



## CÁLCULO E VALIDAÇÃO DA CINEMÁTICA DIRETA E DA CINEMÁTICA INVERSA PARA USO NA TRAJETÓRIA DE UM ROBÔ CILÍNDRICO

### **Wendell de Queiróz Lamas**

Universidade de Taubaté, Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação, Rua Daniel Danelli, s/n - Taubaté - SP, wendellqueiroz@netscape.net

### **Flávio Groh**

Universidade de Taubaté, Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação, Rua Daniel Danelli, s/n - Taubaté - SP, flaviogroh@aol.com

### **Francisco José Grandinetti**

Universidade de Taubaté, Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação, Rua Daniel Danelli, s/n - Taubaté - SP, ffg64@bol.com.br

**Resumo.** *Este trabalho analisa a aplicação de método específico de cálculo da cinemática direta e da cinemática inversa de um braço robótico de configuração cilíndrica com 3 (três) graus de liberdade, tendo movimento de rotação em sua base e de translação nos 2 (dois) elos posicionadores, e sua validação através da aplicação destes resultados na orientação da trajetória deste robô. Esta realização permite definir os modelos matemáticos correspondentes ao ROBOTAU, assim como a realização de estudo específico da cinemática, nas formas direta e inversa, para o sistema mencionado. A abordagem adotada para a determinação da cinemática direta deste robô parte da análise preliminar dos movimentos possíveis e reconhecimento dos tipos de elos e juntas componentes do sistema. Em seguida, baseando-se na informação adquirida, adotam-se sistemas de coordenadas para os eixos a serem estudados com vistas à determinação dos parâmetros de Denavit-Hartenberg do braço robótico em estudo. Segue-se a formação das matrizes de transformação para cada junta e a consequente composição da matriz de transformação do robô. A cinemática inversa é determinada através de método de cálculo específico, com base nas coordenadas cartesianas encontradas no cálculo da cinemática direta. Dentre as diversas possibilidades, escolheu-se o método de transformação inversa, proposto por Paul (1981). Para a validação dos resultados obtidos no cálculo da cinemática direta e da inversa do robô em questão, fez-se uso de aplicativos para simulação matemática, aplicando-se os modelos de matrizes encontrados. A seguir, a definição de uma trajetória para o braço robótico pode demonstrar a eficácia dos cálculos realizados e validados, possibilitando também a determinação de seu volume de trabalho.*

**Palavras-chave:** *cinemática, direta, inversa, validação, trajetória.*

### **1. INTRODUÇÃO**

Ao buscar-se o modelo para um manipulador mecânico, ou braço robótico, representa-se este mecanismo como um cadeia articulada de malha aberta com corpos rígidos, seus elos, conectados em série através de juntas articuladas ou prismáticas as quais são orientadas por dispositivos atuadores. As extremidades dessa cadeia destacam-se por uma estar ligada à base de suporte do

mecanismo e a outra por estar livre e, via de regra, conectada a uma ferramenta que possibilita o manuseio de objetos ou a realização de alguma tarefa específica, como soldagem, por exemplo. O movimento relativo das juntas resulta no movimento dos elos que possibilita deslocar o elemento terminal (*the end-effector*) a uma orientação desejada. Na maioria das aplicações em robótica, essa orientação está baseada na descrição espacial do atuador do manipulador com respeito a um sistema referencial de coordenadas fixo.

A cinemática de um braço robótico é obtida a partir do estudo analítico da geometria de seu movimento com respeito a um sistema de coordenadas de referência fixo em função do tempo desprezando as forças e os momentos de inércia que provocam este movimento.

Porém, é conseguido através da descrição analítica do deslocamento espacial do braço robótico em função do tempo, em particular as relações entre a dimensão da variável de junta e a posição, assim como a orientação, do elemento terminal deste braço mecânico. Este item direciona a duas questões fundamentais dos interesses teórico e prático ligados à cinemática de braços robóticos:

1. Para um dado manipulador, estabelece-se o vetor do ângulo de junta  $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$  e os parâmetros geométricos do elo, onde  $n$  é o número de graus de liberdade, quais são a posição e a orientação do elemento terminal do manipulador com respeito ao sistema de coordenadas de referência?
2. Dada uma posição e uma orientação desejadas para o elemento terminal do manipulador e os parâmetros geométricos do elo com respeito ao sistema de coordenadas de referência, o mecanismo pode alcançar a posição e a orientação desejadas e prescritas para a garra? E se isso é possível, quantas configurações de manipulador diferentes satisfarão a mesma condição?

A primeira questão é referenciada como problema da cinemática direta, enquanto a segunda questão é o problema da cinemática inversa.

Desde que as variáveis independentes em um braço robótico são as variáveis de junta e uma tarefa é usualmente referida em termos do quadro de coordenadas de referência, o problema da cinemática inversa é usado com maior frequência. Um diagrama de blocos simplificado indicando a relação entre estes dois problemas de cinemática é mostrado na Fig. (1).

