



## MODELAGEM DE ESTRUTURAS TIPO PLACA COM ELEMENTOS PIEZOELÉTRICOS INCORPORADOS

**Gustavo Luiz C. M. de Abreu**

Universidade Federal de Uberlândia – FEMEC – Faculdade de Engenharia Mecânica.  
Av. João Naves de Ávila, 2160 – Bloco M – Sala 212, CEP 38400-902 – Uberlândia – MG  
E-mail: gmanhaes@mecanica.ufu.br

**José Francisco Ribeiro**

Universidade Federal de Uberlândia – FEMEC – Faculdade de Engenharia Mecânica.  
E-mail: jribeiro@mecanica.ufu.br

***Resumo.** Neste trabalho apresenta-se uma metodologia para a modelagem numérica de estruturas flexíveis tipo placa fina com materiais que exibem propriedades piezoeletricas (estruturas inteligentes). O princípio variacional de Hamilton, aplicado em meios piezoeletricos, é usado na obtenção da energia potencial mecânica e elétrica da estrutura e do material piezoeletrico. Com base neste princípio, um modelo numérico é desenvolvido usando o método de elementos finitos baseado no modelo de placa de Kirchhoff. Simulações numéricas são efetuadas para a análise estática e os resultados gerados são comparados com a formulação analítica disponível na literatura e com o software ANSYS®. O trabalho conclui apresentando os comentários sobre os resultados numéricos e aponta sugestões para a continuidade de estudos futuros como por exemplo a aplicação desta metodologia na otimização da localização dos elementos piezoeletricos em estruturas assim como o desenvolvimento e projeto de controladores ativos de vibrações estruturais.*

***Palavras-chave:** placas finas, materiais piezoeletricos, método de elementos finitos, modelo de placa de Kirchhoff, estruturas inteligentes.*

### 1. INTRODUÇÃO

O problema da atenuação dos níveis de vibrações em estruturas flexíveis do tipo placa por meio de elementos piezoeletricos (estruturas inteligentes) é um dos temas mais investigados da dinâmica e a literatura especializada apresenta basicamente duas propostas de solução para esta questão: a) o emprego da técnica de controle passivo e isolamento de vibrações, simples e de baixo custo que emprega atuadores piezoeletricos ligados a circuitos elétricos dissipativos, formados por um indutor e resistores em série ou em paralelo (circuito *shunt*) (Hagood e Flotow, 1991) e b) a utilização de uma técnica de controle ativo incluindo materiais piezoeletricos utilizados de forma integrada como sensores e atuadores (Abreu e Ribeiro, 2001).

As cerâmicas piezoeletricas desenvolvem um campo elétrico, quando sujeitas a uma força (ou pressão) e apresentam uma deformação mecânica, quando sujeitas a um campo elétrico. Este é o fenômeno da piezoeletricidade que tem grande aplicabilidade em diversas áreas da ciência e principalmente na área de controle de estruturas flexíveis (Crawley e de Luis, 1987).

Um dos primeiros relatos sobre a modelagem de materiais piezoeletricos como atuadores no controle de estruturas flexíveis, foi apresentado por Crawley e de Luis, 1987 que construíram três protótipos de estruturas com cerâmicas piezoeletricas incorporadas, quais sejam: uma viga de alumínio com atuadores piezoeletricos colados sobre suas superfícies, uma viga de grafita/epoxy e

outra com fibra de vidro/epoxy, ambas com material piezolétrico imerso nas estruturas. Dimitriadis et al., 1991 investigaram analiticamente a influência da geometria e da localização de pastilhas de materiais piezolétricos no aparecimento de modos de vibração indesejáveis (*spillover*) em placas finas. Detwiler et al., 1995 aplicaram e validaram, através de dados fornecidos por outros pesquisadores, o método de elementos finitos na modelagem de estruturas tipo placa contendo atuadores e sensores piezolétricos distribuídos. Chen et al., 1996 apresentaram uma metodologia para a solução do problema de controle de vibrações de uma viga elástica usando atuadores e sensores piezolétricos pelo método de elementos finitos. Ray et al., 1998 desenvolveram equações exatas para análise dinâmica de placas com materiais piezolétricos distribuídos. Reddy, 1999 descreveu em detalhes a formulação por elementos finitos aplicada na análise dinâmica de placas compostas por sensores e atuadores piezolétricos. Abreu e Ribeiro, 2001 modelaram por elementos finitos uma viga engastada-livre de Euler-Bernoulli com elementos piezolétricos incorporados e implementaram experimentalmente um sistema Fuzzy para o controle ativo da estrutura. Uma metodologia completa para a modelagem analítica e numérica de estruturas tipo placa e viga com elementos piezolétricos incorporados é apresentada por Lima, 1999.

A proposta deste trabalho é apresentar uma metodologia completa para a modelagem numérica de materiais piezolétricos incorporados em estruturas flexíveis do tipo placa fina utilizando o princípio variacional de Hamilton, aplicado em meios piezolétricos. Serão objetivos de análise o desenvolvimento do modelo numérico usando o método de elementos finitos baseado no modelo de placa de Kirchhoff e a criação de um programa computacional para a realização da análise estática de placas com elementos piezolétricos incorporados. Os resultados numéricos obtidos são comparados com o modelo analítico fornecido por Dimitriadis et al., 1991 e com o software comercial ANSYS®.

