



CINEMÁTICA DE MANIPULADORES PARALELOS BASEADO NA LEI DAS MALHAS DE KIRCHHOFF

Alexandre Campos

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Caixa Postal 476, 88040 900
- Florianópolis, SC, Brazil e-mail: alexandre@emc.ufsc.br

Daniel Martins

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Caixa Postal 476, 88040 900
- Florianópolis, SC, Brazil E-mail: dmartins@lcmi.ufsc.br

Raul Guenther

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Caixa Postal 476, 88040 900
- Florianópolis, SC, Brazil e-mail: guenther@emc.ufsc.br

Resumo. O cálculo da cinemática de manipuladores paralelos requer, em geral, a velocidade nos pares cinemáticos passivos, não existentes em manipuladores seriais. A lei de malhas de Kirchhoff fornece uma relação de interdependência entre os pares cinemáticos de cada uma das cadeias fechadas do manipulador paralelo. Neste trabalho, tal relação é expressa como uma equação matricial, com base na teoria de grafos e de helicóides, que ao ser resolvida explicita a cinemática no espaço dos pares cinemáticos. O cálculo da cinemática é realizado no manipulador planar paralelo 3RRR e encontra-se uma solução simbólica fechada, além do reconhecimento das configurações singulares.

Palavras-chave: cinemática, manipuladores paralelos, lei das malhas de Kirchhoff, teoria de helicóides, teoria de grafos.

1. INTRODUÇÃO

Em manipuladores paralelos, diferentemente dos seriais, nem todos os pares cinemáticos são atuados. Para a solução da cinemática de um manipulador paralelo é preciso calcular a velocidade nos pares cinemáticos não atuados (passivos).

A lei das malhas de Kirchhoff, normalmente utilizada para diferenças de potencial, é adaptada para a cinemática de uma cadeia cinemática fechada (Davies, 1981) e (Davies, 2000). Esta adaptação possibilita encontrar o conjunto de movimentos instantâneos (heligiros) transmitidos pelos pares cinemáticos independentes (atuados) aos outros pares da cadeia em uma configuração dada.

O método conduz a uma formulação matricial que, adicionalmente, facilita soluções computacionais e detecta singularidades. Entretanto não existem restrições nem casos especiais para a aplicação do método. Para a adaptação da lei de Kirchhoff é necessário o uso da teoria de grafos como ferramenta fundamental para a geração das matrizes empregadas no método.

Neste trabalho, este método é apresentado através de sua aplicação sobre a cadeia cinemática de uma plataforma planar de três graus de liberdade 3RRR (Tsai, 1999).

Inicialmente, constrói-se o grafo de acoplamento da cadeia cinemática da plataforma planar e explicam-se alguns dos conceitos básicos da teoria de grafos. Na seqüência, gera-se o grafo de movimento da cadeia cinemática. Finalmente, por meio da adaptação da lei das malhas de Kirchhoff, calcula-se a matriz que contém a informação dos movimentos instantâneos interdependentes, de todos os pares cinemáticos da cadeia fechada.

2. GRAFO DE ACOPLAMENTO DE UMA CADEIA CINEMÁTICA

Uma cadeia cinemática é um circuito formado por elos, unidos por meio de pares cinemáticos, capazes de ter movimento relativo, como o mecanismo $3RRR$ mostrado na Fig. 1, contido no plano xy . O grafo de acoplamento G_C de uma cadeia cinemática representa cada elo da cadeia por meio

