



## **TÉCNICA DE NORMALIZAÇÃO VIA RESÍDUOS USADA NA SÍNTESE MODAL EXPERIMENTAL**

**Cleudmar Amaral de Araújo**

Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Engenharia Mecânica  
Av. João Naves de Ávila 2160 – Uberlândia/MG – CEP: 38400-089  
Campus Santa Mônica – Bl. 1M – ([cleudmar@mecanica.ufu.br](mailto:cleudmar@mecanica.ufu.br))

**Leandro Jacomine**

Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Engenharia Mecânica  
Av. João Naves de Ávila 2160 – Uberlândia/MG – CEP: 38400-089  
Campus Santa Mônica – Bl. 1M – ([jacomine@alunos.ufu.br](mailto:jacomine@alunos.ufu.br))

**Resumo.** *Em técnicas de síntese modal experimental, o processo de normalização dos modos das subestruturas utilizando a matriz de massa do sistema não é adequado, uma vez que, a priori não se conhecem as matrizes físicas do sistema. Para contornar este problema a solução mais usual é utilizar um processo de normalização via massa modal unitária através dos resíduos identificados. Infelizmente, este procedimento introduz erros na constante de normalização final, com conseqüências importantes na precisão dos resultados obtidos pela síntese modal. Este trabalho apresenta o método de normalização via massa modal unitária através dos resíduos e as conseqüências deste processo são avaliadas através de um modelo discreto de simulação numérica. É mostrado que uma base modal normalizada por esta técnica deve ser utilizada com algumas restrições em modelagens via síntese modal experimental.*

**Palavras-chave:** *Massa modal, Normalização, Análise experimental, Modelagem de sistemas, Síntese modal*

### **1. INTRODUÇÃO**

A maioria dos métodos de síntese modal propostos na literatura, como por exemplo, Craig Jr. et al, 1968; Hasselman T. K. et al, 1974; Martim K. F. et al, 1984 são direcionados para uma formulação analítica ou numérica, e poucos métodos utilizavam uma abordagem puramente experimental. Neste caso, podem ser citados alguns trabalhos (Macneal R. H., 1971; Craig Jr. et al, 1977; Cleudmar A. A., 1998).

A utilização de um processo de análise puramente experimental é viável, principalmente para sistemas complexos, onde o desenvolvimento de um modelo numérico, às vezes, pode ser de difícil execução, Duarte M. L. M. e Ewins, D. J., 1996. Infelizmente, algumas fontes de erros influenciam significativamente na análise experimental sendo responsáveis pela identificação de uma base modal não ortogonal. Para piorar a situação, a ordem do modelo influencia no processo de identificação e um processo convencional de escalonamento da base modal via massa modal unitária não é adequada, uma vez que, não se conhecem as matrizes físicas.

Atualmente, existem no mercado vários pacotes comerciais direcionados para a análise modal experimental. Na grande maioria deles, é possível realizar um processo de normalização via massa

modal unitária. Este procedimento é feito utilizando os resíduos identificados. Em alguns casos particulares, esta técnica poderia ser aplicada com sucesso. Porém, existem restrições do método, quando existe a necessidade de obtenção de uma base modal adequadamente normalizada que venha a ser utilizada em outras análises, como por exemplo, na síntese modal de componentes.

No trabalho de Cleudmar (2001) a técnica de normalização via massa modal unitária utilizando os resíduos identificados foi apresentada e discutida em detalhes. Neste trabalho a técnica é apresentada de forma sucinta, sendo que os problemas relacionados ao processo de normalização são discutidos, sendo apresentadas as restrições de sua utilização. As avaliações sobre a metodologia proposta são feitas através de dois modelos discretos massa-mola com amortecimento e sem amortecimento.

## 2. A TÉCNICA DE NORMALIZAÇÃO VIA RESÍDUOS MODAIS

Esta formulação foi desenvolvida a partir dos trabalhos de Thoren (1972) e Richardson (1974, 1977). O trabalho de Richardson (2000) apresenta uma variação da metodologia, contornando o problema inerente da inversão da função de transferência. A formulação é direcionada para sistemas com amortecimento, ou oriundos de uma análise modal experimental onde os modos identificados são complexos. Infelizmente, as condições de aplicação da técnica são para sistemas com leve amortecimento onde se possa considerar uma equivalência da base modal complexa com os modos normais da estrutura.