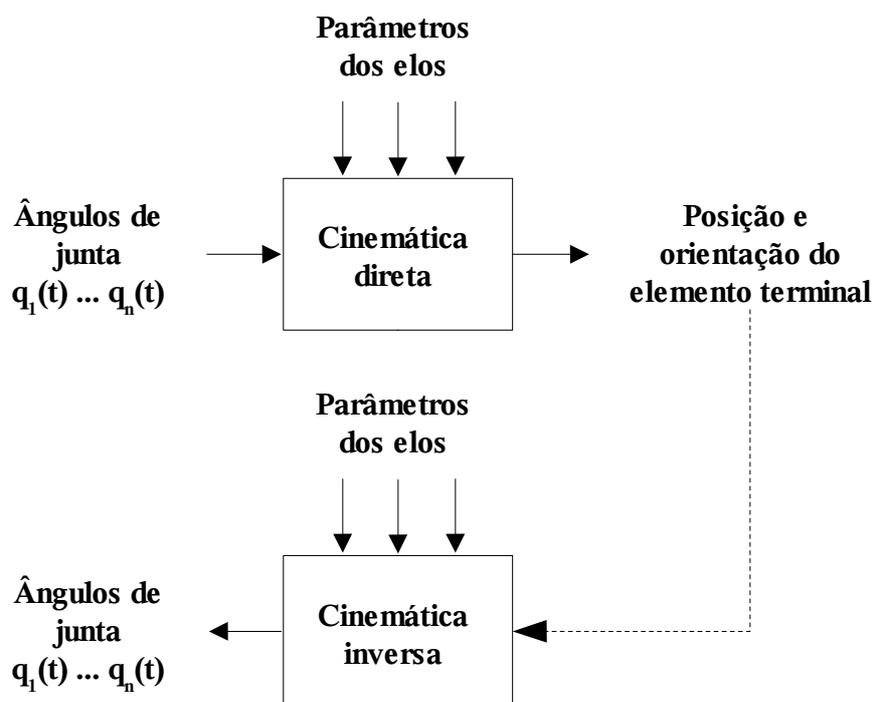


Figura 1. Diagrama de blocos da cinemática direta - inversa.

Desde que os elos de um braço robótico devam rodar e/ou transladar com respeito ao quadro de coordenadas de referência, o espaço de trabalho total do elemento terminal é devido às rotações angulares e às translações lineares dos referidos elos. Denavit e Hartenberg (1955) propuseram uma aproximação sistemática e generalizada utilizando a álgebra de matrizes para descrever e para representar a geometria espacial dos elos de um robô manipulador com respeito a um quadro de referência fixa. Este método usa uma matriz de transformação homogênea com quatro linhas e quatro colunas (4 X 4) de dimensão para descrever a relação espacial entre dois elos mecânicos rígidos adjacentes, reduzindo, assim, o problema da cinemática direta a achar uma matriz de transformação homogênea 4 X 4 equivalente, a qual relaciona a área de trabalho do “quadro de coordenadas da garra” com o quadro de coordenadas de referência.

## 2. CINEMÁTICA DIRETA

A álgebra vetorial e a álgebra de matrizes são utilizadas para desenvolver uma aproximação sistemática e generalizada para descrever e para representar a localização dos elos do braço robótico com respeito a um quadro de referência fixo. Desde que os elos de um robô devem ter rotação e/ou translação com respeito a um quadro de coordenadas de referência, um quadro de coordenadas agregado ao corpo do mecanismo será estabelecido ao longo do eixo de junta para cada elo. O problema da cinemática direta é reduzido a encontrar a matriz de transformação que relaciona o quadro de coordenada agregado ao corpo para um quadro de coordenadas de referência. Uma matriz de rotação 3 X 3 é usada para descrever as operações de rotação de um quadro agregado ao corpo com relação a um quadro de referência. As coordenadas homogêneas são então usadas para representar vetores de posição em um espaço tridimensional, e as matrizes de rotação serão expandidas para matrizes de transformação homogêneas 4 X 4 para incluir as operações translacionais dos quadros de coordenadas agregados ao corpo. Esta matriz de representação de um elo mecânico rígido para descrever a geometria espacial de um braço robótico foi usada pela primeira vez por Denavit e Hartenberg (1955). A vantagem de se usar a representação de ligações de Denavit-Hartenberg é sua generalização do algoritmo na solução de equações cinemáticas de um braço robótico.

### 2.1. Matriz de Transformação Homogênea

A matriz de transformação homogênea é uma matriz 4 X 4 a qual traça um vetor de posição expresso em coordenadas homogêneas a partir de um sistema de coordenadas para outro sistema de coordenadas. A matriz de transformação homogênea pode ser considerada como consistindo de quatro sub-matrizes, quais sejam a matriz de rotação; o vetor de translação; o vetor de perspectiva; e, a escala. A Figura (2) ilustra a composição da matriz de transformação homogênea.

$$T = \begin{bmatrix} R_{JB} & | & P_{JB} \\ - & | & - \\ f_{JB} & | & 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{matriz de} & | & \text{vetor de} \\ \text{rotação} & | & \text{posição} \\ - & | & - \\ \text{transformação} & | & \\ \text{de perspectiva} & | & \text{escala} \end{bmatrix}$$

Figura 2. Composição da Matriz de Transformação Homogênea.