No desenvolvimento do trabalho, mais especificamente na Seção 2 é formulado o sistema global de equações do movimento para a placa de Kirchhoff com elementos piezolétricos incorporados. Na Seção 3, o modelo analítico para uma placa fina com atuadores piezolétricos incorporados é apresentado e na Seção 4 o modelo numérico de elementos finitos desenvolvido é validado com resultados fornecidos pela formulação analítica e pelo software ANSYS®.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA POR ELEMENTOS FINITOS

O modelo matemático da placa com elemento piezolétrico incorporado é obtido com base na hipótese de Kirchhoff (deformação transversal ou cizalhante não é considerada no modelo) e no princípio variacional eletromecânico (acoplamentos eletromecânicos presentes no sistema).

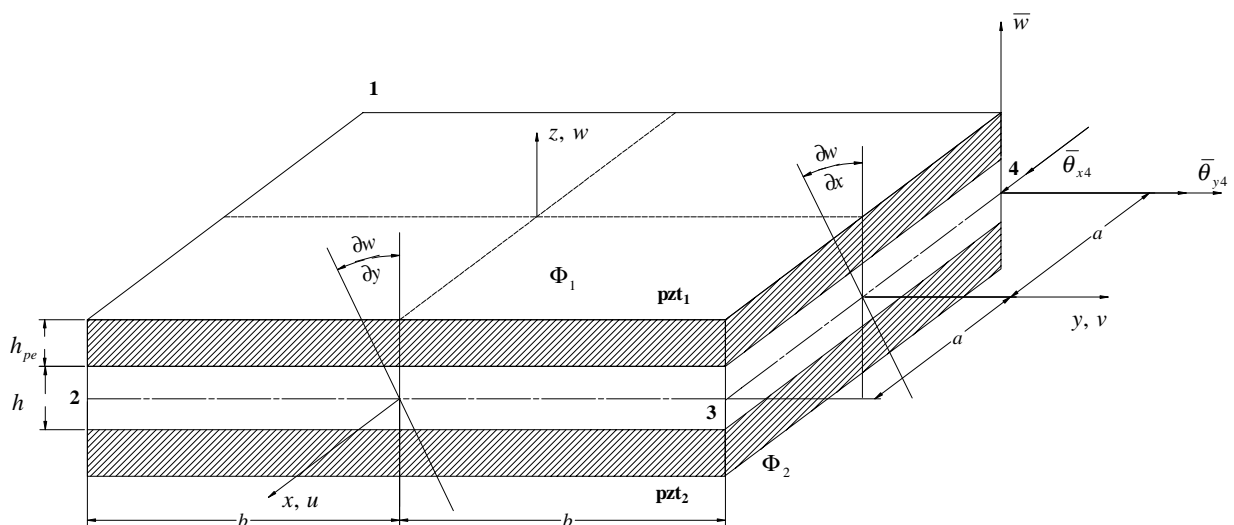


Figura 1. Parâmetros geométricos e dimensionais do elemento finito placa/pzt.

Com base nas suposições descritas anteriormente e na Fig. 1, as relações cinemáticas para o modelo de placa de Kirchhoff são descritas pelas relações a seguir (Reddy, 1999):

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; v = -z \frac{\partial w}{\partial y}; w = w(x, y) \quad (1)$$

onde  $x$  e  $y$  são os eixos do plano localizados no plano neutro da placa (veja Fig. 1),  $z$  é o eixo perpendicular a sua espessura,  $u$  e  $v$  são os deslocamentos nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente e  $w$  é o deslocamento ou deflexão transversal ao longo do eixo  $z$ .

Devido a deformação cizalhante não ser considerada no modelo cinemático, o campo de deformações pode ser representado em função dos deslocamentos longitudinais (Reddy, 1999):

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\} = -z \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \quad (2)$$

Para um material isotrópico, a relação entre a tensão mecânica ( $\sigma$ ) e a deformação ( $\varepsilon$ ) é dada por:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3)$$

onde  $\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T$  e  $[D]$  é uma matriz representada por:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de poisson e  $E$  é o módulo de elasticidade do material.

Considerando um elemento de placa retangular possuindo 4 nós (veja Fig. 1) e 3 graus de liberdade por nó, o campo de deslocamentos transversais pode ser representado por uma função de interpolação polinomial com 12 parâmetros (Lima, 1999):

$$w(x_i, y_i) = d_1 + d_2 x_i + d_3 y_i + d_4 x_i^2 + d_5 x_i y_i + d_6 y_i^2 + d_7 x_i^3 + d_8 x_i^2 y_i + d_9 x_i y_i^2 + d_{10} y_i^3 + d_{11} x_i^3 y_i + d_{12} x_i y_i^3 \quad (5)$$

onde (veja Fig. 1):

$$\begin{cases} i = 1 \dots 4 \\ x_1 = -a; y_1 = -b; x_2 = a; y_2 = -b; x_3 = a; y_3 = b; x_4 = -a; y_4 = b \end{cases} \quad (5.a)$$

