



AValiação dos Modelos Estatísticos Usados na Estimativa da Curva P-S-N – Um Estudo para a Liga ASTM 6063

Jorge Luiz de Almeida Ferreira, Dr.

Giovanni Moreira, Eng.

Pablo Alexandre Lima, Eng.

Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília - UnB, Campus Universitário Darcy Ribeiro, Asa Norte, Brasília, DF, Brasil, E-mail: jorge@unb.br

Resumo: Ligas de alumínio frequentemente são utilizadas em componentes mecânicos. Sob o ponto de vista estrutural, uma grande deficiência que se observa nesse material reside no fato do mesmo não possuir limite de resistência à fadiga. Como resultado de ensaios experimentais, são observados elevados níveis de dispersão nas vidas de fadiga desse material. Considerando que as curvas S-N e ϵ -N são estimadas com base nas vidas médias obtidas nesses ensaios, a utilização de tais curvas para a previsão da vida de um componente estrutural pode resultar em resultados pouco conservativos. Uma forma bastante utilizada para contornar esse problema consiste na utilização de curvas de vida associadas a níveis específicos de confiabilidade, ou seja, de curvas P-S-N. Este trabalho tem como objetivo fazer um estudo quanto à técnicas de determinação da curva P-S-N. Para isso foram ensaiados em flexão rotativa 75 corpos de prova, divididos em 6 níveis de tensão distintos. Com base nos resultados obtidos, estimou-se a curva S-N nominal, baseada na vida mediana das amostras e realizou-se inferências quanto ao tipo de função de distribuição de probabilidade que melhor representava as vidas. Três modelos de distribuição de probabilidade foram usados na análise: Lognormal, Weibull e Gumbel. Com base no teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov, pôde-se concluir que a distribuição da vida de fadiga dos corpos ensaiados é bem representada pelas distribuições Lognormal e de Gumbel. Após tal análise, as curvas P-S-N para níveis de confiabilidade de 95,45% foram estimadas considerando as três distribuições de probabilidade. Comparando os resultados obtidos, verificou-se que as curvas P-S-N estimadas com base nas distribuições de Gumbel e de Weibull foram as que melhor se ajustaram aos dados experimentais.

Palavras-Chave: Ensaio de Fadiga, Análise de Confiabilidade, Curvas P-S-N, Resistência à Fadiga.

1. INTRODUÇÃO

De modo a garantir condições de operações seguras, as previsões de integridade estrutural de componentes submetidos à falhas por fadiga são cada vez mais utilizadas. Tipicamente tal estimativa é realizada por meio da técnica clássica de interferência entre carga-resistência (Harr, 1987, Ditlevsen, 1996). Para que tal procedimento seja realizado é necessário determinar tanto a distribuição de probabilidade dos esforços aplicados sobre a estrutura quanto à da resistência à fadiga do material. A implementação dessa técnica é um procedimento complexo, pois *a priori* não se sabe quais os níveis de tensão que serão aplicados no componente estrutural. Assim, para a determinação da distribuição de probabilidade da resistência à fadiga para esses níveis específicos de tensão seria necessário o levantamento experimental do comportamento estatístico da vida para esses níveis. Logicamente, tal procedimento teria um custo elevadíssimo, o que o torna inviável sob o ponto de vista prático. Uma forma de contornar esse problema seria utilizando as curvas P-S-N que são curvas S-N associadas a determinados níveis de confiabilidade (Zheng, 1995). Em geral, tais curvas são estimadas por meio de resultados de ensaios de fadiga para níveis específicos de tensão, devendo-se assumir também distribuições de probabilidade que descrevam o comportamento estatístico da vida de fadiga (Ling, 1997). As distribuições de probabilidade mais usadas para isso são a lognormal, a de Weibull a três parâmetros, e a distribuição de Gumbel. Quando comparada as distribuições de Weibull e de Gumbel, a escolha da distribuição lognormal deve-se basicamente a sua fácil utilização e por depender de poucos parâmetros a sua descrição matematicamente (Wirshing, 1970). Nesse sentido,

no presente trabalho será apresentada uma pequena revisão sobre os modelos de distribuição de probabilidade acima citados para a seguir fazer-se um estudo sobre a influência do modelo de distribuição de probabilidade sobre as curvas P-S-N.