Considere um sistema discreto com (n) graus de liberdade modelado por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes no domínio do tempo definida por:

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t) \quad (1)$$

Onde:

$M$ : Matriz de Massa (n x n)

$C$ : Matriz de Amortecimento (n x n)

$K$ : Matriz de Rigidez (n x n)

$\ddot{u}$ : Vetor de aceleração (n x 1)

$\dot{u}$ : Vetor de velocidade (n x 1)

$u$ : Vetor de deslocamento (n x n)

Aplicando a transformada de Laplace na equação (1), obtém-se uma equação de movimento equivalente no domínio da frequência, e a função de transferência do sistema é definida por:

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = B(s)^{-1} = \frac{I}{M \cdot s^2 + C \cdot s + K} \quad (2)$$

Os elementos de  $B$  são funções quadráticas de  $s$ , e portanto  $H(s)$  pode ser representada em forma de frações parciais, ou seja,

$$H(s) = \sum_{k=1}^m \frac{r(k)}{2j(s - s_k)} - \frac{r(k)^*}{2j(s - s_k^*)} \quad (3)$$

Onde:

$r(k)$ : Matriz de resíduos para o k-ésimo modo.

$r(k)^*$ : Conjugado complexo da matriz de resíduos

Os pólos ocorrem em  $s=s_k$  e cada pólo tem uma matriz de resíduos  $r(k)$  de ordem  $(n \times n)$  que aparecem em pares conjugados complexos. Experimentalmente, os valores da função de transferência são medidos somente ao longo do eixo  $(j\omega)$ . Neste caso,  $H(j\omega)$  é denominada de Função de Resposta em Frequência (FRF). Considerando que existe um vetor modal  $f_k$  para cada pólo, os resíduos  $r(k)$  podem ser representados por:

$$r(k) = A_k \cdot f_{(k)} \cdot f_{(k)}^* \quad (4)$$

Onde  $A_k$  é uma constante de escalonamento. Ou seja, para um resíduo particular tem-se que:

$$\begin{bmatrix} r_{11}(k) \\ r_{21}(k) \\ \vdots \\ r_{n1}(k) \end{bmatrix} = A_k \cdot f(k) \cdot \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \\ \vdots \\ f_n(k) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Uma vez que os vetores modais possuem uma forma única, porém não possuem valores únicos, o processo de normalização pode ser feito através de diferentes formas. A normalização da base modal é importante na busca de um significado físico, uma vez que esta base modal é arbitrária, sendo o processo que permite maior flexibilidade é o processo de normalização via massa modal unitária. Em formulações analíticas ou numéricas, onde se conhece a matriz de massa do sistema, este procedimento é relativamente simples e utiliza simplesmente um fator de escala ponderado pela massa modal, ou seja,

$$m = F^t M F$$

$$\bar{F} = F \frac{1}{\sqrt{m}} \quad (6)$$

No entanto, quando se utilizam dados experimentais não é possível utilizar a normalização desta forma pois, à priori, não se conhece a matriz de massa do sistema. Para contornar este problema, a matriz de massa modal será aproximada por uma expressão que é função da constante de escalonamento. Para isto, suponha que na estrutura o amortecimento modal seja muito menor que a frequência natural amortecida de cada modo, e que as formas dos modos sejam aproximadas aos modos normais, ou seja, que possam ser avaliados como modos reais. Além disso, as matrizes físicas do sistema serão estimadas da matriz de transferência do sistema. Da equação (2) observa-se que:

$$K = B(0) = H(0)^{-1} \quad (7)$$

Tem-se que:

$$H \cdot B' + H' \cdot B = 0 \quad (8)$$

$$H \cdot B'' + 2 \cdot H' \cdot B' + H'' \cdot B = 0 \quad (9)$$

Da equação (2), (8) e (9) tem-se que:

$$\begin{cases} B_{(0)}^{\cdot} = C \\ B_{(0)}^{\ast} = 2 \cdot M \end{cases} \quad (10)$$

