II CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA
II NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING
12 a 16 de Agosto de 2002 - João Pessoa – PB

# ESTIMADOR DE ERRO PARA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS HIERÁRQUICOS APLICADO AO PROBLEMA FLUIDO-ESTRUTURA NA FORMULAÇÃO SIMÉTRICA

**Horacio Valadares Duarte**
Departamento de Engenharia Mecânica- UFMG
Av. Antonio Carlos, 6627 - Campus Pampulha
CEP 31270-901 - Belo Horizonte, MG, Brasil

**Renato Pavanello**
Departamento de Mecânica Computacional - FEM - UNICAMP
C.P. 6122 - CEP 13083-970 - Campinas, SP, Brasil

***Resumo.*** *Neste artigo é apresentado um estimador de erro para o problema de vibrações livres usando a técnica dos elementos finitos em problemas com acoplamento fluido-estrutura em domínio fechado. O estimador é desenvolvido a partir do método proposto por Friberg para problemas de autovalor-autovetor empregando funções de forma hierárquicas. A simetrização da formulação acoplada fluido-estrutura foi levada a cabo usando-se como variável de estado do meio fluido o Potencial de Velocidade e para o meio sólido usou-se o campo de deslocamentos. O estimador foi desenvolvido para a formulação simétrica, procurando-se disponibilizar uma ferramenta compatível com os algoritmos clássicos de álgebra computacional aplicados em ambientes de elementos finitos.*

***Palavras-chave:*** *Método de Elementos Finitos, Fluido-Estrutura, Autovalores e Autovetores, Estimador de Erro, Análise p-adpatativa.*

## 1. INTRODUÇÃO

O problema da interação fluido-estrutura apresenta uma série de pecularieda des, como por exemplo a dificuldade de acoplar problemas distintos envolvendo diferentes variáveis. Na maioria das vezes as grandezas envolvidas apresentam escalas com várias ordens de grandeza de diferença entre si. Dependendo do problema também pode ser necessário usar simultaneamente diferentes técnicas de descrição das variáveis no espaço (Lagrangiana para fluido e Euleriana para estrutura).

Com o crescente uso de técnicas numéricas acrescentou-se o problema da escolha do método a ser empregado. O método de elementos finitos mostrou-se superior devido a simplicidade em impor as condições de contorno em relação s técnicas de diferenças finitas e volume de controle muito empregadas em problemas de mecânica dos fluidos. No entanto, problemas com domínio infinito, como no caso da acústica linear externa os métodos de elementos de contorno se mostraram mais práticos e baratos devido a simplicidade de se impor a condição de meio infinito. Por outro lado sua aplicação é restrita a problemas lineares o que limita o seu emprego a poucos problemas envolvendo escoamento. Também é notória a dificuldade do método de elementos de contorno em modelar elementos estruturais esbeltos como barras, vigas e placas. Mas cresce a aplicação do método consorciado com a técnica de elementos finitos, em Mackerle

(Mackerle, J., 1999) podem ser encontradas algumas referências sobre este tópico. Este artigo fornece também uma extensa lista de referências bibliográficas, 206 títulos publicados entre 1995 e 1998, sendo 157 deles empregando a técnica de Elementos Finitos. Este número de trabalhos publicados sugere que o tema ainda é bastante atual e que pesquisas na área são relevantes.

Devido a grande diversidade de problemas diferentes abordagens foram propostas para formulação em Elementos Finitos. A maioria destes métodos pode ser encontrada no livro de Ohayon (Morand e Ohayon, 1995). As técnicas tradicionais empregadas para o problema acústico interno são baseadas na escolha das variáveis descrevem o problema. Para a estrutura o campo de deslocamento $u$ é a escolha natural. Para o fluido há diferentes escolhas, a formulação em deslocamentos $(u, w)$, formulações em pressão $(u, p)$, formulação em potencial de velocidades $(u, \Phi)$, potencial de deslocamentos $(u, \Psi)$, e combinações entre diferentes métodos como $(u, \Phi, P)$. Uma comparação entre eles pode ser encontrado no trabalho de Galli (Galli L. A. F. , 1997). Neste trabalho será usado a formulação em potencial de velocidade para o fluido e em deslocamentos para a estrutura. O motivo da escolha deve-se ao fato do sistema resultante ser simétrico e a formulação mais simples.

