

## ANÁLISE DE TENSÕES RESIDUAIS – UM MÉTODO HÍBRIDO

**Marco Antonio Martins Cavaco****Daniel Montagner Soares Silva**

Universidade Federal de Santa Catarina,

Labmetro – Depto. de Engenharia Mecânica

Cx. Postal:5053 – CEP:88040-970 – Florianópolis, SC – Brasil

[cavaco@labmetro.ufsc.br](mailto:cavaco@labmetro.ufsc.br)

**Resumo.** *Este trabalho apresenta uma nova técnica para a análise de tensões residuais em corpos de prova soldados. Utilizou-se a técnica do furo-cego associada à holografia eletrônica para a determinação de campos de deslocamentos e valores das tensões principais residuais. Os campos de deslocamentos são mapeados por funções de tensão de Airy. Bons resultados foram obtidos em simulações de estados conhecidos de tensão residual, bem como em casos reais utilizando corpos de prova soldados.*

**Palavras-chave:** *Tensão Residual, Funções de Airy, Análise Experimental, Metrologia, Holografia Eletrônica.*

## 1. INTRODUÇÃO

A análise estrutural de componentes mecânicos é, hoje, de vital importância para a indústria em geral (Cavaco, M.A.M. e Freire, J.L.,1996). Entretanto quando se fala em integridade estrutural, um certo cuidado deve ser dedicado às tensões residuais. Estas são um tipo de tensão mecânica relevantes que podem comprometer a vida útil de componentes mecânicos quando se superpõem às tensões de trabalho. Dessa forma, cada vez mais existe a necessidade de serem estudadas e compreendidas formas diferentes de quantificar tensões residuais em componentes estruturais mecânicos (Lu, 1996).

Tipicamente provenientes de processos de fabricação e beneficiamento, tensões residuais são tensões internas auto-equilibradas presentes em um corpo livre de carregamentos e momentos externos. Campos de tensão residual, normalmente, variam de ponto a ponto podendo ser trativos ou compressivos, o que pode comprometer a integridade de um componente de uma estrutura.

Esse trabalho tem por objetivo a determinação do comportamento de tensões residuais numa região previamente soldada. Utilizou-se a técnica do furo-cego (Kobayashi, 1993) associado à holografia eletrônica para a determinação do campo de tensões (Veiga e Albertazzi Jr, 2000 e Cavaco e Willemann, 2001). Foram utilizados corpos de prova soldados, pois são excelentes fontes de tensão residual oriundas dos processos de fabricação.

Campos de deslocamentos obtidos experimentalmente são combinados com métodos numéricos e modelos matemáticos específicos para a determinação local de componentes de tensão. O método experimental baseado na holografia eletrônica, com sensibilidade radial, é empregado para a obtenção do campo de deslocamento (Dally e Riley, 1991). Os coeficientes de funções de tensão são determinados a partir de dados experimentais. O ajuste numérico do campo de deslocamento individualiza coeficientes das funções de tensão de *Airy*, que substituídos nas expressões para tensões, em nós pré-determinados, quantificam o estado de tensão local (Cavaco e Freire, 1989). Tensões previamente existentes no material antes da furação são determinadas em uma malha criada sobre a região de interesse.

Essa técnica híbrida, que associa a holografia eletrônica com a teoria da elasticidade e métodos numéricos, demonstra ser de grande utilidade na quantificação de tensões médias e na determinação de gradientes de tensões.

## 2. HOLOGRAFIA ELETRÔNICA

Conhecida na literatura técnica internacional por ESPI – Electronic Speckle Pattern Interferometry, (Shchepinov e Pisarev, 1996), essa técnica ótica tem sido muito utilizada na análise experimental de tensões. Aliado à técnica do furo-cego, o uso da holografia demonstra ter grande confiabilidade nos resultados coletados. Essa combinação de métodos também possibilita que um menor desgaste seja feito na peça, visto que possui sensibilidade para conseguir resultados confiáveis ao analisar superfícies com furos de até 3 mm de diâmetro.

Para esse trabalho, foi utilizado um interferômetro com sensibilidade radial para a determinação do campo de deslocamentos do corpo de prova. O interferômetro é composto de um jogo de lentes e um espelho cônico sendo alimentado por um feixe de laser. Para a obtenção do campo de deslocamentos, mapas de fases referentes aos estágios inicial e final de carregamento são coletados. O salto de fase é removido e o valor de fase é determinado para cada pixel. Assim, calcula-se a componente radial do deslocamento correspondente a cada pixel em função do comprimento de onda do laser e do ângulo do espelho cônico.