Finalmente, pode-se mostrar que as matrizes físicas podem ser estimadas por:

$$C = -K \cdot H_{(0)}^{\cdot} \cdot K \quad (11)$$

$$M = C \cdot H_{(0)} \cdot C - K \cdot \frac{H_{(0)}^{\ast}}{2} \cdot K \quad (12)$$

Em função da suposição de pequeno amortecimento e modos normais equivalentes, a  $H(0)$  pode ser escrita como:

$$H(0) = \sum_{k=1}^m -\text{Imag} \left( \frac{r_{(k)}}{s_k} \right) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{\mathbf{w}_k r_{(k)}}{\mathbf{s}_k^2 + \mathbf{w}_k^2} \right) \quad (13)$$

Na equação (13) é considerada apenas a parte real dos resíduos que podem ser estimadas através da equação (5). Utilizando-se a base modal, a função de transferência pode ser escrita da seguinte forma:

$$H(0) = \mathbf{F} \mathbf{k}^{-1} \mathbf{F}^t \quad (14)$$

Pode-se mostrar que a rigidez modal é dada por:

$$\mathbf{F}^t \mathbf{K} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \frac{\mathbf{s}^2 + \mathbf{w}^2}{A\mathbf{w}} & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix} \quad (15)$$

Utilizando as suposições definidas anteriormente pode-se obter a matriz de massa modal,

$$m(k) = \mathbf{f}_{(k)}^t \cdot M \cdot \mathbf{f}_{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_{(k)} \cdot \mathbf{w}_{(k)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_{(k)} \cdot \mathbf{w}_{(k)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{A_{(k)} \cdot \mathbf{w}_{(k)}} \end{bmatrix} \text{(mxm)} \quad (16)$$

De uma maneira geral o j-ésimo resíduo pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} r_{1j}(k) \\ r_{2j}(k) \\ \vdots \\ r_{ij}(k) \\ \vdots \\ r_{nj}(k) \end{bmatrix} = A_k \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{1k} \cdot \mathbf{f}_{jk} \\ \mathbf{f}_{2k} \cdot \mathbf{f}_{jk} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{jk}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{nk} \cdot \mathbf{f}_{jk} \end{Bmatrix} \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (17)$$

Enquanto os modos de vibrar possuem valores arbitrários, os resíduos mostrados na equação (17) refletem as propriedades físicas únicas da estrutura. Neste caso, a constante  $A_k$  deve sempre ser escolhida de tal forma que a equação (17) seja válida. Portanto, para obter modos normalizados via massa modal unitária, a constante de escalonamento deve ser tal que:

$$A_k = \frac{1}{\mathbf{w}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (18)$$

Da equação (17) observa-se que a  $j$ -ésima coluna dos resíduos está relacionada com o  $j$ -ésimo modo através da seguinte relação:

$$r_{jj} = A_k \mathbf{f}_{jk}^2 \quad (19)$$

Portanto, pode mostrar que um  $k$ -ésimo modo normalizado por uma condição de massa modal unitária via resíduos é dado por:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{j}_{1k} \\ \mathbf{j}_{2k} \\ \vdots \\ \mathbf{j}_{3k} \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{\mathbf{w}_k}{r_{jj}(k)}} \cdot \begin{Bmatrix} r_{1j}(k) \\ r_{2j}(k) \\ \vdots \\ r_{2j}(k) \end{Bmatrix} \quad (20)$$

### 3. EXEMPLOS NUMÉRICOS

A metodologia foi avaliada através de dois exemplos numéricos consistindo de modelos discretos massa-mola com amortecimento e sem amortecimento. O objetivo foi verificar a precisão do processo de normalização via massa modal unitária através da utilização dos resíduos. Pretende-se mostrar que a formulação é adequada partindo-se de uma base modal complexa e que os resultados são bastante sensíveis as restrições impostas pela formulação. Quando se considera um sistema sem amortecimento, as aproximações consideradas na formulação não são adequadas e o modelo de normalização não pode ser utilizado. Em cada caso analisado serão apresentados os passos de análise com os devidos ajustes a serem efetuados visando efetuar adequadamente o processo de normalização. A análise nos dois casos e toda a formulação foi desenvolvida em um código Matlab.

