

II CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA

II NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING 12 a 16 de Agosto de 2002 - João Pessoa – PB

CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÃO ESTRUTURAL UTILIZANDO MATERIAIS INTELIGENTES VIA LMIs

Paulo José Paupitz Gonçalvespaupitz@dem.feis.unesp.brDepartamento de Engenharia Mecânica – UNESP / Ilha SolteiraAv. Brasil Centro, 56 – CEP: 15385-000 – Ilha Solteira - SP.

Vicente Lopes Júniorvicente@dem.feis.unesp.brDepartamento de Engenharia Mecânica – UNESP / Ilha SolteiraAv. Brasil Centro, 56 – CEP: 15385-000 – Ilha Solteira - SP.

Edvaldo Assunção edvaldo@dee.feis.unesp.br Departamento de Engenharia Elétrica – UNESP / Ilha Solteira Av. Brasil Centro, 56 – CEP: 15385-000 – Ilha Solteira – SP.

Resumo. Estruturas adaptativas são sistemas que podem sofrer variações no tempo em função das alterações ambientais, de esforços externos ou devido a desgastes e falhas originadas a partir de condições normais de trabalho. Nas situações onde os parâmetros estruturais do sistema são variáveis, ou não precisamente conhecidos, os controladores adaptativos devem ser usados. Estes controladores tem a capacidade de adaptar seu desempenho segundo o ambiente e critérios que foram previamente estabelecidos. Na maioria dos casos, sensores e atuadores desempenham papel fundamental nestes sistemas e um grande número de diferentes materiais estão sendo usados para sistemas adaptativos, dos quais os filmes piezopolímeros (PVDF) e os piezocerâmicos (PZT), são usados mais freqüentemente. O objetivo deste trabalho é implementar técnicas de controle adaptativo, em uma viga que é engastada em uma de suas extremidades e com nível de vibração a partir de uma excitação primária na extremidade. É mostrado a modelagem matemática do sistema físico e então a partir da representação em espaço de estados é analisado a estabilidade, a controlabilidade do sistema e a implementação de um controle por realimentação, obtido utilizando as desigualdades matriciais lineares – LMI (do inglês Linear Matrix Inequalities).

Palavras-chave: redução de vibração, estruturas adaptativas, LMI, materiais inteligentes

1. INTRODUÇÃO

Já é conhecido a muito tempo a importância da eliminação ou redução do nível de vibração em sistemas dinâmicos, principalmente na indústria aeronáutica, onde a supressão de vibração e ruído só é obtida, no controle passivo, através do inconveniente aumento de massa às estruturas das aeronaves. Na tentativa de solucionar este problema, surgiu o amortecimento ativo, que tem a função de suprimir o nível de vibração e diminuir o tempo de amortecimento sem acarretar em aumento significativo de volume ou material. A Fig. (1) exemplifica os conceitos do controle passivo e do controle ativo.



Figura 1. Elementos de controle passivo e ativo, respectivamente

A proposta básica do controle ativo, a ser implementado neste trabalho é o estudo da planta e a busca de um controlador para suprimir o nível de vibração (amplitudes de oscilação) e diminuir o tempo de amortecimento quando o sistema esta submetido a algum tipo de excitação primária. O conjunto de equações que representa a dinâmica de um sistema é chamado de modelo matemático de um sistema dinâmico, que pode representá-lo com perfeição ou pelo menos de forma bastante aceitável. Observa-se que o modelo matemático não é único para um dado sistema. Um sistema pode ser representado de muitas maneiras diferentes e, portanto, pode haver muitos modelos matemáticos, dependendo da perspectiva que se considere.

Os métodos de projeto de controladores que utilizam técnicas de transformada são geralmente referidos como métodos de *controle clássico*. Entretanto é possível resolver o mesmo problema utilizando a formulação em espaço de estados, que é chamada de *controle moderno*. As vantagens da utilização da formulação em espaço-estado é especialmente mostrada quando se projeta controladores para sistemas com múltiplas entradas e saídas (MIMO), que são os sistemas que utilizam mais que um sensor/atuador. Entretanto a formulação espaço de estados é também utilizada no projeto de sistemas com uma entrada e uma saída (SISO) (Ogata, 1997).

2. REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DO SISTEMA DINÂMICO

O sistema dinâmico em estudo neste trabalho é uma viga com uma de suas extremidades engastada que é mostrado na Fig. (2).



