e} \\
f^{22} & \equiv \left[f_1^{22}(x), f_1^{22}(z), f_2^{22}(x), f_2^{22}(z), f_3^{22}(x), f_3^{22}(z), \dots, f_m^{22}(x), f_m^{22}(z) \right]^T
\end{aligned}$$

Para o elo superior, devido à ação do torque T_2 na extremidade livre do elo, a expressão será dada por,

$$\begin{bmatrix} K' & K \\ K^T & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^1 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

onde,

$$\begin{aligned}
V^1 & \equiv \left(U_1^1, Z_1^1, U_2^1, Z_2^1, U_3^1, Z_3^1, \dots, U_n^1, Z_n^1 \right)^T; \mathbf{e} \\
f^1 & \equiv \left[f_1^1(x), f_1^1(z), f_2^1(x), f_2^1(z), f_3^1(x), f_3^1(z), \dots, f_n^1(x), f_n^1(z) \right]^T
\end{aligned}$$

e, s é a inclinação na extremidade livre do elo superior.

5. CONCLUSÕES

Observa-se das expressões obtidas que quando o braço sobe com movimento acelerado, a aceleração a será positiva e a aceleração da gravidade, segundo a orientação do sistema de coordenadas, será negativa, indicando neste instante, que a força da gravidade g se opõe ao movimento nessa direção. O mesmo acontece quando o braço desce com movimento retardado. Por

outro lado, quando o braço sobe com movimento retardado ou desce com movimento acelerado, o peso próprio do sistema atuará no sentido de favorecer o movimento do braço.

As forças e os torques que agem no braço, conforme as equações finais, são consistentes e representam uma situação bastante genérica. Nelas aparecem os efeitos da gravidade, das deformações sofridas pelos elos, tanto as longitudinais (ao longo da coordenada local z) como as transversais (na direção da coordenada local x), da carga colocada na extremidade livre do braço e dos atuadores instalados nas juntas. Além disso, admite-se que o braço possa se mover com movimento uniforme, acelerado ou retardado. Portanto, este modelo pode ser aplicado até mesmo em sistemas de bastante sensibilidade.

Assim, o trabalho apresenta o equacionamento matemático completo de um braço não-rígido obtido através da formulação de Newton-Euler, junto com a teoria elementar de vigas. Com base nestes resultados, pretende-se avaliar aspectos da estabilidade do sistema e implementar o controle de posição do braço robótico, evitando níveis de vibração e melhorando sua performance.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Book, W. J., 1984, "Recursive lagrangian dynamics of flexible manipulator arms", Int. Journal of Robotics Research, vol. 3, n° 3, pp. 87-101.
- Cannon, R. H. Jr. and Schmitz, E., 1984, "Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot", International Journal of Robotics Research, vol. 3, n° 3, pp.62-75.
- Chang, L. W. and Hamilton, J. F., 1991, "Dynamics robotic manipulators with flexible links", ASME J. Dyn. Sys., Meas., and Control, vol. 113, pp. 54-59.
- Clough, R. and Penzien, J., 1982, Dynamics of structures. Mac Graw-Hill.
- Gamarra-Rosado, V. O., *et. al.*, 1996, "Automation and cybernetics: Control of a flexible one-link manipulator", The International Journal of Systems & Cybernetics - Kybernetes, vol. 25, n° 5, pp.38-47.
- Hollerbach, J. M., 1980, "A recursive lagrangian formulation of manipulator dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity", IEEE Trans. On Systems, Man. And Cybernetics, vol. SMC-10, n° 11, pp. 730-736.
- Lee, J. D., and Wang, B. L., 1988, "Dynamic equations for a two-link flexible robot arm", Computers & Structures, vol. 29, n° 3, pp. 469-477.
- Sunada, W. H. and Dubowsky, S., 1983, "On the dynamic analysis and behavior of industrial robotic manipulators with elastic members", ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, vol. 105, n° 1, pp. 42-51.
- Usoro, P. B., *et. al.*, 1986, "A finite element/Lagrange approach to modelling lightweight flexible manipulator", Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control, vol. 108, pp. 198-205.
- Wang, D. and Vidyasagar, M., 1987, "Control of a flexible beam from optimum step response", IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, Raleigh, NC., pp. 1567-1572.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

DYNAMIC CHARACTERISTICS OF A MULTIBODY SYSTEM GIVEN FOR A NONRIGID TWO-LINK ROBOTIC ARM INCLUDING THE GRAVITY EFFECTS

Víctor Orlando Gamarra Rosado
Afonso Henrique Castiho
UNESP – Campus de Guaratinguetá

Departamento de Mecânica, CP 205

E-mail: victor@feg.unesp.br

afonsohc@terra.com.br

Abstract. *This work presents the dynamic modeling of a planar multibody system given for an arm with two nonrigid links interconnected by two revolute joints and a payload at its free end. The arm is moving in the vertical plane, so it is considered the gravity effects. The dynamic equations was obtained using the Newton-Euler's formulation together with the elementary beam theory based on the finite element method. The analysis of these system's parameters is necessary and very important in the study of the stability problem and it is fundamental to apply a control strategy.*

Keywords. *Dynamic modeling, Nonrigid arm, Robotics.*