2. MODELOS DE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE USADOS PARA DESCREVER O COMPORTAMENTO DA VIDA DE FADIGA

2.2. DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL

Existem duas formas de expressar a distribuição de Weibull, ou através da distribuição à *dois parâmetros*, ou através da distribuição à *três parâmetros*. Para o caso da distribuição a três parâmetros, a função de densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada são, respectivamente, expressas através das Eqs. (1) e (2) (Lipson, 1973)

$$f(x) = \frac{\alpha}{(x - x_0) \left(\frac{\theta - x_0}{\theta - x_0} \right)^{\alpha-1}} \cdot \exp \left[- \left(\frac{x - x_0}{\theta - x_0} \right)^{\alpha} \right] \quad (1)$$

$$F(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - x_0}{\theta - x_0} \right)^{\alpha} \right] \quad (2)$$

onde os parâmetros são geralmente determinados experimentalmente: *i)* $x_0, x_0 \geq 0$, representa o valor mínimo esperado para a variável x , por esse motivo x_0 é chamado de valor de segurança ou parâmetro de localização ou limite de sensibilidade ou de vida mínima, *ii)* $\alpha, \alpha > 0$, é denominado parâmetro de forma ou inclinação de Weibull e é o parâmetro que controla o grau de assimetria da distribuição, e *iii)* $\theta, \theta \geq x_0$, é parâmetro de escala ou valor característico. Tal parâmetro possui função idêntica à média e representa o valor de x abaixo do qual situam-se 63,2% dos casos observados. No caso da distribuição a dois parâmetros é assim determinada por que nesta situação o parâmetro de localização, x_0 é definido como zero. Com base na Eq. (2) pode-se ainda, definir uma função muito importante na descrição das características de falha de um componente estrutural, ou seja: a função de confiabilidade, $R(t)$. A função de confiabilidade permite estimar a probabilidade que um componente não venha a falhar durante o intervalo $[0, x]$, ou, de modo equivalente, a função de confiabilidade é igual à probabilidade que o componente ainda esteja funcionando na época x . Assim, em termos da Eq. (2), a função de confiabilidade de Weibull e sua função inversa serão expressas segundo as equações (3a) e (3b).

$$R(x) = \exp \left[- \left(\frac{x - x_0}{\theta - x_0} \right)^{\alpha} \right] \quad (3a)$$

$$x = x_0 + (\theta - x_0) \cdot \left[\ln \left(\frac{1}{R(x)} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3b)$$

2.2.1. ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL

A estimativa dos parâmetros da distribuição de Weibull pode ser realizada utilizando-se o Método dos Momentos ou o Método de Regressão Linear.

O método dos momentos consiste na suposição que os momentos da distribuição da população coincidem com os da amostra. Assim, dispondo da média, da mediana, e do desvio-padrão amostral, é possível resolvendo-se um sistema de equações não lineares estimar os valores de x_0 , θ , e α . Já o método de regressão linear baseia-se na linearização da função de distribuição acumulada de Weibull, a aplicação do método de regressão linear é relativamente simples e fornece estimadores consistentes. Algoritmos descrevendo essas duas metodologias podem ser encontradas em (Lipson, 1973).

2.3. DISTRIBUIÇÃO DE GUMBEL

A distribuição de Gumbel é um tipo clássico de distribuição de extremos do tipo I (Palle Thoft, 1986). Tipicamente, tal distribuição de probabilidade é utilizada na modelagem de fenômenos físicos que apresenta grandes dispersões e assimetria, tais como profundidade de corrosão (Lafraia, 1993), velocidade máxima do vento (Palle Thoft, 1986), vida de fadiga, etc. As funções de densidade e de distribuição de probabilidade de Gumbel são representadas respectivamente pelas Eqs. (4) e (5).

$$f(x) = \alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot (x - u)) \cdot \exp(-\exp(-\alpha \cdot (x - u))) \quad (4)$$

$$F(x) = \exp(-\exp(-\alpha(x - u))) \quad (5)$$

onde α e u são parâmetros da distribuição.

Aplicando o conceito de expectância à Eq. (4), a média e o desvio-padrão da distribuição de Gumbel são, respectivamente, expressos pela Eq. (6) e (7).

$$\mu = u + \frac{\gamma}{\alpha} \approx u + \frac{0,5772}{\alpha} \quad (6)$$

$$\sigma = \frac{\pi}{\alpha \cdot \sqrt{6}} \quad (7)$$

A Distribuição de Gumbel pode ser empregada para representar um grande número de fenômenos devido à sua facilidade de ajuste matemático. A vantagem dessa distribuição reside no fato de necessitar de relativamente poucas medidas para se determinar o valor mínimo presente com razoável precisão. (Lafraia, 1993).

