



## OTIMIZAÇÃO CONJUNTA DE FORMA E DE MALHA DE UM ELEMENTO ESTRUTURAL

**Antonio Pedro Clapis**

Universidade Federal de Uberlândia – UFU  
Faculdade de Engenharia Mecânica – FEMEC  
[apclapis@mecanica.ufu.br](mailto:apclapis@mecanica.ufu.br)

**Eliane Regina Flôres Oliveira**

Universidade Federal de Uberlândia – UFU  
Faculdade de Física – FAFIS  
[eliane@mecanica.ufu.br](mailto:eliane@mecanica.ufu.br)

**Resumo.** *Desenvolve-se um modelo computacional que venha auxiliar a melhoria do projeto de um elemento estrutural, com a otimização de sua forma e a necessidade de obtenção de resultados confiáveis adaptando-se a malha final. O processo é automático com a utilização de um elemento finito triangular linear com expansão na interpolação através de seus lados com hierárquico de grau  $p=2$ . Tanto a forma como a malha são otimizados utilizando-se o método adaptativo de relocação nodal (método  $r$ ). Para a forma utiliza-se o balanceamento da energia de distorção dos elementos finitos através das análises sobre um modelo físico e sobre um modelo geométrico. Para a malha, da forma final otimizada, utiliza-se o balanceamento do erro de discretização, determinado baseando-se na norma da energia de deformação. Exemplos de aplicação encontrados na bibliografia relativa ao assunto são utilizados para avaliação do modelo proposto.*

**Palavras-chave:** *elemento finito hierárquico, método adaptativo, otimização estrutural.*

### 1. INTRODUÇÃO

Otimização de forma de elementos estruturais é assunto de grande interesse para engenheiros projetistas. Por muito tempo, este campo de pesquisa tem merecido grande atenção da comunidade de análise numérica e muitas técnicas de otimização tem sido desenvolvidas e usadas com sucesso.

Como a análise estrutural é uma parte integrante do sistema de otimização, o progresso da otimização estrutural muitas vezes depende fundamentalmente do desenvolvimento de um bom modelo de elementos finitos. Vários fatores afetam a confiabilidade do modelo de elementos finitos dentre os quais podem ser citadas a discretização do modelo, o tipo de elemento, as propriedades dos materiais e os parâmetros de análise do problema. Em todas as análises numéricas que usam este tipo de ferramenta a questão mais comum é a geração e regeneração de malhas em busca da precisão das soluções.

Kikuchi (1983) define que o método adaptativo de elementos finitos proporciona uma capacidade de análise iterativa que dá uma posição estimada de erros de aproximação tal que os usuários podem controlar qualitativamente os modelos. Baseado nisto, um procedimento adaptativo automático gerador de malhas de elementos finitos otimizadas, não só aumenta a produtividade do engenheiro como também implica em maior confiabilidade das soluções.

A formulação matemática do problema de obtenção de malhas ótimas quase nunca é única, já que diferentes critérios de “ótimalidade” podem ser usados. Como exemplo pode-se citar a situação

em que se utiliza como critério, a minimização dos erros de discretização da malha de elementos finitos onde diferentes medidas de erros podem ser utilizadas, acarretando diferentes malhas ótimas.

Uma eficiente formulação do elemento é particularmente importante nestes problemas onde muitas malhas podem ser geradas na busca da solução de um problema específico. Elementos triangulares têm um papel importante nos métodos adaptativos numa análise com o MEF, Peraire et al (1987), Roberti and Melkanoff (1987) e Zienkiewicz et al (1989). Esses elementos possuem uma polinomial completa e, portanto, oferecem certas vantagens sobre os elementos quadrilaterais os quais empregam polinomiais com termos “parasíticos”, Shephard et al (1980), Serpa (1991) e Zienkiewicz et al (1971). Observa-se, ainda, pelas discussões em Zienkiewicz et al (1983) e Szabo et al (1981), que as vantagens do elemento triangular aumentam com o uso da formulação hierárquica.