Fu et al (1989), define a composição da matriz de transformação homogênea onde a sub-matriz 3x3 superior esquerda representa a matriz de rotação; a sub-matriz 3x1 superior direita representa o

vetor de posição da origem do sistema de coordenadas rotacionado com relação ao sistema de referência; a sub-matriz inferior esquerda 1x3 representa a transformação de perspectiva; e o quarto elemento diagonal é o fator de escala global. A matriz de transformação homogênea pode ser usada para explicar a relação geométrica entre o quadro do objeto agregado ao corpo OUVW e o sistema de coordenadas de referência OXYZ.

Deve-se salientar que a matriz de transformação homogênea é obtida através do método analítico conhecido como Representação de Denavit-Hartenberg.

## 2.2. Parâmetros de Denavit-Hartenberg

Para descrever as relações de translação e rotação entre elos adjacentes, Denavit e Hartenberg (1955) propuseram um método de matriz para estabelecer sistematicamente um sistema de coordenadas (quadro do objeto agregado ao corpo) para cada elo de uma cadeia articulada. A representação de Denavit-Hartenberg (D-H) resulta em uma matriz de transformação homogênea 4 X 4 representando o sistema de coordenadas de cada elo na junta com respeito ao sistema de coordenadas do elo anterior, tido como sistema de referência. Entretanto, através de transformações sequenciais, o elemento terminal expresso nas “coordenadas da mão” pode ser transformada e expressa em “coordenadas de base” que estabelecem o quadro inercial deste sistema dinâmico.

A representação de Denavit-Hartenberg de um elo rígido depende de quatro parâmetros geométricos associados com cada elo. Estes quatro parâmetros descrevem completamente uma junta revoluta ou prismática. Estes quatro parâmetros são:  $\theta_i$ , que é o ângulo da junta a partir do eixo  $x_{i-1}$  para o eixo  $x_i$  sobre o eixo  $z_{i-1}$  (fazendo uso da regra da mão direita);  $d_i$ , que é a distância da origem do quadro da  $i$ -ésima coordenada à intersecção do eixo  $z_{i-1}$  com o eixo  $x_i$  ao longo do eixo  $z_{i-1}$ ;  $a_i$  é a distância de erro a partir da intersecção do eixo  $z_{i-1}$  com o eixo  $x_i$  para a origem do  $i$ -ésimo quadro ao longo do eixo  $x_i$  (ou a menor distância entre os eixos  $z_{i-1}$  e  $z_i$ );  $\alpha_i$  é o ângulo do erro a partir do eixo  $z_{i-1}$  para o eixo  $z_i$  sobre o eixo  $x_i$  (usando a regra da mão direita).

Uma vez que o sistema de coordenadas de Denavit-Hartenberg tenha sido estabelecido para cada elo, uma matriz de transformação homogênea pode facilmente ser desenvolvida relacionando a coordenada  $i$ -ésima para a  $(i-1)$ -ésima coordenada do quadro em estudo. Essa matriz de transformação homogênea genérica definida por Denavit-Hartenberg pode ser observada na Fig. (3).

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 3. Matriz de Transformação Homogênea baseada nos Parâmetros D-H.

Salienta-se que esta matriz de transformação é usada na análise cada elo, assim sendo deve ser calculada a matriz de transformação para cada um com respeito ao sistema de coordenada inercial e, então, representar a matriz de transformação global ( ${}^0T_i$ ) pelo produto das sucessivas matrizes de transformação ( ${}^0A_1, {}^1A_2, \dots, {}^{i-1}A_i$ ), conforme Eq. (1).

$${}^0T_i = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \dots {}^{i-1}A_i \quad (1)$$

## 3. CINEMÁTICA INVERSA

Robôs baseados em computador são normalmente posicionados em espaço de variável de junta, entretanto objetos a serem manipulados são normalmente expressos em sistemas de coordenadas globais. Com o intuito de controlar a posição e a orientação de um elemento terminal de um robô a alcançar seu objeto, a solução da cinemática inversa é mais importante. Em outras palavras, dá-se a

posição e a orientação do elemento terminal de um braço robótico de  $i$  eixos como  ${}^0T_i$  e seus parâmetros de junta e de elo, a partir daí deseja-se encontrar os ângulos de junta  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_i)^T$  correspondentes do robô para que o elemento terminal possa ser posicionado conforme desejado.

O problema da cinemática inversa, de modo geral, pode ser resolvido recorrendo-se de diversos métodos, entre os quais a transformação inversa (Paul et al, 1981), a álgebra do parafuso (Kohli e Soni, 1975), as matrizes duplas (Denavit, 1956), o iterativo (Uicker et al, 1964) e as aproximações geométricas (Lee e Ziegler, 1984). Pieper (1968) apresentou a solução de cinemática para qualquer manipulador de 6 (seis) graus de liberdade no qual exista revolutos ou prismáticos para as primeiras 3 (três) juntas os eixos de junta das restantes 3 (três) juntas intersectam em um ponto. (Paul et al, 1981) apresentou uma técnica de transformação inversa usando as matrizes de transformação homogêneas 4 X 4 na resolução da solução de cinemática para a mesma classe de manipuladores simples como discutido por Pieper. Embora a solução resultante seja correta, ela sofre com o fato de que a solução não tem uma clara indicação de como selecionar a solução mais apropriada a partir de diversas soluções possíveis para uma configuração de mecanismo em particular.

