

## ESTIMADOR DE ERRO PARA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS HIERÁRQUICOS APLICADO AO PROBLEMA FLUIDO-ESTRUTURA NA FORMULAÇÃO NÃO SIMÉTRICA

**Horacio Valadares Duarte**

Departamento de Engenharia Mecânica- UFMG  
Av. Antonio Carlos, 6627 - Campus Pampulha  
CEP 31270-901 - Belo Horizonte, MG, Brasil

**Renato Pavanello**

Departamento de Mecânica Computacional - FEM - UNICAMP  
C.P. 6122 - CEP 13083-970 - Campinas, SP, Brasil

**Resumo.** *Este artigo trata da formulação de uma expressão para estimador de erro empregado com o método dos elementos finitos, FEM, em problemas de vibrações livres fluido-estrutura na formulação não simétrica. O problema aqui considerado é o problema acústico interno usando a formulação  $(u, p)$ . O estimador proposto para o problema em pressão é derivado de uma versão simétrica em potencial de velocidade desenvolvida pelos autores com base no trabalho de Friberg. Uma comparação entre o desempenho do estimador simétrico e não simétrico é apresentada. Através de exemplos simples, todavia representativos, são mostradas as potencialidades do estimador e de sua aplicação em uma versão  $p$ -adaptativa do método dos elementos finitos.*

**Palavras-chave:** *Método de Elementos Finitos, Fluido-Estrutura, Autovalores e Autovetores, Estimador de Erros, Análise  $p$ -adaptativa.*

### 1. INTRODUÇÃO

Matrizes não simétricas surgem naturalmente da aplicação do método dos elementos finitos ao problema de vibrações livres fluido-estrutura em cavidades. O emprego da variável pressão para descrever o comportamento do fluido e deslocamento para a estrutura resulta em uma matriz de acoplamento que torna o problema assimétrico. A formulação assimétrica em pressão e deslocamentos apresenta desvantagens do ponto de vista do desempenho computacional, por outro lado, esta formulação é uma das mais econômicas em termos de espaço de memória requerido usando apenas uma variável por nó no domínio fluido (Everstine, 1989; Morand e Ohayon, 1995). Esta característica é bastante atraente em se tratando de estimadores de erro uma vez que o estimador vai testar o erro para cada grau de liberdade no elemento. O estimador de Friberg (Friberg, 1986; Friberg et al., 1987) foi usado uma vez que o erro não é estimado localmente no elemento mas empregando a matriz global gerada pelo problema. O estimador não é um estimador local e esta é uma característica importante que os estimadores não exibem (Stewart et al., 1997; Ihlenburg F., 1998; Hager e Wiberg, 2000).

A estimativa dos autovetores para cálculo do erro da variável do problema é possível pelas propriedades das funções de forma hierárquicas. A elevação de um grau do polinômio de interpolação definido por estas funções vai gerar uma matriz em que a matriz original é uma

sub-matriz (Peano A., 1976). No entanto, o estimador foi formulado para o problema simétrico, a formulação  $(u, p)$  não o é. Neste trabalho será mostrado que o estimador para o problema em potencial de velocidade ou simétrica apresentada na referência (Duarte et al., 2002) pode ser empregado para o problema não simétrico.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Os problemas de acústica interna que serão analisados neste trabalho são cavidades de paredes rígidas fechadas por elemento estrutural flexível, especificamente uma viga. A revisão será feita considerando esta configuração.

### 2.1. Matrizes Globais para o Problema Fluido-Estrutura em Formulação de Pressão

A equação dinâmica da viga considerando-se a hipótese de Euler-Bernoulli é dada por:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - A\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (1)$$

tendo como condições de contorno

$$w = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_e^c \quad (2)$$

sendo  $\Gamma_e^c$  a região da fronteira onde o deslocamento  $w$  normal ao eixo da viga é nulo. Os termos  $E$  e  $I$  são respectivamente o módulo de elasticidade do material da viga e o momento de inércia em relação a linha neutra,  $q$  o carregamento,  $A$  é a área da seção transversal,  $\rho$  representa a densidade do material. A equação que descreve o problema acústico bidimensional ou acústica "plana" é a equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

onde  $P$  representa as oscilações de pressão em torno de ponto de equilíbrio,  $c$  é a velocidade do som no meio. Dentre outras as condições de contorno são dadas por:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_{pr}^f \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial n} = \rho_0 \frac{\partial \dot{u}_n}{\partial t} \quad \text{em} \quad \Gamma_{pe}^f \quad (4)$$