Análise de erro aplicada ao método de elementos finitos desenvolveu-se acentuadamente a partir da década de 80 do século passado. Uma discussão bem didática sobre o assunto pode ser encontrada em Noor (Noor et al., 1987). Existem duas técnicas básicas a partir das quais uma série de procedimentos foram desenvolvidos. O método da recuperação de tensão ou simplesmente da recuperação algumas vezes chamado de $ZZ$ ou $Z^2$, e o método do residual (Stewart et al., 1997). O princípio básico do método da recuperação pode ser encontrada em detalhes em Zienkiewicz (Zienkiewicz O. C., 1991) e a idéia do método do residual pode ser encontrado por exemplo em Babuška (Babuška e Sazbó , 1991). Ambos os métodos são considerados *a-posteriori* ou aplicáveis após o sistema ter uma solução, e locais ou avaliados no elemento individualmente. Estes métodos foram aplicados para problemas elípticos na *formulação h* ou versão de Elementos Finitos com funções de forma lineares tendo como parâmetro de avaliação do erro a dimensão característica do elemento $(h)$. Posteriormente foram estendidas a problemas na *formulação p*, ou versão com polinômios hierárquicos de grau $p$ usado como parâmetro e a forma mais usual na *formulação hp* que é a composição dos métodos já citados.

A análise de erro do método dos Elementos Finitos aplicado ao problema acústico externo foi objeto de intensa pesquisa na última década do século passado. Os principais trabalhos foram os trabalhos de liderados por I. Babuška sistematizado em (Ihlenburg F., 1998) onde pode-se encontrar também a bibliografia. Um dos mais importantes resultados foi a descoberta do fenômeno da poluição numérica em problemas acústicos externos. Este fenômeno é consequência do surgimento de autovalores complexos da matriz ("rigidez") gerada pela técnica dos Elementos Finitos. Em outras palavras o problema homogêneo associado gera "ondas numéricas" que são propagantes (se autovalor do problema homogêneo é complexo) e se superpõe a solução do problema físico quando $kh \leq \sqrt{12}$. Sendo $k = \omega/c$ o número de onda, $\omega$ a velocidade angular, $c$ a velocidade de propagação da perturbação ou do som no meio, e $h$ a dimensão característica do elemento. Percebe-se facilmente que para números de onda muito elevados a discretização do domínio fica proibitiva. Além disso as técnicas de estimadores de erro por serem locais não conseguem captar o erro devido a poluição numérica que não é um fenômeno local. Também demonstra que o aumento da ordem $p$ dos polinômios de interpolação reduz muito o número de graus de liberdade necessários para manter a solução abaixo de um valor de erro prescrito.

Um outro ponto que merece destaque é que o erro *a-priori* é muito bem caracterizado em faixas de convergência em função do número de onda $k$. Este fato compensa em parte a incapacidade do estimador *a-posteriori* em captar corretamente o erro.

Apesar da maior simplicidade há poucos trabalhos publicados sobre análise de erro do método de elementos finitos aplicado ao problema acústico interno. O trabalho de Alonso (Alonso A. et al., 1999) é um dos poucos. É baseado no método do residual com indicador de erro local para o refinamento da malha. No processo de refinamento o que se pretende é distribuir o erro da maneira mais uniforme possível(Noor et al., 1987), em geral é necessário computar algum tipo de constante de escala global para permitir esta comparação uma vez que o erro é computado localmente. São poucos processos de refinamento (Stewart et al., 1997) que não usam este procedimento.

Neste trabalho optou-se por aplicar ao problema um estimador desenvolvido para a formulação $p$. Foi escolhido por ser muito mais simples de implementar por apresentar bons resultados em malhas menos refinadas (Ihlenburg F., 1998) mesmo em malhas não muito regulares (Babuška et al., 1989). O estimador é o estimador apresentado por (Friberg, 1986) e (Friberg et al., 1987) e baseia-se nas propriedades das matrizes geradas a partir funções de forma definidas por polinômios hierárquicos. Por polinômios hierárquicos ou funções de forma hierárquicas entende-se que o aumento da ordem do polinômio gera uma matriz em que a matriz anterior é uma submatriz. Esta propriedade permite a estimativa dos autovetores que possibilitam a viabilização do estimador. Este estimador não é um estimador local.