O campo de deslocamentos transversais ( $w$ ), por sua vez, pode ser expresso por:

$$\{w\} = \{P\}^T \{d\} \quad (6)$$

onde o vetor de coeficientes  $\{d\}$  é representado pela relação:

$$\{d\} = \{d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6 \quad d_7 \quad d_8 \quad d_9 \quad d_{10} \quad d_{11} \quad d_{12}\} \quad (6.a)$$

$$\text{e } \{P\} = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2 y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3 y \quad xy^3\} \quad (6.b)$$

Definindo o vetor  $\{q_i\}$  como sendo o campo de deslocamentos em todos os nós do elemento retangular considerado (Fig. 1) na forma:

$$\{q_i\} = \{w_1 \quad \theta_{x_1} \quad \theta_{y_1} \quad w_2 \quad \theta_{x_2} \quad \theta_{y_2} \quad w_3 \quad \theta_{x_3} \quad \theta_{y_3} \quad w_4 \quad \theta_{x_4} \quad \theta_{y_4}\} \quad (7)$$

Sabendo-se que:

$$w_i = w|_{x_i, y_i}; \theta_{x_i} = \frac{\partial w}{\partial y}|_{x_i, y_i}; \theta_{y_i} = -\frac{\partial w}{\partial x}|_{x_i, y_i} \quad (8)$$

pode-se, desta forma, expressar  $\{q_i\}$  em função de  $\{d\}$  na forma:

$$\{q_i\} = [X]\{d\} \quad (9)$$

onde a matriz  $[X]$  é dada pela relação (10).

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & x_1 y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1 y_1^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 & -y_1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 y_1 & -y_1^2 & 0 & -3x_1^2 y_1 & -y_1^3 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & y_2^3 & x_2^3 y_2 & x_2 y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2 y_2 & 3y_2^2 & x_2^3 & 3x_2 y_2^2 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4^3 y_4 & x_4 y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4 y_4^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_4 & -y_4 & 0 & -3x_4^2 & -2x_4 y_4 & -y_4^2 & 0 & -3x_4^2 y_4 & -y_4^3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Desta forma, os coeficientes do polinômio de interpolação podem ser calculados pela expressão:

$$\{d\} = [X]^{-1} \{q_i\} \quad (11)$$

Substituindo a Eq. (11) na Eq. (6), resulta em:

$$\{w\} = \{P\}^T [X]^{-1} \{q_i\} = [N_w] \{q_i\} \quad (12)$$

onde  $[N_w]$  é a função de interpolação para a direção  $w$ .

Substituindo a Eq. (12) na Eq. (2), tem-se:

$$\{\varepsilon\} = -z \left\{ \frac{\partial^2 \{P\}^T}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \{P\}^T}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 \{P\}^T}{\partial x \partial y} \right\}^T [X]^{-1} \{q_i\} \quad (13)$$

A Equação (13) quando resolvida é expressa segundo a relação abaixo:

$$\{\varepsilon\} = -z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} [X]^{-1} \{q_i\} \quad (14)$$

ou ainda:

$$\{\varepsilon\} = -z [L_K] [X]^{-1} \{q_i\} \quad (15)$$

onde  $[L_K]$  é obtido diretamente de (14).

O vetor  $\{q\}$  pode ser representado pela relação obtida da Eq. (7):

$$\{q\} = \{w \quad u \quad v\}^T = \left\{ w \quad -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad -z \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^T \quad (16)$$

Substituindo a Eq. (12) na Eq. (16), resulta em:

$$\{q\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{bmatrix} \left\{ \{P\}^T \quad \frac{\partial \{P\}^T}{\partial y} \quad \frac{\partial \{P\}^T}{\partial x} \right\}^T [X]^{-1} \{q_i\} \quad (17)$$

ou

$$\{q\} = [H] [L_M]^T [X]^{-1} \{q_i\} \quad (17.a)$$

onde  $\{P\}$  é dado por (6.b) e as matrizes  $[H]$  e  $[L_M]$  são obtidas diretamente de (17).

A formulação por elementos finitos para a estrutura com material piezoeletrico incorporado foi desenvolvida observando as seguintes hipóteses simplificadoras:

- o potencial elétrico  $\Phi$  é constante em todo o elemento piezoeletrico e varia linearmente ao longo de sua espessura e
- a espessura da camada de adesivo não é considerada nos modelos desenvolvidos, isto é, o elemento piezoeletrico está perfeitamente fixo na estrutura.

A aplicação de voltagem no elemento piezoeletrico é análoga à aplicação de calor em uma lâmina bimetálica. Quando um potencial elétrico  $V$  é aplicado no material, o elemento piezoeletrico força

uma camada a expandir, enquanto a outra contrai, conforme mostra a Fig. 2. Neste caso, o campo elétrico é aplicado num elemento cerâmico na direção da seta de polarização e no outro elemento, na direção contrária.

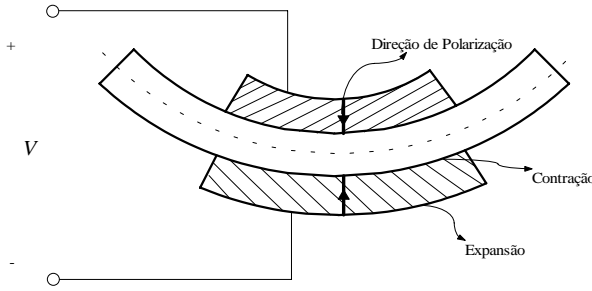


Figura 2. Flexão da placa causada pela aplicação de um potencial elétrico na cerâmica piezoeletrica.