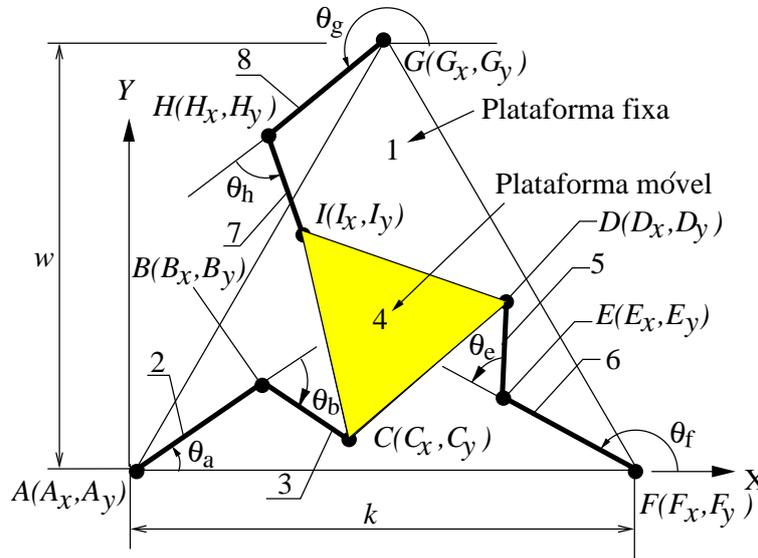


Figura 1: Mecanismo $3RRR$ no plano xy , onde $p = \overline{AB} = \overline{FE} = \overline{GH}$ e $q = \overline{BC} = \overline{ED} = \overline{HI}$

de um nó n (identificado por um número) e cada par cinemático da cadeia por meio de uma aresta e (identificada por uma letra). Todos os nós estão unidos pelas arestas de forma fechada. Se a cada uma das arestas do grafo impõe-se uma direção, obtêm-se um digrafo (grafo direcionado) da cadeia cinemática. A Fig. 2 mostra o grafo direcionado G_C do mecanismo $3RRR$, com $n = 8$ e $e = 9$.

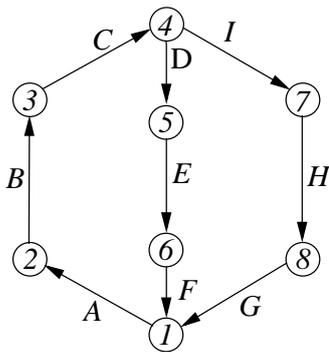


Figura 2: Digrafo G_C correspondente ao mecanismo $3RRR$.

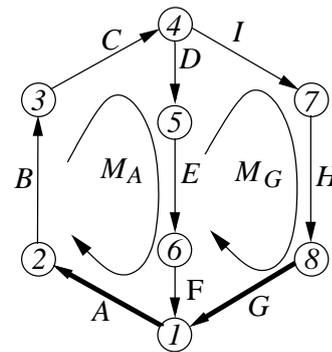


Figura 3: Digrafo G_C/G_M correspondente ao mecanismo $3RRR$

Alguns conceitos utilizados na teoria de grafos (Seshu and Reed, 1961), tais como: *percurso*, *malha* e *corda*, são definidos na seqüência. *Percurso*: seqüência de arestas onde o nó inicial da aresta seguinte é o nó final da aresta precedente. *Malha*: percurso fechado no qual o nó inicial e final é o mesmo. *Árvore*: subgrafo conectado do grafo, que contém todos os nós do grafo mas nenhuma malha; um grafo pode ter várias árvores associadas. *Corda*: arestas do grafo omitidas em uma árvore pré-selecionada.

Uma das formas de representação matricial das malhas de G_C é a matriz convergência $[B]_{(l \times e)}$ ¹,

¹outra forma comum é a matriz de adjacência.

onde l indica o número de malhas (filas de $[B]$) e e o número de arestas (colunas de $[B]$). Cada um dos elementos (b_{ij}) de $[B]_{(l \times e)}$ é:

- 0, se a malha i não inclui a aresta j ,
- +1, se o sentido positivo da malha i está no mesmo sentido da aresta j incluída nesta malha e
- -1, se o sentido positivo da malha i está no sentido oposto ao da aresta j incluída nesta malha.

Para o mecanismo $3RRR$, escolhem-se como cordas as arestas A e G , que geram $l = 2$ malhas. A Fig. 3 mostra as cordas A e G (linhas em negrito) e as malhas M_A e M_G .