## 2. DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

Nas referencias (Friberg, 1986) e (Friberg et al., 1987) foi desenvolvido e validada uma expressão que permite a estimativa de erro para problemas de autovalor que empreguem matrizes simétricas resultantes da aplicação do método dos elementos finitos. O estimador baseia-se em sistemas gerados a partir de funções de forma hierárquicas sugeridas inicialmente por Peano e largamente empregadas (Noor et al., 1987), (Babuška e Sazbó , 1991), (Ihlenburg F., 1998). A expressão geral do estimador foi dada pela equação:

$$\eta_{i,j} = \frac{[\psi_n^T[K_{m,n} - \lambda_i^{(n)} M_{m,n}]]^T[[K_{m,m} - \lambda_i^{(n)} M_{m,m}]^{-1}]^T[K_{m,n} - \lambda_i^{(n)} M_{m,n}]\psi_n}{k_i} \tag{1}$$

Na expressão acima $K_{n,n}$ simboliza a matriz de "rigidez" de dimensão $n \times n$, e $M_{n,n}$ a matriz de "massa" de mesma dimensão, $k_i$ é o i-ésimo termo diagonal da matriz de "rigidez" diagonalizada pela matriz de autovetores. O termo $\eta_{i,j}$ é o erro para a i-ésima frequência quando o j-ésimo grau de liberdade tem seu termo hierárquico alterado da ordem $p$ para $(p+m)$ o que significa que as matrizes têm a ordem alterada de $n$ para $(n+m)$. O termo

$$[[K_{m,m} - \lambda_i^{(n)} M_{m,m}]^{-1}][K_{m,n} - \lambda_i^{(n)} M_{m,n}]\psi_n \tag{2}$$

representa uma estimativa do autovetor $\psi_{n+m}$ associado i-ésima frequência quando o j-ésimo grau de liberdade tem seu termo hierárquico alterado da ordem $p$ para $(p+m)$. A expressão $[K_{m,n} - \lambda_i^{(n)} M_{m,n}]$ é uma matriz retangular $m \times n$ onde $m$ é o número de graus de liberdade hierárquicos acrescidos ao sistema e $n$ a dimensão do sistema original. A matriz $[K_{m,m} - \lambda_i^{(n)} M_{m,m}]^{-1}$ é a matriz $m \times m$ de termos hierárquicos diagonais acrescidos ao sistema. Mas a Eq. (1) transcrita acima, não é usada como foi apresentada. A Eq. 3 abaixo

$$\eta_{i,j} = \frac{\left\{\left[K_{n+1,n} - \lambda_i^{(n)} M_{n+1,n}\right]\{\psi_n\}\right\}^2}{k_i\left[K_{n+1,n+1} - \lambda_i^{(n)} M_{n+1,n+1}\right]} \tag{3}$$

é a forma de da Eq. (1) usualmente empregada. Esta expressão é obtida da anterior fixando o acréscimo de termos hierárquicos em uma unidade para cada grau de liberdade do elemento $(m = 1)$. É possível identificar desta forma qual o grau de liberdade influencia de maneira mais significativa o erro. Além disso simplifica a inversão da matriz de termos diagonais $[K_{m,m} - \lambda_i^{(n)} M_{m,m}]^{-1}$ que passar a ter um único termo.

Mas a expressão (3) só é aplicável a problemas simétricos, uma vez que foi obtida a partir de matrizes simétricas. Não é possível sua aplicação a problemas não simétricos como os resultantes da formulação em pressão (Morand e Ohayon, 1995). Por outro lado também não é aplicável ao problema fluido-estrutura simetrizado na formulação de potencial de velocidades (Galli L. A. F. , 1997), uma vez que a inversa da matriz de termos diagonais não é unitária como exige a Eq. (3).

