



ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DA TRANSFERÊNCIA DE MOMENTUM E MASSA NA PADRONIZAÇÃO DO LEITE VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Daniel H. Girotti-Fontana¹

Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC), Departamento de Engenharia Mecânica – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rua Sarmento Leite nº 425 - 90050-170 Porto Alegre/RS , Brasil. E-mail: hgirotti@mecanica.ufrgs.br

Flávia Schwarz Franceschini²

Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC), Departamento de Engenharia Mecânica – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rua Sarmento Leite nº 425 - 90050-170 Porto Alegre/RS , Brasil. E-mail: fla@mecanica.ufrgs.br

Sérgio Frey³

Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC), Departamento de Engenharia Mecânica – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rua Sarmento Leite nº 425 - 90050-170 Porto Alegre/RS , Brasil. E-mail: frey@mecanica.ufrgs.br

Resumo. *A simulação de processos em Engenharia de Alimentos tem proporcionado a geração de novas tecnologias, bem como seu aprimoramento, possibilitando a obtenção de produtos com cada vez mais qualidade. No processo de padronização do conteúdo de gordura no leite, injeta-se o creme, com alta percentagem de gordura, na linha do leite magro. O conteúdo de gordura do produto final é controlado através de medições em linha das densidades do creme e do leite, proporcionais a seus teores de gordura, e do ajuste da vazão de injeção. O objetivo deste trabalho é a simulação computacional da injeção de creme em leite desnatado através do método de elementos finitos, via aproximação SUPG (Streamline Upwind/Petrov-Galerkin), utilizando-se de uma geometria tridimensional. Tanto o creme como o leite desnatado são considerados fluidos newtonianos, com propriedades físicas conhecidas e determinadas. A equação de transporte de momentum fornece o campo de velocidade, necessário para a solução da equação do transporte convectivo e difusivo de massa, a qual determina a concentração local de cada espécie no escoamento. Os resultados da convecção mássica são analisados, avaliando-se a efetividade da mistura.*

Palavras-chave: *Elementos Finitos, Engenharia de Alimentos, SUPG.*

1. INTRODUÇÃO

A necessidade da obtenção em larga escala de produtos com alta qualidade tem estimulado o desenvolvimento de novas tecnologias para a automação dos processos na indústria de alimentos, bem como seu aprimoramento. Neste contexto, as ferramentas computacionais vêm ampliando seu uso na simulação de processos para o desenvolvimento e otimização de projetos. No processo de padronização do conteúdo de gordura no leite, injeta-se o creme, com uma alta percentagem de gordura, na linha de leite magro, como mostrado na Fig. (1). O conteúdo de gordura do produto

¹ Este autor é aluno de graduação do Departamento de Engenharia Mecânica/UFRGS.

² Este autor é aluno do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC)/UFRGS.

³ Toda correspondência deve ser enviada a este autor.

final é controlado através de medições em linha das densidades do creme e do leite, proporcionais a seus teores de gordura, e do ajuste da vazão de injeção (Tetra Pak, 1995).

O objetivo principal deste trabalho é simular, através do método dos elementos finitos, via aproximação SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) (Brooks e Hughes, 1982), a injeção de creme no leite desnatado e analisar a difusão mássica entre os dois componentes.

Visando um estudo válido para aplicações industriais, são utilizadas geometrias tridimensionais, com medidas baseadas em tubulações de processamento de laticínios. Simulações com variações no diâmetro do tubo de injeção de creme são efetuadas a fim de se estudar a eficiência da mistura visando o barateamento de custos, evitando o uso de misturadores. As equações de momentum e conservação de massa são resolvidas para a obtenção dos campos de velocidade e pressão. Para tanto, são utilizadas propriedades de um fluido bulk (ou principal), resolvendo-se os problemas de momentum e transferência de massa de forma desacoplada.