2.3.1. ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS E DA FUNÇÃO INVERSA DA DISTRIBUIÇÃO DE GUMBEL

Definida a média e o desvio-padrão de uma amostra com distribuição de Gumbel, a estimativa dos seus parâmetros podem ser realizada diretamente das equações (6) e (7). Considerando que o desvio-padrão, Eq. (7), só depende de α , a determinação desse parâmetro torna-se direta quando se substitui o desvio-padrão teórico pelo seu valor amostral. De forma semelhante, substituindo-se α e a média amostral na Eq. (6), acha-se o valor de u , obtendo-se assim, todos os parâmetros necessários para caracterizar essa função de probabilidade. A determinação da função inversa da distribuição de Gumbel tem por objetivo avaliar o valor da variável aleatória, x , associada a probabilidade de ocorrência de um evento. Tal função pode ser derivada pela linearização da Eq. (5), o que resultará na Eq. (8).

$$x = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{1}{\ln \frac{1}{1 - F(x)}} \right] + u \quad (8)$$

2.4. DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL

Existem diversos fenômenos físicos cuja descrição do seu comportamento estatístico exige que a distribuição seja assimétrica com relação ao seu valor médio e o seu intervalo de validade limite-se somente a valores positivos. Das diversas distribuições com as características acima citadas, talvez, uma das mais utilizadas seja a distribuição lognormal. Isto se deve principalmente ao seu estreito relacionamento com a distribuição normal, o que permite a utilização dos conceitos válidos para a distribuição normal através de uma simples mudança de variável. Em análise de falhas a principal aplicação da distribuição lognormal está associada a descrição da vida de peças sujeitas à dano por fadiga (Lipson, 1973; Harr, 1987; Shigley, 1989). A função de densidade de probabilidade da

distribuição lognormal é expressa por meio da Eq. (9).

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \hat{\sigma}_y \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right) \quad (9)$$

onde a variável x é definida como $x \sim \ln(\mu, \hat{\sigma})$ e y é uma variável normalmente distribuída, $y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$, resultante da transformação $y = \ln(d)$, e caracterizada pelos seguintes parâmetros :

$$\hat{\sigma}_y = \sqrt{\ln\left(1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2\right)} = \sqrt{\ln(1 + (CV_x)^2)} \quad (10)$$

$$\mu_y = \ln(\mu) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + (CV_d)^2) \quad (11)$$

Devido à íntima relação entre as distribuições lognormal e normal, a função de distribuição acumulada lognormal pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu_y}{\hat{\sigma}_y}\right) \quad (12)$$

onde $\Phi(\bullet)$ é função de distribuição da distribuição normal reduzida.

Assim, a confiabilidade associada a uma distribuição lognormal é determinada considerando a Eq. (13)

$$R(d) = 1 - P(D \leq d) = 1 - F(d) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu_y}{\hat{\sigma}_y}\right) \quad (13)$$

3. MATERIAIS E MÉTODOS

Neste item serão apresentados os materiais utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho, os procedimentos seguidos para suas caracterizações e o tipo de ensaio realizado. O material utilizado durante este trabalho foi um alumínio comercial ASTM 6063, que é utilizado em elementos estruturais, tais como rebites, componentes de carrocerias. As propriedades mecânicas e químicas desses alumínios são apresentadas, respectivamente nas Tabs. 1 e 2.

Tabela 1 - Propriedades Mecânicas

Material	Resistência à Tração S_u (MPa)	Limite de Escoamento S_e (MPa)	Dureza Brinell HB
Normalizado	192,2	164,7	66
Ensaiado	207,8	187,3	107

Tabela 2 – Propriedades Químicas – Conforme Especificado pelo Fabricante

Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Zn	Ti	Outros Elementos.	Al
0,20-0,60	0,35	0,10	0,10	0,45-0,45	0,10	0,10	0,10	0,15	Restante

Os ensaios de fadiga sob flexão rotativa foram realizados em uma máquina "BUDD" Modelo RFB-200. Os corpos de prova utilizados nestes ensaios são apresentados na Fig. 1.