## 2.1. Estimador de Erro Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura na Formulação em Potencial de Velocidade

A equação matricial do problema acoplado na formulação em potencial de velocidades (Galli L. A. F. , 1997; Everstine, 1989; Morand e Ohayon, 1995) é expressa como:

$$\left[\begin{bmatrix} K_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_f} H_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_f c^2} E_f \end{bmatrix} \cdots\right.$$

$$\left. \cdots - \omega \begin{bmatrix} 0 & L & M_e & 0 \\ L^T & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_f c^2} E_f \\ M_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_f c^2} E_f & 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \begin{Bmatrix} \{\psi_w\} \\ \{\psi_\theta\} \\ \omega\{\psi_w\} \\ \omega\{\psi_\theta\} \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{4}$$

Sendo $K_e$ e $M_e$ respectivamente as matrizes de rigidez e de massa da estrutura, $H_f$ e $E_f$ as matrizes volumétrica e de compressibilidade do fluido. O termo $\rho_f$ é a densidade do fluido e $c$ a velocidade do som no fluido. Em uma representação mais compacta:

$$[[A] - \omega[B]]\,\{x\} = 0 \tag{5}$$

Considerando que o sistema tenha sido discretizado empregando funções hierárquicas, o aumento do grau hierárquico de um elemento estrutural implica no aparecimento de uma linha e uma coluna tanto na matriz $M_e$ quanto na matriz $K_e$. Mas significará no mínimo duas linhas nas matrizes $A$ e $B$ da Eq. (4) acima. O mesmo ocorre com o elemento fluido onde a elevação de um grau no polinômio hierárquico implica no acréscimo de uma linha e uma coluna em $H_f$ e na matriz de compressibilidade $E_f$. Deve-se acrescentar porém que o sistema resultante ainda é um sistema hierárquico uma vez que a matriz original ainda é submatriz da matriz com termo hierárquico adicional. Portanto, a técnica proposta por Friberg (Friberg, 1986) ainda pode ser empregada. Deve-se desenvolver a Eq. (1) para aplica-la ao problema. O procedimento ainda será o de acrescentar um único grau hierárquico ao elemento. Como a elevação da ordem hierárquica se dará em cada elemento, o estimador pode ser separado em estimador para elementos fluidos e para elementos estruturais se for desenvolvido a partir das submatrizes. O problema será então o de determinar uma expressão simples que exija um mínimo de operações de forma a viabilizar o estimador.

### 2.2. Estimador de Erro para Elemento Estrutural

O aumento do grau hierárquico de um elemento estrutural implica no aparecimento de uma linha e uma coluna tanto na matriz $M_e$ quanto na matriz $K_e$ e significará para matriz $A$

$$[A]_{k+m,k+m} =$$

$$\begin{bmatrix} K_{e\,(n,n)} & K_{e\,(n,n+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{e\,(n+1,n)} & K_{e\,(n+1,n+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_f}H_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{e\,(n+1,n)} & M_{e\,(n,n+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{e\,(n+1,n)} & M_{e\,(n+1,n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_f c^2}E_f \end{bmatrix} \tag{6}$$

Para a matriz $B$, os termos acrescidos serão

$$[B]_{k+m,k+m} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & L_{(n,q)} & M_e & M_{e\,(n,n+1)} & 0 \\ 0 & 0 & L_{(n+1,q)} & M_{e\,(n+1,n)} & M_{e\,(n+1,n+1)} & 0 \\ L^T & L^T_{(n+1,q)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_f c^2}E_f \\ M_e & M_{e\,(n,n+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{e\,(n+1,n)} & M_{e\,(n+1,n+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_f c^2}E_f & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

onde $m$ é o número de graus hierárquicos acrescidos ao sistema, $k$ é o número de graus de liberdade do sistema acoplado original e $n$ para a estrutura.

Se $F$ for definido como

$$F = [A_{m,m} - \lambda_i^{(k)} B_{m,m}] \tag{8}$$

onde $A_{m,m}$ e $B_{m,m}$ são as matrizes com os termos hierárquicos diagonais das submatrizes que foram acrescentados ao sistema. Para elemento estrutural

$$F = \left[ \begin{bmatrix} K_{e\,(n+1,n+1)} & 0 \\ 0 & M_{e\,(n+1,n+1)} \end{bmatrix} - \lambda_i^{(k)} \begin{bmatrix} 0 & M_{e\,(n+1,n+1)} \\ M_{e\,(n+1,n+1)} & 0 \end{bmatrix} \right] \tag{9}$$