O problema de otimização de forma, em que a fronteira do domínio constitui uma incógnita, é de enorme interesse para os projetos em engenharia. O mesmo tem sido objeto de estudos recentes, se beneficiando do desenvolvimento verificado nas técnicas de programação matemática e nos métodos de representação gráfica e modelação geométrica, bem como da evolução dos programas de elementos finitos. Tais estudos possibilitam o surgimento de várias técnicas, tanto para a modelagem da geometria, como para o cálculo das sensibilidades, e mesmo para o algoritmo de otimização.

Levando-se em conta que o progresso da otimização muitas vezes depende do desenvolvimento de um bom modelo de elementos finitos, este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma técnica para estimar erros numéricos que aparecem na discretização de problemas bidimensionais, utilizando-se o elemento finito triangular hierárquico com função de forma quadrática. Verifica-se a existência da homogeneidade do erro ao longo do domínio nos elementos onde caso esta não ocorra, os nós livres pré estabelecidos serão realocados em função da diferença de gradiente do erro, reiniciando-se uma nova análise do modelo físico otimizando a malha automaticamente. São avaliados dois métodos adaptativos usando realocação nodal (método r): método heurístico e método geométrico.

É proposto um método de otimização de forma com base no método de otimização de malha delineado anteriormente. Enquanto o método adaptativo proposto para otimizar a malha leva em consideração o desbalanceamento do erro de discretização do modelo, a formulação da otimização de forma leva em conta a densidade de energia de deformação por distorção dos elementos finitos. O critério de otimalidade utilizado foi o da máxima densidade de energia de deformação por distorção.

Um código numérico em linguagem Fortran F32 é implementado permitindo o acoplamento do otimizador de forma com o otimizador de malha de forma iterativa e automática.

A avaliação da potencialidade dos métodos é feito através da otimização de algumas estruturas citadas na literatura e, com os resultados obtidos verifica-se a eficiência e a razão de convergência dos métodos propostos.

## 2. MÉTODOS ADAPTATIVOS

Vários fatores afetam a confiabilidade das soluções por elementos finitos dentre os quais podem ser citados a discretização do modelo, o tipo de elemento, as propriedades dos materiais e os parâmetros de análise do problema. A maior tarefa nas análises numéricas, é a geração e regeneração das malhas de elementos finitos em busca da precisão das soluções. Portanto, um processo adaptativo para gerar automaticamente e aperfeiçoar uma malha de elementos finitos não apenas aumentará a produtividade do engenheiro mas também assegurará mais precisão à solução.

Os métodos adaptativos atualmente utilizados são: o método r, que conserva fixo o número de graus de liberdade; o método h, que refina os elementos da malha com a introdução de novos elementos; o método p, que aumenta a ordem das polinomiais de interpolação e os métodos que associam h com p e p com r. O método r é o mais antigo dos métodos adaptativos. As vantagens e

as desvantagens da otimização da malha através de reposicionamento dos pontos nodais dos elementos finitos são discutidos por Cheng (1993).

A limitação do método r é a fixação dos graus de liberdade em modelos de elementos finitos. A menos que a análise comece com um número suficiente de elementos, as iterações podem apenas melhorar as soluções, mas a convergência resultante não pode necessariamente ser corrigida. Em resumo o método r possui as seguintes características importantes: conserva o número de graus de liberdade fixo, produz um mau condicionamento numérico devido a sua limitação inerente de distorcer os elementos e, sua formulação envolve geralmente funções não lineares.

Um ponto estudado neste trabalho é a formulação na busca de implementar um estimador de erro, de maneira a automatizar numericamente a otimização de malhas. O programa desenvolvido utiliza um estimador de erro de discretização dos elementos usando como base a norma da energia de deformação, correspondente às variáveis hierárquicas, apesar de existirem algumas limitações, tais como: distorção do elemento, complexidade geométrica e problema de convergência.