Assim, a representação matricial das duas malhas M_A e M_G de G_C é:

$$B = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} M_A \\ M_G \end{matrix} . \quad (1)$$

3. GRAFO DE MOVIMENTO DE UMA CADEIA CINEMÁTICA

O grafo de movimento G_M é um grafo de acoplamento no qual as arestas representam somente pares cinemáticos que permitem $f = 1$ grau de liberdade. Assim, cada uma das arestas de G_C (par cinemático direto com f graus de liberdade), é substituída por f arestas (pares cinemáticos de um grau de liberdade) em G_M . As arestas substitutas são colocadas em série e com o mesmo sentido da aresta original. Entre as arestas substitutas aparecem $f - 1$ nós (elos) fictícios com o objetivo único de mediar os f pares cinemáticos.

Cada conjunto de f arestas de G_M , que representam uma aresta de G_C , define o movimento de um par cinemático direto. Cada uma das f arestas destes conjuntos define um movimento simples (um grau de liberdade). Tais movimentos, em conjunto, determinam o sistema- f de movimentos permitido pelo par cinemático direto, representado pela aresta de G_C .

No mecanismo $3RRR$ cada uma das e arestas permitem apenas $f = 1$ grau de liberdade; portanto, não se observa a substituição de arestas. Conseqüentemente, o digrafo de movimento G_M e o digrafo de acoplamento G_C da Fig. 3, para o mecanismo $3RRR$, são iguais.

O sistema- f do par cinemático direto entre dois elos é, em geral, o sistema de movimentos que um dos elos tem relativo ao outro quando eles apenas estão unidos diretamente (o qual é o caso do manipulador serial). As uniões indiretas (devido às cadeias fechadas) impõem mais restrições sobre o movimento que os pares cinemáticos diretos, assim o grau de liberdade f entre dois elos diretamente acoplados i e j , em cadeia aberta, pode ser reduzido. O grau de liberdade reduzido $f_{ij} \leq f$ entre dois elos diretamente acoplados i e j , em cadeia fechada, deve-se à restrição apresentada pelos outros pares cinemáticos (uniões indiretas entre os dois elos) da cadeia fechada.

Define-se, então, o grau de liberdade bruto F_b da cadeia cinemática como o somatório simples

$$F_b = \sum_1^e 1 \quad (2)$$

de todas as arestas de G_M onde cada aresta representa um grau de liberdade. Para o mecanismo $3RRR$ o grau de liberdade bruto calcula-se a partir dos pares cinemáticos A, B, C, D, E, F, G, H e I , conseqüentemente $F_b = \sum_1^9 1 = 9$

Analogamente ao digrafo G_C , o digrafo G_M também possui uma matriz que representa as malhas do digrafo: $[B_M]_{(l \times F_b)}$, onde $F_b \geq e$, isto é, o número de arestas em G_M pode ser maior que o número de arestas em G_C , mas não menor.

Para encontrar a representação matricial $[B_M]$ das malhas de G_M é suficiente reescrever a matriz $[B]$ repetindo-se f vezes consecutivas as colunas de $[B]$ correspondentes às arestas que foram

substituídas (as quais devem ter o mesmo sentido da aresta original). Devido à inexistência de pares cinemáticos com $f > 1$ não há substituições de arestas para o mecanismo $3RRR$,consequentemente a representação matricial $[B_M]$ das malhas de G_M , do mecanismo, é a mesma dada por $[B]$:

$$B_M = B = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} M_A \\ M_G \end{matrix} . \quad (3)$$

4. LEI DAS MALHAS DE KIRCHHOFF

Para a adaptação da lei das malhas de Kirchhoff ao caso cinemático é preciso interrelacionar os heligiros de todos os pares cinemáticos pertencentes a uma mesma malha de maneira que o movimento (heligiro) de um elo em relação a si próprio seja nulo. Assim, a matriz de heligiros unitários diretos (cadeia aberta) dos pares cinemáticos \hat{M}_D é restringida pela matriz B_M , que relaciona os heligiros dentro de cada malha, formando a matriz \hat{M}_N de heligiros unitários relacionados (devido ao “fechamento” da cadeia).