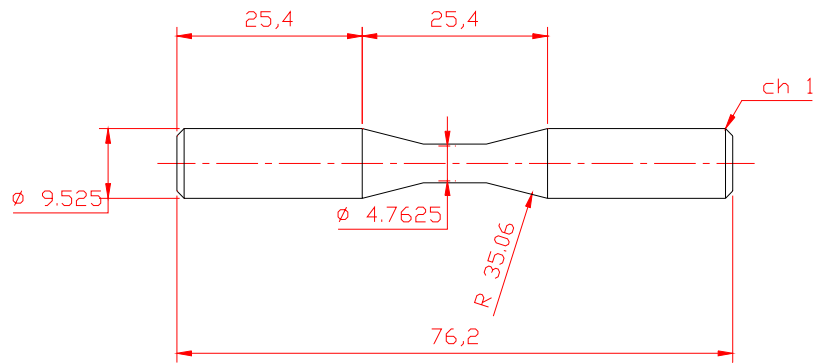


Figura 1 - Croqui dos Corpos de Prova Utilizados nos Ensaios de Flexão Rotativos

Conforme recomendado pelas normas ASTM / E 468-90 (ASTM,1990) e ASTM E - 739/91 (ASTM,1991), o número mínimo necessário de corpos de prova para se montar uma curva padrão S-N depende do tipo de ensaio que será realizado. Para a estimativa da curva S-N utilizou-se 6 níveis de tensão: 0,35, 0,375, 0,40, 0,425, 0,45 e 0,475 S_u . Para um levantamento preliminar da curva, em cada um desses níveis de tensão foram quebrados inicialmente 5 corpos de prova. Após a determinação preliminar da curva S-N, quebraram-se mais 10 corpos de prova nos níveis 0,35, 0,375, 0,40, 0,425 S_u e 3 em 0,325 S_u .

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Na Fig. 2 é apresentado a curva S-N resultante dos ensaios de flexão rotativa. Considerando tal gráfico, pode-se observar uma dispersão relativamente elevada nas vidas necessárias à ruptura do corpo de prova. A curva de tendência estimada para esse material é apresentada na Eq. (14). A seguir será realizada uma análise estatística dos resultados obtidos experimentalmente.

$$\frac{S_a}{S_u} = 1,01288 \cdot N^{-0,06967} \quad (14)$$

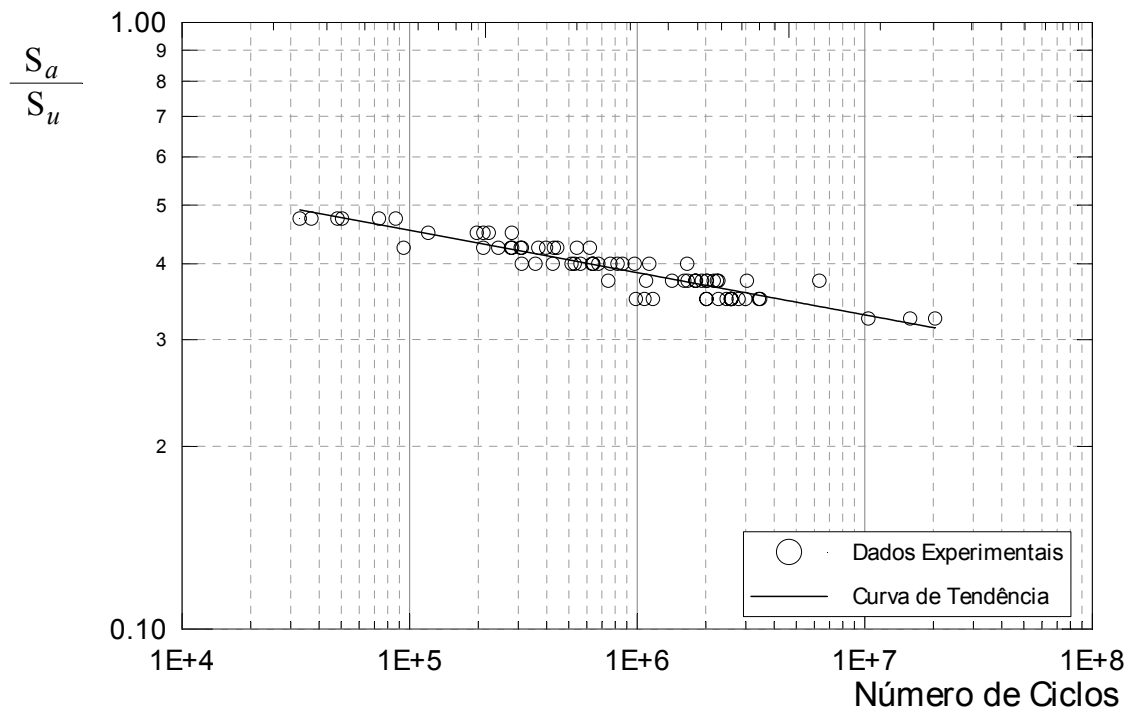


Figura 2 - Curva S-N – Confiabilidade de 50 %

Na Tab. 3 é apresentado um resumo dos resultados resultantes dos ensaios de fadiga. Uma