Cheng (1993) mostrou que dependendo da discretização inicial o método r é muito eficaz além de ser de simples implementação. Por isso é que foi o escolhido visando obter-se um novo formato da malha de forma tal que se tenha controle na uniformidade do erro ao longo do modelo.

## 2.1 - Otimização de malha de elementos finitos, utilizando o método de relocação nodal

### 2.1.1- Método 1 – Método Heurístico

O erro por elemento pode ser estimado, em termos da energia de deformação, correspondente às variáveis hierárquicas como:

$$\|e\|_e^2 = \{u_h\}^T [K_{hh}] \{u_h\} \quad (1)$$

onde:

$\{\alpha, \beta\}$  representa os novos graus de liberdade hierárquicos introduzidos, conforme mostra a Fig. 1 e  $K_{hh}$  a matriz de rigidez dos parâmetros hierárquicos.

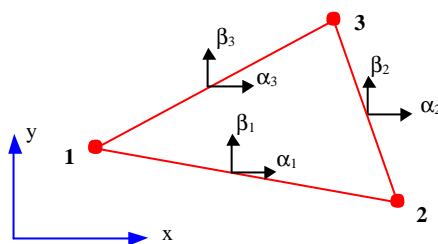


Figura 1 - Parâmetros hierárquicos do elemento triangular

Considerando  $\|e\|_e^2$  como uma pressão negativa agindo num elemento finito do modelo geométrico da estrutura, Clapis (1999), o vetor das forças nodais equivalentes,  $\{D\}_e$  para um elemento triangular linear é dado por,

$$\{D\}_e = \|e\|_e^2 \begin{Bmatrix} y_{32} \\ -x_{32} \\ -y_{31} \\ x_{31} \\ y_{21} \\ -x_{21} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Impondo-se as condições geométricas de que a forma do contorno não deve ser alterada e levando-se em conta a superposição dos vetores  $\{D\}_e$  para todos os elementos, obtém-se um vetor de carga nodal equivalente global,  $\{D\}_G$ .

Tem-se portanto novas condições de contorno e conseqüentemente uma nova equação de equilíbrio global. A direção  $\{d\}_o$  do movimento dos nós com uma ou duas direções livres para se moverem pode ser obtida de:

$$[K]_o \{d\}_o = \{D\}_G \quad (3)$$

onde:

$[K]_o$  é a matriz de rigidez obtida do modelo geométrico,  $\{d\}_o$  é a “direção de busca” onde procura-se homogeneizar a distribuição da densidade do erro de discretização e  $\{D\}_G$  é o vetor carga nodal equivalente global.

Através de uma busca unidimensional, utilizando-se o método da secante, calcula-se o fator de escala ( $\lambda^*$ ), o qual minimizará a norma do vetor desbalanceamento ou seja:

$$\underset{\lambda}{MIN} \left\| \{D(\{x\} + \lambda\{d\}_o)\} \right\| \quad (4)$$

onde  $\{x\}$  é o vetor de coordenadas dos nós móveis.

Devido a relocação nodal, a densidade do erro de discretização também se altera e o processo de busca é realizado de modo iterativo com a análise de novos modelos físicos discretizados. O programa executa automaticamente o balanceamento dos erros entre os elementos, usando o método do gradiente conjugado para gerar novas direções de busca no caso de não haver convergência numa determinada direção. A condição de ótimo para o problema é que o erro de discretização seja uniformemente distribuído ao longo de todo o domínio.

### 2.1.2- Método 2 – Método Geométrico

Considere um nó e os elementos finitos circunvizinhos ao mesmo, Fig. 2. Sendo o centróide de cada elemento o ponto onde atua uma força atrativa, com origem no nó “comum” e intensidade o indicador de erro do elemento, a resultante destas forças nos fornece uma nova posição do nó, caso exista desequilíbrio entre os indicadores dos erros de discretização na região considerada, Cheng (1993).