A inversa de $F$ será

$$F^{-1} = \frac{1}{\det[F]} \begin{bmatrix} M_{e\,(n+1,n+1)} & \lambda_i^{(k)} M_{e\,(n+1,n+1)} \\ \lambda_i^{(k)} M_{e\,(n+1,n+1)} & K_{e\,(n+1,n+1)} \end{bmatrix} \tag{10}$$

onde $\det[F]$ é o determinante de $F$ dado por

$$\det[F] = K_{e\,(n+1,n+1)} M_{e\,(n+1,n+1)} - (\lambda_i^{(k)} M_{e\,(n+1,n+1)})^2 \tag{11}$$

Para a expressão $[[A] - \omega[B]]\{x\} = 0$ o estimador da equação 1 será escrito como

$$\eta_{i,j} = [\psi_k^T [A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}]^T] \frac{[[A_{m,m} - \lambda_i^{(k)} B_{m,m}]^{-1}]^T}{k_i} \times [A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}] \psi_k \tag{12}$$

As matrizes $[A]_{m,n}$ e $[B]_{m,n}$ representam

$$[A]_{m,n} = \left[ \begin{array}{cccc} K_{e\,(n+1,n)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{e\,(n+1,n)} & 0 \end{array} \right] \tag{13}$$

$$[B]_{m,n} = \left[ \begin{array}{cccc} 0 & L_{(n+1,q)} & M_{e\,(n+1,n)} & 0 \\ M_{e\,(n+1,n)} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \tag{14}$$

as linhas acrescidas s matrizes $A$ e $B$ sem os termos diagonais. Logo

$$[A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}]\psi_k = \ldots$$

$$= \left[ \begin{array}{cccc} K_{e\,(n+1,n)} & -\lambda_i^{(k)} L_{\,(n+1,q)} & -\lambda_i^{(k)} M_{e\,(n+1,n)} & 0 \\ -\lambda_i^{(k)} M_{e\,(n+1,n)} & 0 & M_{e\,(n+1,n)} & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\psi_w\} \\ \{\psi_\theta\} \\ \omega\{\psi_w\} \\ \omega\{\psi_\theta\} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} K_{e\,(n+1,n)}\psi_w - \lambda_i^{(k)} L_{\,(n+1,q)}\psi_\theta - \lambda_i^{(k)} M_{e\,(n+1,n)}(\omega\{\psi_w\}) \\ -\lambda_i^{(k)} M_{e\,(n+1,n)}\psi_w + M_{e\,(n+1,n)}(\omega\{\psi_w\}) \end{array} \right\} \tag{15}$$

como os autovalores simbolizados por $\lambda$ são iguais a frequência $\omega$ na formulação em potencial de velocidade então

$$[A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}]\psi_k = \ldots$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} K_{e\,(n+1,n)}\psi_w - \lambda_i^{(k)} L_{\,(n+1,q)}\psi_\theta - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e\,(n+1,n)}\psi_w \\ 0 \end{array} \right\} \tag{16}$$

Como

$$\eta_{i,j} = \frac{[\psi_k^T [A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}]]^T \, [[F]^{-1}]^T \, [A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}]\psi_k}{k_i} \tag{17}$$

substituindo valores obtidos nas expressões acima

$$\eta_{i,j} = \frac{1}{k_i} \left\{ \begin{array}{c} K_{e\,(n+1,n)}\psi_w - \lambda_i^{(k)} L_{\,(n+1,q)}\psi_\theta - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e\,(n+1,n)}\psi_w \\ 0 \end{array} \right\}^T \times$$

$$\times \left( \frac{1}{K_{e\,(n+1,n+1)} M_{e\,(n+1,n+1)} - (\lambda_i^{(k)} M_{e\,(n+1,n+1)})^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left[ \begin{array}{cc} M_{e\,(n+1,n+1)} & \lambda_i^{(k)} M_{e\,(n+1,n+1)} \\ \lambda_i^{(k)} M_{e\,(n+1,n+1)} & K_{e\,(n+1,n+1)} \end{array} \right]^T \right) \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{c} K_{e\,(n+1,n)}\psi_w - \lambda_i^{(k)} L_{\,(n+1,q)}\psi_\theta - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e\,(n+1,n)}\psi_w \\ 0 \end{array} \right\} \tag{18}$$

que resultará em

$$\eta_{i,j}^e = \frac{\left(K_{e\,(n+1,n)}\psi_w - \lambda_i^{(k)} L_{\,(n+1,q)}\psi_\theta - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e\,(n+1,n)}\psi_w\right)^2}{k_i\left(K_{e\,(n+1,n+1)} - (\lambda_i^{(k)})^2 M_{e\,(n+1,n+1)}\right)} \tag{19}$$

que é o estimador de erro dos elementos estruturais em problemas de vibrações livres com acoplamento fluido.