Figura 2. Desenho esquemático da estrutura utilizada

O estudo deste sistema é de grande interesse na engenharia, que, embora de forma simplificada, pode representar por exemplo a asa de um avião sujeito a forças cíclicas provocadas pelo desprendimento de vórtices.

A intenção neste caso é controlar o nível de vibração ou seja diminuir as amplitudes de oscilação e também diminuir o tempo de estabilização quando o sistema é submetido a uma força inicial.

2.1. Modelagem Matemática do Sistema Mecânico

O sistema representado pela Fig. (2) pode ser representado pela equação obtida pela segunda lei de Newton.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{u}(t) \tag{1}$$

Sendo que M é a matriz de massa, C é a matriz de amortecimento estrutural, K é a matriz de rigidez, q é o vetor de posição e u é a força de excitação externa.

Para obtenção dos parâmetros do sistema, matriz de massa, amortecimento e rigidez, utilizou-se o método de elementos finitos, a viga foi discretizada considerando o elemento de viga (Beam) com dois graus de liberdade por nó, um de translação na direção vertical e outro de rotação como mostrado na Fig. (3).



Figura 3. Esquema da modelagem por elementos finitos

Assim é possível notar que o sistema terá 2N graus de liberdade, uma vez que o nó número 1 está engastado. Sendo que N é o número de elementos do modelo de elementos finitos e n é o número de nós do modelo de elementos finitos (n = N+1).

Assim as matrizes de massa, amortecimento e rigidez podem ser calculadas e suas dimensões serão da forma:

 $[\mathbf{M}]^{2Nx2N}, [\mathbf{C}]^{2Nx2N}, [\mathbf{K}]^{2Nx2N}$

2.2. Representação no Espaço de Estados

A partir da Eq.(1) é possível obter a representação do modelo matemático no espaço de estados da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x}_1 = \mathbf{q} & & \\ \mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}} & \Rightarrow & \\ \mathbf{x}_2 = \ddot{\mathbf{q}} & & \\ \end{array} \xrightarrow{\mathbf{x}_1 = \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{x}_2} \\ \mathbf{x}_2 = \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q} \end{array}$$

sendo que \mathbf{x} é chamado de vetor de estado e \mathbf{u} é conhecido como entrada, neste caso uma força ou um momento. A Eq. (2) mostra a realização do sistema da Eq. (1).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$
 (2)

Sendo que $A \notin a$ matriz dinâmica do sistema e as matrizes $B \in C$ estão relacionadas com as entradas e as saídas respectivamente. D neste caso \notin igual a zero.

3. DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES (LMI)

O histórico das LMI inicia-se no ano de 1880, pela publicação da teoria de Liapunov, que formulou o estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos por meio de uma desigualdade matricial, o grande feito

porém, deu-se na década de 1940, com a utilização prática da teoria de Liapunov em sistemas práticos da engenharia, especialmente o estudo da estabilidade de sistemas de controle com uma não-linearidade no atuador, este tipo de sistema foi estudado por Lur'e, Postikov dentre outros da extinta União Soviética(Assunçao et. al. 2001).

3.1. Estabilidade Segundo Liapunov

Considere o sistema dado pela Eq. (2), no caso em que não há entradas (sistema relaxado). Pode-se escrever:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{3}$$

Se A é não-singular, então o único estado de equilíbrio é a origem $\mathbf{x} = 0$. Para este sistema defina uma função de Liapunov como:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} > 0$$
(positiva definida) (4)

A derivada em relação ao tempo é:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x}$$
(5)

Com $V(\mathbf{x})$ foi escolhida sendo definida positiva, para se ter estabilidade assintótica é necessário que $\dot{V}(\mathbf{x})$ seja definida negativa.

$$\dot{V}(x) < 0$$
 (negativa definida) (6)

Assim é necessário para estabilidade do sistema descrito pela Eq (2) que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \tag{7}$$

3.2. Estudo da Estabilidade Utilizando LMIs

O estudo da estabilidade utilizando LMI, origina-se da equação de Liapunov, sendo que a desigualdade matricial de Liapunov é dada pela Eq. (5) adicionando a condição P > 0. Para verificar se o sistema da Eq. (2) é estável, é necessário e suficiente verificar se as LMIs abaixo são factíveis.

$$\mathbf{A}^{T}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} < 0$$

$$\mathbf{P} > 0$$
(8)

Com $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$

Observe-se que somente a investigação dos autovalores de A já é suficiente para o conhecimento da estabilidade de um sistema, entretanto a formulação LMI permite o estudo de estabilidade de sistemas com ou sem incertezas.