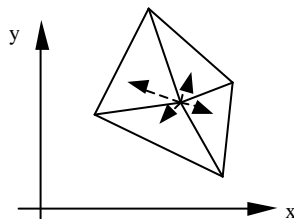


Figura 2 – Esquema de reposicionamento nodal

A soma das contribuições de todos os elementos circunvizinhos, para a coordenada x, vale:

$$x_n^m = x_n^{m-1} + \frac{\sum e^* (x_* - x_n^{m-1})}{\sum e^*} \quad (5)$$

onde m indica o número da iteração,  $x_n$  e  $x_*$  são, respectivamente, a posição do nó considerado e dos centróides dos elementos circunvizinhos, e  $e^*$  é o erro por elemento finito. Este pode ser estimado, em termos da norma da energia de deformação, Eq. (1), onde o critério de parada é a homogeneização do mesmo ao longo do domínio.

Analogamente para a coordenada y, tem-se:

$$y_n^m = y_n^{m-1} + \frac{\sum e^* (y_* - y_n^{m-1})}{\sum e^*} \quad (6)$$

Nota-se que apenas os nós dos vértices do elemento tem a permissão de moverem sendo que os nós do meio do lado, se houver, não podem participar do processo de reposicionamento. Suas coordenadas são localizadas no meio entre os nós da extremidade. Este processo tem natureza iterativa onde os nós se movem em direção aos elementos de indicador de erro maior até não se ter diferença nos indicadores de erro dos elementos ou a relocação dos nós tornar-se suficientemente pequeno.

## 2.2 - Otimização de forma

### 2.2.1 – Critério da densidade da energia de distorção

O critério da máxima densidade de energia de distorção, equivalente ao critério de von Mises, estabelece que a densidade da energia de deformação distorcional unitária, no ponto mais crítico de uma peça, não deve exceder a densidade da energia de deformação distorcional unitária no limite elástico, no ensaio de tração (ou compressão).

A densidade de energia de deformação distorcional é aquela energia associada com a mudança de forma do corpo. A densidade de energia de deformação total  $U_D$  pode ser dividida em duas partes: uma que causa a mudança volumétrica  $U_V$  e a outra que causa a distorção  $U_D$ , Boresi (1992).

Em termos das tensões principais infinitesimais a densidade de energia de deformação de distorção pode ser escrita como:

$$U_D = \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)^2 + (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_3)^2 + (\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1)^2}{12 G} \quad (7)$$

onde G é o módulo de cisalhamento.

Sabendo-se que a tensão cisalhante octaédrica pode ser escrita como:

$$t_{oc} = \frac{1}{3} \sqrt{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)^2 + (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_3)^2 + (\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1)^2} \quad (8)$$

Substituindo-se (8) em (7) obtém-se a seguinte equação que representa a densidade de energia de deformação por distorção:

$$U_D = \frac{3(1+\nu)}{2 E} t_{oc}^2, \quad (9)$$

onde para a máxima energia de distorção no estado uniaxial de tensão ( $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_{yp}, \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_3 = 0$ ) tem-se:

$$U_{D_{\max}} = \frac{\mathbf{s}_{yp}^2}{6G} \quad \text{ou} \quad U_{D_{\max}} = \frac{\mathbf{t}_{yp}^2}{2G} \quad (10)$$

onde

$\sigma_{yp}$  = tensão de escoamento no teste uniaxial

$\tau_{yp}$  = tensão de escoamento no teste de torção

### 2.2.2 – Algoritmo proposto de otimização de forma

Baseando-se no significado da palavra heurístico, conjunto de regras e métodos que visam à descoberta, à invenção ou a resolução de problemas, é proposto um método de otimização de forma com base no método de otimização de malha delineado anteriormente. Enquanto o método adaptativo proposto leva em consideração o desbalanceamento do erro de discretização do modelo, a formulação da otimização de forma leva em conta o desbalanceamento da densidade de energia de deformação por distorção dos elementos finitos. O critério de otimalidade utilizado foi o da máxima densidade de energia de deformação por distorção, de forma que os elementos com menor energia migrem para as áreas onde as densidades de energia são maiores.