Seja d ($1 \leq d \leq 6$) a ordem mínima do sistema de helicóides (sistema- d) ao qual pertencem todos os F_b heligiros da cadeia cinemática. Assim, gera-se a matriz $[\hat{M}_D]_{(d \times F_b)}$ que representa todos os heligiros (unitários) dos pares cinemáticos diretos, ou seja, os heligiros permitidos para cada par cinemático sem as restrições do resto dos pares cinemáticos da cadeia cinemática; cada coluna de $[\hat{M}_D]_{(d \times F_b)}$ é o heligiro unitário de uma aresta de G_M (heligiro de 1 grau de liberdade).

Dado que o mecanismo $3RRR$ é planar, $d = 3$, unicamente se consideram três coordenadas de Plücker \mathcal{P} , \mathcal{Q} e \mathcal{N} (Hunt, 1978), portanto a matriz de heligiros unitários é dada por

$$\hat{M}_D = \begin{bmatrix} A_y & B_y & C_y & D_y & E_y & F_y & G_y & H_y & I_y \\ -A_x & -B_x & -C_x & -D_x & -E_x & -F_x & -G_x & -H_x & -I_x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathcal{P} \\ \mathcal{Q} \\ \mathcal{N} \end{matrix} \quad (4)$$

onde as d filas representam as coordenadas de Plücker e cada uma das F_b colunas representam o heligiro instantâneo em cada par cinemático de $f = 1$ grau de liberdade.

É possível expressar \hat{M}_D em função dos ângulos das juntas, ver Fig. 1, em um instante determinado (a matriz se encontra aqui transposta por motivos de espaço),

$$\hat{M}_D^T = \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{Q} & \mathcal{N} \\ 0 & 0 & 1 \\ pS_a & -pC_a & 1 \\ qS_{ba} + pS_a & -qC_{ba} - pC_a & 1 \\ qS_{fe} + pS_f & -qC_{fe} - pC_f - k & 1 \\ pS_f & -pC_f - k & 1 \\ 0 & -k & 1 \\ w & -\frac{k}{2} & 1 \\ pS_g + w & -pC_g - \frac{k}{2} & 1 \\ qS_{hg} + pS_g + w & -qC_{hg} - pC_g - \frac{k}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \end{matrix} \quad (5)$$

sendo $C_f = \cos \theta_f$, $C_{fe} = \cos(\theta_f + \theta_e)$, $S_f = \sin \theta_f$, $S_{fe} = \sin(\theta_f + \theta_e)$ etc.

Devido à interrelação restritiva entre os pares cinemáticos, é necessário encontrar uma matriz de heligiros unitários para toda a cadeia cinemática que contenha a informação dos heligiros dos pares cinemáticos mas considerando a restrição dos outros pares cinemáticos da cadeia fechada.

A partir do digrafo G_M do mecanismo $3RRR$, Fig. 2, observam-se $l = 2$ malhas (M_A e M_G). Por sua parte a lei das malhas de Kirchhoff requer que, para cada malha, a somas das componentes \mathcal{P} seja zero, idem para as componentes \mathcal{Q} e \mathcal{N} (i.e. $d = 3$). Isto indica que o heligiro de um elo com

respeito a si mesmo, expresso pelos heligiros de todos os pares cinemáticos da malha, é nulo, assim, a lei das malhas fornece $dl = 6$ equações.

