



## APLICAÇÕES DA ANÁLISE DIMENSIONAL E TEORIA DA SEMELHANÇA DOS MODELOS FÍSICOS EM ACÚSTICA DE SALAS DE CONCERTO

**João Henrique Diniz Guimarães**

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Institut für Technische Akustik, RWTH Aachen – D-52056  
– Aachen, Deutschland, joao\_guimaraes@hotmail.com

**Fernando Luiz Lobo Barboza Carneiro**

Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Moysés Zindeluk**

Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Resumo.** *A Análise Dimensional e Teoria da Semelhança (ADTS) é uma poderosa ferramenta auxiliar da modelagem físico-matemática, usada por engenheiros, físicos e outros pesquisadores. Ela é útil para analisar semelhanças ou analogias entre processos físicos além de fundamentar a teoria dos modelos reduzidos. Este trabalho investiga e analisa a existência de similaridade no comportamento acústico de salas de concerto no que diz respeito ao tempo de reverberação – importante parâmetro acústico utilizado no estudo de ambientes fechados. A metodologia da ADTS é usada na obtenção dos números adimensionais relevantes ao estudo desse problema. Dados para 66 salas de concerto ao redor do mundo são plotados segundo os parâmetros adimensionais obtidos para diferentes bandas de frequência e revelam um comportamento comum dessas salas no que diz respeito ao tempo de reverberação. Também são obtidas fórmulas dimensionalmente homogêneas, que permitem o cálculo do tempo de reverberação com base no comportamento médio dessas salas para as bandas de 125 a 4000 Hz. Estas fórmulas recuperam uma expressão semelhante à de Sabine para o tempo de reverberação, mas foram obtidas unicamente por considerações dimensionais e têm a vantagem de envolverem grandezas que dependem apenas da geometria da sala, quais sejam, seu volume e a área ocupada pela platéia. Estas fórmulas podem ser úteis, por exemplo, nos estágios iniciais do projeto de salas de concerto. Os resultados de medições feitas numa sala brasileira, o Salão Leopoldo Miguez, da Escola de Música da UFRJ, são comparados com os dados para as demais salas de concerto e mostram que esta sala também segue a tendência de comportamento evidenciada com o uso da ADTS.*

**Palavras-chave.** *Análise Dimensional, Teoria da Semelhança, números adimensionais, acústica de salas, salas de concerto.*

### 1. INTRODUÇÃO

Uma das utilidades da Análise Dimensional e Teoria da Semelhança é estabelecer as condições de semelhança física entre os modelos reduzidos testados em laboratório com os respectivos protótipos. Em Acústica, modelos reduzidos têm sido utilizados na tentativa de avaliar o comportamento acústico de salas ou ambientes abertos (Barron, 1993). Entretanto, a utilidade e o escopo de aplicação da ADTS em Acústica é mais amplo.

Um dos objetivos deste trabalho é estimular o uso da ADTS como auxiliar na modelagem de problemas em Acústica, bem como na análise e interpretação de resultados experimentais. Esta

metodologia pode ser útil, não só em acústica de salas e de ambientes abertos, mas em outros campos como geração de ruído e acústica não-linear (Olson e Swift, 1994, Strasberg, 1988).

O artigo se concentra em um aspecto da técnica que não os modelos reduzidos. A metodologia é utilizada na investigação da existência de similaridade no comportamento acústico de salas de concerto.

## 2. ASPECTOS TEÓRICOS

### 2.1. A metodologia da Análise Dimensional

Um dos objetivos finais da Análise Dimensional é a formação de parâmetros adimensionais que sejam uma combinação de produtos de potências das grandezas físicas participantes do fenômeno físico em estudo. A vantagem é que dessa forma reduz-se o número de variáveis do problema, diminuindo o esforço experimental. Além disso, a interpretação física do significado desses parâmetros adimensionais pode fornecer informação adicional sobre o fenômeno pois, em muitos casos, eles envolvem simultaneamente grandezas físicas relacionadas com o meio, com o processo físico em si e/ou constantes físicas universais.

Considere-se um problema físico onde estão envolvidos  $n$  grandezas físicas ou constantes físicas universais designados pela letra  $X_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ). A relação entre essas  $n$  grandezas pode ser escrita na forma funcional:

$$g(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0 \quad (1)$$

Em geral,  $g$  é desconhecida ou pode representar uma equação de difícil resolução, possivelmente não-linear.

Ainda que não se conheça a relação funcional entre as grandezas físicas envolvidas no fenômeno, a ADTS permite combiná-las de forma inteligente facilitando uma posterior avaliação experimental ou até mesmo experiências numéricas.