### 2.3. Estimador de Erro para Elemento Fluido

O aumento do grau hierárquico de um elemento fluido implica no aparecimento de uma linha e uma coluna tanto na matriz volumétrica $H_f$ quanto na matriz de compressibilidade $E_f$. Nas expressões matriciais abaixo $m$ é o número de graus hierárquicos acrescidos ao sistema, $k$ é o número de graus de liberdade do sistema acoplado original e $q$ para o fluido. Para as matriz $A$ e para a matriz $B$, os termos acrescidos serão

$$[A]_{k+m,k+m} =$$

$$\begin{bmatrix} K_{e\,(n,n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{H_{f\,(q,q)}}{\rho_f} & -\frac{H_{f\,(q,q+1)}}{\rho_f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{H_{f\,(q+1,q)}}{\rho_f} & -\frac{H_{f\,(q+1,q+1)}}{\rho_f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{e\,(n,n)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_{f\,(q,q)}}{\rho_f c^2} & -\frac{E_{f\,(q,q+1)}}{\rho_f c^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_{f\,(q+1,q)}}{\rho_f c^2} & -\frac{E_{f\,(q+1,q+1)}}{\rho_f c^2} \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$[B]_{k+m,k+m} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & L_{(n,q)} & L_{(n,q+1)} & M_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left[L_{(n,q)}\right]^T & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_{f\,(q,q)}}{\rho_f c^2} & -\frac{E_{f\,(q,q+1)}}{\rho_f c^2} \\ \left[L_{(n,q+1)}\right]^T & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_{f\,(q+1,q)}}{\rho_f c^2} & -\frac{E_{f\,(q+1,q+1)}}{\rho_f c^2} \\ M_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{E_{f\,(q,q)}}{\rho_f c^2} & -\frac{E_{f\,(q,q+1)}}{\rho_f c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{E_{f\,(q+1,q)}}{\rho_f c^2} & -\frac{E_{f\,(q+1,q+1)}}{\rho_f c^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Considerando incremento hierárquico apenas no elemento fluido a matriz $F$ dos termos diagonais acrescidos ao sistema será

$$F = \frac{1}{\rho_f}\left[\begin{bmatrix} -H_{f\,(q+1,q+1)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c^2}E_{f\,(q+1,q+1)} \end{bmatrix} \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_i^{(k)}}{c^2}\begin{bmatrix} 0 & E_{f\,(q+1,q+1)} \\ E_{f\,(q+1,q+1)} & 0 \end{bmatrix}\right] \tag{22}$$

e a inversa de $F$

$$F^{-1} = \frac{1}{\det[F]} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho_f c^2} E_{f\,(q+1,q+1)} & -\frac{\lambda_i^{(k)}}{\rho_f c^2} E_{f\,(q+1,q+1)} \\ -\frac{\lambda_i^{(k)}}{\rho_f c^2} E_{f\,(q+1,q+1)} & -\frac{1}{\rho_f} H_{f\,(q+1,q+1)} \end{bmatrix} \tag{23}$$

sendo $\det[F]$ dado por

$$\det[F] = \frac{E_{f\,(q+1,q+1)}}{\rho_f^2 c^2} \left[ H_{f\,(q+1,q+1)} - \left( \frac{\lambda_i^{(k)}}{c} \right)^2 E_{f\,(q+1,q+1)} \right] \tag{24}$$

logo

$$F^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{\rho_f} \left[ H_{f\,(q+1,q+1)} - \left( \frac{\lambda_i^{(k)}}{c} \right)^2 E_{f\,(q+1,q+1)} \right]} \begin{bmatrix} -1 & -\lambda_i^{(k)} \\ -\lambda_i^{(k)} & -\frac{\frac{1}{\rho_f} H_{f\,(q+1,q+1)}}{\frac{1}{\rho_f c^2} E_{f\,(q+1,q+1)}} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Para o problema de autovalor $[[A] - \omega[B]]\,\{x\} = 0$ o estimador dado pela Eq. (1) é

$$\eta_{i,j} = [\psi_k^T [A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}]^T] \frac{[[A_{m,m} - \lambda_i^{(k)} B_{m,m}]^{-1}]^T}{k_i} \times [A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}] \psi_k \tag{26}$$