Seja o vetor de potenciais elétricos ao longo da espessura do material piezoeletrico num determinado elemento finito retangular dado pela seguinte relação (Lima, 1999):

$$\{\Phi\} = \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{z_1 - \frac{h}{2}}{h_{pe}} \right) \tilde{\Phi}_1 \\ - \left( \frac{z_2 + \frac{h}{2}}{h_{pe}} \right) \tilde{\Phi}_2 \end{array} \right]^T \quad (18)$$

onde  $\tilde{\Phi}_1$  e  $\tilde{\Phi}_2$  são os potenciais elétricos máximos presentes na superfície externa do material piezoeletrico na parte superior e inferior, respectivamente e  $z_1$  e  $z_2$  são as coordenadas em  $Z$  (veja Fig. 1) definidas nos seguintes intervalos:

$$\frac{h}{2} \leq z_1 \leq \frac{h}{2} + h_{pe}; \quad -\frac{h}{2} \geq z_2 \geq -\frac{h}{2} - h_{pe} \quad (19)$$

O vetor campo elétrico é obtido diferenciando-se o potencial elétrico  $\Phi$  em relação a  $z_i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) resultando em:

$$\{E\} = -\frac{d\tilde{\Phi}}{dz_i} = \frac{1}{h_{pe}} [\tilde{\Phi}_1 \quad -\tilde{\Phi}_2] \quad (20)$$

## 2.1. Obtenção das Matrizes Elementares

O sistema global de equações é construído a partir da equação que descreve o comportamento do elemento de placa retangular com material piezoeletrico incorporado, ou seja, ao aplicar o Princípio Variacional Eletromecânico de Hamilton é possível obter as matrizes elementares de massa e rigidez do sistema em questão. A equação que descreve o comportamento do elemento de placa com material piezoeletrico, ao aplicar este princípio, pode ser escrito, na forma matricial, como (Lima, 1999):

$$\left. \begin{array}{l} \int_V \rho \{\delta q\}^T \{\ddot{q}\} dV + \int_V \{\delta \epsilon\}^T [c^E] \{\epsilon\} - \int_V \{\delta \epsilon\}^T [e]^T \{E\} dV - \int_V \{\delta E\}^T [e] \{\epsilon\} dV - \\ \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_V \{\delta E\}^T [\xi^T] \{E\} dV - \int_V \{\delta q\}^T \{f\} dV + \int_S \delta \Phi \sigma_q dS \right] dt = 0 \end{array} \right\} \quad (21)$$

onde  $\rho$  é a densidade do material,  $[c^E]$  é a matriz de elasticidade para campo elétrico constante,  $[e]$  é a matriz de permissividade elétrica constante ou matriz de constantes de tensões piezoeletricas e  $[\xi^T]$  é a matriz de constantes dielétricas para tensão mecânica constante e  $\{f\}$  é o vetor de forças mecânicas externas que agem sobre a estrutura.

Substituindo as Eqs. (15), (17.a) e (20) na Eq. (21), resulta em:

$$\{\delta q\}^T [\rho \{\dot{q}\} [M_{qq}^e] + \{q\} [K_{qq}^e] + \{\Phi\} [K_{q\Phi}^e] - \{\bar{f}\}] + \{\delta \Phi\} [-\{q\} [K_{\Phi q}^e] - \{\Phi\} [K_{\Phi\Phi}^e] + \{Q_s\}] = 0 \quad (22)$$

A identidade acima deve valer para quaisquer funções  $\delta q$  e  $\delta\Phi$ . Deste modo, duas equações de equilíbrio (com os termos independentes  $\delta q$  e  $\delta\Phi$ ), descritas na forma matricial, satisfazem a Eq. (22):

$$\begin{aligned} [M_{qq}^e] \{\ddot{q}\} + [K_{qq}^e] \{q\} + [K_{q\Phi}^e] \{\Phi\} - \{\bar{f}\} &= 0 \\ [K_{\Phi q}^e] \{q\} + [K_{\Phi\Phi}^e] \{\Phi\} + \{Q_s\} &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

onde os termos da Eq. (23) são definidos na Tab. 1.

Tabela 1. Definição dos vetores e matrizes.