A primeira equação representa a condição de parede rígida  $\Gamma_{pr}^f$ . A segunda condição é a equação de conservação de momento linear normal parede, que representa a condição de acoplamento entre parede elástica e fluido quando  $\dot{u}_n = \dot{w}_n$  onde  $w$  é o deslocamento normal a viga (Galli L. A. F. , 1997). Multiplicando pela função de ponderação, simbolizada por  $v$  em ambos problemas, a forma fraca do problema acima é então:

$$\left\{ \begin{array}{l} EI \int_0^{L_{Tot}} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx + \int_0^{L_{Tot}} \left( A\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v \right) dx = \int_0^{L_{Tot}} q v dx \\ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} v \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Omega = \oint_{\Gamma} v \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma \end{array} \right. \quad (5)$$

Considerando as variáveis de tempo e espaço separáveis, após a discretização em elementos, e feita a aproximação com o emprego das funções de forma convencionais e hierárquicas, o

sistema acima pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{cases} [K_e] \{w\} - \omega^2 [M_e] \{w\} = [L] \{P\} \\ [H_f] \{P\} - \frac{\omega^2}{c^2} [E_f] \{P\} = -\rho_f \omega^2 [L]^T \{u\} \end{cases} \quad (6)$$

Nas expressões acima  $[K_e]$  e  $[M_e]$  são as matrizes de rigidez e de massa para a viga,  $[H_f]$  e  $[E_f]$  são respectivamente as matrizes volumétrica e de compressibilidade para o fluido e  $[L]$  a matriz de acoplamento. Detalhes da obtenção da matriz  $[L]$  podem ser encontrados na referência (Galli L. A. F. , 1997). As funções de forma ou de interpolação são hierárquicas, detalhes de formulação em (Babuška e Sazbó , 1991). As funções de forma empregadas para viga foram publicadas na referência (Duarte et al., 2000), as funções usadas para os elementos fluidos foram definidas por Peano (Peano A., 1976).

Usando as matrizes acima como submatrizes chega-se a matrizes não simétricas, porém, na configuração típica do problema de autovalor autovetor (Morand e Ohayon, 1995).

$$\begin{bmatrix} [K_e] & -[L] \\ 0 & [H_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ P \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M_e] & 0 \\ \rho_f [L]^T & \frac{1}{c^2} [E_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

## 2.2. Formulação do Problema Acoplado para Cavidade Acústica em Potencial de Velocidade

O problema da acústica linearizada bidimensional pode ser formulado em outras variáveis. Qualquer outra variável que mantenha algum tipo de relação linear com a variável pressão irá satisfazer a equação da onda equação (3). A escolha deve recair em uma variável que permita simetrizar ou facilitar a simetria das matrizes do sistema acoplado. Algumas referências clássicas em acústica (Kinsler et al., 1982) usam a formulação do problema acústico em potencial de velocidade. A variável potencial de velocidade é definida da seguinte forma

$$-\rho_f \frac{d\Psi}{dt} = -\rho_f \dot{\Psi} = P \quad (8)$$

e satisfaz

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Psi} = 0 \quad (9)$$

o campo de velocidades instantâneas é dado por:

$$\vec{V} = \nabla \Psi \quad (10)$$

portanto, a condição de contorno na interface:

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \nabla \Psi \cdot \vec{n} = \dot{w} \cdot \vec{n} = \dot{w}_n \quad (11)$$

logo

$$\oint_{\Gamma} v \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma} v \nabla \Psi \cdot \vec{n} ds = \oint_{\Gamma} v \dot{w}_n ds \quad (12)$$

o que conduz, após a discretização, a seguinte expressão:

$$\oint_{\Gamma} v \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = \sum_{m=1}^{N_{fs}} \{v_i\}^T \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^n N_i^{\Gamma f} \sum_{j=1}^k N_j^{\Gamma e} ds \{\dot{w}_j\} \quad (13)$$

sendo que  $N_i^{\Gamma f}$  representa as funções de canto, de lado e hierárquicas associadas ao lado de contato do elemento fluido com elemento estrutural. As funções de forma de canto, de lado e hierárquicas do elemento estrutural são simbolizadas por  $N_j^{\Gamma e}$ . O vetor  $\dot{w}_j$  é composto pelas velocidades nodais na interface.

$$\oint_{\Gamma} v \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = \{v_i\}^T [L]^T \{\dot{w}_j\} \quad (14)$$