Os dados do campo de deslocamentos obtidos são dispostos em uma matriz que apresenta para cada ponto da superfície estudada a componente radial do deslocamento e sua respectiva posição em coordenadas polares em relação a um eixo polar que situa-se no centro do furo-cego.

## 3. FUNÇÕES DE TENSÃO DE AIRY

A solução de problemas de estado plano de tensões encontra-se na integração de equações de equilíbrio associadas às equações de compatibilidade e condições de contorno. As equações de equilíbrio em duas dimensões são (Timoshenko e Goodier, 1980):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0 \quad (2)$$

E assumindo que as tensões podem ser representadas por uma função de tensão  $\Phi$ , tal que:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \Omega \quad (3)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \Omega \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

Verifica-se, então, que na ausência de forças de corpo, a solução do problema encontra-se resolvendo a equação,

$$\nabla^4 \Phi = 0 \quad (6)$$

onde  $\Phi$  é uma função de tensão que pode ser decomposta em uma combinação de funções analíticas (Dally e Riley, 1991):

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + \Phi^{(n)} + \Phi^{(*)} \quad (7)$$

onde,

$$\Phi^{(0)} = a_0 + b_0 \ln(r) + c_0 r^2 + d_0 r^2 \ln(r) \quad (7.1)$$

$$\Phi^{(1)} = \left( a_1 r + \frac{b_1}{r} + c_1 r^3 + d_1 \ln(r) \right) \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

$$\Phi^{(n)} = \left( a_n r^n + b_n r^{-n} + c_n r^{2+n} + d_n r^{2-n} \right) \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \quad \text{para } n \geq 2 \quad (7.3)$$

$$\Phi^{(*)} = a_* \theta + b_* r^2 \theta + c_* r \theta \cdot \sin \theta + d_* r \theta \cdot \cos \theta \quad (7.4)$$

Os campos de deslocamento e o estado de tensões são encontrados resolvendo essa função de tensão de acordo com as funções de tensões de *Airy* associadas, em coordenadas polares:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \quad (8)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \quad (9)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \quad (10)$$

No método proposto a combinação encontrada que melhor soluciona os problemas estudados é descrita por:

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \Phi^{(2)} \quad (11)$$

Integrando esta função de acordo com as relações deslocamento-tensão da Teoria da Elasticidade, encontra-se a função que expressa o campo de deslocamentos associado:

$$U_r = U_r^{(0)} + U_r^{(2)} \quad (12)$$

onde,

$$U_r^{(0)} = \frac{1}{E} \left[ - (1+\nu) \frac{b_0}{r} + 2(1-\nu) d_0 r \ln(r) - (1+\nu) d_0 r \right] + \alpha_2 \cos \theta + \alpha_3 \sin \theta \quad (12.1)$$

$$U_r^{(2)} = \frac{1}{E} \left\{ - a_2 (1+\nu) 2r + b_2 (1+\nu) 2r^{-3} + c_2 4[1-(1+\nu)]r^3 + d_2 \right\} \begin{Bmatrix} \sin 2\theta \\ \cos 2\theta \end{Bmatrix} + \alpha_2 \cos \theta + \alpha_3 \sin \theta \quad (12.2)$$

#### 4. MODELO MATEMÁTICO PARA A DETERMINAÇÃO DE COEFICIENTES

O campo de deslocamentos obtido é formado por uma malha de pontos discretizados e distribuídos em anéis concêntricos ao eixo polar situado no centro do furo. Os dados possuem 1024

pontos, localizados em até 8 anéis com um raio máximo de 4 mm. A Fig.(1) apresenta a forma como a malha foi distribuída nas regiões analisadas.

