



MODELAGEM MECÂNICA E APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS DA HEMODINÂMICA EM ANASTOMOSES SISTÊMICO-PULMONARES

Dimitrius Caloghero Pereira¹

Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC)
Departamento de Engenharia Mecânica – UFRGS
Sarmento Leite nº425
90050-170 Porto Alegre/RS – Brasil
dimi@cesup.ufrgs.br

Cleber Spode²

Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC)
Departamento de Engenharia Mecânica – UFRGS
Sarmento Leite nº425
90050-170 Porto Alegre/RS – Brasil
cleber@mecanica.ufrgs.br

Sérgio Frey³

Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC)
Departamento de Engenharia Mecânica – UFRGS
Sarmento Leite nº425
90050-170 Porto Alegre/RS – Brasil
frey@mecanica.ufrgs.br

João Ricardo Sant'anna

Instituto de Cardiologia do RS
Princesa Isabel nº 395
Porto Alegre/RS – Brasil

Resumo: *A anastomose sistêmico-pulmonar é um excelente procedimento paliativo para crianças e recém-nascidos portadores de cardiopatias congênitas cianóticas com diminuição da circulação pulmonar. Neste artigo, as aproximações “Streamline Upwind/Petrov-Galerkin – SUPG” foram utilizadas na simulação de escoamento de sangue em uma anastomose sistêmico pulmonar. A Anastomose estudada neste artigo é conhecido como Blalock-Taussig modificado no qual um enxerto de tubo sintético (prótese) é interposto entre a artéria subclávia esquerda e a artéria pulmonar com o objetivo de desviar parte do fluxo sistêmico ao pulmonar. A metodologia de elementos finitos utilizada, conhecida como método SUPG, supera as dificuldades enfrentadas pelo método de Galerkin clássico em altos números de Reynolds, que são compatibilizar os subespaços de velocidade e pressão – satisfazendo deste modo a condição denominada de Babuška-Brezzi e evitar oscilações espúrias devido à natureza assimétrica da aceleração advectiva de equação de momentum – adicionando termos malha-dependentes para a formulação de Galerkin clássica. Um modelo tridimensional parametrizado, utilizando o elemento lagrangeano trilinear, foi criado a*

¹ Este autor é aluno do Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica da UFRGS.

² Este autor é aluno de Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica da UFRGS.

³ Toda correspondência deve ser enviada a este autor.

partir de medições obtidas durante procedimento cirúrgico para avaliar os efeitos do diâmetro e ângulo do enxerto e a pulsatilidade do escoamento.

Palavras-chave: Hemodinâmica, Elementos Finitos, SUPG.

1. INTRODUÇÃO

O emprego de códigos de dinâmica de fluidos computacional vem sendo utilizado para simular escoamentos de sangue com o objetivo de auxiliar pesquisas e tratamentos de doenças vasculares. Os resultados destas simulações tem colaborado nos projetos de novas próteses, no aperfeiçoamento de técnicas cirúrgicas e na compreensão da hemodinâmica do sistema vascular humano. As simulações do escoamento de sangue se concentram em artérias com bifurcações, ramificações e curvaturas, onde é elevada a incidência de patologias como: arteriosclerose, aneurisma e trombose. As simulações mais estudadas até o momento são a artéria carótida, a artéria aorta abdominal e de anastomoses de enxerto vascular na artéria femoral.

O objetivo deste trabalho é estudar a influência dos fatores geométricos no escoamento de sangue em uma anastomose sistêmico-pulmonar utilizando um código de dinâmica de fluidos computacional baseado no método de elementos finitos. A anastomose a ser estudada é conhecida como Blalock Taussig Modificada (Leval, 1981) e consiste em uma técnica cirúrgica paliativa indicada nas cardiopatias congênitas cianóticas com diminuição do fluxo de sangue arterial nas artérias pulmonares. Com o objetivo de aumentar o fluxo pulmonar, parte do fluxo sistêmico é direcionado para as artérias pulmonares através da interposição de um enxerto tubular (prótese, “Shunt”) de politetrafluoretileno – “PTFE” entre a artéria subclávia e a artéria pulmonar. A sobrevida destes pacientes depende do aumento no fluxo pulmonar pelo enxerto e portanto, da dinâmica do escoamento no enxerto e nas artérias pulmonares, diretamente ligado aos fatores geométricos envolvidos na cirurgia, tais como diâmetros das artérias e enxerto, ângulos da anastomose.