4. PROJETO DE CONTROLADORES USANDO LMI

Caso o sistema da Eq. (2) não fosse estável (que não é o caso da viga engastada), seria possível encontrar um controlador genérico que estabilizasse o sistema, sem garantir nenhum tipo de melhora do desempenho dinâmico. O projeto de um controlador para o sistema de realimentação mostrado na Fig. (4).



Figura 4. Representação do sistema com realimentação de estados

Considerando-se que :

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \tag{9}$$

Substituindo Eq. (9) na Eq. (2), tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \tag{10}$$

Neste caso para o estudo da estabilidade segundo Liapunov, deve-se estudar as seguintes desigualdades matriciais:

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) + (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{P} < 0$$

$$\mathbf{P} > 0$$
(11)

 $\operatorname{Com} \mathbf{P} = \mathbf{P}^T$

Nota-se que a Eq. (11) não é uma LMI devido ao termo *PBK*, então, deve-se fazer algumas manipulações, assim:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{G} + \mathbf{X}\mathbf{A}^{T} - \mathbf{G}^{T}\mathbf{B}^{T} < 0$$

$$\mathbf{X} > 0$$
(12)

Com $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T$, $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{G} = \mathbf{K}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{K}\mathbf{X}$, desta forma o problema fica descrito na forma de LMIs. Nota-se que \mathbf{P}^{-1} existe pois $\mathbf{P} > \mathbf{0}$, ou seja todos os autovalores de \mathbf{P} são maiores que zero. O controlador \mathbf{K} é obtido fazendo $\mathbf{K} = \mathbf{G}\mathbf{X}^{-1}$.

5. CÁLCULO DA NORMA $H_{\mathbf{x}}$ utilizando lmis

A norma de uma função de transferência estável pode ser estimada experimentalmente usando o fato de que a norma H_{∞} de uma função de transferência estável é a máxima magnitude da resposta permanente dentre todas as possíveis freqüências para o sinal de entrada senoidal.

Considere o sistema dinâmico dado pela equação a seguir:

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$
(13)

A norma H_{∞} deste sistema é dada pelo seguinte problema de otimização:

$$\|H\|_{\infty} = \min \quad \boldsymbol{g}$$

s.a. $\mathbf{A}^{T} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \boldsymbol{g}^{-2} \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^{T} \mathbf{P} + \mathbf{C}^{T} \mathbf{C} < 0$
 $\mathbf{P} > 0$
 $\boldsymbol{g} > 0$ (14)

Sendo $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{T}$. A demonstração da Eq.(14) pode ser encontrada em (Boyd et al. 1994).

Assim, aplicando o complemento de Schur (Boyd et al. 1994) na Eq. (14), obtem-se a seguinte forma equivalente:

$$\|H\|_{\infty} = \min \quad \mathbf{m}$$

s.a.
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A' P + PA + CC' PB} \\ \mathbf{B' P} & -\mathbf{m} \end{bmatrix} < 0$$

$$\mathbf{P} > 0$$

$$\mathbf{m} > 0$$

(15)

Sendo que $m = g^2 e P = P$

6. **PROJETO DE CONTROLADOR ÓTIMO** H_{∞}

Os sistemas lineares invariantes no tempo descritos em equações de estado podem ser representados pela Eq. (16).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$
 (16)

Sendo que o sistema da Eq. (16) é semelhante ao sistema da Eq. (2) fazendo $\mathbf{B} = \mathbf{B}_2$ e w é um vetor de entrada do tipo perturbação ou ruído.

A solução de ganho ótimo H_{∞} pode ser descrita como o conjunto de LMIs mostradas pela Eq. (17) (Peres, 1997).