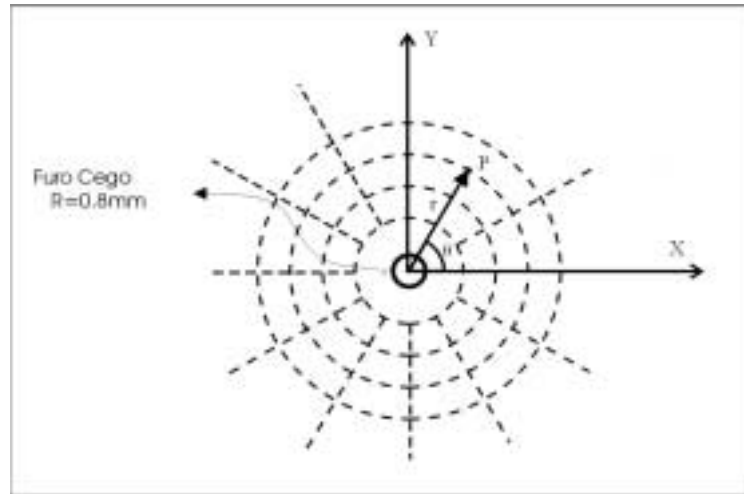


Figura 1. Malha gerada para a coleta de dados ao redor do furo.

Para a determinação dos coeficientes  $b_0, c_0, d_0, a_2, b_2, c_2, d_2, \alpha$  e  $\alpha_2$  o campo de deslocamentos encontrado por holografia eletrônica foi interpolado pela Eq. (12) e um sistema linear foi formado como segue:

$$U_{re} = U_r \quad (13)$$

$$U_{re} = U_r^{(0)} + U_r^{(2)} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} {}^{(i)}(U_r^{(0)}(b_0, c_0, d_0, \alpha_2, \alpha_3) + U_r^{(2)}(a_2, b_2, c_2, d_2, \alpha_2, \alpha_3)) \\ {}^{(i+1)}(U_r^{(0)}(b_0, c_0, d_0, \alpha_2, \alpha_3) + U_r^{(2)}(a_2, b_2, c_2, d_2, \alpha_2, \alpha_3)) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ {}^{(k)}(U_r^{(0)}(b_0, c_0, d_0, \alpha_2, \alpha_3) + U_r^{(2)}(a_2, b_2, c_2, d_2, \alpha_2, \alpha_3)) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{(i)}U_{re} \\ {}^{(i+1)}U_{re} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ {}^{(k)}U_{re} \end{bmatrix} \quad (15)$$

O sistema linear formado pode ser representado algebricamente pela equação:

$$A * C = U_{re} \quad (16)$$

onde,

$A$  é a matriz das constantes;

$C$  é o vetor dos coeficientes;

$U_{re}$  é o vetor dos termos independentes que contém os valores ponto a ponto do deslocamento radial obtidos experimentalmente;

$i$  representa o número da equação e do ponto que está sendo analisado; e  $k$  o número total de pontos e de equações do sistema obtido.

A solução do sistema foi encontrada utilizando o método dos mínimos quadrados:

$$C = \text{inv}(A) * U_{re} \quad (17)$$

O cálculo das tensões principais baseou-se nas relações entre as tensões e deformações da elasticidade clássica. As componentes radiais das deformações são representadas por:

$$\varepsilon_{rr} = \sigma_1^R [C_1 - C_2 \cos(2\theta_2)] \quad (18)$$

$$\varepsilon_{rr} = \sigma_2^R [C_1 - C_2 \cos(2\theta_1)] \quad (19)$$

Sendo,

$$C_1 = -\frac{1+\nu}{2E} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \quad (20)$$

$$C_2 = -\frac{1+\nu}{2E} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left[ -3\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{4}{1+\nu} \right] \quad (21)$$

A Fig.(2) abaixo, representa o estado bidimensional das tensões residuais principais  $\sigma_1^R$  e  $\sigma_2^R$  uniformemente distribuído pela superfície da placa.

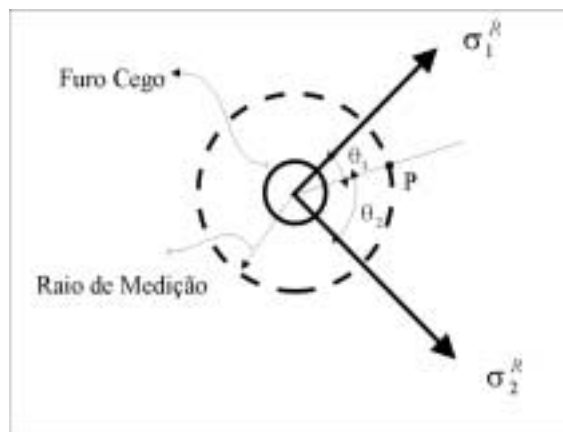


Figura 2. Estado plano das tensões residuais principais.