#### 3.1. Sistema Discreto Massa-mola-amortecedor

O sistema analisado consistia de um modelo discreto massa-mola-amortecedor com 3 graus de liberdade, mostrado na figura 1.

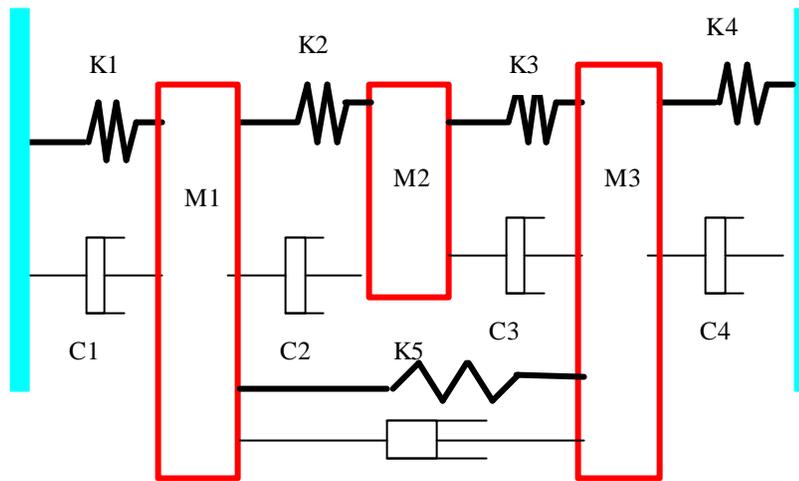


Figura 1. Sistema discreto analisado. ( $M_1=0.4$ ,  $M_2=0.8$ ,  $M_3=1.2$ )(kg); ( $K_1=K_2= K_3=K_4=K_5=36000$ ) (N/m); ( $C_1=C_2= C_3=C_4= C_5=0.3$ ) (N.s/m).

A figura 2 apresenta a função de transferência (H, receptância) em módulo (dB). A tabela 1 apresenta os autovalores e as bases modais inicialmente identificadas ( $F_i$ ,  $F_{ina}$ ). A tabela 2 apresenta os modos normalizados pela matriz de massa ( $F_{in}$ ) e aqueles via massa modal utilizando os resíduos ( $F_{int}$ ). A tabela 3 apresenta as matrizes de massa identificadas utilizando as funções de transferência, considerando as bases modais ( $F_{in}$ ) e ( $F_{int}$ ). A tabela 3 apresenta também as condições de unicidade previstos na operação de massa modal unitária.

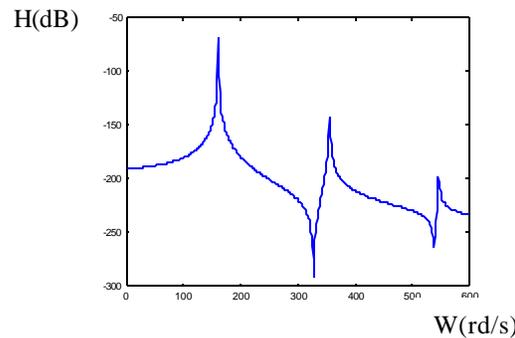


Figura 2. Módulo da função de transferência em dB.

Tabela 1. Autovalores e bases modais obtidas da solução do auto-problema.

$s$ (rd/s)			$s$ (rd/s)		
$1.24+545.65i$	$0.53+355.60i$	$0.11 + 160.68i$	$1.24+545.65i$	$0.53+355.60i$	$0.11 + 160.68i$
$F_i$			$F_{ina}$		
$0.0018 + 0.0000i$	$0.0001 - 0.0001i$	$-0.0024 - 0.0015i$	$0.0321+ 0.0321i$	$0.0015 + 0.0015i$	$-0.0198- 0.0198i$
$-0.0003 - 0.0000i$	$0.0020 - 0.0007i$	$-0.0037 - 0.0023i$	$-0.0061-0.0061i$	$0.0201+ 0.0201i$	$-0.0304-0.0304i$
$-0.0002 - 0.0000i$	$-0.0018 + 0.0006i$	$-0.0029 - 0.0018i$	$-0.0037-0.0037i$	$-0.0178 - 0.0178i$	$-0.0235- 0.0235i$

Tabela 2. Bases modais normalizadas.