análise preliminar dos mesmos mostra que, ao contrário do que se esperaria, a dispersão da vida aumenta com o nível de tensão.

Tabela 3 – Comportamento Estatístico das Vidas de Fadiga dos Corpos de Prova Ensaidados

Propriedades Estatísticas	S_a/S_u					
	0,35	0,375	0,4	0,425	0,45	0,475
Média	2,277E+06	1,843E+06	6,559E+05	3,410E+05	2,393E+05	5,482E+04
Desvio Padrão	7,108E+05	5,331E+05	2,255E+05	1,243E+05	9,523E+04	2,114E+04
CV (%)	31,22	28,92	34,38	36,46	39,80	38,57
Num de Ensaios	15	15	15	15	6	6

4.2. ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL

Conforme explicado anteriormente, os parâmetros estatísticos utilizados para descrever a distribuição Log Normal são o valor médio, $E[x]$, e o desvio padrão, $E[(x - E[x])^2]^{1/2}$ do logaritmo da variável aleatória, x . Assim, fazendo-se a estimativa do logaritmo das vidas observadas nos ensaios são encontrados os valores apresentados na Tab. 4.

Tabela 4. Parâmetros da Distribuição Lognormal

Parâmetros	S_a/S_u					
	0,35	0,375	0,40	0,425	0,45	0,475
$E[\ln(N)]$	6,346	6,280	5,819	5,517	5,350	4,713
$E[(\ln(N) - E[\ln(N)])^2]^{1/2}$	0,170	0,196	0,184	0,200	0,173	0,164

4.3. ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DE WEIBULL

Com base nos resultados experimentais foram obtidos os parâmetros de Weibull para os níveis de tensão estudados. Tais resultados são apresentados abaixo na Tab. 5.

As curvas resultantes do processo de linearização da Função de distribuição de probabilidade de Weibull para a determinação dos parâmetros apresentados na Tab. 5 são apresentadas na Fig. 3. Analisando tais resultados verifica-se uma excelente correlação entre os dados experimentais e as curvas de ajuste. Tal constatação é reforçada quando se faz a estimativa do valor médio do coeficiente de explicação do ajuste, R^2 , que situou-se em torno de 87 %.

Tabela 5 - Parâmetros da Distribuição de Weibull

Parâmetros	S_a/S_u					
	0,35	0,375	0,40	0,425	0,45	0,475
θ	1,78E6	1,52E6	5,39E5	2,59E5	1,84E5	4,30E4
α	2,51	2,39	2,68	2,24	2,55	2,73
X_0	1500	1000	850	700	500	350
R^2	0,72	0,87	0,97	0,40	0,93	0,96

5. ANÁLISE DAS CURVAS P-S-N

No gráfico apresentado na Fig 4 são ilustradas as curvas P-S-N estimadas considerando as distribuições de Weibull, de Gumbel e lognormal e níveis de confiabilidade de 99 %. A título de comparação também é apresentada nessa figura uma curva P-S-N com mesmo nível de confiabilidade, mas estimada com base no “*Posto Médio*” dos resultados experimentais (Lipson, 1973). Com base nas curvas apresentadas nessa figura, verifica-se que os modelos de distribuição de Weibull e de Gumbel permitem avaliar de maneira satisfatória a curva S-N com um nível de confiabilidade específico. Há de se ressaltar também que na região em que se possuem informações sobre o nível de confiabilidade, avaliado considerando o *Posto Médio*, o modelo de Gumbel mostrou-se melhor do que o de Weibull.