Para a expressão matricial da lei das malhas é necessário extrair l matrizes diagonais de $[B_M]_{(l \times F_b)}$ na forma $[B_i]_{(F_b \times F_b)}$, $i = 1, 2, \dots, l$, onde os elementos da diagonal de $[B_i]_{(F_b \times F_b)}$ são os elementos da fila i de $[B_M]_{(l \times F_b)}$, de tal modo que a matriz de heligiro unitário do manipulador $[\hat{M}_N]_{(dl \times F_b)}$ é:

$$[\hat{M}_N]_{(dl \times F_b)} = \begin{bmatrix} [\hat{M}_D]_{(d \times F_b)} [B_1]_{(F_b \times F_b)} \\ [\hat{M}_D]_{(d \times F_b)} [B_2]_{(F_b \times F_b)} \\ [\hat{M}_D]_{(d \times F_b)} [B_3]_{(F_b \times F_b)} \\ \dots \\ [\hat{M}_D]_{(d \times F_b)} [B_l]_{(F_b \times F_b)} \end{bmatrix}_{(dl \times F_b)} \quad (6)$$

e a lei das malhas se apresenta na forma

$$[\hat{M}_N]_{(dl \times F_b)} [\Psi]_{(F_b \times 1)} = [0]_{(dl \times 1)} \quad (7)$$

denominada *equação de restrição*, onde $[\Psi]_{(F_b \times 1)}$ indica o vetor das magnitudes (amplitudes) dos heligiros: velocidades angulares ou translacionais.

O cálculo de \hat{M}_N para o mecanismo $3RRR$ resulta em:

$$\hat{M}_N = \begin{bmatrix} A_y & B_y & C_y & D_y & E_y & F_y & 0 & 0 & 0 \\ -A_x & -B_x & -C_x & -D_x & -E_x & -F_x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_y & -E_y & -F_y & G_y & H_y & I_y \\ 0 & 0 & 0 & D_x & E_x & F_x & -G_x & -H_x & -I_x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

e o vetor de amplitudes compreende as velocidades angulares nos pares cinemáticos:

$$\Psi = [\Psi_A \quad \Psi_B \quad \Psi_C \quad \Psi_D \quad \Psi_E \quad \Psi_F \quad \Psi_G \quad \Psi_H \quad \Psi_I]^T, \quad (9)$$

onde Ψ_i corresponde a magnitude da velocidade do par cinemático i . Pa

5. SOLUÇÃO CINEMÁTICA DENTRO DO ESPAÇO DAS JUNTAS

Os manipuladores paralelos, diferentemente dos seriais, contêm pares cinemáticos *passivos*, além de pares cinemáticos *ativos*. A velocidade em um par cinemático ativo é determinada por um atuador externo (elétrico, hidráulico, pneumático etc.). Entretanto, a velocidade nos pares cinemáticos passivos é função das velocidades nos pares cinemáticos ativos devido ao fechamento da cadeia cinemática.

Portanto, em geral, para resolver a cinemática de um manipulador paralelo é necessário encontrar as velocidades nos pares cinemáticos passivos. Porém, existem alguns métodos baseados na geometria (Tsai, 1999) ou na reciprocidade entre helicóides (Valdiero et al., 2001) para anular o efeito das velocidades nas juntas passivas sobre efetuador final. Esta seção apresenta a solução da cinemática dos pares passivos por meio da solução da equação de restrição.

É possível apresentar a equação de restrição em função unicamente das magnitudes dos heligiros de pares cinemáticos primários ou independentes.

Inicialmente, destaca-se o possível fato de uma ou mais das dl linhas da equação de restrição serem redundantes. Assim a cadeia cinemática está simultaneamente *sobre-restringida*. Tal fenômeno pode

ocorrer devido ao uso de um valor de d maior que o necessário (por exemplo usar $d = 6$ para um manipulador planar onde $d = 3$) ou quando a cadeia está em uma configuração singular. Assim, o posto m de $[\hat{M}_N]_{(dl \times F_b)}$ determina o grau de restrição líquido C_N como

$$C_N = dl - m \quad (10)$$

e então C_N filas (equações triviais $0 = 0$) podem ser retiradas de $[\hat{M}_N]_{(dl \times F_b)}$ reduzindo-a para $[\hat{M}_N]_{(m \times F_b)}$ e a equação de restrição resulta em

$$[\hat{M}_N]_{(m \times F_b)} [\Psi]_{(F_b \times 1)} = [0]_{(m \times 1)} \quad (11)$$

Para o caso do manipulador $3RRR$ o posto $m = 6$, logo, o grau de restrição é nulo $C_N = 0$ e portanto não há redução de filas na matriz \hat{M}_N .