O carregamento devido pressão na estrutura será dado então por

$$\int_0^{L_{tot}} v P dx = \int N_i^{\Gamma e} v_i N_j^{\Gamma f} P_j dx = -\rho_f \int N_i^{\Gamma e} v_i N_j^{\Gamma f} \dot{\Psi}_j dx = -\rho_f \{v_i\}^T [L] \{\dot{\Psi}_j\} \quad (15)$$

As matrizes finais do problema, representadas por submatrizes geradas por cada um dos termos do sistema de equações são:

$$\begin{bmatrix} K_e & 0 \\ 0 & H_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \Psi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_f L \\ -L^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\Psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_e & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2} E_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\Psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

o sistema matricial da equação (16) não é simétrico. Mas fazendo mais uma mudança de variáveis tal que:

$$\dot{\Psi} = -\frac{\dot{\theta}}{\rho_f} \quad (17)$$

então

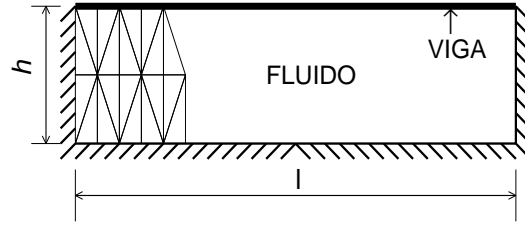
$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} K_e & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_f} H_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -L \\ -L^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \dots \\ & + \begin{bmatrix} M_e & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_f c^2} E_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

o que torna o sistema (16) simétrico. Considerando a separação das variáveis de tempo e espaço, após algumas manipulações matriciais (Everstine, 1989; Galli L. A. F. , 1997) chega-se a:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{bmatrix} K_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_f} H_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_f c^2} E_f \end{bmatrix} \dots \right. \\ & \left. -\omega \begin{bmatrix} 0 & L & M_e & 0 \\ L^T & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_f c^2} E_f \\ M_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_f c^2} E_f & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} w \\ \theta \\ \omega w \\ \omega \theta \end{Bmatrix} = \{0\} \end{aligned} \quad (19)$$

### 2.3. Estimador de Erro de Friberg Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura em formulação de Pressão ou Não Simétrica

Em uma outra publicação (Duarte et al., 2002) foi deduzida uma expressão para o estimador de erro para o problema acústico interno na formulação em potencial de velocidade, equações



**Figura 1:** Desenho da cavidade acústica empregada.

(20) e (21). O estimador é baseado em funções hierárquicas no conceito usado por Peano (Peano A., 1976). Como já foi dito qualquer variável que mantenha algum tipo de relação linear com a variável pressão ou com a variável potencial de velocidade irá satisfazer a equação da onda (3). Isto significa que a discretização do domínio não mudará com a mudança de variáveis, as matrizes geradas são essencialmente as mesmas exceto pelas constantes envolvidas na relação linear. As expressões (20) e (21)

$$\eta_{i,j}^e = \frac{\left( K_e(n+1,n)\psi_w - \lambda_i^{(k)} L_{(n+1,q)}\psi_\theta - (\lambda_i^{(k)})^2 M_e(n+1,n)\psi_w \right)^2}{k_i \left( K_e(n+1,n+1) - (\lambda_i^{(k)})^2 M_e(n+1,n+1) \right)} \quad (20)$$

$$\eta_{i,j}^f = \frac{\left( -\frac{1}{\rho_f} H_f(q+1,q)\psi_\theta - \lambda_i^{(k)} [L_{(n,q+1)}]^T \psi_w + \frac{(\lambda_i^{(k)})^2}{\rho_f c^2} E_f(q+1,q)\psi_\theta \right)^2}{k_i \left( \frac{1}{\rho_f} \left[ H_f(q+1,q+1) - \left( \frac{\lambda_i^{(k)}}{c} \right)^2 E_f(q+1,q+1) \right] \right)} \quad (21)$$