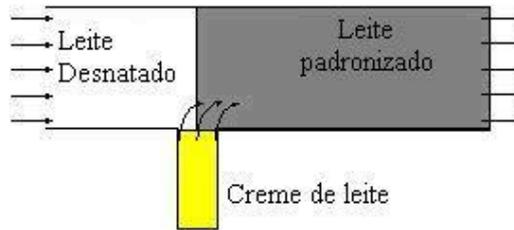


Figura (1): Representação do problema

2. MODELO MECÂNICO

O processo de padronização do leite é estudado neste trabalho como um problema tridimensional, da obtenção dos campos de velocidade e da convecção de massa sobre um domínio composto pela junção dos tubos de leite magro e de creme, e da continuação da tubulação onde a mistura deve ocorrer. As equações que regem o problema são descritas pela equação de conservação do momentum, conservação de massa e as equações de balanço ou transporte de massa das espécies, Eq. (1). Estas equações estão aqui escritas para o regime permanente, considerando o leite magro e o creme como fluidos newtonianos. As propriedades físicas ρ (massa específica), μ (viscosidade), ν (viscosidade cinemática) são propriedades de um fluido bulk, utilizado para a solução das equações de momentum, e consideradas constantes.

$$\begin{aligned}
 (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} + \frac{\nabla p}{\rho} - 2\nu \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} &= 0 & \text{sobre } \Omega \\
 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{sobre } \Omega \\
 \nabla \omega_{(i)} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot (\mathbf{D}_{ij} \nabla \omega_{(i)}) - \frac{R_{(i)}}{\rho} &= 0 & \text{sobre } \Omega \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g & \text{sobre } \Gamma_g \\
 \omega_{(i)} &= \omega_{(i)g} & \text{sobre } \Gamma_g \\
 [-p\mathbf{I} + 2\nu\mathbf{D}(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{S}_h & \text{sobre } \Gamma_h \\
 [\rho \mathbf{D}_{ij} \nabla \omega_{(i)}] \cdot \mathbf{n} &= j_{(i)h} & \text{sobre } \Gamma_h
 \end{aligned} \tag{1}$$

onde Ω é o domínio do problema, \mathbf{u} é o campo de velocidade, p é o campo de pressão, ρ é a densidade do fluido bulk, $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ é a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade, \mathbf{D}_{ij} é o coeficiente binário de difusão mássica, $\omega_{(i)}$ é a fração mássica da i -ésima espécie, ν é a viscosidade cinemática do fluido bulk, \mathbf{f} representa as forças de corpo e R_i e geração de massa da i -ésima espécie, Γ_g e Γ_h são as fronteiras do domínio, $\omega_{(i)g}$ é a fração mássica da i -ésima espécie prescrita

sobre Γ_g , \mathbf{n} é a normal exterior unitária, \mathbf{I} é o tensor identidade, \mathbf{u}_g é a velocidade prescrita sobre a fronteira do domínio Γ_g , \mathbf{S}_h e $j_{(i)h}$ são as condições de tração livre e fração mássica livre no contorno Γ_h .

Para assegurar a conservação de massa na solução do problema, vale sempre que:

$$\sum_i^{ns} \omega_i = 1 \quad (2)$$

3. FORMULAÇÃO NUMÉRICA

O problema estudado é definido sobre um domínio aberto $\Omega \subset \mathcal{R}^3$, limitado por uma fronteira poligonal definida por

$$\begin{cases} \Gamma = \bar{\Gamma}_g \cup \bar{\Gamma}_h, \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset, \quad \Gamma_g = 0 \end{cases} \quad (3)$$

onde Γ_g é a parte de Γ onde as condições de contorno de Dirichlet (essenciais) estão prescritas e Γ_h é a porção de Γ onde as condições de contorno de Neumann (naturais) são prescritas (Brooks e Hughes, 1982). Uma discretização \mathcal{C}_h do domínio $\bar{\Omega}$ é realizada para criar elementos finitos quadriláteros Q_1 , onde

$$\begin{cases} \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{C}_h} \bar{\Omega}_K \\ \Omega_{K_1} \cap \Omega_{K_2} = \emptyset, \quad \forall K_1, K_2 \in \mathcal{C}_h \end{cases} \quad (4)$$

Definindo-se a notação, $L^2(\Omega)$ representa o espaço de funções quadrado-integráveis sobre Ω , $L_0^2(\Omega)$ o espaço de funções quadrado-integráveis com média zero sobre Ω , $H^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev das funções com primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre Ω e $H_0^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev das funções com primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre Ω com valor zero em Γ_g (Brooks e Hughes, 1982).