Considere-se  $U_D^e$  como uma pressão negativa agindo num elemento finito do modelo geométrico da estrutura, o vetor das forças nodais equivalentes,  $\{\mathbf{D}\}_e$ , para um elemento triangular é dado por:

$$\{\mathbf{D}\}_e = U_D^e \begin{Bmatrix} y_{32} \\ -x_{32} \\ -y_{31} \\ x_{31} \\ y_{21} \\ -x_{21} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Da superposição dos vetores  $\{\mathbf{D}\}_e$  para todos os elementos obtém-se um vetor de carga nodal equivalente global,  $\{\mathbf{D}\}_G$ . A direção  $\{\mathbf{d}\}_0$  do movimento dos nós pode ser obtido de:

$$[\mathbf{K}]_0 \{\mathbf{d}\}_0 = \{\mathbf{D}\}_G \quad (12)$$

onde  $[\mathbf{K}]_0$  é a matriz de “rigidez” obtida do modelo geométrico.

Portanto,  $\{\mathbf{d}\}_0$ , passa a ser uma “direção de busca” onde procura-se homogeneizar a distribuição da densidade de energia de distorção,

$$\underset{\mathbf{a}}{\text{MINIMIZAR}} \quad \|\{\mathbf{D}(\{\mathbf{x}\} + \mathbf{a} \{\mathbf{d}\}_0)\}\| \quad (13)$$

onde  $\{\mathbf{x}\}$  é o vetor das coordenadas nodais dos nós livres para realocarem-se nas duas ou em uma das direções.

### 3. AUTOMAÇÃO DOS ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO DE FORMA E DE MALHA

O código numérico implementado em linguagem Fortran F32, Fig. 3, acopla o otimizador de forma com o otimizador de malha de forma iterativa e automática.