O Teorema Pi ou de Vaschy-Buckingham (Buckingham, 1914) mostra que podem ser formados  $n-r$  grupos adimensionais independentes entre si a partir das  $n$  grandezas físicas consideradas. O símbolo  $r$  representa o número de unidades básicas do sistema de unidades escolhido como base que são estritamente necessárias para a descrição do fenômeno. A prova do teorema será omitida e pode ser encontrada em Langhaar (1965), Sena (1979) e Carneiro (1996).

A relação (1) pode ser reduzida a:

$$G(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}) = 0 \quad (2)$$

ou

$$\Pi_1 = G_1(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-r}) \quad (3)$$

Os parâmetros adimensionais, designados pela letra grega  $\Pi$ , são produtos de potências das grandezas físicas  $X_j$ . O novo problema passa a ser a determinação da forma funcional  $G$  ou  $G_1$ , entretanto elas, por sua vez só envolverão  $n-r$  variáveis. Não é mais necessário investigar como a grandeza de interesse  $X_1$  varia com as demais  $n-1$  grandezas e sim como o parâmetro  $\Pi_1$  (que irá envolver a grandeza de interesse  $X_1$ ) varia com os demais  $n-r-1$  números  $\Pi$ .

Na análise dimensional é sempre adotada a forma explícita em que uma das variáveis, a variável dependente, é a incógnita do problema. Todas as demais variáveis e constantes físicas universais ou específicas constituem os dados do problema. A variável dependente deverá figurar em apenas um número  $\Pi$ , que é a incógnita do problema na forma adimensional.

É importante ressaltar que o teorema é incapaz de descrever a forma funcional de  $G$  ou  $G_1$ . A relação funcional entre os parâmetros  $\Pi$  independentes deve ser determinada, seja experimentalmente, deduzida de princípios físicos ou uma composição dessas abordagens.

Uma forma bastante prática e útil de se obterem os números  $\Pi$  é dispor as grandezas de interesse  $X_1, X_2, \dots, X_n$  em uma matriz dimensional cujas grandezas de base são  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . Os expoentes de dimensão são dados por  $A_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ ) e a matriz pode ser representada como:

Tabela 1. Matriz dimensional genérica

	$X_1$	$X_2$	...	$X_n$
$R_1$	$A_{11}$	$A_{12}$	...	$A_{1n}$
$R_2$	$A_{21}$	$A_{22}$	...	$A_{2n}$
...	...	...	...	...
$R_m$	$A_{m1}$	$A_{m2}$	...	$A_{mn}$
	$\alpha_1$	$\alpha_2$	...	$\alpha_n$

Cada grandeza  $X_j$  pode ser escrita como:

$$X_j = R_1^{A_{1j}} R_2^{A_{2j}} \dots R_m^{A_{mj}} \quad (4)$$

A montagem dessa matriz cria um procedimento de obtenção dos parâmetros adimensionais. Nesses parâmetros, o expoente de dimensão de cada unidade de base deve ser zero. Dessa forma, o seguinte sistema de equações lineares é formado:

$$\begin{aligned} A_{11}\alpha_1 + A_{12}\alpha_2 + \dots + A_{1n}\alpha_n &= 0 \\ A_{21}\alpha_1 + A_{22}\alpha_2 + \dots + A_{2n}\alpha_n &= 0 \\ \dots & \\ A_{m1}\alpha_1 + A_{m2}\alpha_2 + \dots + A_{mn}\alpha_n &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Os  $\alpha_j$  são as incógnitas desse sistema de equações e determinarão os expoentes com os quais as grandezas  $X_j$  deverão figurar em cada um dos números  $\Pi$ . São chamados de *expoentes de dimensão* ou simplesmente *dimensão* da grandeza. Cada equação é igualada a zero para garantir que a grandeza de base  $R_i$  tenha dimensão nula no número  $\Pi$  formado.

Por exemplo, seja a grandeza  $p$ , pressão, com unidades SI  $N/m^2$  colocada na primeira coluna da matriz dimensional ( $X_1 = p$ ). Uma base estrita (que não contém unidades a mais nem a menos do que as necessárias à representação da grandeza) é a base LMT, ou comprimento, massa e tempo ( $R_1 = L, R_2 = M, R_3 = T$ ). Nesse caso,  $A_{11} = -1, A_{21} = 1$  e  $A_{31} = -2$ , já que  $[p] = [L]^{-1} [M]^1 [T]^{-2}$ .

As grandezas que figuram nas  $n$  primeiras colunas ( $n$  é sempre maior do que  $m$ ) são chamadas determinantes e as demais de grandezas diretrizes. Um procedimento de solução para esse sistema é arbitrar cada um dos  $\alpha_{n-m} = 1$  ou  $-1$  e os demais  $\alpha_{n-m-1}$  iguais a zero de cada vez. Dessa forma, cada  $X_j$  correspondente a uma grandeza diretriz figurará em um único número  $\Pi$  e será a combinação das  $m$  primeiras colunas da matriz que foram escolhidas como grandezas determinantes.