Uma vez definida a matriz de transformação homogênea para o robô em estudo, define-se a sua matriz inversa, como pode ser visto na Fig. (4).

$$({}^{i-1}A_i)^{-1} = {}^iA_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) & 0 & -a_i \\ -\cos(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cdot \cos(\theta_i) & \sin(\alpha_i) & -d_i \cdot \sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \cdot \sin(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cdot \cos(\theta_i) & \cos(\alpha_i) & -d_i \cdot \cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 4. Matriz de Transformação Inversa para a Matriz de Transformação Homogênea baseada nos Parâmetros D-H.

Estando de posse destes resultados globais, parte-se para a análise de cada um dos elos, segundo as observações dos parâmetros D-H para o sistema em questão.

O primeiro passo é multiplicar-se a matriz de transformação inversa do elo pela matriz de transformação homogênea do mecanismo em estudo.

Em seguida, encontra-se uma nova matriz de transformação multiplicando-se a matriz de transformação inversa do elo por uma matriz de transformação genérica de referência, conforme ilustrado na Fig. (5).

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 5. Matriz Genérica de Referência.

Por fim, as matrizes resultados dos passos anteriores são comparadas, elemento a elemento, surtindo equações a serem utilizadas para encontrar-se as coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $d_1$  e  $d_2$  do braço robótico.

Como o ROBOTAU tem 3 graus de liberdade, esta seqüência se repete por duas vezes, ou seja pelo número de elos rígidos do sistema.

#### 4. RESULTADOS

A metodologia utilizada na obtenção dos resultados a respeito da cinemática direta e da cinemática inversa apontou para a análise inicial da estrutura do ROBOTAU e para o relacionamento dos parâmetros de Denavit-Hartenberg para cada eixo do robô. Em seguida, estes

valores foram relacionados através de matrizes de transformação para os mesmos eixos. Por fim, estas matrizes foram somadas originando uma matriz de transformação do robô, cujo posicionamento no ponto 3 refere-se ao somatório dos demais.

A Figura (6) ilustra os sistemas de eixos adotados para o manipulador disponível no Laboratório de Robótica e Instrumentação da UNITAU.