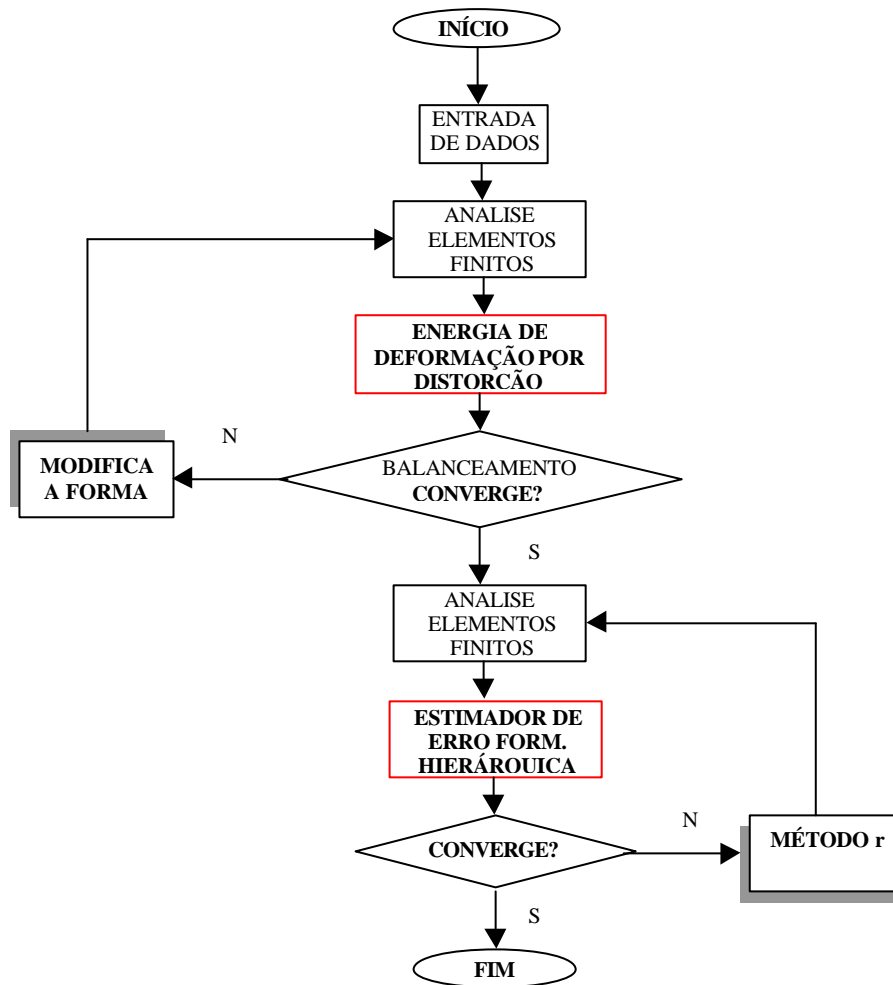


Figura 3 – Fluxograma de acoplamento do algoritmo otimizador de forma com o otimizador de malha

O otimizador de forma calcula a energia de deformação de distorção por elemento finito e busca iterativamente a forma ótima: após a solução do modelo físico a forma é alterada através de uma nova equação de equilíbrio, com a matriz de rigidez levando em conta as variáveis livres da forma. Estas variáveis, solução da nova equação de equilíbrio, tendo agora como vetor carregamento os desbalanceamentos das energias de distorção, modificam o contorno baseando-se nas novas condições geométricas de contorno.

O otimizador de malha permite através de um módulo adaptativo, estimar o erro em problemas bidimensionais, utilizando elementos triangulares hierárquicos com funções de forma de grau 2. Automaticamente, segundo a formulação, verifica-se se existe uma homogeneidade do erro ao longo dos elementos e, caso esta não ocorra, os nós livres, pré-estabelecidos, serão deslocados em função da diferença de gradiente do erro reiniciando-se uma nova análise do modelo físico com um novo modelo de discretização.

**Exemplo de aplicação** – Devido a sua dupla simetria, mostra-se somente um quarto do modelo físico, Fig. 4(a) e somente um quarto do modelo geométrico, Fig. 4(b), de uma placa de espessura 1,0 mm submetida à tração de  $125 \text{ N/mm}^2$ , com módulo de elasticidade  $E = 2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$  e

coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . O domínio foi discretizado com 32 elementos finitos triangulares hierárquicos com funções de forma de grau 2.

A figura 5 apresenta a forma final da placa e a otimização da malha utilizando o método heurístico (b) e o método geométrico (c).

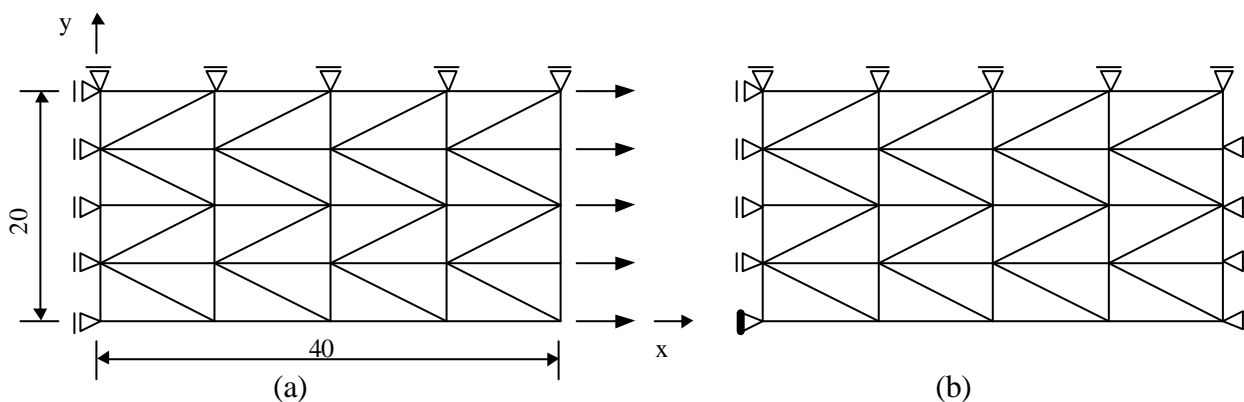
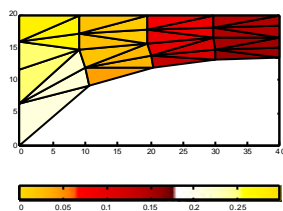
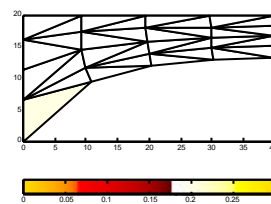
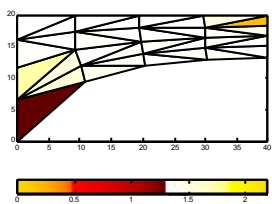