O procedimento de resolução do sistema de equações e da obtenção dos parâmetros adimensionais é simples e direto, entretanto a escolha das grandezas que devem figurar na matriz dimensional, bem como as que devem ser escolhidas como determinantes, depende grandemente do julgamento do pesquisador e constitui etapa fundamental à obtenção de resultados coerentes.

## 2.2. Acústica de salas e o tempo de reverberação

A reverberação é uma importante característica de uma sala (Sabine, 1964). Uma medida quantitativa da reverberação é o tempo de reverberação ( $TR$ ) que é definido como o tempo necessário para que a intensidade do som decaia a um milionésimo da intensidade original, isto é decaia 60 dB. A reverberação está muito ligada à absorção sonora. A energia sonora é atenuada de duas maneiras diferentes: absorção na propagação pelo ar e absorção pelas superfícies expostas da sala. Os mecanismos da absorção sonora ainda são alvo de muitos estudos. Às superfícies expostas ao som são associados coeficientes de absorção sonora que representam a razão entre a energia absorvida e a energia incidente. Em relação à parcela de absorção correspondente ao ar, pode-se dizer que ela é proporcional ao volume da sala e seus efeitos são mais sensíveis nas altas frequências.

Um modelo teórico para a absorção sonora, descrito por Hall (1987), trata o som emitido por uma fonte como raios acústicos. Quando um desses raios encontra uma superfície ele é parcialmente absorvido e parcialmente refletido. O tipo de reflexão pode ser especular ou difusa. Nesse último caso, a energia será distribuída em vários outros raios que emergem dessa superfície. Após um grande número de reflexões, o som dentro da sala pode ser considerado difuso. Isso significa que a densidade média de energia em cada ponto da sala é a mesma e que todas as direções de propagação são igualmente possíveis. Essa hipótese de campo difuso leva a uma equação diferencial de primeira ordem homogênea para o caso em que a fonte cessa a emissão e passa-se a observar o comportamento da energia sonora dentro da sala que cairá de forma exponencial.

A fórmula para o cálculo do tempo de reverberação de uma sala é dada abaixo (Hall, 1987):

$$TR = 24 \ln(10) \frac{V}{c_0 A} = 55,3 \frac{V}{c_0 A} \quad (6)$$

ou, para  $c_0 = 340$  m/s:

$$TR = 0,163 \frac{V}{A} \quad (7)$$

$V$  é o volume da sala [ $L^3$ ],  $c_0$  é a velocidade do som no meio [ $LT^{-1}$ ] e  $A$  [ $L^2$ ] é um somatório dos produtos de cada uma das áreas expostas da sala pelos respectivos coeficientes de absorção ( $\alpha$ ).

O coeficiente numérico da Eq. (7) tem dimensões do inverso de uma velocidade e foi obtido a partir das discussões teóricas dos parágrafos anteriores.

A fórmula de Sabine (Eq. (7)) apresenta alguns problemas como o de prever um tempo de reverberação não nulo mesmo para superfícies perfeitamente absorventes ( $\alpha = 1$ ) e a hipótese do campo sonoro ser perfeitamente difuso, o que nem sempre acontece em todos os ambientes fechados onde o decaimento da energia pode não ser perfeitamente exponencial. Outras fórmulas alternativas foram propostas (Eyring, 1930, Fitzroy, 1959) entretanto, a fórmula de Sabine é compacta e ainda é adotada nas normas internacionais (ISO 354, 1985). Um dos grandes problemas para o uso dessa fórmula é saber qual coeficiente de absorção usar para o cálculo de  $TR$ . Na verdade, uma de suas grandes utilidades reside na avaliação do coeficiente de absorção de um material a partir da medida do tempo de reverberação. Essa avaliação é feita medindo-se o tempo de reverberação em uma câmara reverberante com e sem a presença do material absorvente. Como a área do material e o volume da câmara são conhecidos, é possível calcular  $\alpha$ . O problema é que a presença de material absorvente dentro da câmara reverberante muda o campo sonoro e não se pode mais dizer que este é perfeitamente difuso, especialmente nas vizinhanças do material. Nesse caso, em princípio, a Eq. (7) não seria mais aplicável.

Um outro ponto importante é que o campo sonoro em uma sala real, uma sala de concerto por exemplo, pode não ser completamente difuso e nesse caso as previsões de  $\alpha$  medidos na câmara reverberante podem ser muito diferentes do comportamento do material instalado.

### 2.3. Metodologia

Para o problema em questão, as seguintes quantidades devem ser consideradas: a incógnita tempo de reverberação  $TR$  (s); o volume da sala  $V$  (m<sup>3</sup>); a área de absorção exposta  $S$  (m<sup>2</sup>); a frequência  $f$  (s<sup>-1</sup>); a velocidade do som  $c_0$  (m/s); a pressão acústica  $p$  (N/m<sup>2</sup>) e os fatores de forma e a absorção.