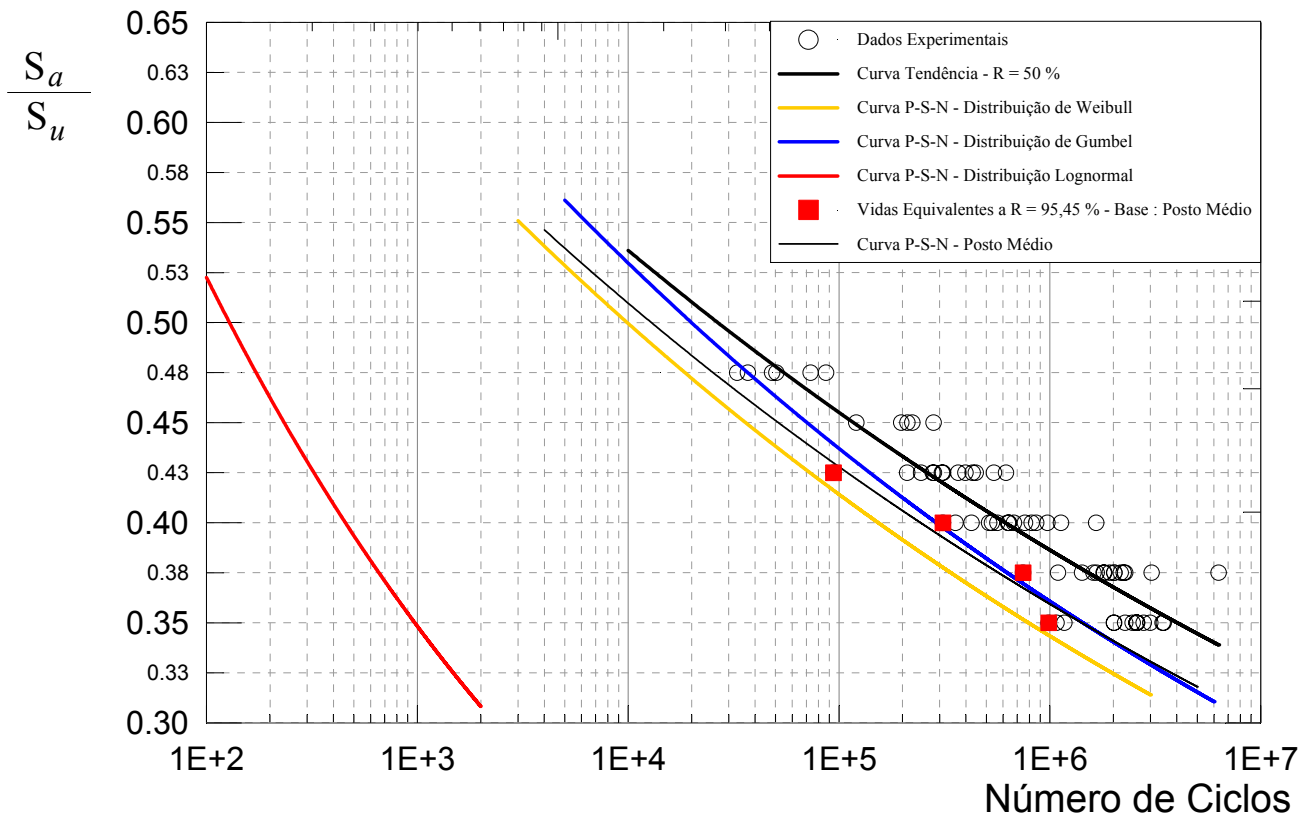


Figura 4 – Curvas P-S-N com Níveis de Confiabilidade de 95,45 % Estimadas para as Distribuições de Lognormal, Weibull, e Gumbel.

6. CONCLUSÕES

Após ensaiar 75 corpos de prova para os seis níveis de tensão ($0,35, 0,375, 0,40, 0,425, 0,45,$ e $0,475S_u$) e utilizando as distribuições de Weibull, lognormal e de Gumbel para descrever o comportamento da vida de fadiga, pode-se fazer as seguintes conclusões:

- ao realizar o Teste de Aderência constatou-se que a distribuição de Weibull não representou de forma adequada a distribuição das vidas dos CP's ensaiados. Decidiu-se estimar a curva P-S-N desconsiderando tal fato.
- a curva P-S-N estimada com base na distribuição lognormal mostrou-se extremamente conservativa quando comparada com as demais distribuições. Com isso, o seu uso não se mostra conveniente.
- a curva P-S-N estimada com base na distribuição de Gumbel é menos conservativa de todas as distribuições analisada, possuindo alguns pontos onde ocorreram falhas em determinados níveis de tensão. Assim, a utilização da curva P-S-N para 95,45% de confiabilidade é indicada em situações onde se deseja um dimensionamento o mais otimizado possível sob o aspecto de resistência ou em situação de verificação de projeto.
- a curva P-S-N baseada na distribuição de Gumbel é indicada para o dimensionamento de