Analisando a Fig.(2) chega-se a relação entre os ângulos principais:

$$\cos(2\theta_1) = \cos\left(2\theta_2 + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(2\theta_2) \quad (22)$$

assim podemos expressar  $\varepsilon_{rr}$  como:

$$\varepsilon_{rr} = \sigma_2^R [C_1 + C_2 \cos(2\theta_2)] \quad (23)$$

Superpondo as deformações radiais dadas pelas Eq.(18) e Eq.(21) e utilizando a relação

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (24)$$

chega-se à componente radial do deslocamento expressa em termos das tensões principais:

$$u_r(r, \theta) = \frac{r(1-\nu)}{2E}(\sigma_1^R + \sigma_2^R) + \frac{r(1+\nu)}{2E}(\sigma_1^R - \sigma_2^R)\cos(2\theta_2) + G_1(\sin(\theta) + \sin(2\theta)) + G_2(\cos(\theta) + \cos(2\theta)) \quad (25)$$

onde,

$\varepsilon_{rr}$  é a componente radial da deformação;

$\sigma_1^R$  e  $\sigma_2^R$  são as tensões principais;

$\theta_1$  e  $\theta_2$  são os respectivos ângulos principais;

$G_1$  e  $G_2$  são componentes de deslocamento do corpo rígido; e

$r$  e  $\theta$  são as coordenadas do ponto que está sendo analisado.

Similarmente como feito na determinação dos coeficientes de Airy, a Eq.(25) é interpolada com os dados do campo de deslocamentos calculado  $U_{rc}$ . Nesse caso forma-se um sistema não linear e para resolvê-lo foi utilizado o método de Newton-Raphson por mínimos quadrados.

Foi desenvolvido um programa em MATLAB para resolver o sistema representado pela Eq. (17). Há o interesse da implementação em linguagens que apresentem maiores recursos gráficos, como o Visual Basic, no futuro.

## 5. APLICAÇÃO

Para a demonstração do método utilizou-se um corpo de prova soldado. O furo localizado ao lado do cordão de solda, na zona de calor, possui uma profundidade de aproximadamente 0,8 mm. A Fig (3) apresenta um esquema do corpo de prova soldado.

Após a realização do furo cego foi feita a medição do campo de deslocamentos utilizando a técnica da Holografia Eletrônica. Foram discretizados 512 pontos distribuídos em 4 anéis, sendo o menor com raio igual a 1,5 mm e o maior com raio igual a 4 mm. O campo de deslocamentos e as tensões principais são obtidos após o processamento das imagens de interferência. Os dados coletados da componente radial do deslocamento e suas respectivas coordenadas polares são dispostos em uma matriz conforme já descrito e armazenados em um arquivo texto.

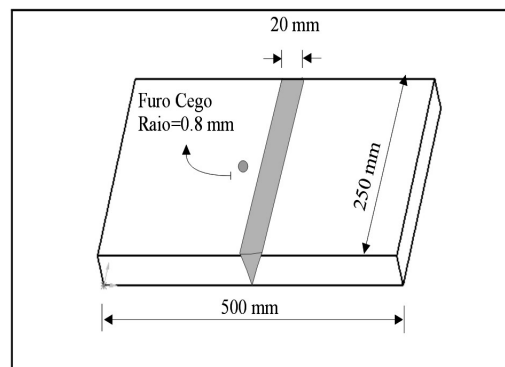


Figura 3. Esquema do corpo de prova soldado com furo cego

As informações do campo de deslocamento são interpoladas pela Eq.(14) formando um sistema equivalente à Eq.(15). Desta forma, os coeficientes das funções de *Airy* são individualizados e então um novo campo de deslocamentos é calculado através da Eq.(12) utilizando as coordenadas que foram obtidas na medição feita com a Holografia Eletrônica.

A seguir são apresentadas duas imagens que correspondem aos campos de deslocamento, a primeira obtida diretamente pela técnica holográfica e a seguinte calculada de acordo com o método de funções de Tensão de *Airy*. Percebe-se que o ruído apresentado na imagem da Fig. (4) é totalmente excluído com o uso do modelo proposto.