A escolha das grandezas que devem figurar na matriz dimensional e quais devem ser escolhidas como grandezas de base é de fundamental importância e depende muito do conhecimento do pesquisador sobre o problema em questão. Entretanto, algumas diretrizes podem ser seguidas (Carneiro, 1996). Uma delas é a escolha de grandezas que pertençam ao processo físico, a geometria do problema e grandezas ou constantes físicas que digam respeito ao meio, por exemplo. Dessa forma, os parâmetros adimensionais formados serão mais gerais e envolverão grandezas associadas a diversos aspectos do fenômeno em estudo, comportando mais informações sobre ele. Uma outra diretriz é escolher como grandezas de base (e que por isso irão se repetir nos números adimensionais formados) as que forem mais facilmente controláveis em uma futura avaliação experimental. Entretanto, o conjunto de grandezas escolhidas como base deve conter todas as unidades do sistema de unidades escolhido como sistema base e não deve ser da mesma natureza, como por exemplo incluir um comprimento representativo e uma área que são múltiplos de uma mesma unidade (comprimento).

Para o problema em estudo, além da incógnita  $TR$ , foram escolhidas uma característica geométrica relevante da sala (o volume  $V$ ), e quantidades relacionadas com o fenômeno em si, como  $S$  e  $f$ . Além dessas, uma característica do meio ( $c_0$ ) e uma inerente ao decaimento sonoro ( $p$ ) serão incluídas na matriz dimensional mostrada na Tab. (2).

Tabela 2. Matriz dimensional do problema

	$p$	$c_0$	$V$	$S$	$f$	$TR$
<b>L</b>	-1	1	3	2	0	0
<b>M</b>	1	0	0	0	0	0
<b>T</b>	-2	-1	0	0	-1	1
	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$

A incógnita  $TR$  figura na última coluna da matriz dimensional. A pressão, a velocidade do som e o volume podem formar uma nova base para essa matriz e figuram nas três primeiras colunas. A partir da matriz mostrada na Tab. (2) o seguinte sistema linear deve ser resolvido:

$$\begin{aligned}
 -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 &= 0 \\
 \alpha_1 &= 0 \\
 -2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_5 + \alpha_6 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

É interessante notar que mesmo que a pressão acústica tivesse sido trocada pela intensidade sonora  $I$  [MT<sup>-3</sup>] (outra quantidade que poderia representar o decaimento sonoro), o valor de  $\alpha_1$  seria zero. Isso é uma indicação de que essa quantidade não irá figurar entre os números adimensionais formados. Isso acontece quando uma mesma quantidade aparece simultaneamente nos dois membros de uma equação e se cancelam como no exemplo da vibração livre de um pêndulo simples onde a massa não influencia o período de vibração (Carneiro, 1996). Pode-se pensar, de maneira alternativa, que o  $TR$  não depende da pressão acústica instantânea, mas do decaimento entre dois níveis de energia e por isso não irá figurar nos números adimensionais formados.

A solução desse sistema fornecerá os  $\alpha_i$ , que são os expoentes de dimensão com os quais cada uma das grandezas físicas deverá figurar nos parâmetros adimensionais. Eles não devem ser

confundidos com o coeficiente de absorção  $\alpha$  que também tem o mesmo símbolo. Os números  $\Pi$  gerados são mostrados na Tab. (3) abaixo:

Tabela 3. Parâmetros adimensionais obtidos

1ª Solução	2ª Solução	3ª Solução
$\alpha_4 = -1, \alpha_5 = \alpha_6 = 0$	$\alpha_5 = 1, \alpha_4 = \alpha_6 = 0$	$\alpha_6 = 1, \alpha_4 = \alpha_5 = 0$
$\Pi_1 = \frac{\sqrt[3]{V^2}}{S}$	$\Pi_2 = \frac{f\sqrt[3]{V}}{c_0}$	$\Pi_3 = \frac{c_0 TR}{\sqrt[3]{V}}$

O problema agora passa a ser a determinação da relação funcional  $\varphi$  dada abaixo. Essa relação depende de  $\Pi_1, \Pi_2$ , da absorção promovida pela sala e dos fatores de forma. Deve se notar que o número de variáveis foi reduzido de 6 grandezas físicas para 3 parâmetros adimensionais úteis na análise e interpretação dos resultados.

$$\Pi_3 = \varphi(\Pi_2, \Pi_1, \text{fatores de forma, coeficientes de absorção})$$

$$\frac{c_0 TR}{\sqrt[3]{V}} = \varphi\left(\frac{f\sqrt[3]{V}}{c_0}, \frac{\sqrt[3]{V^2}}{S}, \text{fatores de forma, coeficientes de absorção}\right) \quad (9)$$

## 2.4. Absorção sonora e salas de concerto

Os números gerados são gerais e nenhuma restrição é feita ao tipo de salas que eles podem representar ou ao campo sonoro dentro delas.