Um modelo geométrico tridimensional parametrizado foi desenvolvido para permitir simulações com diferentes configurações geométricas.

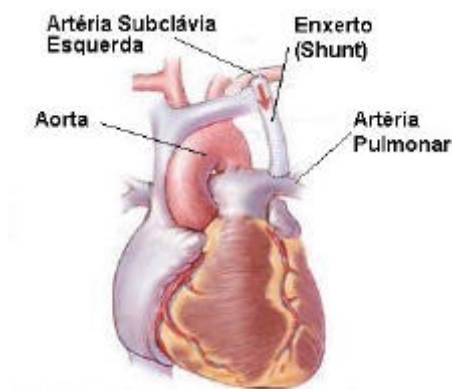


Figura 1. Cirurgia de Blalock-Taussig modificada

2. REOLOGIA DO SANGUE

O sangue é um fluido viscoso composto por células e plasma (Jandl, 1996). O plasma é formado por água, sais minerais e moléculas orgânicas (glicídios, lipídios e proteínas). As células pertencem a três categorias, conforme apresentado na Tab. (1): glóbulos vermelhos (eritrócitos ou hemácias), glóbulos brancos (leucócitos) e plaquetas (trombócitos). Os glóbulos vermelhos representam mais de 99% do total de células, significando que são as únicas células que apresentam influências significativas nas características físicas do sangue (Bernard e Levy, 1976).

Tabela 1. Contagem dos glóbulos (resultados normais por mm^3)

Células	Homem	Mulher	Criança 1 ano	Recém-Nascido
Eritrócitos	4,5 a 5,9 milhões	4 a 5,4 milhões	3,6 a 5 milhões	4 a 6 milhões
Leucócitos	4.000 a 10.000	4.000 a 10.000	4.000 a 12.000	10.000 a 25.000
Trombócitos	200.000 a 400.000	200.000 a 400.000	200.000 a 400.000	150.000 a 400.000

A porcentagem de células presente no sangue é chamada de hematócrito. Segundo Jandl, 1996, o hematócrito normal de um homem oscila entre 40 e 52, enquanto que em uma mulher está entre 35 e 47. O volume total de células vermelhas não pode ser determinado apenas pela multiplicação entre o volume total de sangue e o hematócrito, tendo em vista que a concentração de células vermelhas nos pequenos vasos é menor do que nos grandes vasos. O hematócrito pode não se enquadrar nesta faixa devido a ocorrência de anemia ou de policitemia. A anemia é a deficiência de hemácias, que pode ser causada ou por perda muito rápida ou produção demasiado lenta de hemácias. Na anemia a viscosidade do sangue diminui (1,5 vezes a da água), diminuindo a resistência ao fluxo sanguíneo nos vasos periféricos de modo que quantidades de sangue muito superiores às normais fluem pelos tecidos e retornam ao coração. Um dos principais efeitos da anemia é uma grande sobrecarga de trabalho para o coração. A policitemia ocorre quando se tem uma grande produção de hemácias devido ao pouco oxigênio na atmosfera, como nas altitudes elevadas, ou porque há insuficiente fornecimento de oxigênio para os tecidos. Devido ao aumento da viscosidade do sangue na policitemia, o fluxo sanguíneo é freqüentemente lento. O aumento da viscosidade tende a diminuir a velocidade do retorno venoso ao coração, por outro lado, o volume sanguíneo está muito aumentado na policitemia, o que tende a aumentar o retorno venoso; havendo assim uma compensação entre estes dois fatores.

2.1 Viscosidade do Sangue

A viscosidade do sangue não tem o mesmo valor nas diferentes partes do sistema vascular. Sua viscosidade varia de 3 a 4 vezes a viscosidade da água em função do hematócrito, da temperatura e do fluxo. O hematócrito é um importante determinante da viscosidade do sangue. A medida que o hematócrito aumenta, há um aumento na viscosidade, porém essa relação não é linear, conforme pode ser visto na Fig (2). A temperatura também tem um efeito significativo na viscosidade. A medida que a temperatura diminui, a viscosidade aumenta.