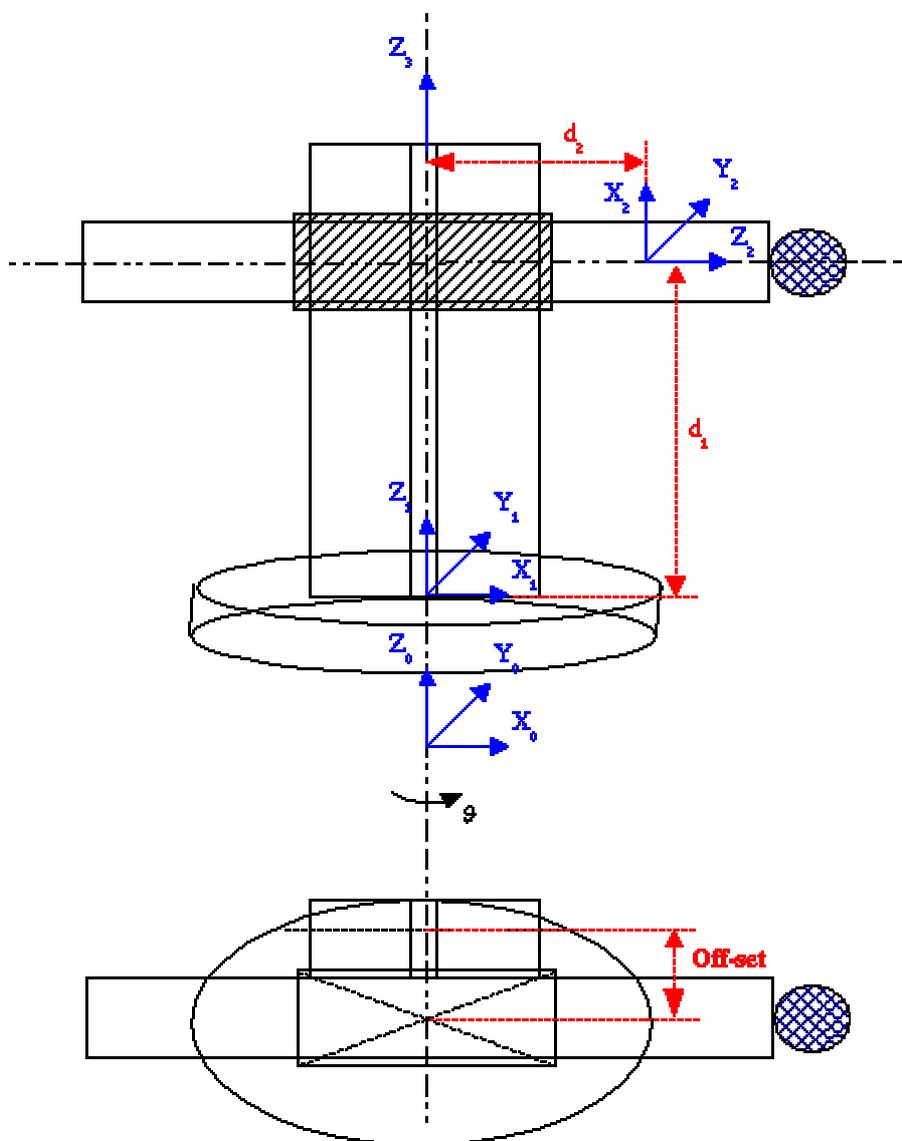


Figura 6. Representação dos Sistemas de Eixos Adotados para o ROBOTAU.

Os parâmetros observados na análise dos parâmetros de Denavit-Hartenberg para o ROBOTAU estão relacionados na Tab. (1).

Tabela 1. Parâmetros de DH para o Robô Prismático com 3 Graus de Liberdade.

	$i$	$i$	$d_i$	$a_i$
0	1	0	$d_1$	0
1	0	$90^\circ$	0	$a_1$
2	0	$90^\circ$	$d_2$	0

Com base na matriz de transformação homogênea genérica, ilustrada na Fig. (3), chega-se às

matrizes Eq. (2), Eq. (3) e Eq. (4) que representam as matrizes de transformação para cada eixo.

Em seguida, de posse desses resultados, chega-se à matriz de transformação homogênea para o mecanismo em estudo, conforme relacionado na Eq. (5).

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\cos(0)\cdot\sin(\theta_1) & \sin(0)\cdot\sin(\theta_1) & 0\cdot\cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(0)\cdot\cos(\theta_1) & -\sin(0)\cdot\cos(\theta_1) & 0\cdot\sin(\theta_1) \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} \cos(0) & -\cos(90)\cdot\sin(0) & \sin(90)\cdot\sin(0) & a_1\cdot\cos(0) \\ \sin(0) & \cos(90)\cdot\cos(0) & -\sin(90)\cdot\cos(0) & a_1\cdot\sin(0) \\ 0 & \sin(90) & \cos(90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} \cos(0) & -\cos(90)\cdot\sin(0) & \sin(90)\cdot\sin(0) & 0\cdot\cos(0) \\ \sin(0) & \cos(90)\cdot\cos(0) & -\sin(90)\cdot\cos(0) & 0\cdot\sin(0) \\ 0 & \sin(90) & \cos(90) & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$${}^0A_3 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & 0 & d_2\cdot\sin(\theta_1) + a_1\cdot\cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) & 0 & a_1\cdot\sin(\theta_1) - d_2\cdot\cos(\theta_1) \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

A cinemática direta do braço mecânico pode ser obtida, segundo definição, pelas coordenadas cartesianas do robô, sejam Px, Py e Pz. Essas coordenadas são encontradas na matriz de transformação homogênea, no vetor de translação componente dessa matriz. Assim, tem-se os valores relacionados na Fig. (7).

$$\begin{aligned}
P_x &= d_2 \cdot \sin(\theta_1) + a_1 \cdot \cos(\theta_1) \\
P_y &= a_1 \cdot \sin(\theta_1) - d_2 \cdot \cos(\theta_1) \\
P_z &= d_1
\end{aligned}$$

Figura 7. Descrição dos Elementos da Cinemática Direta do ROBOTAU.

Dentre os vários métodos propostos para solução do problema da cinemática inversa, escolheu-se o método de Paul. A resolução da cinemática inversa por esse método está precedida por 6 (seis) passos com vistas à elaboração das matrizes e das equações propostas pelo método.

Primeiro passo: a multiplicação da matriz de transformação inversa do primeiro eixo pela matriz de transformação homogênea global resulta em um nova matriz ilustrada na Eq. (6).

$$\begin{aligned}
({}^1A_0)^{-1} \cdot {}^3A_0 &= \begin{bmatrix} C(\theta_1) & S(\theta_1) & 0 & 0 \\ -S(\theta_1) & C(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C(\theta_1) & S(\theta_1) & 0 & d_2 \cdot S(\theta_1) + a_1 \cdot C(\theta_1) \\ S(\theta_1) & -C(\theta_1) & 0 & a_1 \cdot S(\theta_1) - d_2 \cdot C(\theta_1) \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} C^2(\theta_1) + S^2(\theta_1) & C(\theta_1) \cdot S(\theta_1) - S(\theta_1) \cdot C(\theta_1) & 0 & d_2 \cdot S(\theta_1) \cdot C(\theta_1) + a_1 \cdot C^2(\theta_1) + a_1 \cdot S^2(\theta_1) - d_2 \cdot C(\theta_1) \cdot S(\theta_1) \\ -S(\theta_1) \cdot C(\theta_1) + C(\theta_1) \cdot S(\theta_1) & -S^2(\theta_1) - C^2(\theta_1) & 0 & -d_2 \cdot S^2(\theta_1) - a_1 \cdot C(\theta_1) \cdot S(\theta_1) + a_1 \cdot S(\theta_1) \cdot C(\theta_1) - d_2 \cdot C^2(\theta_1) \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
({}^1A_0)^{-1} \cdot {}^3A_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}
\end{aligned}$$