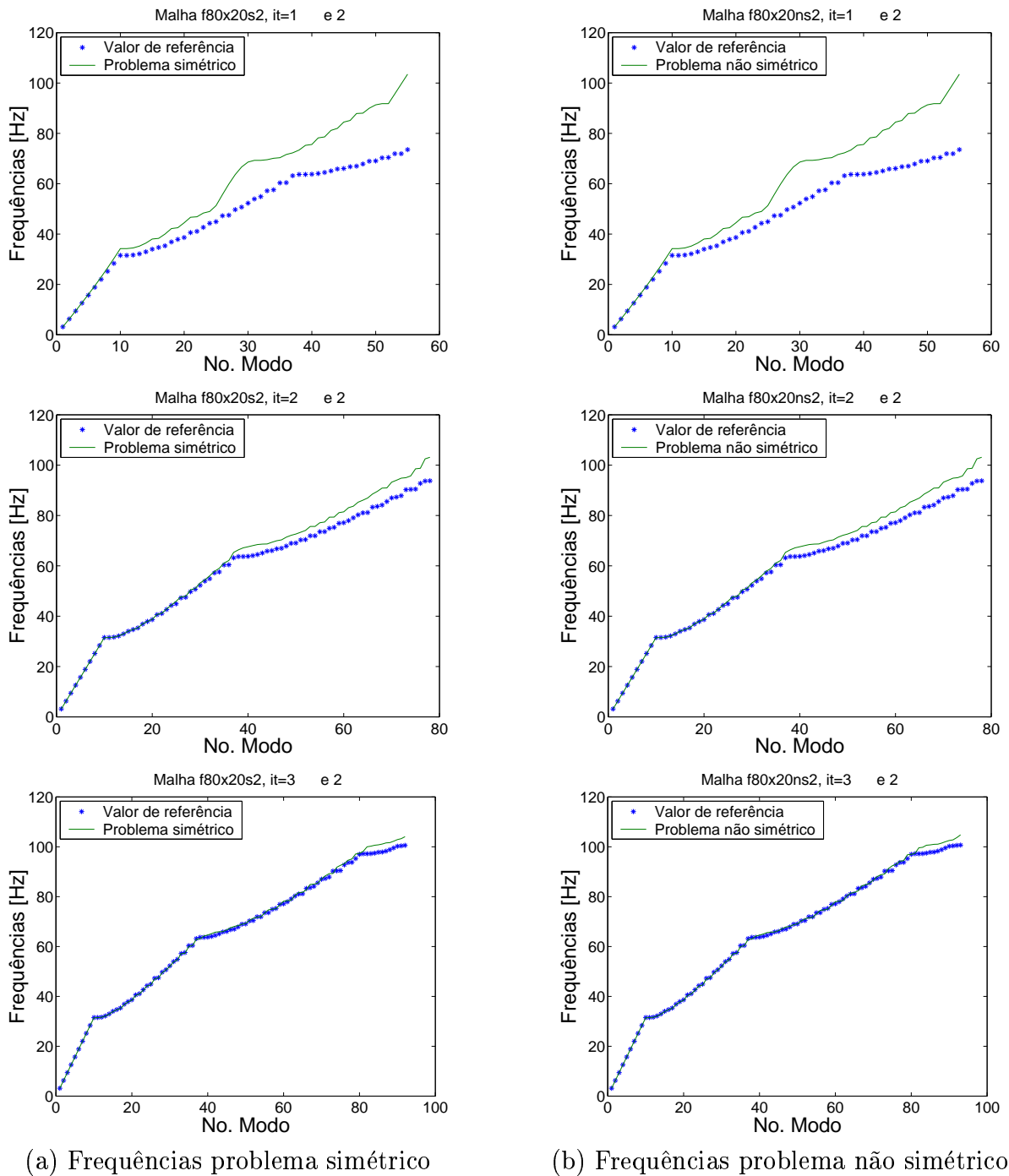
foram deduzidas a partir do problema fluido-estrutura na formulação em Potencial de Velocidade que levava ao problema simétrico. No entanto, estas equações são expressas em função das submatrizes resultantes da discretização do domínio que não é alterado com a mudança de variáveis. Isto significa que o estimador para o problema simétrico pode ser empregado para o problema não simétrico uma vez que o problema é equivalente e as submatrizes empregadas no estimador são as mesmas definidas no problema não simétrico.

**Tabela 1:** Valores empregados nos Problemas 1 e 2

Problema	$l$ (m)	$h$ (m)	$E$ ( $\frac{N}{m^2}$ )	$I$ ( $m^4$ )	$\rho_e$ ( $\frac{kg}{m^3}$ )	$A$ ( $m^2$ )	$c$ ( $\frac{m}{s}$ )	$\rho_f$ ( $\frac{kg}{m^3}$ )
1	1	0,1	1	1	1	1	1	1
2	1.5	0.45	$2.11 \times 10^{11}$	$8.33 \times 10^{-7}$	2000	0.001	1500	1000

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados numéricos referen-se à configuração apresentada na Fig. (1). São tratados os problemas de acústica interna bidimensional em que se procura determinar as frequências do problema acoplado e estimar o erro do processamento. O primeiro problema trata da comparação de resultados para as formulações simétrica e não simétrica. As dimensões indicadas na Fig. (1) e as constantes empregadas estão na tabela (1). O segundo problema tem a mesma configuração da Fig. (1) com dimensões e constantes também indicados na Tab. (1). Estes dados foram retiradas da referência (Sandberg G., 1995) para comparação. Para o problema 2 será empregada apenas a formulação não simétrica.