<i>Matrizes e Vetores</i>	<i>Nomenclatura</i>
$[M_{qq}^e] = \rho \int_V [H]^T [L_M]^T [X]^{-T} [H] [L_M] [X]^{-1} dV$	Matriz de massa elementar
$[K_{qq}^e] = [X]^{-T} \int_V z^2 [L_K]^T [D] [L_K] [X]^{-1} dV$	Matriz de rigidez elástica elementar
$[K_{q\Phi}^e] = [K_{\Phi q}^e]^T = -[X]^{-T} \int_V z [L_K]^T [e]^T \{E\} dV$	Matriz de rigidez piezométrica elementar
$[K_{\Phi\Phi}^e] = -\frac{8ab\xi^T}{h_{pe}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	Matriz de rigidez dielétrica elementar
$\{\bar{f}\} = \int_V \{\delta q\}^T \{f\} dV$	Vetor de forças mecânicas
$\{Q_s\} = \int_S \delta\Phi \sigma_q dS$	Vetor de cargas elétricas

## 2.2. Sistema Global de Equações

Admitindo amortecimento nulo, o sistema global de equações para uma placa retangular com elemento piezométrico incorporado é descrita como:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K_{qq}] \{q\} + [K_{q\Phi}] \{\Phi\} = \{F\} \quad (24.a)$$

$$[K_{\Phi q}] \{q\} + [K_{\Phi\Phi}] \{\Phi\} = -\{Q_s\} \quad (24.b)$$

Multiplicando o termo  $[K_{\Phi\Phi}]^{-1}$  na Eq. (24.b), isolando  $\{\Phi\}$  e substituindo na Eq. (24.a), obtém-se:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K_{qq}^*] \{q\} = \{F\} + \{F_{el}\} \quad (25)$$

$$\text{onde: } [K_{qq}^*] = [K_{qq}] - [K_{q\Phi}] [K_{\Phi\Phi}]^{-1} [K_{\Phi q}] \quad (25.a)$$

$$\{F_{el}\} = -[K_{q\Phi}] [K_{\Phi\Phi}]^{-1} \{Q_s\} \quad (25.b)$$

## 2.3. Obtenção da Equação do Sensor e Atuador

Tomando o valor do potencial elétrico no  $i$ -ésimo elemento finito, a partir da Eq. (24.b), e como no sensor não existe carga elétrica aplicada ( $\{Q_s\} = 0$ ), tem-se:

$$\{\Phi_s\} = -[K_{\Phi\Phi}]^{-1} [K_{\Phi q}] \{q_i\} \quad (26)$$

Introduzindo a relação  $\{\Phi\} = \{\Phi_s\} + \{\Phi_a\}$ , onde  $\{\Phi_a\}$  é o potencial elétrico aplicado no atuador, na Eq. (24.a), obtém-se:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K_{qq}] \{q\} + [K_{q\Phi}] \{\Phi_s\} = \{F\} - \{F_{el}\} \quad (27)$$

onde a força elétrica  $\{F_{el}\}$  em função do potencial elétrico  $\{\Phi_a\}$  aplicado no atuador é dada por:

$$\{F_{el}\} = -[K_{q\Phi}]\{\Phi_a\} \quad (28)$$

### 3. FORMULAÇÃO ANALÍTICA

A teoria clássica de placas é baseada nas mesmas hipóteses simplificadoras de Kirchhoff, ou seja, as tensões normais na direção transversal são desprezíveis e o plano neutro não sofre deformações durante a flexão.

A equação governante de movimento para placas elásticas é dada por Reddy, 1999 na forma:

$$D\nabla^4 w + I_0 \ddot{w} = q(x, y, t) \quad (29)$$

$$\text{onde } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, I_0 = \rho h \text{ e } \nabla^4 = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

Quando *somente um par* de materiais piezelétricos perfeitamente fixos na estrutura tipo placa apoiada nos seus quatro lados e posicionados em lados opostos (Fig. 1) são sujeitos a uma voltagem de sinais opostos (Fig. 2), o efeito resultante é um momento linear distribuído na forma (Dimitriadis et al., 1991):

$$q(x, y, t) = C_0 \Lambda \left( \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \right) \quad (30)$$

onde:

$$C_0 = -E \frac{1+\nu_{pe}}{1-\nu} \frac{P}{1+\nu-(1+\nu_{pe})P} \frac{2}{3} \left( \frac{h}{2} \right)^2; P = -\frac{E_{pe}}{E} \frac{1-\nu^2}{1-\nu_{pe}^2} \frac{3h_{pe} \left( \frac{h}{2} \right) (h+h_{pe})}{2 \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^3 + h_{pe}^3 \right] + 3 \left( \frac{h}{2} \right) h_{pe}^2} \quad (30.a)$$

$$\Lambda = \frac{e_{31}}{E_{pe} h_{pe}} \Phi \text{ e } R(x, y) = [H(x-x_1) - H(x-x_2)][H(y-y_1) - H(y-y_2)] \quad (30.b)$$

$R(x, y)$  é a função localização generalizada expressa como uma função de Heaviside (Soutas-Little e Inman, 1999) e  $(x_1, x_2)$  e  $(y_1, y_2)$  são as coordenadas em  $x$  e  $y$  dos atuadores piezelétricos.

A solução da Eq. (29) ou a resposta temporal da placa sujeita a atuação dos atuadores pode ser escrita na forma (Reddy, 1999):

$$w(x, y, t) = w(x, y)T(t) \quad (31)$$

onde  $T(t)$  é uma função do tempo e  $w(x, y)$  é dado por (Dimitriadis et al., 1991):

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \phi_{mn}(x, y) \quad (32)$$

onde:

$$\phi_{mn}(x, y) = \sin(\gamma_m x) \sin(\gamma_n y); \gamma_m = \frac{m\pi}{a}; \gamma_n = \frac{n\pi}{b}; m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

$$W_{mn} = \frac{4C_0 \Lambda}{\rho h L_x L_y (\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \left[ -\frac{\gamma_m^2 + \gamma_n^2}{\gamma_m \gamma_n} (\cos(\gamma_m x_1) - \cos(\gamma_m x_2)) (\cos(\gamma_n y_1) - \cos(\gamma_n y_2)) \right] \quad (34)$$

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (35)$$

onde  $L_x$  e  $L_y$  são as dimensões da placa,  $\omega_{mn}$  é a frequência natural e  $\omega$  é a frequência de excitação promovida pelos atuadores.

