



APLICAÇÃO DA T.T.I.G. NA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM SÓLIDOS COM PROTEÇÃO TÉRMICA ABLATIVA

Fábio Yukio Kurokawa

Universidade Estadual Paulista – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – Departamento de Engenharia Mecânica – Pós-Graduação

Av. Brasil, 56 Centro, Ilha Solteira – SP, Brasil, CEP 15 385 – 000, Cx. Postal 31.

E-mail: kurokawa@dem.feis.unesp.br

Antonio João Diniz

Universidade Estadual Paulista – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - Departamento de Engenharia Mecânica

Av. Brasil, 56 Centro, Ilha Solteira – SP, Brasil, CEP 15 385 – 000, Cx. Postal 31.

E-mail: diniz@dem.feis.unesp.br

Resumo. *A proteção térmica ablativa é aplicada através de materiais ablativos, externamente na superfície da estrutura, isolando-a dos efeitos térmicos e garantindo uma reentrada ou um lançamento seguro de veículos espaciais na atmosfera, tanto em relação a bens materiais (equipamentos) quanto à tripulação. O fenômeno é complexo, envolvendo mudança de fase com uma perda parcial ou total de massa na fronteira da estrutura a qual não é conhecida a priori. Problemas deste tipo são inerentemente não lineares e envolvem o movimento da fronteira ablativa. Para solucionar o problema de proteção térmica ablativa que ocorre em um corpo de geometria bidimensional é apresentado um modelo matemático não linear de equações diferenciais parciais. O sistema de equações diferenciais parciais acopladas com a equação de restrição na interface será desenvolvido analiticamente utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (T.T.I.G.), na qual transformamos o sistema de equações diferenciais parciais em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, em que a solução é bem conhecida. Neste trabalho busca-se o sistema de equações oriundo da resolução analítica, os quais apresentam explicitamente as variáveis de interesse tais como: a profundidade da camada ablativa e a taxa de remoção com que o material ablativo é perdido para o ambiente.*

Palavras-chave: *Proteção térmica, Ablação, Transformada integral generalizada, Geometria bidimensional, Degradação térmica.*

1. INTRODUÇÃO

A barreira térmica presente é o maior obstáculo para vôos à alta velocidade e também o retorno seguro de veículos espaciais. O termo “barreira térmica” inclui os problemas associados às propriedades físicas do material do avião a temperaturas elevadas e, às limitações de temperatura sobre o pessoal e os instrumentos, no avião mas, refere-se principalmente aos problemas relacionados à dissipação de energia gerada na camada limite a altas velocidades.

Devido a este fato, o uso de materiais convencionais seria bastante restrito, pois no caso de relançamentos destes veículos, tripulados ou não, sofreriam falhas catastróficas devido à degradação térmica de suas estruturas. Entretanto estes materiais poderão servir para os propósitos desde que protegidos por uma proteção térmica superficial. Os materiais de proteção térmica são aplicados externamente na superfície da estrutura, isolando-a dos efeitos térmicos.

Para proteger a estrutura e o conteúdo do veículo, do aquecimento superficial, durante a reentrada na atmosfera, uma variedade de sistemas de proteção, Hatori & Pessoa-Filho (1998) e resfriamento tem sido propostos. Estes sistemas, geralmente envolvem a absorção de calor pelo material da superfície, através de armazenamento de energia interna, mudança de fase, ou uma reação química e/ou a rejeição de parte da energia que chega, por meio de um efluxo de massa da superfície, ou pela radiação. Dentre estes sistemas, mais utilizados, destacam-se os que utilizam materiais ablativos, Sutton (1982), como sistema de proteção superficial, Steg & Lew (1962).

Devido à sua complexidade, o processo de ablação pode ser definido com base em vários aspectos. Uma proposta conveniente para a definição de ablação é a remoção da massa (matéria) causada por processos mecânicos e termoquímicos. Dentro deste contexto, distingue-se a ablação dimensional, caracterizada pela remoção parcial da superfície, e a ablação total, onde ocorre perda total de massa, Lacaze (1967).

O aquecimento de atrito eleva a temperatura do material sólido, para seu ponto de fusão ou de sublimação e, a ablação que aparece na superfície produz uma camada fluida, líquida ou gasosa, que é transportada da interface, por convecção, para a camada limite, entre o choque da proa e o corpo. Sob as condições de entrada na atmosfera, o material em ablação usualmente é vaporizado, se mistura e espalha no meio do gás da camada limite, reduzindo assim a transmissão de calor por convecção, e aumentando a camada limite normal.

O problema de transferência de calor em materiais em ablação é considerado não linear e com movimento da fronteira inicialmente desconhecido (Chung & Hsiao, 1985; Zien, 1978 e Hsiao & Chung, 1984), que será resolvido analiticamente pela aplicação da T.T.I.G. (Diniz, 1996 e Cotta, 1993).

2. ANÁLISE

No estudo do problema de difusão térmica bidimensional, considera-se um prisma retangular cujo o perímetro está sujeito a um aquecimento numa das faces e um resfriamento em outra face, e isolado nas outras duas faces, como na Fig. 1 (a). É assumido que o comprimento longitudinal é muito grande quando comparado com as outras dimensões, portanto sendo desprezado a difusão na direção longitudinal.

O problema de difusão térmica bidimensional é considerado com um fluxo de calor $Q_1(\tau)$ e $Q_2(\tau)$, Fig. 1 (a), fluxo de calor absorvido e um fluxo de calor perdido, respectivamente.