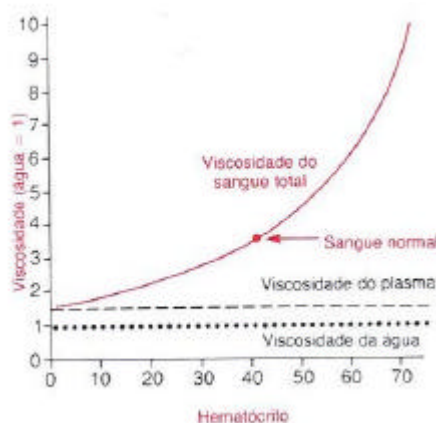


Figura 2. Efeito do hematócrito sobre a viscosidade

A viscosidade aumenta aproximadamente 2 % para cada °C diminuído na temperatura. O fluxo do sangue também afeta a viscosidade. A viscosidade do sangue aumenta de forma muito acentuada

a medida que a velocidade do escoamento diminui. Como as velocidades do escoamento de sangue em pequenos vasos são extremamente pequenas, em torno de 1 mm/s, a viscosidade do sangue pode aumentar por até 10 vezes pela ação isolada deste efeito. Esse efeito é por parte causado pela aderência dos glóbulos vermelhos, que se deslocam lentamente tanto entre si como com a parede vascular. Mas um outro efeito pode ocorrer na microcirculação chamado efeito de Fahraeus-Lindqvist (Bayliss, 1973), tornando a viscosidade do sangue a metade comparado aos grandes vasos. As células vermelhas movem-se de forma aleatória nos grandes vasos. A concentração e tipos de proteínas do plasma são outros fatores que afetam a viscosidade do sangue, mas esses efeitos são muito menos importantes e não são considerados na maioria dos estudos hemodinâmicos.

2.2 Reologia do Plasma

A viscosidade do plasma é 1,5 vezes a da água. O plasma muitas vezes é caracterizado como um fluido newtoniano (Bayliss, 1973). Conforme Wintrobe, 1998, seu volume normal em um homem de 70 kg é aproximadamente de 3.500 ml, sua viscosidade é principalmente função da concentração e da viscosidade intrínseca das proteínas individuais em solução. A viscosidade intrínseca das proteínas por sua vez é influenciada pelo tamanho e forma moleculares. As proteínas plasmáticas constituem em frações de albumina, globulina e fibriogênio. O fibriogênio é a maior das proteínas, e apresenta grande influência na viscosidade do plasma, apesar de formar apenas 5,5% das proteínas plasmáticas. As globulinas normalmente representam 45% das proteínas plasmáticas e um aumento de 1 a 4 g por 100 ml pode causar uma aumento na viscosidade do plasma em até 50%.

Bingham e White, 1911 e Hess, 1920, descreveram a Eq. (1) estimando a viscosidade do plasma a partir da concentração de proteínas,

$$\frac{\mu_p}{\mu_w} = \frac{1}{1 - b\theta} \quad (1)$$

onde μ_p a viscosidade do plasma, μ_w a viscosidade da água, θ fração de volume de partículas, e b é um fator arbitrário que representa o aumento da fração de volume das partículas suspensas. Se a concentração de proteína é expressa em gramas por 100 ml, o valor de b é 0.06.

Hatschek, 1911, definiu b como função de θ .

$$b = \frac{1}{\theta^{2/3}} \quad (2)$$

Substituindo a equação (1) em (2), tem-se :

$$\frac{\mu_p}{\mu_w} = \frac{1}{(1 - \theta^{1/3})} \quad (3)$$

2.3 Reologia dos Glóbulos Vermelhos

A dependência ao cisalhamento da viscosidade do sangue se deve ao efeito gerado pela deformação, orientação e agregação dos glóbulos vermelhos. Enquanto que uma deformação do glóbulo vermelho pode diminuir a viscosidade aparente em altas taxas de cisalhamento, uma agregação desses glóbulos pode aumentar acentuadamente essa viscosidade (Jandl, 1996).

O formato bicôncavo discoidal dos glóbulos vermelhos é perfeito para resistir as deformações requeridas para sua passagem pelos vasos capilares. Quando as células encontram bifurcações ou ramificações vasculares complexas rapidamente acomodam sua forma e espaço para moverem-se com o mínimo de atraso. Deformações exageradas podem causar divisões das células em dois ou

mais fragmentos. As células vermelhas tem um diâmetro de $7,82 \pm 0,62 \mu m$. Quando as células deixam as arteríolas e entram nos capilares, o principal aspecto reológico se torna a viscosidade intrínseca da célula, que depende das propriedades viscoelásticas da membrana celular e principalmente da concentração intracelular de hemoglobina. Uma concentração normal de hemoglobina de 33 g/dl contribui em torno de 6 cp na viscosidade intrínseca. Concentrações acima de 36 g/dl fazem a viscosidade intrínseca aumentar e em torno de 40 g/dl , causam uma certa rigidez às células.