#### 4. VALIDAÇÃO NUMÉRICA DOS MODELOS DESENVOLVIDOS

Para a validação do modelo de elementos finitos desenvolvido para a placa com elemento piezelétrico incorporado, iremos comparar os resultados apresentados neste trabalho com os resultados obtidos através da formulação analítica e com o software comercial ANSYS®.

Nesse sentido, foi realizada uma comparação entre as deflexões estáticas obtidas para cada uma das técnicas de modelagem apresentadas. Desta forma, 3 diferentes configurações (I, II e III) para o posicionamento do atuador foram analisadas em uma placa retangular apoiada nos quatro lados cujas dimensões ( $L_x, L_y$ ) são  $(0.6 \times 0.4) \text{ m}^2$  e são mostradas na Fig. 3. As propriedades do material da placa e do elemento piezelétrico empregadas nas simulações numéricas foram:  $h=1.0 \text{ [mm]}$ ,  $h_{pe}=0.254 \text{ [mm]}$ ,  $E=2.07 \cdot 10^{11} \text{ [N/m}^2\text{]}$ ,  $E_{pe}=1.63 \cdot 10^{10} \text{ [N/m}^2\text{]}$ ,  $\nu=\nu_{pe}=0.292$ ,  $\rho=7870 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ ,  $\rho_{pe}=7700 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ ,  $e_{31}=2.9286 \text{ [C/m}^2\text{]}$  e  $\xi=13 \cdot 10^{-7} \text{ [F/m]}$ .

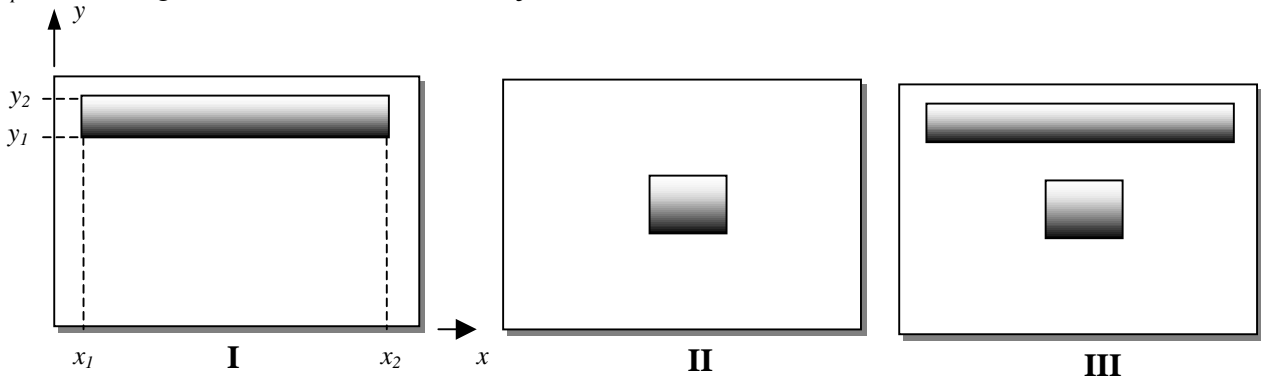


Figura 3. Configurações para o posicionamento do atuador em uma placa apoiada nos seus 4 lados.

O modelo de elementos finitos desenvolvido (Seção 2) para a placa com elemento piezelétrico incorporado foi discretizado em 15 elementos de placa retangular para cada direção  $x$  e  $y$  resultando num modelo de 708 gdl. O atuador foi acionado estaticamente por uma voltagem de  $\pm 1.0 \text{ [Volt]}$  em suas camadas externas. As posições dos atuadores em coordenadas cartesianas  $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)]$  nas configurações I e II são, respectivamente,  $[(0.08, 0.52), (0.32, 0.3467)]$ ,  $[(0.26, 0.34), (0.16, 0.24)]$  e a comparação entre as deflexões estáticas resultantes para cada configuração quando se utiliza o modelo analítico e discretizado é mostrada nas Figuras 4, 5, 6 e 7.

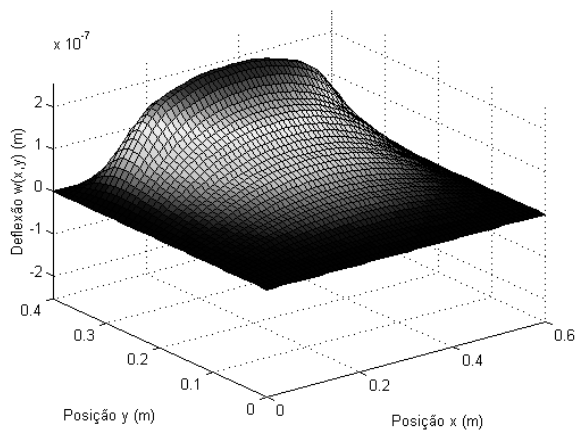


Figura 4. Deflexão estática obtida no modelo analítico para a configuração I.