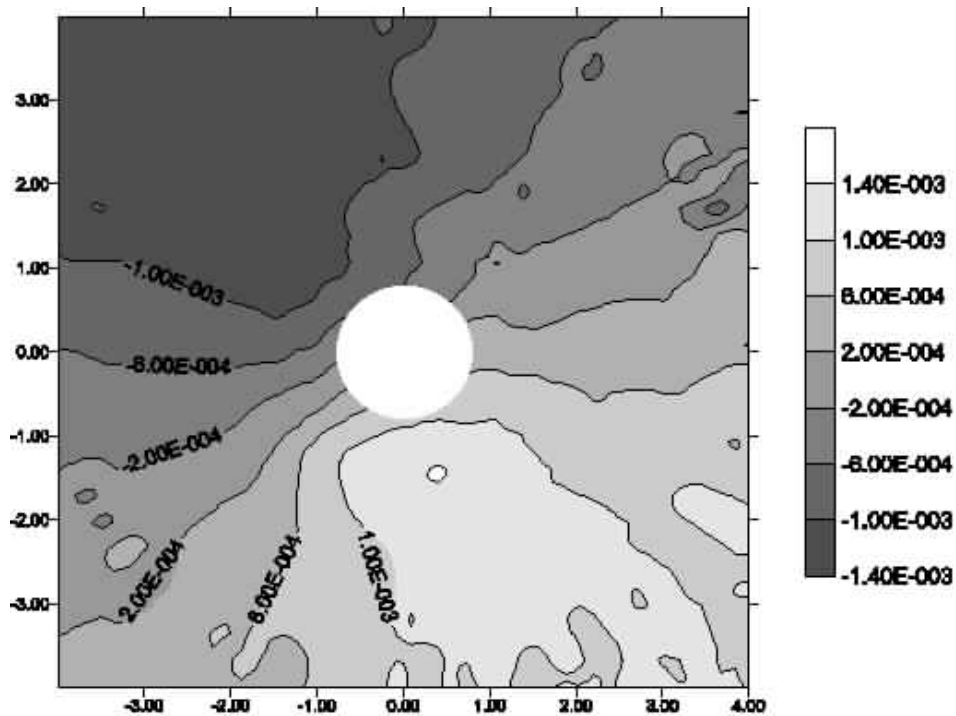


Figura 4. Campo de deslocamento obtido pela medição interferométrica.

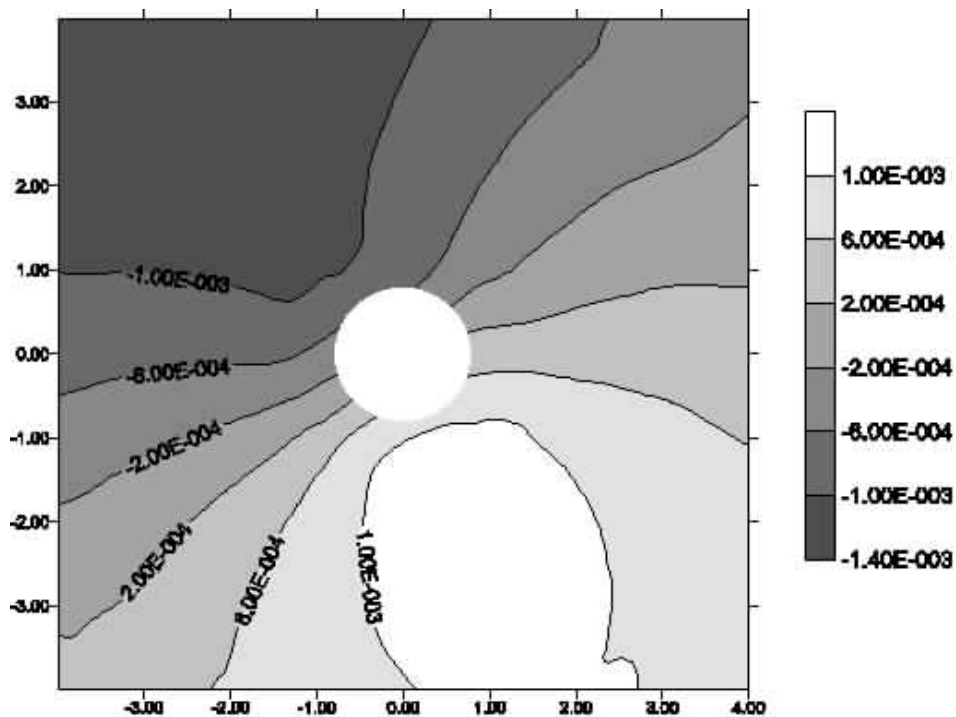


Figura 5. Campo de deslocamento calculado com as Funções de Tensão de *Airy*.