$F_{in}$			$F_{int}$		
$1.4980-0.0000i$	$0.0555 - 0.0000i$	$-0.5030 + 0.0000i$	$1.3800 + 0.0014i$	$0.0732 - 0.0254i$	$0.5488 + 0.3474i$
$-0.2866 - 0.0000i$	$0.7585 - 0.0000i$	$-0.7698 + 0.0000i$	$-0.2640 - 0.0003i$	$0.9999 - 0.3469i$	$0.8398 + 0.5317i$
$-0.1749 + 0.0000i$	$-0.6699 - 0.0000i$	$-0.5949 - 0.0000i$	$-0.1612 - 0.0002i$	$-0.8831 + 0.3064i$	$0.6491 + 0.4109i$

Tabela 3. Matriz de massa identificada via H(s) e verificação da unicidade da massa modal.

	<b>Fin</b>			<b>Fint</b>		
<b>Massa identificada</b>	0.39 + 0.0i	0.00 + 0.0i	0.00 + 0.0i	0.44+0.0i	-0.10-0.0i	-0.13-0.0i
	0.00 + 0.0i	0.79 + 0.0i	0.00 + 0.0i	-0.10-0.0i	0.68+0.0i	-0.46-0.0i
	0.00 + 0.0i	0.00 + 0.0i	1.19 + 0.0i	-0.13-0.0i	-0.46-0.0i	1.08+0.0i
<b>Unicidade da massa modal</b>	1.00 - 0.0i	-0.00 - 0.0i	-0.00 + 0.0i	0.9+0.0i	-0.0+0.0i	0.0+0.0i
	-0.00 - 0.0i	1.00 - 0.0i	-0.00 + 0.0i	-0.0+0.0i	1.5-1.2i	0.0+0.0i
	-0.00 + 0.0i	-0.00 + 0.0i	1.00 + 0.0i	0.0+0.0i	0.0+0.0i	0.7+1.5i

Observa-se que o modelo de simulação proposto está adequado as condições impostas na formulação, ou seja, uma condição de leve amortecimento (Valor máximo do fator de amortecimento de 0.23%). Através da tabela 3, verifica-se que considerando os modos normalizados pela massa (Fin), a condição de unicidade da matriz de massa modal foi obtida e as matrizes físicas foram corretamente identificadas. Para a base modal normalizada via utilização dos resíduos (Fint), as matrizes físicas foram razoavelmente identificadas. Porém, o fato mais importante a ser observado é que apesar da forma de (Fint) ser razoavelmente coerente com a forma de (Fin), existe um erro relativo na unicidade da base modal para o 1° e 2° modos. Com isso, observa-se que apesar de ser um modelo numérico “comportado” o processo de normalização via massa modal unitária utilizando os resíduos, poderia gerar erros consideráveis em uma abordagem puramente experimental. Isto ocorreria porque, naturalmente, as bases modais identificadas seriam mais imprecisas. Com isso, a utilização de (Fint) de dados experimentais, em uma técnica de modelagem, por exemplo um método de síntese modal, que exigisse uma condição de massa modal unitária em sua formulação, não conseguiria obter resultados satisfatórios, Cleudmar A. A. (1998).