Nada foi dito sobre qual deve ser a escolha de  $S$  no número  $\Pi_1$ . Essa grandeza tem dimensões de uma área e deve-se escolher uma área que seja representativa da sala.

Em uma sala de concerto, a área equivalente de absorção  $A$  da Eq. (7) pode ser calculada da seguinte forma (Beranek, 1996):

$$A = S_t \alpha_t + S_r \alpha_r + S_N \alpha_N + 4m_a V \quad (10)$$

A parcela  $4m_a V$  corresponde a absorção na propagação através do ar ( o coeficiente  $m_a$  [ $L^{-1}$ ] é da ordem de  $10^{-2}$  a  $10^{-4}$  e é relevante nas altas frequências e para salas de grande volume).  $S_N$  é a área de carpetes, cortinas, painéis de madeira e outros materiais absorventes usados para controle de eco.  $S_r$  é a área residual de paredes, teto, áreas sob balcões e outras áreas não incluídas em  $S_t$ .

Em salas de concerto,  $S_t$  considera a área acústica da platéia, do coral (quando ocupado) e a área do palco ocupada pelos músicos. Essa é a área projetada dos grandes blocos de assentos. Devido aos efeitos de difração nas bordas dos blocos de assentos, a absorção efetiva dessas áreas é um pouco maior. Para levar esse efeito em consideração, são somadas faixas laterais de 0,5 m de largura ao redor desses blocos de assentos. Essas faixas laterais só não são adicionadas quando os blocos encontram-se próximos a paredes ou nas partes frontais dos balcões.

A cada uma dessas áreas, é associado um coeficiente de absorção, mas o problema continua sendo a escolha de qual  $\alpha$  deverá figurar na Eq. (7).

Beranek (1996) afirma que a área da audiência é responsável pela maior parte da absorção dentro de uma sala de concerto. Para salas onde  $S_r$  corresponde a superfícies com acabamento de massa (3,8 cm de espessura ou mais) ou massa sobre blocos de concreto ou madeira dura (3,8 cm de espessura ou mais), sem a presença de muitos outros materiais absorventes, a parcela  $\alpha_r S_r$  corresponde a aproximadamente 33% de  $\alpha_t S_t$ . Isso é válido para as bandas de 500 e 1000 Hz. Para esse caso, o coeficiente numérico que melhor se adapta aos dados na Eq. (7) é 0,14 e não 0,163. Em salas onde as áreas da audiência e do palco são pequenas comparadas com o seu volume, os valores

de  $\alpha_r S_r$  podem ser maiores que 33% de  $\alpha_r S_t$  porque a área residual  $S_r$  cresce com o volume e começa a ter uma maior influência nos valores do tempo de reverberação.

Do que foi exposto acima, pode-se dizer que  $S_t$  é uma área representativa em salas de concerto e poderá figurar no número  $\Pi_1$ . Além disso, será feita a hipótese de que  $\Pi_3::\Pi_1$  ou, em outras palavras que  $\Pi_3/\Pi_1 =$  constante numérica. Isso significa que será obtida uma família de retas, uma pra cada banda de frequência nos gráficos de  $\Pi_3 \times \Pi_1$ . Os volumes das salas são medidos como se não houvesse cadeiras e os volumes sólidos dos balcões são excluídos no cálculo de  $V$ .

### 3. RESULTADOS

#### 3.1. O Salão Leopoldo Miguez

O Salão Leopoldo Miguez pertence à Escola de Música da Universidade Federal do Rio de Janeiro e foi inaugurado em 1922. O salão possui dois balcões e 1100 lugares e sua arquitetura está baseada na Sala Gaveau de Paris.

Com a ajuda dos desenhos de arquitetura, seu volume ( $V = 5680 \text{ m}^3$ ) e a área de absorção promovida pela audiência ( $S_t = 504 \text{ m}^2$ ) puderam ser calculados, tomando-se os cuidados em relação à adição de faixas laterais aos grandes blocos de assentos e em abater o volume ocupado pelos balcões. Esses dados permitem o cálculo do valor de  $\Pi_1 = 0,63$ .

Foram feitas medições utilizando uma caixa acústica com um sinal de excitação do tipo MLS (seqüência de comprimento máximo) e um microfone, em três diferentes configurações: A) caixa acústica no centro do palco e microfone no corredor principal, no meio da sala; B) caixa acústica no centro do palco e microfone no corredor principal nos fundos da sala e C) caixa acústica no lado direito do palco e microfone no corredor principal no meio da sala. Para as três situações as cortinas estavam abertas e a sala vazia.