Para conveniência, a seguinte notação é adotada para espaços polinomiais:

$$R_m(K) = \begin{cases} P_m(K), & \text{para } K \text{ triangular,} \\ Q_m(K), & \text{para } K \text{ quadrilátero.} \end{cases} \quad (5)$$

onde para cada integral m é o grau de interpolação e $m \geq 0$.

Na aproximação por elementos finitos das Eqs. (1), iremos empregar os seguintes subespaços finitos para a dinâmica do fluido,

$$\mathbf{V}_h = \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^N, K \in \mathcal{C}_h \} \quad (6)$$

$$P_h = \{ p \in C_h^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p|_K \in R_l(K), K \in \mathcal{C}_h \} \quad (7)$$

$$W_h = \{ w \in H_0^1(0) \mid w|_K \in R_k(K), K \in \mathcal{C}_h \} \quad (8)$$

onde C_h é uma partição usual do domínio computacional Ω em elementos finitos e R_k, R_l denotam, respectivamente, espaços polinomiais de graus k e l (Ciarlet, 1978).

Da definição dos espaços (6)-(8), pode-se escrever a seguinte formulação SUPG para o sistema de Eqs. (1):

Ache a tripla $(\mathbf{u}_h, p_h, \omega_{(i)h}) \in \mathbf{V}_h \times P_h \times W_h$ tal que:

$$B(\mathbf{u}_h, p_h, \omega_{(i)h}; \mathbf{v}, q, w) = F(\mathbf{v}, q, w), \quad (\mathbf{v}, q, w) \in \mathbf{V}_h \times P_h \times W_h \quad (9)$$

onde

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}_h, p_h, \omega_{(i)h}; \mathbf{v}, q, w) = & ([\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (2\nu \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{D}(\mathbf{v})) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) - (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) \\ & + (\mathbf{u} \cdot \nabla \omega_{(i)}, w) + (D_{ij} \nabla \omega_{(i)}, \nabla w) \\ & + \sum_{K \in C_h} ([\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u} + \nabla p - 2\nu \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}), \tau(\text{Re}_K)([\nabla \mathbf{v}] \mathbf{v} - \nabla q))_K \\ & + \sum_{K \in C_h} (\mathbf{u} \cdot \nabla \omega_{(i)} - D_{ij} \Delta \omega_{(i)}, \alpha(\text{Pe}_K^m) \mathbf{u} \cdot \nabla w)_K \end{aligned} \quad (10)$$

e

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}, q, w) = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{S}_h, \mathbf{v})_{\Gamma_h} + (R_{(i)}, w) + (J_{(i)h}, w)_{\Gamma_h} \\ & + \sum_{K \in C_h} (\mathbf{f}, \tau(\text{Re}_K)([\nabla \mathbf{v}] \mathbf{v} - \nabla q))_K + \sum_{K \in C_h} (R_i, \alpha(\text{Pe}_K^m) \mathbf{u} \cdot \nabla w)_K \end{aligned} \quad (11)$$

com o parâmetro de estabilidade $\tau(\text{Re}_K)$ definido por:

$$\tau(\text{Re}_K) = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}(x)|_p} \xi(\text{Re}_K) \quad (12)$$

$$\xi(\text{Re}_K) = \begin{cases} \text{Re}_K, & 0 \leq \text{Re}_K < 1 \\ 1, & \text{Re}_K \geq 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{Re}_K = \frac{m_k |\mathbf{u}|_p h_K}{4\nu} \quad (14)$$

no qual $|\mathbf{u}|_p$ denota a norma p sobre \mathcal{R}^N e a constante m_k para a formulação SUPG é definida em Franca e Frey (1992); e no problema de convecção-difusão, o coeficiente de estabilização α é dado, de acordo com Franca et al. (1992), por:

$$\alpha(x, \text{Pe}_K^m(x)) = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}(x)|_p} \xi(\text{Pe}_K^m(x)) \quad (15)$$

onde $\text{Pe}_K^m(x)$ é o número de Peclet de malha, e os parâmetros $\xi(\text{Pe}_K^m(x))$ e m_k são definidos como em Franca et al. (1992), sendo:

$$\xi(\text{Pe}_K^m) = \begin{cases} \text{Pe}_K^m, & 0 \leq \text{Pe}_K^m < 1 \\ 1, & \text{Pe}_K^m \geq 1 \end{cases} \quad (16)$$

$$Pe_K^m = \frac{m_k |\mathbf{u}|_p h_K}{4D_{ij}} \quad (17)$$

É necessário o uso de um método estabilizado por ser este um problema fortemente convectivo (D_{ij} é muito pequeno, apresenta ordem de grandeza de 10^{-9}), o que o torna numericamente instável.

4. RESULTADOS

As simulações foram realizadas no Laboratório de Mecânica dos fluidos aplicada e computacional (LAMAC) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e Centro Nacional de Supercomputação. Os recursos computacionais utilizados nas simulações numéricas foram: uma “Silicon Graphics ORIGIN 200 Workgroup Server” – com 2 processadores e 256 Mb de memória RAM e quatro “Silicon Graphics Octane Workstation” – com 2 processadores e 128 Mb de memória RAM em cada máquina. O código de dinâmica de fluidos computacional Flotran (Ansys Inc.) foi utilizado empregando a formulação “Streamline Upwind Petrov-Galerkin” – SUPG.

4.1. Modelos Geométricos e Condições de Contorno

Foram utilizadas quatro geometrias parametrizadas tridimensionais com dimensões baseadas em tubulações utilizadas para processamento de laticínios, onde o diâmetro do tubo do creme varia desde $\frac{1}{4}$ de polegada até 1 polegada (Fig. (2)). Cada modelo, composto pelo tubo principal (tubulação de leite desnatado) e pelo tubo de creme, possui 13.056 elementos hexaédricos. Os tubos são rígidos e as espécies foram consideradas fluidos newtonianos incompressíveis.

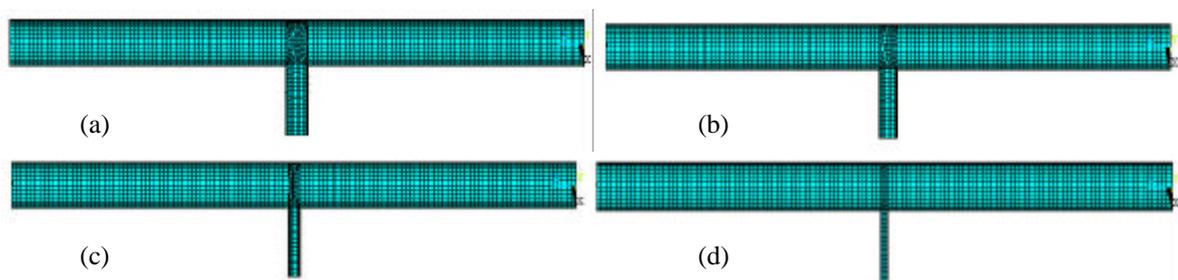


Figura (2): Modelos geométricos: tubo do creme com (a) 1 polegada, (b) $\frac{3}{4}$ de polegada (c) $\frac{1}{2}$ polegada e (d) $\frac{1}{4}$ de polegada

A velocidade de entrada do leite na tubulação principal é calculada de modo a fazer com que o valor do número de Reynolds seja 1000 nesta região. A velocidade do creme é obtida pelo balanço de massa, objetivando uma mistura com 92,5% de leite magro e 7,5% de creme de leite.