projetos usuais, visto estar “embutida” nessa curva uma certa “segurança”.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASTM / E 468-90 - "Standard Practice for Presentation of Constant Amplitude Fatigue Test for Metallic Materials", 1990.
- ASTM / E 739-91 - "Standard Practice for Statistical Analysis of Linear or Linearized Stress-Life (S-N) and Strain-Life (ϵ -N)", 1991.
- Degroot, “Probability and Statistics”, Addison Wesley Publishing Company, 1987.
- Lafraia, J.R.B, “Estatística Aplicada à Medição de Espessura”, Anais da Conferência Internacional Sobre Avaliação de Integridade e Extensão de Vida de Equipamentos Industriais, p 103. ABCM, São Paulo 1993.
- Ling, J. and Pan, J., “A Maximum Likelihood Method for Estimating P-S-N Curves”, In. J. Fatigue, Vol. 19, No. 5, pp.:415-419, 1997.
- Lipson, and Shent, N. J., "Statistical Design and Analysis of Engineering Experiments", Mac-Graw-Hill Book Company, 1973.
- Milton E. Harr, "Reliability Based Design in Civil Engineering", Dover Publications, Inc, Mineola, New York, 1987.
- O. Ditlevsen and H. O. Madsen, “Structural reliability Methods”, John Wiley & Sons, 1996.
- P. Thoft-Cristhensen and Y. Morotusu, “Application of Structural Systems reliability Theory”, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1986.
- Shigley, J. E and Mische, C. R., “Mechanical Engineering Design”, Mc-Graw-Hill, Singapore, 1989.
- Wirsching, P. H. and Yao, T. P., “Statistical Methods in Structural Fatigue”, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 96, No. ST6, June, 1970, pp. 1201 - 1219.
- Zheng, X. -L., Lü, B., and Jiang, H., “Determination of Probability Distribution of Fatigue Strength and Expressions of P-S-N Curves”, Engineering Fracture Mechanics, Vol 50, No. 4, pp.: 483-491, 1995.

8 - AGRADECIMENTOS

Agradecemos o apoio e colaboração dos funcionários da Oficina do Departamento de Engenharia Mecânica da UnB, em especial aos técnicos Arthur Alves Rocha e Edson Luca de Almeida.

EVALUATION OF STATISTICAL MODELS USED IN ESTIMATE TO *P-S-N* CURVE - A STUDY FOR ALUMINUM ALLOY

Jorge Luiz de Almeida Ferreira, Dr.

Giovanni Moreira, Eng.

Pablo Alexandre Lima, Eng.

Mechanical Engineering Department - University of Brasília, Campus Universitário Darcy Ribeiro, Asa Norte, Brasília, Brazil, ZIP CODE 70910-900, e-mail: jorge@unb.br

Abstract: *Alloys of aluminum are frequently used in mechanical components. Under the structural point of view, a great deficiency that is observed in this material is the inexistence of the endurance limit. Besides, as a result of experimental test, high dispersion is observed in the fatigue life of this material. Considering this the estimate of the curves S-N and ϵ -N are based on median life observed in this test. Because of this, the use of such curves for the structural life prediction can result in non-conservative design. A way quite used to resolve that problem consists in the use of life curves associated to specific levels of reliability, that is to say, the P-S-N curves. This work has as objective to study the influence of the probability distribution model used to describe the fatigue life on the curve P-S-N. For that they were tested in 75 specimens, divided in 6 levels of different stress. Based in the obtained results, was evaluated the S-N nominal curve and was carried out inferences with*

relationship to the type of probability distribution function that best represented the fatigue lifes. Three probability distribution models were used in this analysis: Lognormal, Weibull and Gumbel distribution. With base in the test of adherence of Kolmogorov-Smirnov, it could be concluded that the distribution of the life of fatigue of the specimens is represented well by Lognormal and Gumbel distribution. After such analysis, curved P-S-N for levels of reliability of 95,45% was estimated considering this three distribution probability functions. Comparing the obtained results, it was verified that the P-S-N curve estimated by Gumbel and Weibull distribution were fit better to the experimental data in this reliability level.

Keyword: *Fatigue test, Reliability Analysis, P-S-N Curves, Fatigue Strength*