O efeito na viscosidade de um líquido submetido a inserção de partículas esféricas, formando uma suspensão, foi estudado por Einstein, 1906, que considerou que as partículas estão suficientemente distantes uma das outras e que o movimento de uma partícula não influencia o movimento das outras partículas, e concluiu que a viscosidade da suspensão é diretamente proporcional ao volume total de partículas (células) sob o volume da suspensão.

$$\mu_s = \frac{\mu_p}{\mu_w} = 1 + 2,5 \theta \quad (4)$$

onde μ_s é a viscosidade relativa da suspensão, θ fração de volume das células (hematócrito). O valor 2,5 na Eq. (4) refere-se ao fator de forma para esferas. Para as partículas não esféricas este valor deve ser alterado, conforme Jeffery, 1922, o valor de 2,061 é o mais aproximados para a forma dos glóbulos vermelhos. A equação de Einstein é válida não só para suspensões como para soluções e colóides, porém deve ser empregada com certo cuidado para valores de θ maiores de 0,1 (10%), onde se observa uma viscosidade relativa maior que a calculada devido a interações entre as partículas.

Várias equações empíricas ou semi-empíricas a respeito da viscosidade relativa foram desenvolvidas. Em sua maioria, descrevem a relação entre a viscosidade do plasma e a concentração de proteínas e a relação entre a viscosidade relativa do sangue e a concentração de glóbulos vermelhos (hematócrito).

3. MODELAGEM MECÂNICA

Uma maneira alternativa de enunciarmos os axiomas de momentum é através do Teorema do Trabalho Virtual, ou, num contexto de energia, do **Princípio das Potências Virtuais** – PPV (Gurtin, 1981), o qual afirma: *A potência despendida sobre um volume de fluido Ω pelas forças de corpo e superfície é igual a taxa de variação da energia cinética mais a potência dos esforços internos (“stress power”).*

Este importante princípio regulador da conservação da energia mecânica de um fluido pode ser descrito matematicamente pelo teorema a seguir:

Teorema do Princípio das potências virtuais. Para todo volume fluido Ω e qualquer instante de tempo t , temos que a conservação de energia mecânica no fluido é dada por

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{o} \cdot \mathbf{\dot{a}}(\mathbf{u}) \, d\Gamma + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \, d\Omega \quad (5)$$

onde

$$\mathbf{\dot{a}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (6)$$

Prova: (ver Gurtin, 1981).

Do ponto-de-vista numérico, tem ainda o PPV a grande vantagem de formular problemas mecânicos de maneira variacional, deixando assim bastante natural a introdução de métodos

variacionais na Mecânica, em particular o Método dos Elementos Finitos, conforme será explorado no capítulo 4.

A equação do movimento. Podemos extrair a equação do movimento do VPP integrando-se por partes a Eq. (5), explorando a simetria do tensor tensão \mathbf{T} e aplicando os Teoremas de Reynolds e da divergência[4]

$$\int_{\Omega} \left[\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{T} - \rho \mathbf{f} \right] \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma} [\mathbf{T}\mathbf{n} - \mathbf{t}(\mathbf{n})] \cdot \mathbf{v} d\Gamma = 0 \quad (7)$$

onde o D/Dt significa a derivada material de um campo vetorial [13]. Aplicando os teoremas de Cauchy e da Localização, teremos a equação diferencial da conservação da energia mecânica,

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} \quad (8)$$

3.2 Hipóteses Constitutivas

A equação que representa a relação entre as variáveis cinemáticas e dinâmicas são chamadas de equações constitutivas. A física do contínuo é responsável por estabelecer a equação de estado para um dado material e quais são os seus coeficientes apropriados. No geral, esses coeficientes são funções de variáveis termodinâmicas como a pressão e temperatura e por isso, a equação constitutiva de um fluido é influenciada pelo estado termodinâmico.