As matrizes $[A]_{m,n}$ e $[B]_{m,n}$ representam

$$[A]_{m,n} = -\frac{1}{\rho_f} \begin{bmatrix} 0 & H_{f\,(q+1,q)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c^2} E_{f\,(q+1,q)} \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$[B]_{m,n} = \begin{bmatrix} \left[ L_{(n,q+1)} \right]^T & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_f c^2} E_{f\,(q+1,q)} \\ 0 & -\frac{1}{\rho_f c^2} E_{f\,(q+1,q)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

as linhas acrescidas s matrizes $A$ e $B$ sem os termos diagonais. Logo

$$[A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}] \psi_k = \ldots$$

$$= \begin{bmatrix} -\lambda_i^{(k)} \left[ L_{(n,q+1)} \right]^T & -\frac{H_{f\,(q+1,q)}}{\rho_f} & 0 & \lambda_i^{(k)} \frac{E_{f\,(q+1,q)}}{\rho_f c^2} \\ 0 & \lambda_i^{(k)} \frac{E_{f\,(q+1,q)}}{\rho_f c^2} & 0 & -\frac{E_{f\,(q+1,q+1)}}{\rho_f c^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\psi_w\} \\ \{\psi_\theta\} \\ \omega\{\psi_w\} \\ \omega\{\psi_\theta\} \end{Bmatrix} \tag{29}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\lambda_i^{(k)} \left[ L_{(n,q+1)} \right]^T \{\psi_w\} - \frac{H_{f\,(q+1,q)}}{\rho_f} \{\psi_\theta\} + \lambda_i^{(k)} \frac{E_{f\,(q+1,q)}}{\rho_f c^2} \omega \{\psi_\theta\} \\ \lambda_i^{(k)} \frac{E_{f\,(q+1,q)}}{\rho_f c^2} \{\psi_\theta\} - \frac{E_{f\,(q+1,q+1)}}{\rho_f c^2} \omega \{\psi_\theta\} \end{Bmatrix} \tag{30}$$

como os autovalores simbolizados por $\lambda$ são iguais a frequência $\omega$ na formulação em potencial de velocidade então

$$[A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}] \psi_k = \ldots$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{H_{f\,(q+1,q)}}{\rho_f} \{\psi_\theta\} - \lambda_i^{(k)} \left[ L_{(n,q+1)} \right]^T \{\psi_w\} + (\lambda_i^{(k)})^2 \frac{E_{f\,(q+1,q)}}{\rho_f c^2} \{\psi_\theta\} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{31}$$

Como

$$\eta_{i,j} = \frac{[\psi_k^T [A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}]^T] \, [[F]^{-1}]^T \, [A_{m,n} - \lambda_i^{(k)} B_{m,n}] \psi_k}{k_i} \tag{32}$$

substituindo valores obtidos nas expressões acima resultará em, considerando o valor positivo do numerador da expressão:

$$\eta_{i,j}^f = \frac{\left( -\frac{1}{\rho_f} H_{f\,(q+1,q)} \psi_\theta - \lambda_i^{(k)} \left[ L_{(n,q+1)} \right]^T \psi_w + \frac{(\lambda_i^{(k)})^2}{\rho_f c^2} E_{f\,(q+1,q)} \psi_\theta \right)^2}{k_i \left( \frac{1}{\rho_f} \left[ H_{f\,(q+1,q+1)} - \left( \frac{\lambda_i^{(k)}}{c} \right)^2 E_{f\,(q+1,q+1)} \right] \right)} \tag{33}$$

Esta é a expressão do estimador de erro para elementos fluidos nos problemas de vibrações livres com acoplamento fluido-estrutura.

## 3. CONCLUSÕES

Um estimador simples e de fácil implementação foi obtido tanto para o meio fluido quanto para o domnio estrutural. Os resultados da implementação numérica e comparação com resultados já publicados podem ser encontrados em (Duarte et al., 2002).