Os dados obtidos das salas de concerto referem-se à situação de 100% de ocupação. Beranek (1996) sugere que correções podem ser feitas associando-se à área  $S_t$  um coeficiente de absorção  $\alpha$  que representa o adicional de absorção devido a presença do público. Essa parcela é adicionada ao fator  $A$  da fórmula da Sabine (Eq. (7)). A Tab. (4) abaixo mostra os resultados corrigidos das medições feitas no Salão Leopoldo Miguez, o valor referente ao comportamento médio das salas de concerto e a diferença percentual entre cada um deles para diferentes configurações de medições e bandas de frequência.

Tabela 4. Resultado das medições no Salão Leopoldo Miguez

	$f$ (Hz)	125	250	500	1000	2000	4000
	<b>TR<sub>gráfico</sub> (s)</b>	<b>1.86</b>	<b>1.67</b>	<b>1.57</b>	<b>1.54</b>	<b>1.41</b>	<b>1.26</b>
<b>A</b>	<b>TR<sub>medido</sub> (s)</b>	2.11	2.05	1.95	1.95	1.99	1.87
	<b>TR<sub>corrigido</sub> (s)</b>	1.68	1.65	1.58	1.58	1.51	1.44
	<b>Dif. %</b>	10.7	1.2	-0.6	-2.5	-6.6	-12.5
<b>B</b>	<b>TR<sub>medido</sub> (s)</b>	1.81	2.05	1.87	1.82	1.89	1.85
	<b>TR<sub>corrigido</sub> (s)</b>	1.49	1.65	1.53	1.49	1.46	1.43
	<b>Dif. %</b>	24.8	1.2	2.6	3.4	-3.4	-11.9
<b>C</b>	<b>TR<sub>medido</sub> (s)</b>	1.91	2.06	1.92	1.85	1.89	1.88
	<b>TR<sub>corrigido</sub> (s)</b>	1.55	1.65	1.56	1.52	1.46	1.45
	<b>Dif. %</b>	20	1.2	0.6	1.3	-3.4	-13.6

#### 3.2. Salas de concerto

Os gráficos abaixo (Fig. (1)) representam os dados de 66 salas de concerto (Beranek, 1996) segundo os parâmetros adimensionais  $\Pi_1$  e  $\Pi_3$  para as bandas de frequência de 500 e 1000 Hz. A

Fig. (2) resume o comportamento médio dessas salas para as bandas de frequência de 250 a 4000 Hz. Os pontos são omitidos para facilitar a visualização.