A tabela abaixo apresenta os valores das tensões obtidas pela medição feita com uso da holografia eletrônica (método tradicional) e a calculada através das funções de tensões de *Airy*.

Tabela 1. Valores das Tensões Residuais Principais

Caso Experimental	Experimental (MPa)	Calculado com o as Funções de Tenção de <i>Airy</i> (Mpa)
$\sigma_1^R$	103.93	102.08
$\sigma_2^R$	70.7	64.58

Algumas considerações devem ser feitas em relação aos resultados apresentados acima. É importante destacar que na formulação pelas funções de *Airy*, o equacionamento considera apenas o caso de furo passante na determinação das tensões principais, ou seja, as equações acima consideram apenas a formulação de Kirsh (Dally e Riley, 1991). Para que os resultados acima, da Tab. (1), possam ser comparados aos resultados clássicos determinados por extensometria, coeficientes diferentes dos apresentados pelas Eq. (20) e Eq. (21) devem ser utilizados. Estes coeficientes já estão sendo estudados.

## 6. CONCLUSÕES

Um método simples e poderoso foi apresentado para a determinação das tensões residuais presentes em componentes mecânicos. Esta técnica híbrida, utiliza métodos modernos de análise experimental de tensões e a teoria da elasticidade. Um exemplo prático é apresentado onde um corpo de prova soldado, assumidamente, contendo tensões trativas é avaliado pelo método dos coeficientes de *Airy*. Resultados encorajadores foram encontrados, mostrando um forte potencial para a técnica proposta.

## 7. AGRADECIMENTOS

Ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, através do projeto CTPETRO nº 466130/2000-7.

## 8. REFERÊNCIAS

- Cavaco, M.A.M. e Willemann, D.P., 2001, “Medição de Tensões Residuais em corpos de Prova de Soldagem pelo Método do Furo Cego”, Proceedings of the 16th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Uberlândia, Brazil, pp. 330-339.
- Cavaco, M.A.M. e Freire, J.L., 1996, “Avaliação da Integridade Estrutural de Componentes Mecânicos por Shadow Moiré”, COTEQ/SEMINS 96, Rio de Janeiro, Brasil.
- Cavaco, M.A.M. e Freire, J.L., 1989, “Um Método Analítico-Fotoelástico Assistido por Computador para Análise de Tensões”, X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, Brasil.
- Dally, J.W. e Riley, W.F., 1991, “Experimental Stress Analysis”, 3º ed, Ed. McGraw-Hill, United States.
- Kobayashi, A.S., 1993, “Handbook on Experimental Mechanics”, 2ºed, SEM, New York, United States.
- Lu, J., 1996, “Handbook of Measurement of Residual Stress”, SEM, New York, Unites States.
- Shchepinov, V.P., Pisarev, V.S., 1996, “Strain and Stress Analysis by Holographic and Speckle Interferometry”, Ed. John Wiley, United States.



Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., 1980, "Theory of Elasticity", 3<sup>o</sup>ed, Ed. McGraw-Hill, United States.  
Veiga, C.L.N. e Albertazzi Jr, A., 2000, "Aplicação do Interferômetro Radial na Medição do Estado Plano de Tensões", VI Simpósio de Análise Experimental de Tensões, Florianópolis, Brasil.

## **A HYBRID EPSI TECHNIQUE FOR RESIDUAL STRESS ANALYSIS THROUGH STRESS FUNCTION FITTING**

**Marco Antonio Martins Cavaco**

**Daniel Montagner Soares Silva**

Federal University of Santa Catarina

Labmetro – Dep. of Mechanical Engineering

Cx. Postal:5053 – CEP:88040-970 – Florianópolis, SC – Brazil

[cavaco@labmetro.ufsc.br](mailto:cavaco@labmetro.ufsc.br)

***Abstract.** This work presents a hybrid experimental and theoretical technique for residual stresses analysis of mechanical components. It was used the blind hole technique along with the Electronic Speckle Pattern Interferometry (ESPI) method and Airy stress functions for the determination of the principal stress components. Displacement information is fitted in order to extract Airy stress function coefficients. The results demonstrate that this technique is of great utility to determine the average principal stress and local stress gradients.*

***Keywords.** Residual Stress, Airy`s Stress Function, Experimental Analysis, Metrology, ESPI.*