Fluidos Newtonianos. Os axiomas de Euler, apesar de válidos para muitos corpos, não os caracterizam completamente, pois são incapazes de distinguir comportamentos dos materiais. Em fluidos, o fenômeno do atrito é expresso por forças cisalhantes, que retardam o movimento das partículas do fluido. Uma medida desse movimento é dada pelo tensor gradiente de velocidade $\nabla \mathbf{u}$, sugerindo equações constitutivas com o seguinte formato:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{C}(\mathbf{u}) \quad (9)$$

onde $\mathbf{C}(\cdot)$ é chamado de função resposta do fluido. Materiais que são caracterizados pela equação Eq. (9) são chamados de fluidos Newtonianos. Para a classe de fluidos newtonianos incompressíveis, a função resposta pode ser expressa pela equação [14]:

$$\mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}) = \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \quad (10)$$

com μ e ζ sendo o primeiro e segundo coeficientes da viscosidade, respectivamente, e \mathbf{I} o tensor identidade. Como sempre, muitos escoamentos apresentam variações de densidades desprezíveis, sendo considerados incompressíveis e tendo a função $\mathbf{C}(\cdot)$ caracterizada apenas por uma constante: a sua viscosidade [9]:

$$\mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}) = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (11)$$

Fluidos Newtonianos Generalizados. Observações experimentais dos fluidos incompressíveis têm mostrado que modelos baseados na equação constitutiva Eq. (12) obtida por Reiner (1945) e Prager (1945) , apresentam alguma utilidade na predição do comportamento dos fluidos reais –

porém, o modelo newtoniano não é sempre realista na caracterização da resposta mecânica de alguns fluidos

$$\boldsymbol{\sigma} = \kappa_0 \mathbf{I} + \kappa_1 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \kappa_2 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^2 \quad (12)$$

onde $\kappa_k = \kappa_k(I_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}, II_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}, III_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})})$, sendo que, $I_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}, II_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}, III_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}$ denotam o primeiro, segundo e terceiro invariantes, respectivamente, do tensor taxa de deformação, onde:

$$I_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})} = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \text{div } \mathbf{v}; \quad II_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})} = \frac{1}{2} [I_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}^2 - II_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}^2]; \quad III_{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})} = \det \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (13)$$

Modelos empíricos baseados na Eq (12) predizem o real comportamento de uma classe de escoamentos conhecidos por escoamentos viscométricos (Slattery, 1999). Nestes escoamentos a partícula material é sujeita a uma deformação com história constante, sendo que os efeitos de memória são apagados. Dentre os exemplos de escoamentos viscométricos podemos citar escoamentos em tubos e escoamento de Couette. A classe mais comum dos modelos empíricos para fluidos incompressíveis baseados na Eq. (12) são os fluidos Newtonianos generalizados. Esta classe de modelos introduz uma viscosidade η , chamada de viscosidade aparente, dependente da taxa de deformação γ do fluido (Bird et al., 1987), definida de forma análoga à viscosidade dos fluidos Newtonianos.

$$\tau_{xy} = -\eta(\gamma) \gamma \quad (14)$$

Modelo Ostwald de Waele. Segundo Slattery, 1999, o modelo de Ostwald de Waele, ou Power Law, é o modelo newtoniano generalizado mais utilizado, onde a viscosidade cisalhante dependente é dada por:

$$\eta(\gamma) = m\gamma^{n-1} \quad (15)$$

onde os parâmetros m e n são determinados empiricamente. Quando $n=1$ e $m=\mu$, o modelo se reduz ao modelo Newtoniano para um fluido incompressível. Segundo Slattery, 1999, o modelo Power Law apresenta uma grande desvantagem do ponto de vista teórico que é, não se reduzir ao modelo newtoniano no limite $\gamma \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow 0$) ou no limite $\gamma \rightarrow \infty$ ($\tau \rightarrow \infty$), afastando-se assim do comportamento dos fluidos reais.

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \tau = \eta(\gamma) \gamma = m\gamma^{n-1} \rightarrow 0; \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \tau = m\gamma^{n-1} \rightarrow \infty \quad (16)$$

Modelo Carreau-Yasuda. Este modelo com 5 parâmetros, conforme Bird et al., tem flexibilidade suficiente para reproduzir uma variedade de curvas $\eta(\gamma)$ experimentais.

$$\eta(\gamma) = \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty}) [1 + (\lambda\gamma)^A]^{\frac{n-1}{A}} \quad (17)$$

onde η_0 é a viscosidade a taxa de cisalhamento zero, η_{∞} é a viscosidade a taxa de cisalhamento infinita, n é o “expoente power-law”, λ é uma constante de tempo e A um parâmetro adimensional que descreve a transição entre a região de taxa de cisalhamento zero e a região Power Law. Quando o valor de A é igual a 2, a Eq. (17) é conhecida por modelo de Carreau (Carreau, 1968).