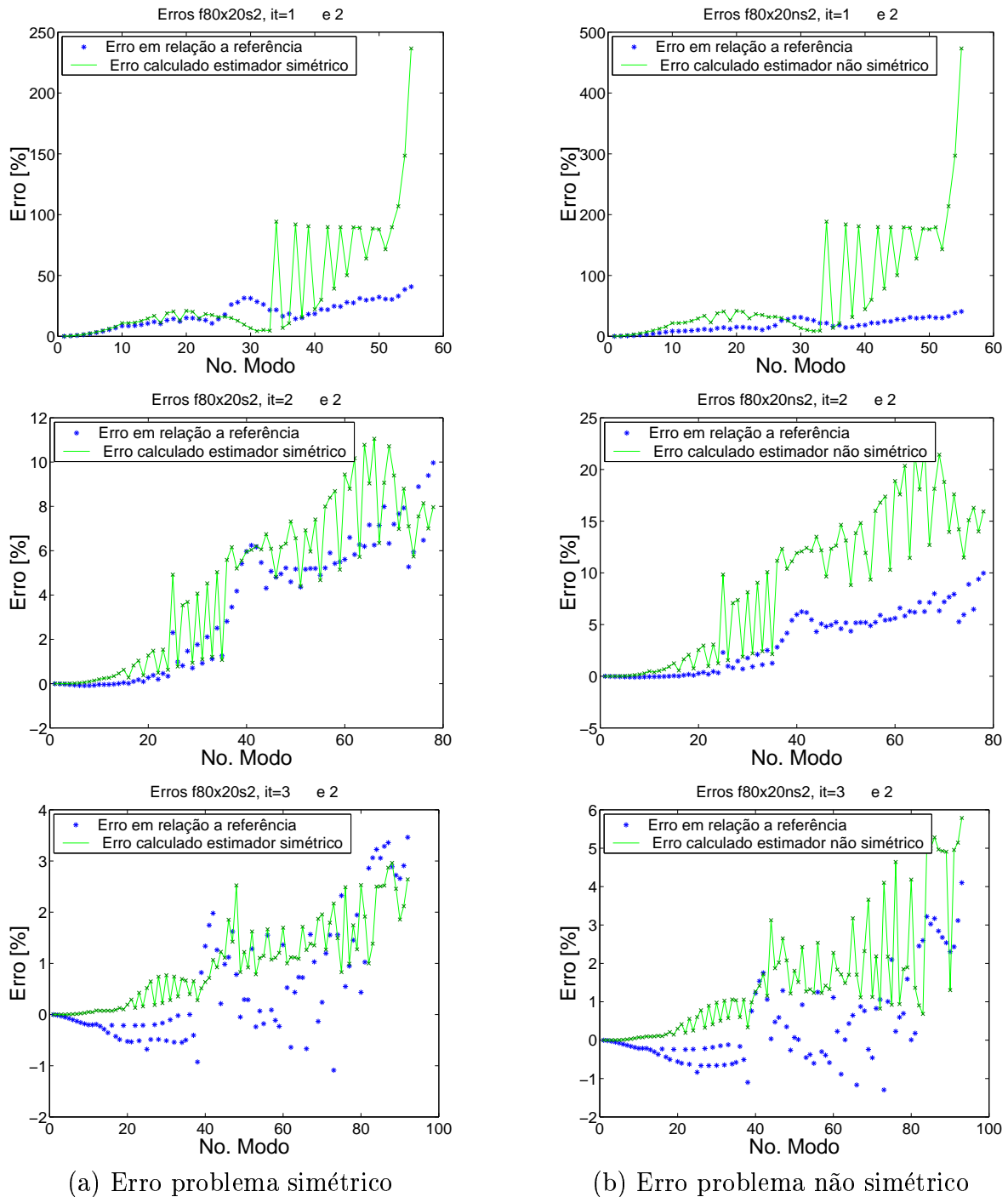
**Figura 2:** Comparação entre frequências sistema acoplado para as 3 primeiras iterações. Malha domínio fluido com 80 elementos triangulares e 20 elementos uniformes de viga. Problema 1.