Foi observado que a utilização de (Fi) visando a determinação de matrizes físicas identificadas pelas equações. (14), (20) e (21), não obtém resultados adequados, ou seja, as matrizes físicas do sistema só podem ser identificadas adequadamente se for utilizada uma base modal normalizada (Fin). Estes resultados não foram apresentados aqui, porém indicam que não se poderia utilizar um processo de normalização via massa modal unitária com a matriz de massa identificada de dados experimentais. Além disso, um inconveniente desta técnica é a necessidade de se ter que inverter H(s), que além de ter que ser medida nos (n) pontos experimentais, geralmente é mal condicionada. Além disso, a formulação proposta considera sistemas com leve amortecimento. Esta condição ocorre em grande parte das estruturas em engenharia. Quando isto não ocorrer, ou seja, sistemas com grande amortecimento, a metodologia apresentada não poderá ser utilizada.

### 3.2. Sistema Discreto Massa-mola

O sistema analisado consistia de um modelo discreto massa-mola com 3 graus de liberdade idêntico ao mostrado na figura 1, porém com sem amortecimento, ou seja, com C1=C2=C3=C4=C5=0.

A tabela 4 apresenta os autovalores (s) e as bases modais inicialmente identificadas (Fi). A tabela 5 apresenta os modos normalizados pela matriz de massa (Fin) e aqueles via massa modal utilizando os resíduos (Fint). A tabela 6 apresenta as matrizes de massa identificadas utilizando as funções de transferência, considerando as bases modais (Fin) e (Fint). A tabela 6 apresenta também as condições de unicidade previstos na operação de massa modal unitária.

Tabela 4. Autovalores e bases modais obtidas da solução do auto-problema.

<b>l (rd/s)</b>		
545.65	160.68	355.60
<b>Fi</b>		
0.9758	0.4593	-0.0548
-0.1867	0.7029	-0.7484
-0.1140	0.5432	0.6610

Tabela 5. Bases modais normalizadas.

<b>Fin</b>			<b>Fint</b>		
1.4980	0.5030	-0.0555	1.3800	0.6495	0.0775
-0.2866	0.7698	-0.7585	-0.2640	0.9940	1.0584
-0.1749	0.5949	0.6699	-0.1612	0.7682	-0.9348

Tabela 6. Matriz de massa identificada via H(s) e verificação da unicidade da massa modal.

	<b>Fin</b>			<b>Fint</b>		
<b>Massa identificada</b>	0.4000	0.0000	0.0000	0.4476	-0.0806	-0.0712
	0.0000	0.8001	0.0001	-0.0806	0.4786	0.0700
	0.0000	0.0001	1.2002	-0.0712	0.0700	0.6896
<b>Unicidade da massa modal</b>	1.00	-0.00	-0.00	0.85	-0.00	-0.00
	-0.00	1.00	-0.00	-0.00	1.67	-0.00
	-0.00	-0.00	1.00	0.00	-0.00	1.95

Observa-se nos resultados anteriores que a base modal (**Fin**) comporta-se bem em todas as análises, porém a base modal normalizada pelo método (**Fint**) não consegue identificar adequadamente os parâmetros físicos e, o que é pior, não existe unicidade na obtenção da matriz de massa modal.

O objetivo de utilizar este modelo sem amortecimento é mostrar que a técnica de normalização via massa modal unitária utilizando os resíduos não é adequada para ser utilizada em um modelo completamente sem amortecimento. É claro que este não é o caso de uma análise experimental que, via de regra, as bases modais são complexas. No entanto, poderia ser feito um processo posterior de conversão das bases modais complexas em modos reais equivalentes, Cleudmar A. A. (2000), que é feito geralmente para fins de comparação com modelos numéricos. Neste caso, esta nova base modal equivalente não seria adequada para a normalização via a massa modal unitária proposta. Para comprovar este problema, é necessário realizar um ensaio experimental, identificar as bases modais, fazer a devida conversão e aplicar a técnica de normalização.

#### 4. CONCLUSÕES

Desde 1995, os autores vêm pesquisando e desenvolvendo técnicas que viabilizem o método de síntese modal aplicado a sistemas mecânicos. Uma das limitações desta técnica é a sua utilização em uma abordagem puramente experimental, onde, via de regra, será identificada uma base modal com baixa condição de ortogonalidade. Além disso, no método de síntese modal que vem sendo pesquisado, aplicado em abordagens mistas e/ou experimentais, é fundamental que a base modal utilizada seja normalizada pela massa modal unitária. Este procedimento é feito normalmente pela maioria dos softwares comerciais de análise modal experimental.