Quando dl condições são dadas para F_b incógnitas, significa que estas incógnitas podem ser expressas por F_N ($F_N \leq F_b$) incógnitas, onde F_N representa o grau de liberdade líquido, de redundância cinemática ou mobilidade, dado em função do posto m da matriz \hat{M}_N , como

$$F_N = F_b - m, \quad (12)$$

ou seja o número de variáveis necessárias para descrever todos os movimentos do manipulador considerando todos os pares cinemáticos envolvidos. Conseqüentemente, para o manipulador $3RRR$ o grau de liberdade líquido é $F_N = 3$.

Portanto, é possível expressar a Eq. (11) em função de F_N variáveis independentes ou primárias, as quais determinam o valor das variáveis restantes (secundárias ou dependentes).

Para expressar o vetor $[\Psi]_{(F_b \times 1)}$ em função das magnitudes primárias é necessário selecionar um conjunto conveniente de F_N variáveis dentre as F_b de $[\Psi]_{(F_b \times 1)}$, de tal forma a gerar dois subvetores dentro de $[\Psi]_{(F_b \times 1)}$:

- $[\Psi]_{(F_N \times 1)}$, com as magnitudes primárias e
- $[\Psi]_{(m \times 1)}$ com as magnitudes secundárias;

simultaneamente reorganiza-se as colunas da matriz $[\hat{M}_N]_{(m \times F_b)}$, de modo a separá-la em duas submatrizes

- $[\hat{M}_N]_{(m \times m)}$ referente a pares cinemáticos secundários e
- $[\hat{M}_N]_{(m \times F_N)}$ referente a pares cinemáticos primários.

de modo que

$$\left[[\hat{M}_N]_{(m \times m)} \quad ; \quad [\hat{M}_N]_{(m \times F_N)} \right] \begin{bmatrix} [\Psi]_{(m \times 1)} \\ \dots \\ [\Psi]_{(F_N \times 1)} \end{bmatrix} = [0]_{(m \times 1)}, \quad (13)$$

manipulando a equação anterior

$$[\hat{M}_N]_{(m \times m)} [\Psi]_{(m \times 1)} = - [\hat{M}_N]_{(m \times F_N)} [\Psi]_{(F_N \times 1)}, \quad (14)$$

encontra-se o vetor das variáveis secundárias em função das primárias:

$$[\Psi]_{(m \times 1)} = - \underbrace{[\hat{M}_N]_{(m \times m)}^{-1} [\hat{M}_N]_{(m \times F_N)}}_{\bar{J}} [\Psi]_{(F_N \times 1)}, \quad (15)$$

A eq. (15) indica semelhança entre a matriz \bar{J} e a matriz jacobiana tradicional de robôs seriais e paralelos.

É importante destacar que após a seleção das variáveis primárias e a reorganização da matriz \hat{M}_N , o posto da sub-matriz $[\hat{M}_N]_{(m \times m)}$ deve continuar sendo m ; caso contrário, um ou mais pares cinemáticos primários encontram-se em uma configuração singular. Para cada par cinemático escolhido, que seja instantaneamente singular o posto m de $[\hat{M}_N]_{(m \times m)}$ diminui em uma unidade.