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{A}^{T} - \mathbf{B}_{2}\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^{T}\mathbf{B}_{2}^{T} & \mathbf{B}_{1} & \mathbf{W}\mathbf{C}^{T} + \mathbf{Z}^{T}\mathbf{D}^{T} \\ \mathbf{B}_{1}^{T} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{W} + \mathbf{D}\mathbf{Z} & \mathbf{0} & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq (\mathbf{W} > 0 \\ \mathbf{W} > 0 \\ \mathbf{m} > 0 \end{cases}$$
(17)

Sendo que $\sqrt{m} = \min \|H\|_{\infty}$, e o ganho ótimo de realimentação é dado por

$$\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1} \tag{18}$$

7. EXEMPLO NUMÉRICO

O exemplo a seguir utiliza o modelo matemático de uma viga com uma de suas extremidades engastadas. A viga considerada apresenta dimensões 500x30x5 milímetros de comprimento, largura e espessura, respectivamente e as outras propriedades podem ser vistas na Tabela 01. Através da realimentação de estados se pretende-se melhorar a resposta dinâmica do sistema, ou seja, as amplitudes de oscilação e o tempo de estabilização. O sistema foi modelado por elementos finitos considerando-se que a barra era composta por 6 elementos, tendo assim, 12 graus de liberdade, já que dois graus de liberdade foram restringidos com o engaste. Após a obtenção do modelo de elementos finitos é possível também sua representação em espaço de estados, que é a condição necessária para o projeto de controladores utilizando LMIs. Nesta simulação foram utilizados um sensor e um atuador, configurando assim um sistema SISO e foram posicionados no elemento 6 (o último a partir da extremidade engastada), a Fig. (5) esquematiza o sistema com o sensor e atuador fixado.



Figura 5. Esquema da viga com os elementos e localização do sensor e atuador

l'abela 1. Características físicas da barra utilizada na simulação num
--

Dimensões [m]	Comprimento	Espessura	Largura
	0,500	0,005	0,030
Módulo de Elasticidade [N / m ²]	70,0 x 10 ⁹		
Densidade [kg / m ³]		2710,0	
Amortecimento Proporcional [N . s / m]	($C = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M}$	

8. Resultados

Os resultados obtidos foram comparados para o sistema sem controle e para o sistema com um controlador genérico e posteriormente com um controlador que minimiza a norma H_{∞} . A tabela 2 mostra os valores das normas H_{∞} para os sistemas simulados.

Tabela 2. Normas H_{∞} para os sistemas simulados

Sistemas	H _∞ [db]
Sem controle	45,0712
Com controlador genérico	-4,6302
Com controlador otimizado	-112,0

A figura 6 mostra o resultado da simulação dos sistema sem controle e com um controlador genérico para condição inicial de 0,01 m/s à que foi submetido o 11° grau de liberdade (6^o elemento).



Figura 6. Resposta do sistema condição inicial de 0,01 m/s relativa ao nó 7, para sistema não controlado(a) e sistema com controlador genérico (b).

O diagrama de Bode do sistema sem controle e do sistema com controle de realimentação, utilizando um ganho genérico é mostrada na Fig. (7).



Figura 7. Diagrama de Bode, para o sistema sem controle e sistema com controlador genérico.

Para condição de otimização da norma H_{∞} , foi encontrado um controlador que através da realimentação de estados resulta no desempenho devido a condição inicial de 0,01 m/s no 11° grau de liberdade mostrado na Fig. (8a).

A Fig. (8b) mostra o diagrama de bode dos sistema sem controle e sistema controlado com o controlador encontrado através da otimização da norma H_{∞} . Nota-se que o sistema controlado tem um nível de vibração máximo de -112 db como é visto na Tabela 2.



Figura 8. (a) Resposta no tempo do sistema controlado e (b) diagrama de Bode do sistema com e sem controle

9. CONCLUSÕES

O uso das LMIs como técnica de controle é de extrema utilidade para sistemas MIMO, já que as LMIs utilizam a representação em espaço de estados, este tipo de representação é mais indicada que a representação através da função de transferências para sistemas deste tipo. Outra vantagem deste método é a possibilidade da solução de problemas que possuam incertezas no modelo matemático da planta, que serão tratados em trabalhos futuros.

Com referência aos resultados, pode-se dizer que o controlador de realimentação de estados encontrado apresenta um bom desempenho, embora não seja um desempenho otimizado. Também não se levou em consideração a localização do atuador e sabe-se que a posição adotada não representa uma boa escolha.