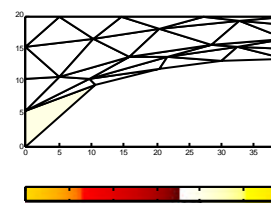
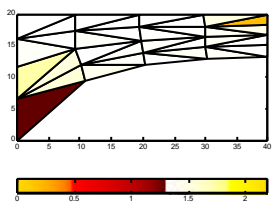
Figura 4 – Um quarto de placa tracionada: (a) modelo físico, (b) modelo geométrico



(a) Otimização de forma – 278 iterações



(b)



(c)

Figura 5 – (a) Otimização de forma final, (b) método heurístico, (c) método geométrico



Tabela 1 – Erros por elemento

Elemento	Forma otimizada Erro inicial	Otimização de Malha Método Heurístico	Otimização de Malha Método Geométrico
1	2.191174	2.428500E-02	2.497169E-02
2	2.473081E-01	1.189856E-03	6.217425E-04
3	2.066274E-01	7.335092E-04	2.311274E-03
4	4.290413E-01	2.629987E-03	1.135969E-03
5	6.774571E-02	6.767084E-04	1.094526E-03
6	2.072238E-02	8.372062E-04	6.431725E-04
7	1.393173E-02	8.839565E-04	4.987532E-04
8	1.229644E-03	9.140649E-04	6.399896E-04
9	1.372671E-01	8.667409E-04	1.153504E-03
10	6.572072E-02	2.513173E-04	9.366649E-04
11	5.058056E-02	3.469718E-04	1.498412E-03
12	2.320584E-02	3.390697E-04	1.273426E-03
13	5.971841E-02	3.128323E-04	5.244081E-04
14	1.981397E-02	1.840835E-04	2.802002E-04
15	8.964916E-03	3.687757E-04	3.398948E-04
16	2.228327E-02	8.684052E-04	8.467504E-04
17	2.168512E-02	2.915656E-04	5.718893E-04
18	9.148778E-02	1.524131E-04	3.970376E-04
19	9.299842E-03	2.577795E-04	7.193620E-04
20	4.377422E-02	2.476977E-04	2.247860E-03
21	2.858675E-02	1.713733E-04	6.270391E-04
22	1.065695E-02	1.909552E-04	6.145454E-04
23	3.290315E-02	2.920835E-04	9.858983E-04
24	2.221642E-02	4.230796E-04	1.700999E-03
25	6.924326E-02	3.669001E-04	1.037353E-03
26	8.606635E-03	2.499745E-04	1.062402E-04
27	2.658546E-02	2.880578E-04	9.539691E-05
28	7.767927E-02	2.977556E-04	3.092370E-03
29	7.230744E-02	2.844484E-04	1.169518E-03
30	1.444705E-01	2.863866E-04	1.640087E-04
31	1.066790	4.680355E-04	1.424453E-04
32	1.746358E-01	5.849716E-04	7.526134E-03

#### 4. CONCLUSÕES

O problema de otimização de forma foi formulado utilizando um método iterativo consistente baseado num princípio heurístico em vez de uma formulação puramente matemática, acoplado ao método dos elementos finitos, o qual basicamente foi a ferramenta principal que nos levou a atingir os objetivos previamente estabelecidos, que é o acoplamento do otimizador de forma com o otimizador de malha de forma iterativa e automática.