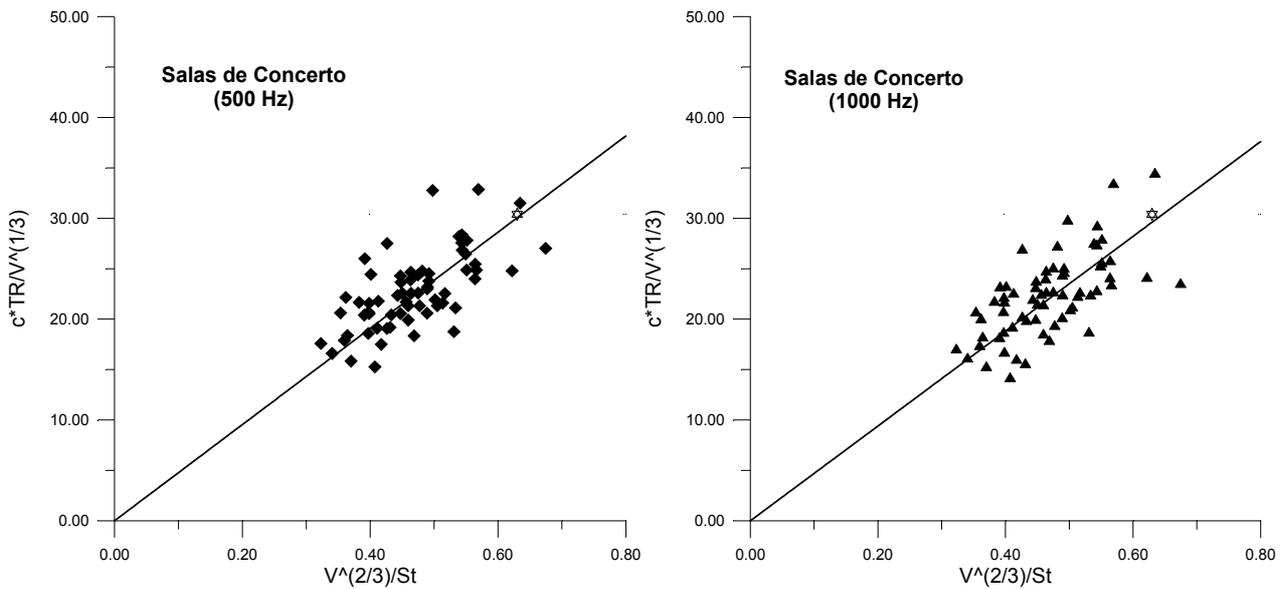


Figura 1. Dados para as salas de concerto nas bandas de 500 e 1000 Hz

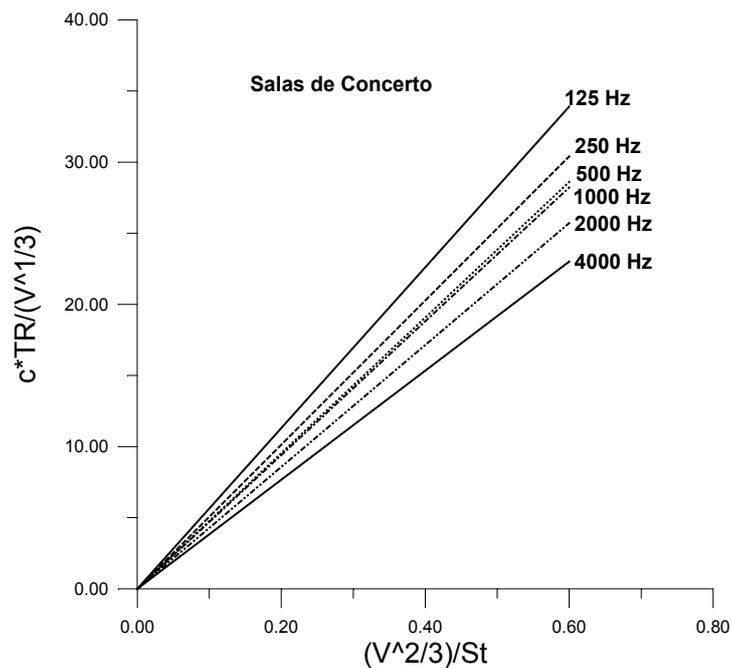


Figura 2. Comportamento médio das salas de concerto para várias bandas de frequência

O ajuste de uma reta ao gráfico correspondente a 500 Hz, por exemplo, fornece a seguinte expressão:

$$\frac{\frac{c_0 TR}{\sqrt[3]{V}}}{\frac{V}{S_t}} = \frac{c_0 TR}{\frac{V}{S_t}} = 47,7 \therefore TR = \frac{47,7 V}{c_0 S_t} \quad (11)$$

Essa expressão é dimensionalmente homogênea, ou seja, a unidade de TR será uma combinação das unidades das demais grandezas envolvidas na fórmula e não há necessidade de que nenhuma delas seja dada em alguma unidade específica, pois o coeficiente numérico obtido é adimensional.

Esses coeficientes podem ser resumidos na Tab. (5) abaixo para várias bandas de frequência:

Tabela 5. Coeficientes numéricos adimensionais

$TR = (...) \frac{V}{c_0 S_t}$						
$f$ (Hz)	125	250	500	1000	2000	4000
Coef. (...)	56,5	50,7	47,7	47	42,8	38,4

A tendência conhecida de que o tempo de reverberação diminui com o aumento da frequência (maior absorção) é reproduzida no comportamento médio das salas de concerto. Além disso, para as bandas de 500 e 1000 Hz verifica-se que os coeficientes numéricos são bem próximos entre si e à previsão pela fórmula de Sabine (para  $c_0 = 340$  m/s o coeficiente numérico  $\approx 0,14$ ), verificando a afirmação de Beranek (1996).

#### 4. CONCLUSÕES

A Análise Dimensional e Teoria da Semelhança é mais uma ferramenta útil na abordagem de problemas físicos. Para a Acústica de Salas, a metodologia da ADTS mostrou-se uma forma alternativa de análise revelando um comportamento comum entre as salas de concerto investigadas no que diz respeito ao tempo de reverberação.

A ADTS pode fornecer informação adicional sobre o problema ainda que as equações que governam o fenômeno não sejam conhecidas ou sejam de difícil resolução.

A regressão dos dados recuperou fórmulas dimensionalmente homogêneas semelhantes à expressão de Sabine para o tempo de reverberação e baseadas em características da sala que podem ser obtidas diretamente dos desenhos de arquitetura da sala. Essas fórmulas podem ser úteis nos estágios iniciais do projeto de uma nova sala de concerto quando se deseja ter uma idéia inicial do tempo de reverberação esperado e quando são tomadas as primeiras decisões sobre a sala como o seu volume e o número de ocupantes. Entretanto, é importante notar que essas fórmulas não devem ser encaradas como estimadores do tempo de reverberação de uma sala, já que os valores que influenciam o valor dessa grandeza dentro de uma sala são inúmeros e a variedade de tipos e formas construtivas também é enorme. Ainda que não se possa avaliar a qualidade acústica de uma sala investigando-se um único parâmetro acústico, as fórmulas obtidas são representativas, pois são baseadas em dados experimentais e refletem o comportamento médio de salas que são bem reputadas por sua acústica.