Neste trabalho, este procedimento de normalização foi avaliado e concluiu-se que a sua futura utilização em uma abordagem de síntese modal experimental poderá ocasionar erros cumulativos, influenciando na precisão dos resultados obtidos pela síntese. No entanto, para que este efeito seja realmente comprovado é necessário a realização de um ensaio experimental e aplicação das formulações desenvolvidas no trabalho.

#### 5. AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao CNPq pelo apoio financeiro através do projeto PIBIC.

## 6. REFERÊNCIAS

Cleudmar, A. A., 1998, “Modelagem de Sistemas Dinâmicos Através da Síntese Modal de Componentes”, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 158 p., Campinas.

Cleudmar, A. A., 2000, “Avaliação de um critério de seleção de modos aplicado na técnica de síntese modal”, Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 07-11 Agosto, Natal, RN.

Craig Jr., R. R., Bampton, M. C. C., 1968, “ Coupling of substructures for dynamic analysis.” AIAA J., v. 6, n. 7.

Craig Jr., R. R., Chang, C. J., 1977, “ On the attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis.” AIAA J., paper 77-405.

Duarte, M. L. M. , Ewins, D. J., 1996 ‘Improved experimental component mode synthesis (IECMS) formulation with residual compensation based purely on experimental results”, Proc. of IMAC XIV, pp. 641-647.

Hasselman, T. K., Kaplan, A., 1974, “Dynamic analysis of large systems by complex mode synthesis.” Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, p. 307-333.

Hurty, W. C., 1965, “Dynamic Analysis of structural systems using component modes.” AIAA J., v. 3, n. 4, p. 678-685, april.

Martim, K. F., Ghilaim, K. M., 1984, “System prediction using damped component modes.” Proc. Instn. Mech. Engrs., V. 198C, n. 16, p. 261-268, March.

Macneal, R. H., 1971, “A hybrid method of component mode synthesis.”, Computers & structures, v. 1, p. 581-601, December.

Potter, R., Richardson M. H., 1974, “ Mass, Stiffness, And Damping Matrices from Measured Modal Parameters”, ISA Int. Instrum.- Autom. Conf., New York, pp. 1-5.

Richardson M. H., 1977, “ Derivation of Mass, Stiffness, And Damping Parameters from Experimental Modal Data”, Hewlett Packard Company, Santa Clara Div., pp. 1 –6.

Richardson M. H., 2000, “Modal Mass, Stiffness, And Damping” Vibrant Technology, Inc., Jamestown, CA, pp.1-5.

# NORMALIZATION TECHNIQUE USING RESIDUES APPLIED TO EXPERIMENTAL MODAL SYNTHESIS

**Cleudmar Amaral de Araújo**

University Federal of Uberlândia - FEMEC  
Av. João Naves de Ávila 2160 – Uberlândia/MG – CEP: 38400-089  
Campus Santa Mônica – Bl. 1M – ([cleudmar@mecanica.ufu.br](mailto:cleudmar@mecanica.ufu.br))

**Leandro Jacomine**

University Federal of Uberlândia - FEMEC  
Av. João Naves de Ávila 2160 – Uberlândia/MG – CEP: 38400-089  
Campus Santa Mônica – Bl. 1M – ([jacomine@alunos.ufu.br](mailto:jacomine@alunos.ufu.br))

***Abstract.** In techniques of experimental modal synthesis, the process of modes scaling of the substructures using the mass matrix of the system is not suitable, a time that, do not know the system physical matrices. To avoid this problem is used a scaling process by unity modal mass through the identified residues is the solution most usual. Unhappily, this procedure introduces errors in the final constant of normalization, with important consequences in the accuracy of the results obtained for the modal synthesis. This work presents the normalization method using the residue matrix and the consequences of this process are evaluated through a discrete model of numerical simulation. It is shown that a modal base normalized by this technique must be used with some restrictions in modal synthesis experimental.*

***Keywords:** Modal mass, Scaling, Experimental analysis, Systems modeling, Modal synthesis.*