Na Fig.(2) são apresentadas as frequências para as 3 primeiras iterações para o Problema 1. O estimador de erro é empregado em uma rotina p-adaptativa que não será descrita aqui, mas que tem as linhas gerais publicadas na referência (Duarte et al., 2000). Os resultados são para a formulação em potencial de velocidade ou simétrica, e para a formulação em pressão (não simétrica). A malha empregada no Problema 1 é uma malha de 80 elementos triangulares discretizando o domínio fluido e 20 elemento lineares uniformes discretizando a viga. Foram considerados valores de referência as frequências obtidas de uma malha com 2000 elementos discretizando o fluido e 100 elementos discretizando a viga.

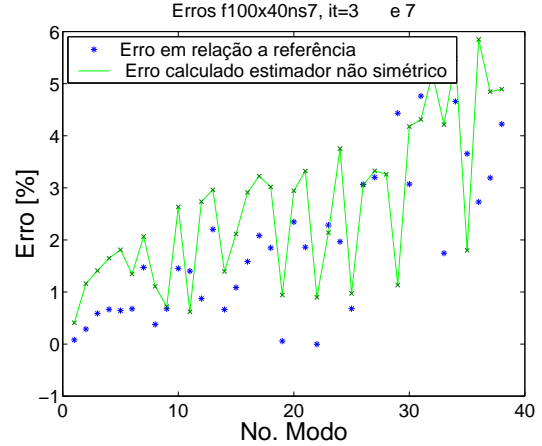
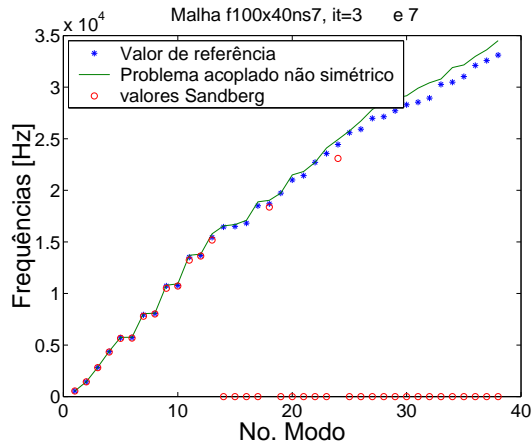
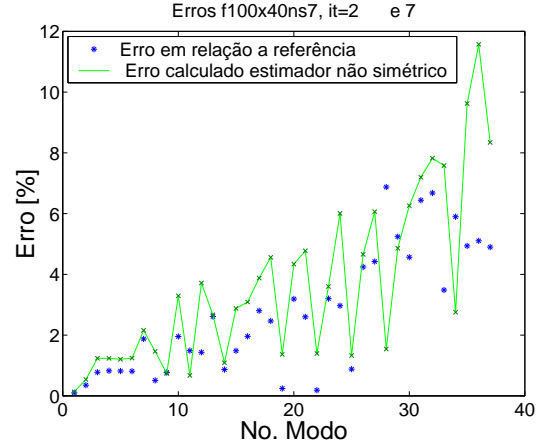
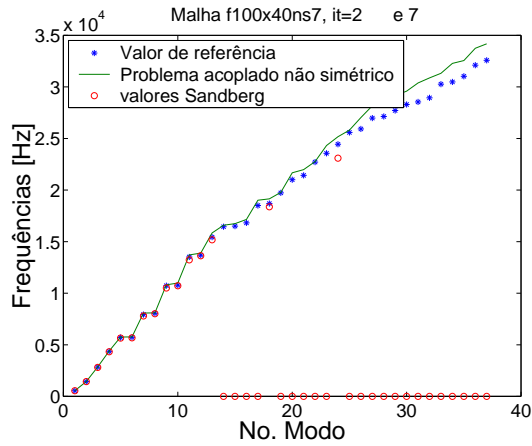
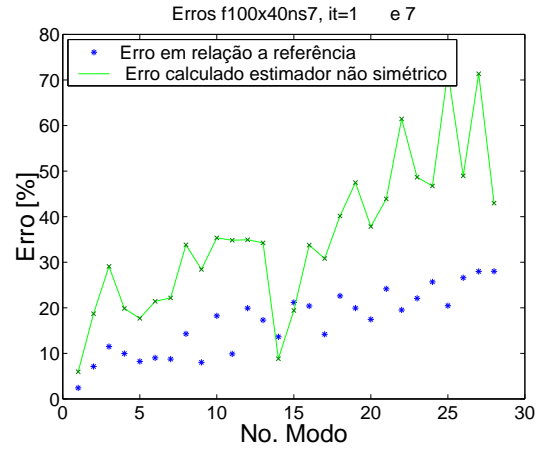
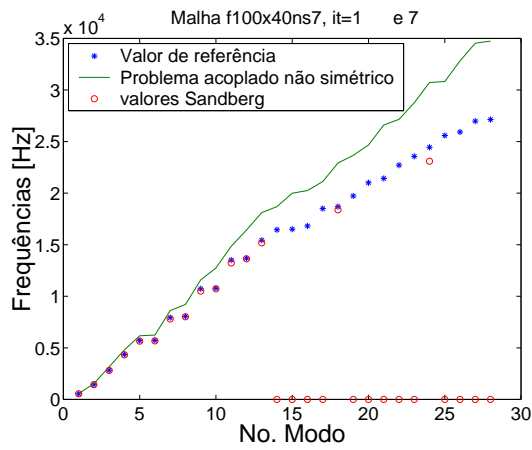
Na Fig.(3) são apresentados os erros estimados e calculados em relação aos resultados da