#### 5. AGRADECIMENTOS

Os autores são gratos a José Flávio Silveira Feiteira e Soraia Malafaia por fornecerem os dados das medições no Salão Leopoldo Miguez e pelas discussões durante a realização desse trabalho. Também agradecem à CAPES e à FAPERJ pelo suporte financeiro dado a esta pesquisa.

#### 6. REFERÊNCIAS

- Barron, M., 1993, "Auditorium Acoustics and Architectural Design", Ed. E & FN Spon, London, England, 443 p.
- Beranek, L. L., 1996, "Concert and Opera Halls: How They Sound", Acoustical Society of America Edition, Woodbury, New York, 643 p.

- Buckingham, E., 1914, "On physically similar systems; illustration of the use of dimensional equations", *Phys. Rev.*, Vol. IV, nº 4, pp. 345-376.
- Carneiro, F. L. L. B., 1996, "Análise dimensional e teoria da semelhança dos modelos físicos", Ed. UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 256 p.
- Eyring, C. F., 1930, "Reverberation time in dead rooms", *J. Acoust. Soc. Am.* pp. 1405-1412.
- Fitzroy, D., 1959, "Reverberation formula which seems to be more accurate with nonuniform distribution of absorption", *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 31, nº 7, pp. 893-897.
- Hall, D. E., 1987, "Basic Acoustics", Harper & Row Publishers, Inc., New York, 345 p.
- ISO 354, 1985, "Acoustics – Measurement of sound absorption in a reverberation room", 1ª edição.
- Langhaar, H. L., 1965, "Dimensional analysis and theory of models", 7<sup>th</sup> edition, New York, John Wiley and Sons Inc., 166 p.
- Olson, J. R., Swift, G. W., 1994, "Similitude in Thermoacoustics", *J. Acoust. Soc. Am.* Vol.95, nº 3, pp. 1405-1412.
- Sabine, W. C., 1964, "Collected papers on Acoustics", 2ª edição, Dover Books, New York, 279 p.
- Sena, L. A., 1979, "Unidades de las magnitudes físicas y sus dimensiones", tradução do russo por Virgílio Llanos Más, Editorial MIR, Moscou, 249 p.
- Strasberg, M., 1988, "Dimensional Analysis of Windscreen Noise", *J. Acoust. Soc. Am.* Vol.83, nº 2, pp. 544-548.

## APPLICATIONS OF DIMENSIONAL ANALYSIS AND THEORY OF SIMILITUDE OF PHYSICAL MODELS IN CONCERT HALL ACOUSTICS

**João Henrique Diniz Guimarães**

Federal University of Rio de Janeiro, Institut für Technische Akustik, RWTH Aachen – D-52056 – Aachen, Deutschland, joao\_guimaraes@hotmail.com

**Fernando Luiz Lobo Barboza Carneiro**

Federal University of Rio de Janeiro

**Moysés Zindeluk**

Federal University of Rio de Janeiro

**Abstract.** *Dimensional Analysis and Theory of Similitude (ADTS) is a powerful auxiliary tool for physical-mathematical modelling used by engineers, physicists and other researchers. It is useful in the analysis of similarities and analogies between physical processes and also sets the basis for scale models. This work investigates and analyses the existence of similarity in the acoustical behaviour of concert halls regarding reverberation time – an important acoustical parameter for enclosures. The methodology of ADTS is used to obtain dimensionless numbers relevant to the study of this problem. Data from 66 concert halls worldwide are plotted according to the dimensionless numbers obtained for different frequency bands, which reveals a common behaviour of those halls regarding reverberation time. Dimensionally homogeneous formulae that permit the calculation of reverberation time based on the average behaviour of those halls for the frequency bands of 125 to 4000 Hz are also obtained. These formulae recover an expression similar to Sabine's formula for the reverberation time, but were obtained only through dimensional considerations and have the advantage of involving physical quantities that depend only on room geometry, i.e. its volume and the area occupied by the audience. These formulae can be useful, for example, in the early stages of concert hall design. The results of measurements performed in a Brazilian hall, the Leopoldo Miguez Hall (School of Music of UFRJ), are compared with data from various halls and shows that they also follow the common behaviour evidenced by the use of ADTS.*

**Keywords.** *Dimensional Analysis, Theory of Similitude, dimensionless numbers, room acoustics, concert halls.*