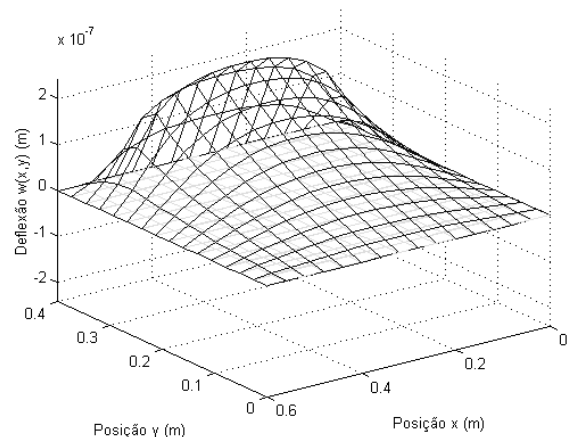


Figura 5. Deflexão estática obtida no modelo de elementos finitos para a configuração I.

Como pode ser visto nas figuras anteriores, a boa concordância entre os resultados apresentados. Esses resultados comprovam a eficiência do procedimento numérico utilizado para a modelagem de estruturas tipo placa com elementos piezelétricos incorporados. Numa segunda etapa, foi construído e implementado um programa no ambiente ANSYS® (trabalha com elemento 3D) com o objetivo de comparar as deflexões estáticas obtidas pela técnica de discretização apresentada quando se utilizam dois elementos piezelétricos incorporados simultaneamente (configuração III).



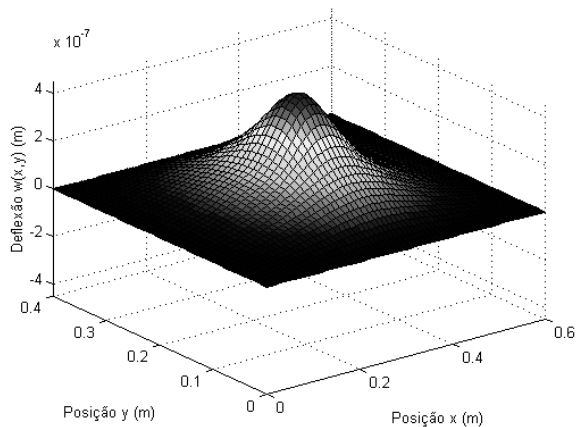


Figura 6. Deflexão estática obtida no modelo analítico para a configuração II.

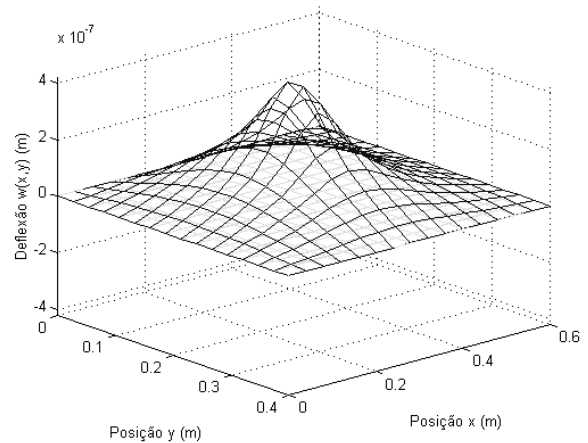


Figura 7. Deflexão estática obtida no modelo de elementos finitos para a configuração II.

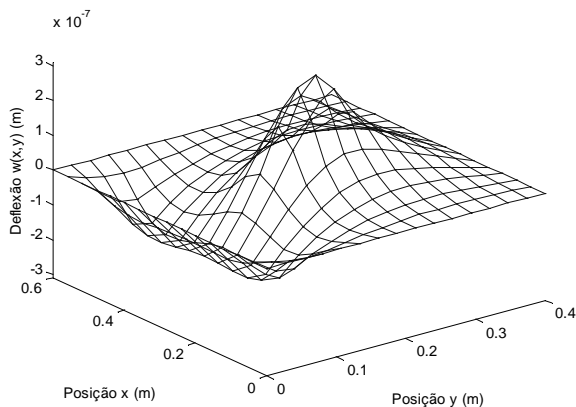


Figura 8. Deflexão estática obtida utilizando modelo de elementos finitos desenvolvido para a configuração III.

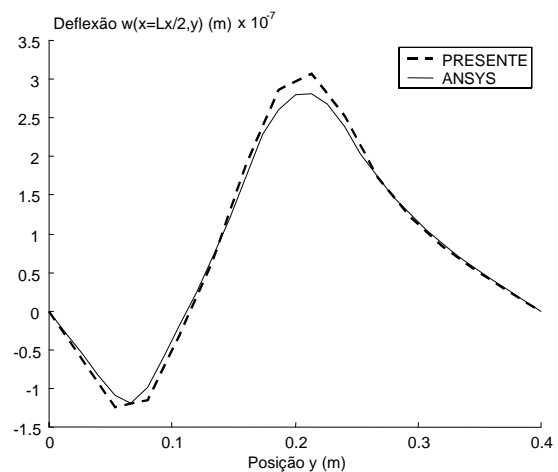


Figura 9. Comparação entre a deflexão estática obtida no modelo de elementos finitos com o software ANSYS em  $x=L_x/2$  para a config. III.