Segundo passo: a multiplicação da matriz de transformação inversa do primeiro eixo pela matriz de transformação genérica resultando na matriz da Eq. (7).

$$\begin{aligned}
({}^1A_0)^{-1} \cdot {}^3T_0 &= \begin{bmatrix} C(\theta_1) & S(\theta_1) & 0 & 0 \\ -S(\theta_1) & C(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
({}^1A_0)^{-1} \cdot {}^3T_0 &= \begin{bmatrix} C(\theta_1) \cdot n_x + S(\theta_1) \cdot n_y & C(\theta_1) \cdot s_x + S(\theta_1) \cdot s_y & C(\theta_1) \cdot a_x + S(\theta_1) \cdot a_y & C(\theta_1) \cdot p_x + S(\theta_1) \cdot p_y \\ -S(\theta_1) \cdot n_x + C(\theta_1) \cdot n_y & -S(\theta_1) \cdot s_x + C(\theta_1) \cdot s_y & -S(\theta_1) \cdot a_x + C(\theta_1) \cdot a_y & -d_i + p_z \\ n_z & s_z & a_z & d_1 + p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}
\end{aligned}$$

O terceiro passo consiste na igualdade entre as relações Eq. (6) e Eq. (7), resultando as equações relacionadas na Fig. (8).

$$\begin{aligned}
1 &= C(\theta_1) \cdot n_x + S(\theta_1) \cdot n_y \\
-1 &= -S(\theta_1) \cdot s_x + C(\theta_1) \cdot s_y \\
-1 &= a_z \\
a_1 &= C(\theta_1) \cdot p_x + S(\theta_1) \cdot p_y \\
-d_2 &= -S(\theta_1) \cdot p_x + C(\theta_1) \cdot p_y \\
0 &= -d_1 + p_z \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Figura 8. Relações Resultantes da Igualdade dos Termos das Matrizes Eq. (6) e Eq. (7).

O quarto e o quinto passos são idênticos ao primeiro e ao segundo, respectivamente, com a diferença de relacionarem a matriz de transformação inversa para o segundo eixo. A Equação (8) e a Equação (9) representam as matrizes resultantes de tais operações.

$$\begin{aligned}
({}^2A_1)^{-1} \cdot {}^3A_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C(\theta_1) & S(\theta_1) & 0 & d_2 \cdot S(\theta_1) + a_1 \cdot C(\theta_1) \\ S(\theta_1) & -C(\theta_1) & 0 & a_1 \cdot S(\theta_1) - d_2 \cdot C(\theta_1) \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
({}^2A_1)^{-1} \cdot {}^3A_0 &= \begin{bmatrix} C(\theta_1) & S(\theta_1) & 0 & d_2 \cdot S(\theta_1) + a_1 \cdot C(\theta_1) - a_1 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \cdot S(\theta_1) - d_2 \cdot C(\theta_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
({}^2A_1)^{-1} \cdot {}^3T_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
({}^2A_1)^{-1} \cdot {}^3T_0 &= \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x - a_1 \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ -n_y & -s_y & -a_y & -p_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}
\end{aligned}$$

A sua vez, a Fig. (9) representa a igualdade dos termos da Eq. (8) com os da Eq. (9).

$$\begin{aligned}
C(\theta_1) &= n_x \\
S(\theta_1) &= s_x \\
-1 &= a_z \\
1 &= -a_y \\
d_2 \cdot S(\theta_1) + a_1 \cdot C(\theta_1) - a_1 &= p_x - a_1 \\
d_1 &= p_z \\
-a_1 \cdot S(\theta_1) - d_2 \cdot C(\theta_1) &= -p_y \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Figura 9. Relações Resultantes da Igualdade dos Termos das Matrizes Eq. (8) e Eq. (9).

Após análise das equações ilustradas na Fig. (8) e na Fig. (9) tem-se por resultados para as variáveis de junta  $d_1$  a Eq. (10) e para  $d_2$  a Eq. (11).

$$d_1 = p_z \quad (10)$$

$$d_2 = \sin(\theta_1) \cdot p_x - \cos(\theta_1) \cdot p_y \quad (11)$$

Para encontrar-se a variável de junta  $\theta_1$ , fez-se uso da Eq. (11), chegando-se ao resultado relacionado na Eq. (12).

$$\theta_1 = \arcsin \pm \sqrt{\frac{d_2^2 + P_y^2}{P_x^2 + P_y^2}} \quad (12)$$

A seguir, estão desenvolvidas 2 (duas) possibilidades de cálculo para a cinemática inversa, pelo método de transformação inversa de Paul (1981), baseadas na Eq. (11), chegando-se a Eq. (13) e a Eq. (14).