malha de 2000 elementos. Os resultados são para a formulação simétrica e não simétrica e referem-se aos erros das frequências da Fig. (2).

Na Fig.(4) estão os resultados do Problema 2. As frequências obtidas em cada iteração estão plotadas com os valores de referência e os valores publicados por (Sandberg G., 1995). Os erros estimados e calculados estão na mesma figura para cada iteração. A malha empregada no Problema 2 está na Fig. (1), é uma malha de 100 elementos triangulares discretizando o domínio fluido e 40 elemento lineares uniformes discretizando a viga. Os valores de referência também foram obtidos da malha de 2000 elementos fluidos e 100 elementos estruturais para os dados do Problema 2. Os resultados publicados por Sandberg (Sandberg G., 1995) foram



**Figura 3:** Comparação entre erros estimados e calculados em relação a valor de referência para frequências apresentadas na da Fig. (2). Problema 1.



(a) Frequências problema não simétrico

(b) Erros problema não simétrico

**Figura 4:** Comparação das frequências do sistema acoplado não simétrico com valores publicados por Sandberg G. e valores de referência. Malha do domínio fluido com 100 elementos triangulares e 40 elementos uniformes de viga. Problema 2.

processados em uma malha de 270 elementos quadrangulares no domínio fluido e 30 elementos estruturais.

#### 4. ANÁLISE DE RESULTADOS

Os frequências plotadas na Fig. (2) são idênticas tanto para o problema em potencial de velocidade quanto para a formulação em pressão. Os erros mostrados na Fig. (3) apresentam



o mesmo padrão, embora, o erro estimado no problema não simétrico apresente um valor maior. Apesar disto os resultados finais são praticamente os mesmos. Na realidade mostra uma superioridade da formulação em pressão. A formulação usa um menor número de variáveis e o processo de estimativa de erro consome menos tempo. O fato do estimador indicar um erro maior se por um lado pode significar um maior número de iterações por outro lado acelera o processo por indicar um erro maior. Pelo menos nos casos testados não foi observado um número maior de iterações em nenhuma das malhas usadas. Mesmo que o número de iterações tivesse sido maior o tempo de processamento certamente seria menor pelo menor número de variáveis do problema não simétrico. Para uma malha que não pode ser considerada uma malha refinada os resultados são muito bons para a faixa de frequências calculadas indicada na Fig. (3). São cerca de 80 frequências com erro menor do que 5% em relação à referência. O indicativo de início do processo de aparecimento de raízes espúrias pode ser visto no gráfico da última iteração da Fig. (3). Mas este tópico será discutido em um futuro trabalho por envolver outras questões e por não ser objetivo deste artigo.

Para o Problema 2 o desempenho do processo p-adaptativo também apresentou bons resultados. O comportamento do erro estimado em relação ao erro calculado mostra a capacidade do estimador proposto em captar corretamente os elementos com maiores erros.

## 5. CONCLUSÕES

Este trabalho mostrou que o estimador para problema fluido-estrutura deduzido para potencial de velocidade pode ser empregado na formulação em pressão. Além disso mostrou a eficiência do estimador em identificar e corrigir o erro no procedimento de cálculo tanto na formulação simétrica quanto na formulação assimétrica. Como o estimador são duas equações (20) e (21) pode ser implementado de uma forma fácil e de a um custo muito baixo.