4.2. Análise dos campos de velocidade e pressão

O objetivo da análise de quatro diâmetros diferentes de tubo de creme é a comparação da efetividade da difusão mássica do creme no leite, verificando-se a homogeneidade do produto final através da distribuição das frações mássicas na seção reta ao fim da tubulação. Assim, pode-se visualizar como ocorre a mistura ao longo da tubulação. Os campos de velocidade resultantes das simulações realizadas são mostrados na Figs. (3) e (4).

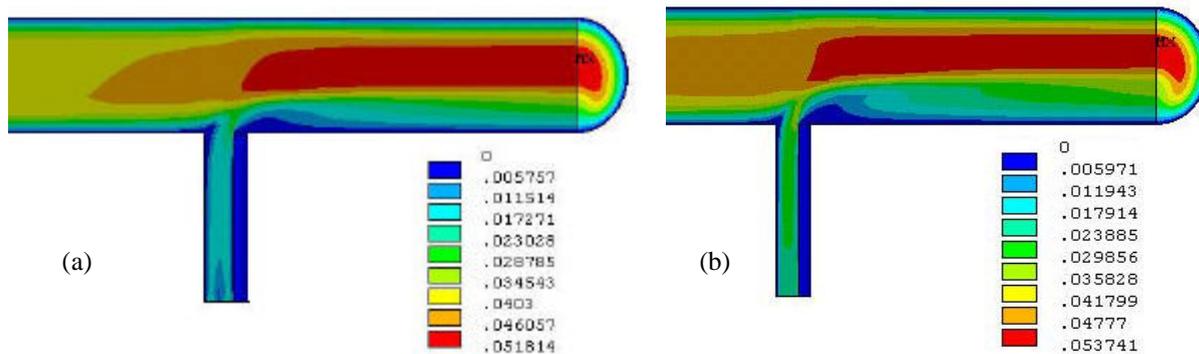


Figura (3): Campos de velocidade: tubo do creme com (a) 1 polegada, (b) $\frac{3}{4}$ de polegada

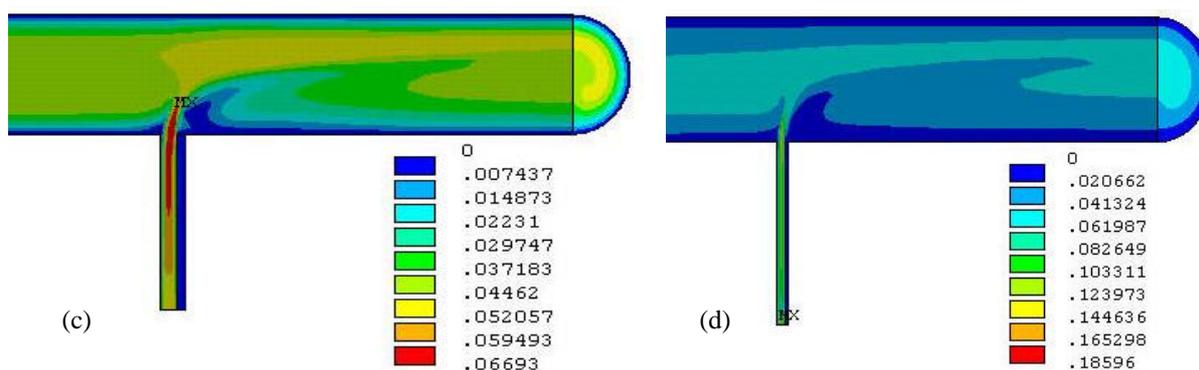


Figura (4): Campos de velocidade: tubo do creme com (c) $\frac{1}{2}$ polegada e (d) $\frac{1}{4}$ de polegada

Observa-se que o fluxo de creme incidente se comporta como uma restrição ao escoamento principal de leite desnatado, desviando seu fluxo para a parte superior da tubulação. A influência desta restrição diminui à medida em que se diminui o diâmetro do tubo do creme. A Fig. (5) mostra os campos de pressão formados pelo escoamento em cada caso.