$$\begin{aligned} d_1 &= p_z \\ d_2 &= \sin(\theta_1) \cdot p_x - \cos(\theta_1) \cdot p_y \\ \theta_1 &=? \end{aligned}$$

Caso 1: Para  $\cos(\theta_1) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\theta_1)}$

$$\begin{aligned} d_2 &= P_x \cdot \sin(\theta_1) - P_y \cdot \cos(\theta_1) \\ d_2 &= P_x \cdot \sin(\theta_1) - P_y \cdot [\pm \sqrt{1 - \sin^2(\theta_1)}] \quad (1) \\ d_2^2 &= P_x^2 \cdot \sin^2(\theta_1) - P_y^2 \cdot [\pm 1 - \sin^2(\theta_1)] \\ d_2^2 &= P_x^2 \cdot \sin^2(\theta_1) - P_y^2 + P_y^2 \cdot \sin^2(\theta_1) \\ d_2^2 + P_y^2 &= \sin^2(\theta_1) \cdot [P_x^2 + P_y^2] \\ \sin^2(\theta_1) &= \frac{d_2^2 + P_y^2}{P_x^2 + P_y^2} \end{aligned}$$

$$\theta_1 = \arcsin \pm \sqrt{\frac{d_2^2 + P_y^2}{P_x^2 + P_y^2}} \quad (13)$$

Caso 2: Para  $\sin(\theta_1) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\theta_1)}$

$$\begin{aligned} d_2 &= P_x \cdot \sin(\theta_1) - P_y \cdot \cos(\theta_1) \\ d_2 &= P_x \cdot [\pm \sqrt{1 - \cos^2(\theta_1)}] - P_y \cdot \cos(\theta_1) \quad (1) \\ d_2^2 &= P_x^2 \cdot [\pm 1 - \cos^2(\theta_1)] - P_y^2 \cdot \cos^2(\theta_1) \\ d_2^2 &= P_x^2 - P_x^2 \cdot \cos^2(\theta_1) - P_y^2 \cdot \cos^2(\theta_1) \\ P_x^2 - d_2^2 &= P_x^2 \cdot \cos^2(\theta_1) + P_y^2 \cdot \cos^2(\theta_1) \\ \cos^2(\theta_1) &= \frac{P_x^2 - d_2^2}{P_x^2 + P_y^2} \end{aligned}$$

$$\theta_1 = \arccos \pm \sqrt{\frac{P_x^2 - d_2^2}{P_x^2 + P_y^2}} \quad (14)$$

Para solução da cinemática inversa resolveu-se, para fins didáticos, desenvolver os cálculos pelo método algébrico. Este método aplica regras algébricas às coordenadas cartesianas obtidas com vistas a relaciona-las às coordenadas de junta. As equações (15) e (16) ilustram as relações.

$$\begin{aligned} P_x &= d_2 \cdot \sin(\theta_1) + a_1 \cdot \cos(\theta_1) && \times \cos(\theta_1) \\ P_y &= a_1 \cdot \sin(\theta_1) - d_2 \cdot \cos(\theta_1) && \times \sin(\theta_1) \\ P_x &= d_1 \\ P_x \cdot \cos(\theta_1) &= d_2 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + a_1 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) \\ P_y \cdot \sin(\theta_1) &= a_1 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_1) - d_2 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \sin(\theta_1) \\ P_x \cdot \cos(\theta_1) + P_y \cdot \sin(\theta_1) &= a_1 \cdot \cos^2(\theta_1) + a_1 \cdot \sin^2(\theta_1) \\ P_x \cdot \cos(\theta_1) + P_y \cdot \sin(\theta_1) &= a_1 \cdot [\cos^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_1)] \\ P_x \cdot \cos(\theta_1) + P_y \cdot \sin(\theta_1) &= a_1 \end{aligned}$$

Caso 1: Para  $\cos(\theta_1) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\theta_1)}$

$$\begin{aligned} P_x \cdot \cos(\theta_1) + P_y \cdot \sin(\theta_1) &= a_1 \\ P_x \cdot [\pm \sqrt{1 - \sin^2(\theta_1)}] + P_y \cdot \sin(\theta_1) &= a_1 \quad ( )^2 \\ P_x^2 \cdot [\pm 1 - \sin^2(\theta_1)] + P_y^2 \cdot \sin^2(\theta_1) &= a_1^2 \\ P_x^2 - P_x^2 \cdot \sin^2(\theta_1) + P_y^2 \cdot \sin^2(\theta_1) &= a_1^2 \\ P_y^2 \cdot \sin^2(\theta_1) - P_x^2 \cdot \sin^2(\theta_1) &= a_1^2 - P_x^2 \\ \sin^2(\theta_1) &= \frac{a_1^2 - P_x^2}{P_y^2 - P_x^2} \\ \theta_1 &= \arcsin \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - P_x^2}{P_y^2 - P_x^2}} \quad (15) \end{aligned}$$