## 6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES e a FAPESP pelo apoio parcial a realização deste trabalho.

## 7. REFERÊNCIAS

- Sazbó, B., Babuška, I., 1991, *The Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Galli L. A. F., 1997, *Estudo do Comportamento Dinâmico de Sistemas Acoplados Fluido-estrutura utilizando-se uma Formulação Simétrica em Potenciais de Velocidade & Dissertação de mestrado*, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, So Paulo, Brasil.
- Peano A., 1976, *Hierarchies of Conforming Finite Elements for Plane Elasticity and Plate Bending & Comp. & Maths with Appls.*, vol. 2, pp. 211-224.
- Duarte H. V., Pavanello R., 2000, *Modelagem P-adaptativa da Dinâmica de Prticos Planos & Anais Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, Natal RN Brasil.
- Kinsler L. E., Frey A. R., Coppens A. B., Sanders J. V., 1982, *Fundamentals of Acoustics*, John Wiley & Sons, New York.
- Duarte H. V., Pavanello R., 2002, *Estimador de Erro para Mtodo dos Elementos Finitos Hierquicos Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura na Formulação Simétrica & Submetido Anais Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, Joo Pessoa PB Brasil.
- Sandberg G., 1995, *A New Strategy for Solving Fluid-Structure Problems & International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, pp. 357-370.

- Morand Henri J. P., Ohayon R., 1995, Fluid-structure Interaction, Applied Numerical Methods & John Wiley & Sons, West Sussex, England.
- Stewart J. R., Hughes T. J. R., 1997, An a posteriori error estimator and hp-adaptative strategy for finite element discretizations of the Helmholtz equation in exterior domains & Finite Elements in Analysis and Design, vol. 25 pp 1-26.
- Hager P., Wiberg EN., 2000, Error estimation and  $h$ -adaptivity for eigenfrequency analysis of plates in bending: numerical results & Computers and Structures, vol. 78, pp. 01-10.
- Ihlenburg F., 1998, Finite Element Analysis of Acoustic Scattering, Springer-Verlag, New York.
- Friberg, O., 1986, An Error Indicator for the Generalized Eigenvalue Problem Using The Hierarchical Finite Element Method & Intern. J. N. Methods in Eng., vol. 23, pp. 91-98.
- Friberg, O., Mller P., Makovička, D., Wiberg NE., 1987, An Adaptive Procedure for Eigenvalue Problems Using The Hierarchical Finite Element Method & Intern. J. N. Methods in Eng., vol. 24, pp. 319-335.
- Duarte H. V., Pavanello R., 2002, Estimador de Erro para Mtodo dos Elementos Finitos Hierarquicos Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura na Formulao No Simtrica & Submetido Anais Congresso Nacional de Engenharia Mecnica, Joo Pessoa 2002.
- Everstine G. C., 1981, A Symmetric Potencial Formulations for Fluid-Structure Interactions & Journal of Sound and Vibrations, vol. 79(1), pp. 157-160.

## 8. DIREITOS AUTORIAIS

Os autores são detentores dos direitos autorais deste trabalho e os únicos responsáveis pelo seu conteúdo.

# ERROR ESTIMATOR IN HIERARQUICAL FINITE ELEMENT METHOD APPLIED TO UNSYMMETRICAL FLUID-STRUCTURE PROBLEM

**Horacio Valadares Duarte**

Departamento de Engenharia Mecânica- UFMG  
Av. Antonio Carlos, 6627 - Campus Pampulha  
CEP 31270-901 - Belo Horizonte, MG, Brasil

**Renato Pavanello**

Departamento de Mecânica Computacional - FEM - UNICAMP  
C.P. 6122 - CEP 13083-970 - Campinas, SP, Brasil

**Abstract.** *This paper presents a finite element formulation of error estimators for fluid-structure vibration problems. The focus is on the internal acoustic problem by using an unsymmetrical formulation  $(u, p)$ . The estimator is derived from the version developed by Friberg (1986). Comparative numerical results show good agreement between of both symmetrical and unsymmetrical estimators in terms of efficiency. Numerical results also confirm the applicability of the error estimators implemented in a  $p$ -version finite element eigenfrequency procedure.*

**Keywords:** *Finite Element Method, Fluid-Structure Interaction, Eigenvalues problems, Error Estimator,  $p$ -approximation.*