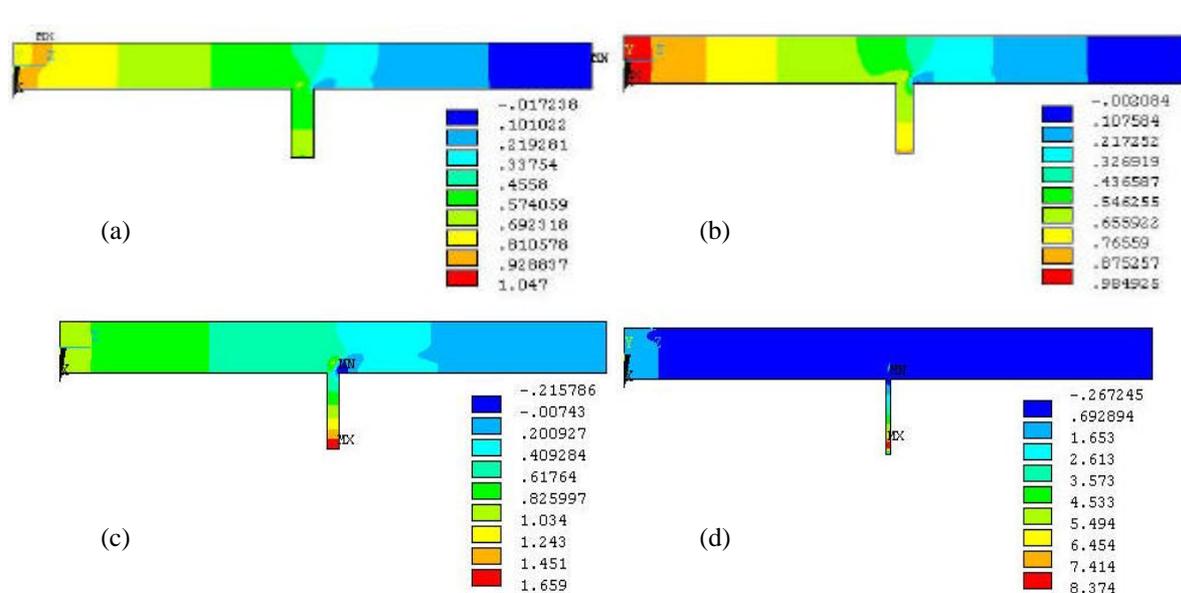


Figura (5): Campos de pressão: tubo do creme com (a) 1 polegada, (b) $\frac{3}{4}$ de polegada, (c) $\frac{1}{2}$ polegada e (d) $\frac{1}{4}$ de polegada

Conforme esperado, é possível observar que a queda de pressão ao longo do tubo do creme aumenta à medida que se diminui o diâmetro deste tubo, aumentando a potência de bombeamento requerida. Esse fenômeno se deve ao aumento da área de fricção e também à necessidade do aumento da velocidade afim de se manter a mesma vazão mássica. Assim, a potência de bombeamento requerida torna-se relevante, para fins de projeto, para a escolha do diâmetro ideal para a tubulação.

4.3. Análise do campo de mistura

A Fig. (6) mostra como se dá o processo de mistura, para cada caso, através de um corte transversal da tubulação. A Fig. (7) mostra este processo através de um corte da seção reta do tubo principal.