Caso 2: Para  $\sin(\theta_1) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\theta_1)}$

$$\begin{aligned} P_x \cdot \cos(\theta_1) + P_y \cdot \sin(\theta_1) &= a_1 \\ P_x \cdot \cos(\theta_1) + P_y \cdot [\pm \sqrt{1 - \cos^2(\theta_1)}] &= a_1 \quad ( )^2 \\ P_x^2 \cdot \cos^2(\theta_1) + P_y^2 \cdot [\pm 1 - \cos^2(\theta_1)] &= a_1^2 \\ P_x^2 \cdot \cos^2(\theta_1) + P_y^2 - P_y^2 \cdot \cos^2(\theta_1) &= a_1^2 \\ P_x^2 \cdot \cos^2(\theta_1) - P_y^2 \cdot \cos^2(\theta_1) &= a_1^2 - P_y^2 \\ \cos^2(\theta_1) &= \frac{a_1^2 - P_y^2}{P_x^2 - P_y^2} \\ \theta_1 &= \arccos \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - P_y^2}{P_x^2 - P_y^2}} \quad (16) \end{aligned}$$

## 5. CONCLUSÃO

Para validar os cálculos propostos, é escolhido um ponto qualquer dentro do volume de trabalho para o ROBOTAU, na forma de coordenadas cartesianas ( $P_{xyz}$ ), as quais representam a cinemática direta, e lhe são aplicadas as equações para cálculo da cinemática inversa. Em seguida, os valores encontrados substituem as variáveis correspondentes nas equações que representam o cálculo da cinemática direta e se deve encontrar o valor adotado inicialmente.

As características do ROBOTAU apontam para as dimensões do *offset* ( $a_1$ ) e dos eixos posicionadores ( $d_1$  e  $d_2$ ), quais sejam:

$$a_1 = 13,5 \text{ cm};$$

$$d_1 = 210 \text{ cm};$$

$$d_2 = 210 \text{ cm}.$$

Recorrendo-se à Fig. (7), podem ser extraídas as equações que são usadas para o cálculo da cinemática direta, Eq. (17), Eq. (18) e Eq. (19).

$$P_x = d_2 \cdot \sin(\theta_1) + a_1 \cdot \cos(\theta_1) \quad (17)$$

$$P_y = a_1 \cdot \sin(\theta_1) - d_2 \cdot \cos(\theta_1) \quad (18)$$

$$P_z = d_1 \quad (19)$$

As Equações (10), (11) e (12) são a referência para o cálculo da cinemática inversa.

Cabe salientar que os resultados para a cinemática inversa foram diferenciados para cada um dos métodos estudados, face ao já exposto com relação ao método de transformação inversa de Paul (1981) onde se observou a existência de várias soluções possíveis de serem alcançadas por este método, porém a solução mais adequada nem sempre se apresenta de forma clara e direta.

## 6. REFERÊNCIAS

- Denavit, J. Hartenberg, R.S., 1955, "A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices", ASME Journal of Applied Mechanics, pp. 215-221.
- Fu, K.S., Gonzalez, R.C. and Lee, K.G.S., 1987, "Robotics: Sensing, Vision, Control, and Intelligence", McGraw-Hill, USA, 600 p.
- Koivo, A.J., 1989, "Fundamentals for Control of Robotic Manipulators", John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 468 p.
- Paul, R.P., 1982, "Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control - The Computer Control of Robot Manipulators", The MIT Press, Cambridge, USA, 279 p.

## 7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material contido neste artigo.

## CALCULUS AND VALIDATION OF DIRECT KINEMATICS AND OF INVERSE KINEMATICS FOR USING IN PRISMATIC ROBOT TRAJECTORY

**Wendell de Queiróz Lamas**

Universidade de Taubaté, Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação, Rua Daniel Danelli, s/n - Taubaté - SP, wendellqueiroz@netscape.net

**Flávio Groh**

Universidade de Taubaté, Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação, Rua Daniel Danelli, s/n - Taubaté - SP, flaviogroh@aol.com

**Francisco José Grandinetti**

Universidade de Taubaté, Pró-reitoria de Pesquisa e Pós-graduação, Rua Daniel Danelli, s/n - Taubaté - SP, ffg64@bol.com.br

**Abstract.** *This work examines a particular method application of direct and inverse kinematics calculus for a mechanical arm with cylindrical configuration and 3-DOF, there is a rotational movement in its base and a translational in both location links, and its validation rises from these results application in trajectory orientation for that mechanism. This achievement lets describe mathematical models corresponding to ROBOTAU, like this the realization of kinematics particular study, in their forms direct and inverse, for this system. Adopted procedure for resolution of direct kinematics of this robot is based on possible movement preliminary analysis and recognition of types of system components links and joints. After that, established this information, adopt coordinate system for studied axis and determine robotics arm DH parameters. Transform matrices are formed for each joint and global transform matrix is written. The inverse kinematics is determined by specific calculus method, based on coordinates obtained in direct kinematics calculus. Among vary possibilities, was selected inverse transformation method, proposed by Paul (1981). To validate obtained results on direct and inverse kinematics calculus of this robot, was used mathematical simulation software, applying matrices models was found. After that, a trajectory definition for the mechanical arm can prove realized and validated calculus efficiency, making also possible to determine its work space.*

**Keywords:** *kinematics, direct, inverse, validation, trajectory.*