Observa-se no exemplo de aplicação que o modelo proposto se comportou muito bem pois a forma otimizada, de acordo com os critérios estabelecidos, convergiu para uma geometria que fisicamente era de se esperar. Apesar de apresentar-se como um modelo simples de implementação, na bibliografia relacionada com o assunto, não se encontra exemplos similares para efeito de comparação.

De acordo com a Tab. 1, otimizando-se a malha final, os erros por elemento obtidos tanto pelo método heurístico como pelo método geométrico diminuem, mostrando-se principalmente para o caso heurístico que pequenas alterações na malha podem alterar substancialmente o resultado tornando-se o modelo final mais confiável.

#### 5. REFERÊNCIAS

Boresi, A. p., Schmidt, R. J., Sidebottom, O. M., 1992, "Advanced Mechanics of Materials", fifth edition, John Wiley & Sons.

- Cheng, Jung-Ho, 1993, "Adaptative grid optimization for structural analysis- geometry-based approach", *Comp. Meth. in Applied Mech. and Eng.*, 107, 1-22.
- Clapis, A. P., 1999, "Um método heurístico de otimização de forma de componentes estruturais no estado plano de elasticidade linear", Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- Kikuchi, N., Taylor, J. E., 1983, "Optimal modification of shape for two-dimensional elastic bodies", *J. Struct. Mech.*, vol. 11(1), pp. 111-135.
- Peraire, J., Vahdati, M., Morgan K., and Zienkiewicz, O. C., 1987, "Adaptive remeshing for compressible flow computations", *J. Comp Phys.*, 72, 449-466.
- Roberti P., Melkanoff M. A., 1987, "Self-Adaptive Stress Analysis Based on Stress Convergence", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, 1973-1992.
- Serpa, L. A., 1991, "Otimização de malhas de elementos finitos pelo método da relocação dos nós na elasticidade linear", Tese de Mestrado, UNICAMP, Campinas.
- Shephard, M. S., Gallagher, R. H., Abel, J. F., 1980, "The synthesis for near optimum finite element meshes with interactive computer graphics", *Int. J. Num. Mech. Eng.*, 15, 1021-1039.
- Szabo, B. A., Basu, P. K. and Dunavant, D. A., 1981, "Quality control in finite element analysis", *Proc. Int. Conf. On Computing in Civil Engineering*, New York, May, pp 15-26.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor R. L., Too J. M., 1971, "Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3, 275-290.
- Zienkiewicz, O. C., Gago, J. P. de S. R. and Kelly, D. W., 1983, "The hierarchical concept in finite element analysis", *Comp. Struct.*, 16, 53-65.
- Zienkiewicz, O. C., Zhu, J. Z. and Gong, N. G., 1989, "Effective adaptive h-p procedures for practical engineering analysis", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 24, 337-357.

## SHAPE AND MESH OPTIMIZATION OF A STRUCTURAL ELEMENT

### **Antonio Pedro Clapis**

Federal University of Uberlândia – UFU  
School of Mechanical Engineering – FEMEC  
[apclapis@mecanica.ufu.br](mailto:apclapis@mecanica.ufu.br)

### **Eliane Regina Flôres Oliveira**

Federal University of Uberlândia – UFU  
School of Physics – FAFIS  
[eliane@mecanica.ufu.br](mailto:eliane@mecanica.ufu.br)

**Abstract.** *This work grows a computer model that comes aid the improvement of the project of a structural element, with the optimization in your shape and the need of obtaining of realiable results adapting the final mesh. The process is automatic with the use of a linear triangular finite element with expansion in the interpolation through your sides with hierarchical of degree  $p=2$ . As much the shape as the mesh are optimized being used the adaptive method based on nodal re-allocation. For the shape the balancing distortion energy of the finite elements is used through the analyses on a physical model and on a geometric model. For the mesh, in the final shape optimized, the balancing the error discretization is used, certain basing on the norm of the deformation energy. The potentiality of the proposed method is evaluated through some examples from the literature.*

**Keywords.** *hierarchical finite element, adaptive method, structural optimization.*