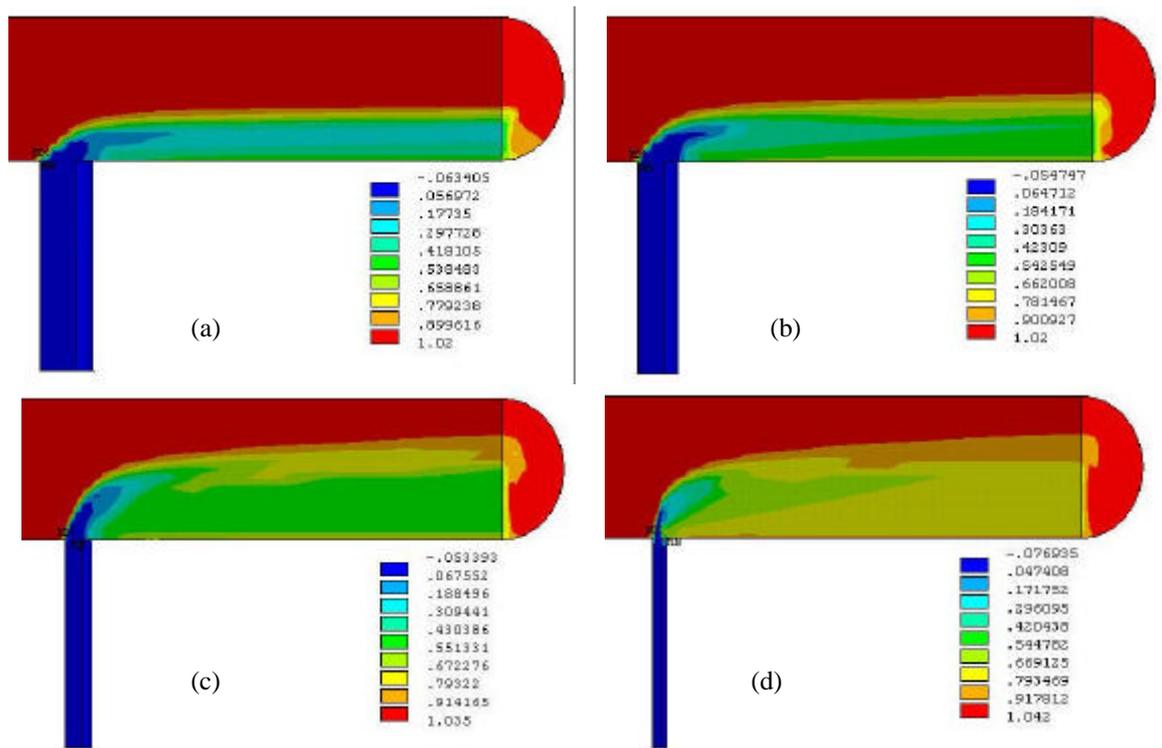


Figura (6): Distribuição da fração mássica de leite desnatado: tubo do creme com (a) 1 polegada, (b) $\frac{3}{4}$ de polegada (c) $\frac{1}{2}$ polegada e (d) $\frac{1}{4}$ de polegada

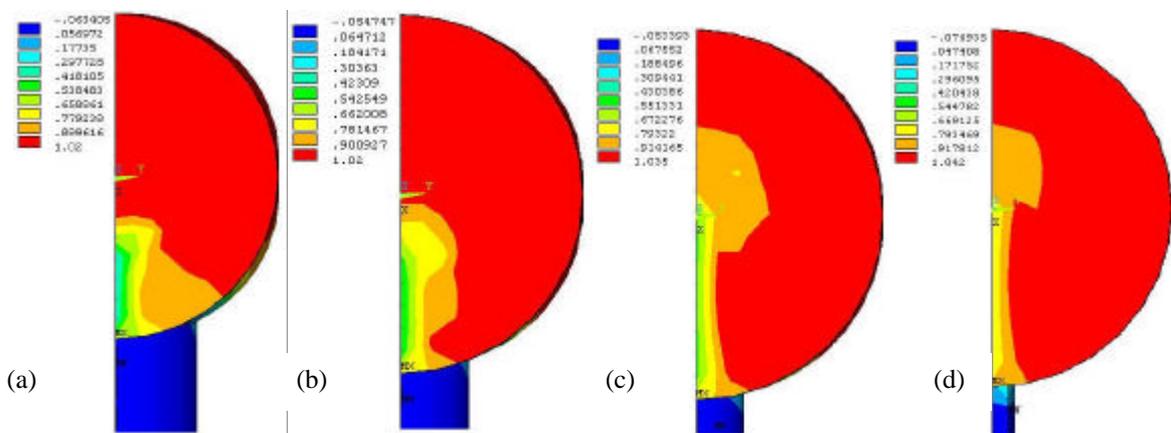


Figura (7): Distribuição da fração mássica de leite desnatado (corte da seção reta do tubo): tubo do creme com (a) 1 polegada, (b) $\frac{3}{4}$ de polegada, (c) $\frac{1}{2}$ polegada e (d) $\frac{1}{4}$ de polegada