## 4. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES e a FAPESP pelo apoio parcial a realização deste trabalho.

## 5. REFERÊNCIAS

Mackerle, J., 1999, Fluid-structure interaction problems, finite element and boundary element approaches A bibliography(1995-1998) & Finite Elements Analysis and Design, vol. 31, pp. 231-240.

Morand Henri J. P., Ohayon R., 1995, Fluid-structure Interaction, Applied Numerical Methods & John Wiley & Sons, West Sussex, England.

Galli L. A. F., 1997, Estudo do Comportamento Dinâmico de Sistemas Acoplados Fluido-estrutura utilizando-se uma Formulação Simétrica em Potenciais de Velocidade & Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil.

Noor, A. K., Babuška , I., 1987, Quality Assessment and Control of Finite Element Solutions & Finite Elements Analysis and Desing, vol. 3, pp. 01-26.

Stewart J. R., Hughes T. J. R., 1997, An a posteriori error estimator and hp-adaptative strategy for finite element discretizations of the Helmholtz equation in exterior domains & Finite Elements in Analysis and Design, vol. 25 pp 1-26.

Everstine G. C., 1981, A Symmetric Potencial Formulations for Fluid-Structure Interactions & Journal of Sound and Vibrations, vol. 79(1), pp. 157-160.

Zienkiewicz, O. C., 1991, The Finite Element Method, McGraw-Hill, London.

Sazbó, B., Babuška, I., 1991, The Finite Element Analysis, John Wiley & Sons Inc., New York.

Babuška , I., Rheinboldt W. C., 1978, A-Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method & International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 12, pp. 1597-1615.

Hager P., Wiberg EN., 2000, Error estimation and $h$-adaptivity for eigenfrequency analysis of plates in bending: numerical results & Computers and Structures, vol. 78, pp. 01-10.

Alonso A., Dello Russo A., V. Vampa, 1999, A posteriori error estimates in finite element solution of structure vibration problems with applications to accoustical fluid-structure analysis & Computational Mechanics, vol. 23, pp. 231-239.

Babuška, I., Guo, B. Q., Osborn, J. E., 1989, Regularity and Numerical Solutions of Eigenvalue Problems with Piecewise Analytic Data & SIAM J. Numer. Anal., vol. 26 No.6 , pp. 1534-1560.

Ihlenburg F., 1998, Finite Element Analysis of Acoustic Scattering, Springer-Verlag, New York.

Friberg, O., 1986, An Error Indicator for the Generalized Eingenvalue Problem Using The Hierarchical Finite Element Method & Intern. J. N. Methods in Eng., vol. 23, pp. 91-98.

Friberg, O., Mller P., Makovička, D., Wiberg NE., 1987, An Adaptive Procedure for Eigenvalue Problems Using The Hierarchical Finite Element Method & Intern. J. N. Methods in Eng., vol. 24, pp. 319-335.

Duarte H. V., Pavanello R., 2002, Estimador de Erro para Método dos Elementos Finitos Hierárquicos Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura na Formulação Não Simétrica & Submetido Anais Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, João Pessoa 2002.

## 6. DIREITOS AUTORIAIS



# ERROR ESTIMATOR IN HIERARQUICAL FINITE ELEMENT METHOD APPLIED TO SYMMETRICAL FLUID-STRUCTURE PROBLEM

**Horacio Valadares Duarte**
Departamento de Engenharia Mecânica- UFMG
Av. Antonio Carlos, 6627 - Campus Pampulha
CEP 31270-901 - Belo Horizonte, MG, Brasil

**Renato Pavanello**
Departamento de Mecânica Computacional - FEM - UNICAMP
C.P. 6122 - CEP 13083-970 - Campinas, SP, Brasil

***Abstract.*** *This paper deals with the development of a finite element error estimator for the eigenfrequency analysis of internal fluid-structure problems. The error estimator is based on the work developed by Friberg (1986) for eigenvalue problems using hierarchical shape functions. A symmetrical formulation for the coupled fluid-structure model is obtained by using the velocity potential approach for the fluid and a displacement field approach for the solid medium.*

***Keywords:*** *Finite Element Method, Fluid-Structure Interaction, Eigenvalues problems, Error Estimator, p-version.*