Conforme Bird et al., 1987, em baixas taxas de cisalhamento, a tensão de cisalhamento é proporcional a taxa de deformação γ , e a viscosidade se aproxima a um valor constante η_0 - viscosidade a taxa de cisalhamento zero. A medida que a taxa de cisalhamento aumenta, a viscosidade decresce. Para taxas de cisalhamento muito altas a viscosidade torna-se novamente independente da taxa de cisalhamento e é definida por η_∞ - viscosidade a taxa de cisalhamento infinita.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

A formulação Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin foi empregada para aproximar o escoamento de sangue em próteses sistêmico pulmonares baseada em dados clínicos do Instituto de Cardiologia do Rio Grande do Sul. No desenvolvimento das simulações foi utilizado o código Flotran (Ansys Inc.) e o pós-processador Enight (CEI Inc). O processamento foi feito no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) e no Centro Nacional de Supercomputação (CESUP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Começando com as definições de conservação de massa e momentum, podemos modelar o escoamento de sangue através de uma anastomose sistêmico pulmonar como sendo incompressível, matematicamente descrito pelo problema de contorno,

$$\begin{aligned} [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u} - 2\nu^{-1} \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g \quad \text{on } \Gamma_g \\ [-p\mathbf{I} + 2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})] \mathbf{n} &= \mathbf{T}_h \quad \text{on } \Gamma_h \end{aligned} \tag{18}$$

onde \mathbf{u} é o campo de velocidade, p o campo de pressão, ν a viscosidade cinemática, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade, \mathbf{n} normal exterior unitária, \mathbf{f} força de corpo, ν^{-1} o número de Reynolds.

Dez pacientes com cardiopatia congênita e hipofluxo pulmonar, submetidos à cirurgia de anastomose sistêmico-pulmonar do tipo Blalock-Taussig modificada no Instituto de Cardiologia do RS, foram incluídos no presente estudo. Os dados clínicos obtidos junto os instituto foram: diâmetro do enxerto, diâmetro da subclávia e das artérias pulmonares, e os ângulos distais e proximais da anastomose. A extensão das artérias foram determinadas através das simulações pulsantes e do Exame de Ecodoppler.

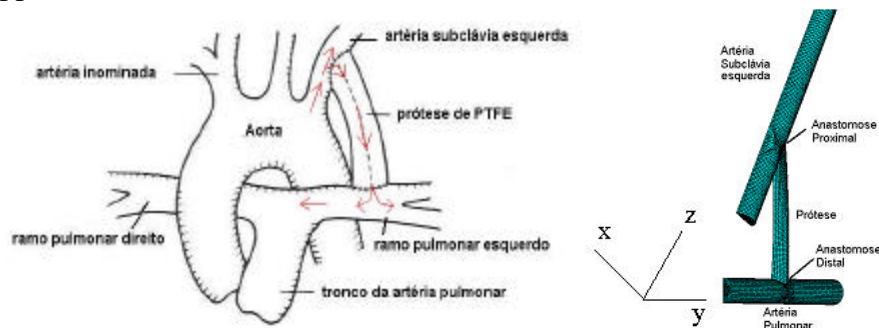


Figura 3. Anastomose Blalock-Taussig modificada, (a) desenho (b) modelo simétrico

O domínio computacional foi discretizado por uma malha de elementos hexaedros lagrangeanos trilineares de oito nós. O tamanho do elemento (compatível com os recursos computacionais disponíveis) foi determinado - 0,0005.. O número de elementos variou de paciente para paciente

devido às diferenças dos diâmetros das artérias e enxerto. O menor modelo foi discretizado em 17.976 elementos, enquanto que o maior foi em 72.666 elementos. O plano de simetria normal ao eixo Y foi assumido com o objetivo de reduzir a memória necessária com ganho de 50% na malha, e o tempo de solução.

As simulações foram realizadas de acordo com as seguintes hipóteses: as paredes das artérias são rígidas, o sangue é homogêneo e se comporta como um fluido Newtoniano generalizado, o escoamento é laminar – com Reynolds entre 700 e 2400.