Observa-se claramente, através do gráfico mostrado na Fig. 9, a boa aproximação entre os resultados apresentados pelas duas técnicas de modelagem utilizadas, o que comprova mais uma vez a eficiência do procedimento de modelagem numérica empregada. Destaca-se que inúmeras comprovações foram feitas, observando configurações variadas para os atuadores e, em todos elas, os resultados comprovaram a proximidade dos modelos desenvolvidos.

## 5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia de modelagem de estruturas flexíveis do tipo placa com material piezolétrico incorporado na qual a interação entre a estrutura e o elemento piezolétrico foi modelada utilizando um modelo analítico disponível na literatura e o método de elementos finitos baseado na placa de Kirchhoff. A partir dos modelos desenvolvidos, a deflexão estática foi validada com os resultados gerados pela formulação analítica para um par de atuadores e quando se utiliza dois ou mais pares de elementos ativos a deflexão estática resultante foi validada com os resultados fornecidos pelo software ANSYS<sup>®</sup>. Comprovou-se com isso que a metodologia de modelagem empregada apresentou resultados bastante satisfatórios. Como um desdobramento natural deste trabalho pode-se ter a construção de um algoritmo de otimização e controle para determinar as posições ótimas dos elementos piezolétricos na estrutura e maximizar o desempenho destes elementos no controle ativo de vibrações estruturais.

## 6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro proporcionado a este trabalho pela CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior).

## 7. REFERÊNCIAS

- Abreu, G. L. C. M. e Ribeiro, J. F., 2001, “Active Control of Vibrations in Flexible Structures using Piezoelectric Actuators and Fuzzy Logic Controller”, IX DINAME, Florianópolis, pp. 373-378.
- Chen, Chang-qing; Wang, Xiao-ming e Shen, Ya-peng, 1996, “Finite Element Approach of Vibration Control Using Self-Sensing Piezoelectric Actuators”, Computers & Structures, vol. 60, no. 3, pp. 505-512.
- Crawley, E. F. e de Luis, J., 1987, “Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures”, AIAA Journal, vol. 25, no. 10, pp. 1373-1385.
- Detwiler, D. T.; Shen, M. -H. H. e Venkayya, V. B., 1995, “Finite Element Analysis of Laminated Composite Structures Containing Distributed Piezoelectric Actuators and Sensors”, Finite Elements in Analysis and Design, vol. 20, pp. 87-100.
- Dimitriadis, E. K.; Fuller, C. R. e Rogers, C. A., 1991, “Piezoelectric Actuators for Distributed Vibration Excitation of Thin Plates”, Transactions of the ASME, vol. 113, pp. 100-107.
- Hagood, N. W. e Flotow, A. Von, 1991, “Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks”, Journal of Sound and Vibration, pp. 243-268.
- Lima Jr., J. J., 1999, “Modelagem de Sensores e Atuadores Piezelétricos com Aplicações em Controle Ativo de Estruturas”, Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, p209.
- Ray, M. C.; Bhattacharya, R. e Samanta, B., 1998, “Exact Solutions for Dynamic Analysis of Composite Plates with Distributed Piezoelectric Layers”, Computers & Structures, pp. 737-743.
- Reddy, J. N., 1999, “On Laminated Composite Plates with Integrated Sensors and Actuators”, Engineering Structures, vol. 21, pp. 568-593.
- Reddy, J. N., 1999, “Theory and Analysis of Elastic Plates”, Taylor & Francis.
- Soutas-Little, R. W. e Inmam, D. J., 1999, “Engineering Mechanics”, Statics, Prentice-Hall, Inc.

## MODELING OF PLATE STRUCTURE CONTAINING BONDED PIEZOELECTRIC ELEMENTS

### Gustavo Luiz C. M. de Abreu

Federal University of Uberlândia – FEMEC – School of Mechanical Engineering.  
Av. João Naves de Ávila, 2160 – Bloco M – Sala 212, CEP 38400-902 – Uberlândia – MG  
E-mail: gmanhaes@mecanica.ufu.br

### José Francisco Ribeiro

Federal University of Uberlândia – FEMEC – School of Mechanical Engineering.  
E-mail: jribeiro@mecanica.ufu.br

**Abstract.** *This paper presents the numerical modeling of plate structure containing bonded piezoelectric materials (smart structures). The Hamilton's principle is used for the obtaining of the structural mechanical energy and electrical energy of the piezoelectric material. A numerical model is developed using this principle and the finite element method based on the Kirchhoff's plate model. A set of numerical simulations for static analysis is made and the generated results are compared with analytical formulation available in the literature and the software ANSYS®. The work concludes presenting the comments about the numerical results and gives some future suggestions for the example the application of this methodology for the optimization the position of piezoelectric actuators in plate structures and the active vibration controllers design.*

**Keywords.** *Thin plates, piezoelectric materials, finite element method, Kirchhoff's plate model, smart structures.*