Era esperado que a injeção de creme com maior velocidade, através do tubo de menor diâmetro, causasse uma melhor homogeneização, aumentando a importância da convecção no processo de mistura advectivo-difusivo. No entanto, o corte da seção transversal na saída do tubo mostra que esta melhora não é efetiva na direção das laterais da tubulação, apenas desvia a mistura para uma posição superior na tubulação. Isto ocorre porque o creme atua como uma restrição mecânica ao fluxo de leite desnatado, desviando-o para a região superior. Esta heterogeneidade da mistura mostra que, devido ao baixo coeficiente de difusividade, as variações na dimensão da tubulação secundária não são suficientes para que se tenha uma mistura adequada.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores F. S. Franceschini e S. Frey agradecem o suporte financeiro provido pela agência CNPq através das bolsas nº 133608/01-8 e 350747/93-8, respectivamente, e o autor D.H. Girotti-Fontana agradece pela bolsa de iniciação científica provida por PIBIC/CNPq-UFRGS.

4. REFERÊNCIAS

Brooks, A.N., Hughes, T.J.R. , 1982 "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 32, pp. 199-259.

Ciarlet, P. G., 1978, "The finite element method for elliptic problems", North Holland, Amsterdam.

Eckert, E.R.G.: *Analysis of heat and mass transfer*. New York, N.Y.: Mcgraw-Hill, 1972. xxi, 806 p.

Franca, L.P., Frey, S., Hughes, T.J.R., 1992, "Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 95, pp. 253-276.

Franca, L.P. and Frey, S., 1992, "Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 99, pp. 209-233.

Tetra Pak Processing Systems Ab., "Dairy Processing Handbook". Sweden: Teknotext AB, 1995.

THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS OF MOMENTUM AND MASS TRANSFER IN MILK STANDARTIZATION VIA FINITE ELEMENT METHOD

Daniel H. Girotti-Fontana⁴

Laboratory of Applied and Computational Fluid Mechanics (LAMAC), Mechanical Engineering Department – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rua Sarmento Leite nº 425 - 90050-170 Porto Alegre/RS , Brazil. E-mail: hgirotti@mecanica.ufrgs.br

Flávia Schwarz Franceschini⁵

Laboratory of Applied and Computational Fluid Mechanics (LAMAC), Mechanical Engineering Department – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rua Sarmento Leite nº 425 - 90050-170, Porto Alegre/RS, Brazil. E-mail: fla@mecanica.ufrgs.br

⁴ This author is an undergraduate student at Mechanical Engineering Department/UFRGS.

⁵ This author is a graduate student at the Mechanical Engineering Program (PROMEC)/UFRGS.

Sérgio Frey⁶

Laboratory of Applied and Computational Fluid Mechanics (LAMAC), Mechanical Engineering Department –Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rua Sarmento Leite n° 425 - 90050-170 Porto Alegre/RS, Brazil. E-mail: frey@mecanica.ufrgs.br

Abstract. *Process simulation in food engineering has permitted the creation of new technologies and optimization of industrial processes. In the milk standardization process, high percent fat cream is injected in line into skimmilk. The final fat content is controlled by measures taken in-line of cream's and skimmilk's density, that are proportional to their fat contents, and the adjustment of the injection flow. Both cream and skimmilk are considered newtonian fluids, with well known physical properties. The main goal of this paper is to simulate the cream injection into skimmilk via finite element method, by SUPG (Streamline Upwind/Petrov-Galerkin) approximation. A three-dimensional geometry is used in order to make the simulation more realistic an input to the mass transport equation, which will be solved to give the local mass concentration of each species. The results of the convection and diffusion of mass will be analyzed, in order to evaluate the effectiveness of the mixing process.*

Keywords: *Finite elements, Food Engineering, SUPG*

⁶ All article correspondence should be addressed to this author.