As condições de contorno impostas foram: condição de não deslizamento nas paredes das artérias e enxerto, condição de tração livre nas seções de saída das artérias subclávia e pulmonares, de modo a retirar a indeterminação do campo de pressão incompressível, fixou-se em alguns nós das seções de saída $p=0$. Algumas simulações, foram realizadas com as condições de contorno definidas por Migliavacca et al., 2000, com a imposição de fluxo prescrito, na saída da artéria subclávia. O perfil da velocidade de entrada na artéria subclávia foi considerado plano em todas as simulações. A condição de escoamento pulsante na artéria subclávia foi obtida a partir do exame de Ecodoppler realizado em um paciente submetido previamente ao procedimento de Blalock-Taussig modificado.

O código empregado resolve os sistema de equações de forma segregada, surgindo a necessidade de acoplamento entre as variáveis, principalmente entre velocidade e pressão, em escoamentos incompressíveis. O método batizado de SIMPLE (“Semi implicit linked equations”), Patankar e Spalding, 1972, foi utilizado para realizar este acoplamento. A solução do sistema de equações algébricas foi obtida com a utilização do método linha a linha TDMA (“TriDiagonal Matriz Algorithm”) desenvolvido por Thomas, 1949.

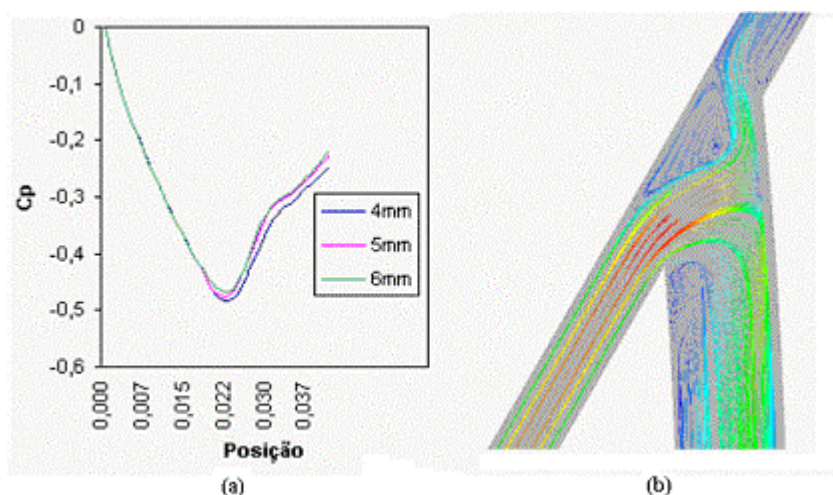


Figura 4. (a) Variação do coeficiente de pressão em função do diâmetro do enxerto; (b) Linhas de Corrente na junção da subclávia e o enxerto.

Observou-se que o fator geométrico mais influente é a relação entre os diâmetros da artéria subclávia e do enxerto, cabendo ao ângulo entre eles uma pequena representação na quantidade de fluxo de sangue desviado. Abaixo é apresentado os dados de um dos pacientes.

Tabela 2. Fluxo de sangue desviado em função do diâmetro do enxerto.

	Local Desviado	3 mm	4 mm	5 mm
P1	Enxerto	65,06%	73,81%	79,33%
	Pulmonar Direita.	33,17%	37,66%	40,64%
	Pulmonar Esquerda.	31,89%	36,15%	38,68%

5. AGRADECIMENTOS

Os autores, S. Frey e Cleber Spode agradecem, respectivamente, ao suporte financeiro do CNPq Proc. 350747/93-8 e a PROPESQ/UFRGS.

6. REFERÊNCIAS

[1] Asakura, T., Karino, T., 1990, "Flow patterns and spatial distribution of atherosclerotic lesions in human coronary arteries", *Circulation Research*, Vol.66, pp. 1045-1066.

[2] Brooks, A.N., Hughes, T.J.R. , 1982 "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 32, pp. 199-259.

[4] Ciarlet, P.G., 1978, "The finite element method for elliptic problems", North-Holland, Amsterdam.

[5] Cole, J.S., Gillan, M.A., Raghunathan, S.R., 1998, "Numerical Simulations of time-dependent, non-newtonian blood flow through typical human arterial bypass grafts", 6° Irish Chemical engineering Research Symposium Cork, Republic of Ireland.

[6] Franca, L.P. e Frey, S., 1992, "Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 99, pp. 209-233.

[7] Franca, L.P., Frey, S. e Hughes, T.J.R., 1992, "Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 95, pp. 253-276.