Para a aplicação do método no manipulador $3RRR$, selecionam-se as juntas A , F e G como primárias, de modo que a Eq. (15) se converte em

$$\begin{bmatrix} \Psi_B \\ \Psi_C \\ \Psi_D \\ \Psi_G \\ \Psi_H \\ \Psi_I \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} = - [\bar{J}] \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_F \\ \Psi_G \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} \quad (16)$$

com

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} B_y & C_y & D_y & E_y & 0 & 0 \\ -B_x & -C_x & -D_x & -E_x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_y & -E_y & H_y & I_y \\ 0 & 0 & D_x & E_x & -H_x & -I_x \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_y & F_y & 0 \\ -A_x & -F_x & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -F_y & G_y \\ 0 & F_x & -G_x \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$= \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \Upsilon(\overline{HI}, \overline{ED}, \overline{AC}) & -\delta(\overline{ED}, \overline{DF})\delta(\overline{HC}, \overline{CI}) & \delta(\overline{DC}, \overline{CE})\delta(\overline{HG}, \overline{GI}) \\ \Upsilon(\overline{HI}, \overline{ED}, \overline{AB}) & \delta(\overline{ED}, \overline{DF})\delta(\overline{HB}, \overline{BI}) & -\delta(\overline{DB}, \overline{BE})\delta(\overline{HG}, \overline{GI}) \\ \delta(\overline{BA}, \overline{AC})\delta(\overline{HE}, \overline{EI}) & \Upsilon(\overline{HI}, \overline{BC}, \overline{FE}) & \delta(\overline{HE}, \overline{EI})\delta(\overline{CB}, \overline{BE}) \\ -\delta(\overline{BA}, \overline{AC})\delta(\overline{HD}, \overline{DI}) & -\Upsilon(\overline{HI}, \overline{BC}, \overline{FD}) & -\delta(\overline{CB}, \overline{BD})\delta(\overline{HG}, \overline{GI}) \\ -\delta(\overline{BA}, \overline{AC})\delta(\overline{ED}, \overline{DI}) & -\delta(\overline{ED}, \overline{DF})\delta(\overline{CB}, \overline{BI}) & -\Upsilon(\overline{BC}, \overline{ED}, \overline{GI}) \\ -\delta(\overline{BA}, \overline{AC})\delta(\overline{ED}, \overline{DH}) & \delta(\overline{ED}, \overline{DF})\delta(\overline{CB}, \overline{BH}) & \Upsilon(\overline{BC}, \overline{ED}, \overline{GH}) \end{bmatrix}$$

sendo

$$d = \delta(\overline{HI}, \overline{OI})\delta(\overline{BC}, \overline{ED}) + \delta(\overline{DE}, \overline{OE})\delta(\overline{CB}, \overline{IH}) + \delta(\overline{BC}, \overline{OC})\delta(\overline{DE}, \overline{IH})$$

$$\delta(\overline{\alpha\beta}, \overline{\gamma\mu}) = \begin{vmatrix} \beta_x & \gamma_x \\ \beta_y & \gamma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_x & \alpha_x \\ \gamma_y & \alpha_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_x & \mu_x \\ \alpha_y & \mu_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mu_x & \beta_x \\ \mu_y & \beta_y \end{vmatrix} \quad (18)$$

$$\Upsilon(\overline{\alpha\beta}, \overline{\gamma\mu}, \overline{\nu\xi}) = \delta(\overline{\alpha\beta}, \overline{O\beta})\delta(\overline{\nu\xi}, \overline{\gamma\mu}) + \delta(\overline{\gamma\mu}, \overline{O\mu})\delta(\overline{\nu\xi}, \overline{\beta\alpha}) + \delta(\overline{\nu\xi}, \overline{O\xi})\delta(\overline{\mu\gamma}, \overline{\beta\alpha}),$$

dado O a origem do sistema, ou seja, $O_x = 0$ e $O_y = 0$.

Destaca-se que a condição geométrica que conduz a anulação da função δ é o paralelismo entre os dois parâmetros, segmentos de reta $\overline{\alpha\beta}$ e $\overline{\gamma\mu}$, da função.