O desempenho dinâmico com controlador que minimiza a norma H_{∞} é sem dúvida muito bom, quando comparado o os outros dois casos, porém, é necessário um estudo da ordem dos valores de ganho obtido para o controlador, já que os atuadores utilizados neste caso seriam os piezelétricos, assim é necessário considerar a força máxima que o atuador pode aplicar a estrutura, ou seja, há um limite de saturação para a corrente a ser aplicada sobre o atuador.

Com relação aos efeitos que os componentes piezocerâmicos causam na estrutura, pode-se dizer que o controlador obtido por esta técnica é um controlador robusto. Assim, efeitos podem ser considerados incertezas que estão dentro da faixa de atuação do controlador.

10. REFERÊNCIAS

- Assunção, E., & Teixeira, M.C.M., (2001). Projeto de Sistema de Controle Via LMIs usando o MATLAB, APLICON, Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle. USP São Carlos SP.
- Assunção, E. & Teixeira, M.C.M., (2002). Comments on 'Magnetically Levitated Micro PM Motors by two Types of Active Magnetic Bearings'', IEE/ASME, Transactions on Mechatronics, to appear.
- Assunção, E., (2000). Redução H_2 e H_{∞} de Modelos Através de Desigualdades Matriciais Lineares: Otimização Local e Global, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, SP.

- Assunção, E. & Peres, P.L.D.,(1998). Redução de Modelos com Critério H_∞ Através de Desigualdades Matriciais Lineares: Caso Contínuo e Discreto no Tempo, XII Congresso Brasileiro de Automática, Vol. 3, Uberlândia, MG, pp 885-890.
- Bathe, J., Wilson, EL., (1976). Numerical Methodes in Finite Elements Analysis, Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. & Balakrishnan, V. (1994). Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, SIAM Studies in Applied Mathematics, USA.
- Boyd, S. & Barrat, C., (1990), Linear Controller Design: Limits of Performance, Prentice Hall, New Jersey USA.
- Inman, D. J., Moreira, F. J. O. & Arruda, J. R. F., (1999). Design of Reduced Order H_∞ Controler For Smart Structures, 17th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A.J. & Chiliali, M. (1995). LMI Control Toolbox User's Guide, The Mathworks Inc., Natick, MA, USA.
- Li, X., Agarwal, R. K. and Shue, S. –P., (1999). Optimal Control and H∞ Filter For Control of Timoshenko Beam Vibrations Using Piezoeletric Material.
- Ogata, K. (1997). Modern Control Engineering, Pretince Hall, New Jersey USA.
- Peres, P. L. D., (1997). Tese de Livre Docencia, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Campinas, SP.

Prezeminiecki, J. S., (1968). Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw Hill Book Company.

Tan, C. A., Bergman, L. A., (1993). Vibration and Control of Mechanical Systems, ASME Design Technical Conferences, New York, NY, USA.

ACTIVE CONTROL OF STRUCTURAL VIBRATION USING SMART MATERIALS VIA LMIs

Paulo José Paupitz Gonçalves Vicente Lopes Júnior

paupitz@dem.feis.unesp.br vicente@dem.feis.unesp.br

Departamento de Engenharia Mecânica – UNESP / Ilha Solteira Av. Brasil Centro, 56 – CEP: 15385-000 – Ilha Solteira - SP.

Edvaldo Assunção

edvaldo@dee.feis.unesp.br

Departamento de Engenharia Elétrica – UNESP / Ilha Solteira Av. Brasil Centro, 56 – CEP: 15385-000 – Ilha Solteira – SP.

Abstract. Adaptive Structures are systems that can suffer variations with time in function of ambient alterations, external efforts, or wear due to normal work conditions. In situations where structural system parameters are variable, or not accurately known, adaptive controllers or self-optimizing controllers must be used. These controllers have the capacity of to adapt their behavior and performance to their environment according to previously established desire. In the majority of the cases, sensors and actuators play basic role in these systems. A great number of different materials is being used for adaptive systems, of which piezopolimerics films (PVDF) and piezoceramics (PZT), are most used. The objective of this work is to implement techniques of adaptive control. As an example a cantilever beam, with a primary excitation force, will be used. The mathematical modeling of the physical system is shown. Using the representation in space states the stability and controllability of the system was analyzed. The feedback control was done using the linear matrix inequalities(LMI).

Keywords. Vibration suppression, adaptive structures, LMI, smart materials