[8] Franca, L.P., Frey, S. e Madureira, A., 1994, "Two- and three-dimensional simulations of the incompressible Navier-Stokes equations based on stabilized methods", *Anais da First European Computational Fluid Dynamics Conference*, pp.121-128, Bruxelas, Bélgica .

[9] Hughes , T.J.R., Franca, L.P., Balestra, M., 1986, "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 59, pp. 85-99.

Johnson, C., 1987, "Numerical solution of partial differential equations by the finite element method", Cambridge University Press, Cambridge.

[10] Landau, L. e Lifchitz, E., 1971, "Mécânica dos fluides", Edições Mir, Moscou (1971).

[11] Migliavacca, F., 2000, "Calculating blood flow from doppler measurements in the systemic-to-pulmonary artery shunt after the Norwood operation: A method based on computational fluid dynamics", *Ultrasound in Med. & Biol.*, Vol. 26, pp.209-219.

Nesralla, I. A. , 1994, "Cardiologia Cirúrgica: Perspectivas para o ano 2000", Fundo Editorial BYK.

[12] Odim, J., Portzky, M., Zurakowski, D., 1995, "Sternotomy approach for the modified Blalock-Taussing Shunt" *Circulation – American Heart Association* , Vol.92, pp. 256-261.

[13] Patankar, S., 1980, "Numerical heat transfer and fluid flow", McGraw-Hill, New York.

[14] Perktold, K., Hofer, M., Rappitsch, G., Loew, M., Kuban, B.D., Friedman, M.H., 1998, "Validated computation of physiologic flow in a realistic coronary artery branch", *Journal of Biomechanics*, Vol.31, pp. 217-228.

[15] Zhao S.Z., Xu, X.Y., Hughes, A.D., Thom, S.A., Stanton, A.V., Ariff, B., Long, Q., 2000, "Blood flow and vessel mechanics in a physiologically realistic model of a human carotid arterial bifurcation", *Journal of Biomechanics*, Vol. 33, pp. 975-984.

MECHANICAL MODELING AND FINITE ELEMENT APPROXIMATION OF THE HEMODYNAMICS IN SYSTEMIC PULMONARY SHUNT

Dimitrius C. Pereira¹

Laboratory of Computational and Applied Fluid Mechanics (LAMAC)
Mechanical Engineering Department – UFRGS
Sarmiento Leite nº425
90050-170 Porto Alegre/RS – Brazil
dimidi@cesup.ufrgs.br

Cleber Spode²

Laboratory of Computational and Applied Fluid Mechanics (LAMAC)
Mechanical Engineering Department – UFRGS
Sarmiento Leite nº425
90050-170 Porto Alegre/RS – Brazil
cleber@mecanica.ufrgs.br

Sérgio Frey³

Laboratory of Computational and Applied Fluid Mechanics (LAMAC)
Mechanical Engineering Department – UFRGS
Sarmiento Leite nº425
90050-170 Porto Alegre/RS – Brazil
frey@mecanica.ufrgs.br

João Ricardo Sant'anna

Cardiology Institute of RS
Princesa Isabel nº 395
Porto Alegre/RS – Brazil

Abstract. *Systemic pulmonary shunts provide an excellent form of palliation in neonates and children presenting with cyanotic congenital heart disease with pulmonary flow decrease. In this article, Streamline Upwind/Petrov-Galerkin approximations for blood flow through systemic pulmonary shunts have been performed. The shunt studied in this article is known as modified Blalock-Taussing in which a synthetic tube graft is inserted between the left subclavian and the pulmonary arteries with the objective of addressing part of the systemic to the pulmonary flow. The finite element methodology we are concerned with, called SUPG method, overcomes the classical Galerkin shortcoming for high Reynolds flows - namely, the need of compatibilize the velocity and pressure subspaces satisfying in this way the so-called Babuška-Brezzi condition and the rising of spurious numerical oscillations due to the asymmetric nature of advective acceleration of momentum equation - adding mesh-dependent terms to the classical Galerkin formulation. A parametric tridimensional model, employing trilinear lagrangean finite elements, was created based on direct intraoperative measurements to quantify the effects of geometry (diameter and angle) and pulsatility of the flow.*

Keywords: *Hemodynamic, Finite Elements, SUPG.*

¹ This author is a graduate student of mechanical engineering at UFRGS.

² This author is a undergraduate student of mechanical engineering at UFRGS.

³ All article correspondence should be addressed to this author..