Observam-se configurações singulares quando a matriz $[\hat{M}_N]_{(m \times m)}$ perde o posto completo e, conseqüentemente, o seu determinante é nulo. Quando o mecanismo se encontra em uma configuração singular não é possível determinar as velocidades dos pares cinemáticos secundários. O mecanismo $3RRR$ apresenta configurações singulares quando as retas definidas por \overline{BC} , \overline{ED} e \overline{HI} são concorrentes a um mesmo ponto ou quando estas são paralelas (concorrentes a um ponto no infinito). Destaca-se que estas singularidades são iguais as observadas para a cinemática direta do manipulador $3RRR$ (Daniali et al., 1995) se as juntas atuadas consideradas são as mesmas.

6. CONCLUSÕES

Aplicando a lei de malhas de Kirchhoff e as teorias de grafos e de helicóides foi obtida a solução cinemática para um manipulador paralelo planar $3RRR$, na forma simbólica fechada.

O método apresentado, aplicável a qualquer cadeia cinemática fechada, permite resolver instantaneamente a relação de velocidades entre pares cinemáticos ativos e passivos, e estabelecer as condições que induzem a configurações singulares, em função dos parâmetros geométricos do manipulador.

Através deste exemplo verifica-se também a semelhança na relação entre espaços de velocidade em manipuladores seriais (espaço das juntas - espaço operacional) e manipuladores paralelos (espaço das juntas ativas - espaço operacional ou espaço das juntas ativas - espaço das juntas passivas).

7. AGRADECIMENTOS

O primeiro e o segundo autor contam com o apoio da fundação CAPES, Brasil.

8. REFERÊNCIAS

- Daniali, H. R. M., Zsombor-Murray, P. J., and Angeles, J., 1995, Singularity analysis of planar parallel manipulators, "Mechanism and Machine Theory", 30(5):665–678.
- Davies, T., 2000, The 1887 committee meets again. subject: freedom and constraint, In Hunt, H., editor, "Ball 2000 Conference", pages 1–56, Trinity College. University of Cambridge, Cambridge University Press.
- Davies, T. H., 1981, Kirchhoff's circulation law applied to multi-loop kinematic chains, "Mechanism and Machine Theory", 16:171–183.
- Hunt, K. H., 1978, "Kinematic Geometry of Mechanisms". Clarendon Press, Oxford.
- Seshu, S. and Reed, M. B., 1961, "Linear Graphs and Electrical Networks". Addison-Wesley, Reading.
- Tsai, L.-W., 1999, "Robot Analysis: the Mechanics of serial and parallel manipulators". John Wiley & Sons, New York.
- Valdiero, A., Campos, A., Guenther, R., and D.Martins, 2001, Screw-based jacobian analysis of a 3-dof parallel manipulator, In "Proceedings of the 16th Brazilian Congress of mechanical engineering: Engineering for the New Millenium - COBEM2001", pages 474–483, Uberlândia-MG. Brazilian Society of Mechanical Sciences.

KIRCHHOFF'S MESH LAW BASED PARALLEL MANIPULATOR KINEMATICS

Alexandre Campos

Mechanical Engineering Department, Federal University of Santa Catarina, Postal Box 476, 88040 900 - Florianópolis, SC, Brazil e-mail: alexandre@emc.ufsc.br

Daniel Martins

Mechanical Engineering Department, Federal University of Santa Catarina, Postal Box 476, 88040 900 - Florianópolis, SC, Brazil e-mail: dmartins@lcmi.ufsc.br

Raul Guenther

Mechanical Engineering Department, Federal University of Santa Catarina, Postal Box 476, 88040 900 - Florianópolis, SC, Brazil e-mail: guenther@emc.ufsc.br

Abstract. To determine the parallel manipulator kinematics, generally, is necessary to know the velocities in passive kinematics pairs, that do not appear in serial manipulators. An interdependence relationship among the parallel manipulator (closed chain) kinematic pairs is supplied by the Kirchhoff's mesh law. This relationship is expressed as a matrix equation, based on screw and graph theory, that evidences the kinematics in the kinematic pairs space. The planar parallel manipulator 3RRR kinematics is developed and a closed symbolic solution is found, in addition singular configurations are identified.

Keywords: kinematics, parallel manipulators, screw theory, graphs theory, Kirchhoff's law.