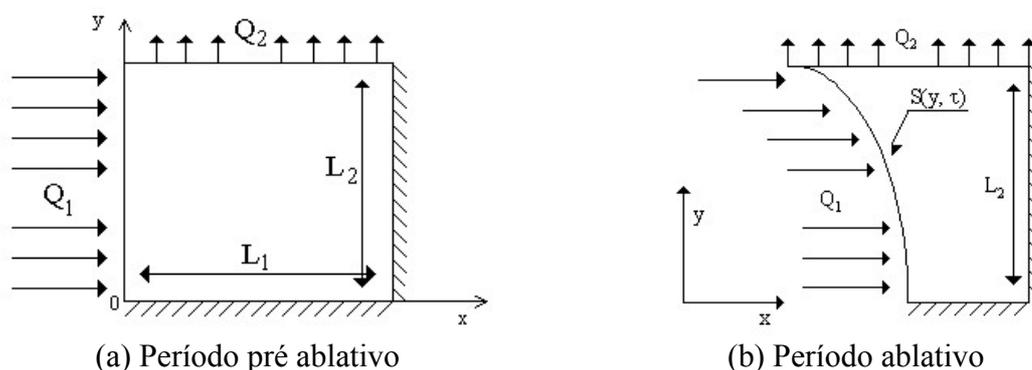


Figura 1 – Descrição dos períodos pré ablativo (a) e ablativo (b) do problema de difusão térmica.

Este problema de difusão térmica bidimensional é considerado um problema de transferência de calor transiente.

As equações que governam os dois períodos são dados na sua forma adimensional:

- Período pré ablativo:

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, \tau)}{\partial y^2} \quad \tau > 0 \quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq l \end{array} \quad (1)$$

com condições inicial e de contorno:

$$\theta(x, y, \tau) = 0 \quad \tau = 0 \quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq l \end{array} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial x} = 0 \quad x = 1 \quad 0 \leq y \leq l \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial y} = 0 \quad y = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial y} = -Q_2 \quad y = 1 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial x} = -Q_1 \quad x = 0 \quad 0 \leq y \leq l \quad (6)$$

- Período ablativo, Fig. 1 (b):

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, \tau)}{\partial y^2} \quad \tau > \tau_f \quad \begin{array}{l} S \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq l \end{array} \quad (7)$$

com condições inicial e de contorno:

$$\theta(x, y, \tau) = \theta_{in}(x, y, \tau) \quad \tau = \tau_f \quad \begin{array}{l} S \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq l \end{array} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial x} = 0 \quad x = 1 \quad 0 \leq y \leq l \quad (9)$$

$$\theta(x, y, \tau) = 1 \quad x = S(y, \tau) \quad 0 \leq y \leq l \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial y} = 0 \quad y = 0 \quad S \leq x \leq 1 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y, \tau)}{\partial y} = -Q_2 \quad y = l \quad S \leq x \leq 1 \quad (12)$$

onde $\theta_{in}(x, y, \tau)$ é a distribuição de temperatura no tempo ablativo τ_f , obtido no período pré ablativo. A equação de acoplamento na interface ablativa é:

$$-\left[1 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial \tau} = Q_1 \quad \text{onde } x = S(y, \tau) \quad (13)$$

onde v é o inverso do número de Stefan.

O potencial de temperatura pode ser resolvido com uma solução do tipo:

$$\theta(x, y, \tau) = X(x, \tau) + Y(y, \tau) \quad (14)$$

A solução na direção x é do tipo:

$$X(x, \tau) = X_{Av}(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)}{N_i} \tilde{X}_i(\tau) \quad (15)$$

onde X_{Av} representa o potencial médio em consequência da condição de contorno do segundo tipo, Mikhailov & Özisik (1984).

Para solução deste problema definimos um problema auxiliar de autovalor, onde $\psi(x)$ são as autofunções e μ são os autovalores. A solução para o problema de autovalor é:

$$\mu_i = i\pi \quad \text{e} \quad \psi_i(x) = \cos(\mu_i x) \quad (16)$$

Após algumas manipulações matemáticas, obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^1 \psi_i(x) X(x, \tau) dx + \int_0^1 [\psi_i(x) LX(x, \tau) - X(x, \tau) L\psi_i(x)] dx + \mu_i^2 \int_0^1 \psi_i(x) X(x, \tau) dx = 0 \quad (17)$$

Definindo-se o par Transformada Integral e Inversa:

$$\tilde{X}_i(\tau) = \int_0^1 \psi_i(x) X(x, \tau) dx \quad (18)$$

$$X(x, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)}{N_i} \tilde{X}_i(x) \quad (19)$$

Substituindo a Eq. (18) na Eq. (17) obtemos:

$$\frac{\partial \tilde{X}_i(\tau)}{\partial \tau} + \mu_i^2 \tilde{X}_i(\tau) = Q_i(\tau) \quad (20)$$

com condição inicial:

$$\tilde{X}_i(0) = 0 \quad (21)$$

Admitindo um fluxo de calor polinomial do tipo $Q_i(\tau) = a + b\tau + c\tau^2$ aplicado a superfície, temos que a solução para Eq. (20) e o potencial médio são:

$$\tilde{X}_i(\tau) = \frac{1}{\mu_i^2} \left\{ a + b \left(\tau - \frac{1}{\mu_i^2} \right) + c \left(\tau^2 - \frac{2\tau}{\mu_i^2} + \frac{2}{\mu_i^4} \right) - \left(a - \frac{b}{\mu_i^2} + \frac{2c}{\mu_i^4} \right) e^{-\mu_i^2 \tau} \right\} \quad \text{e} \quad X_{Av}(\tau) = a\tau + \frac{b\tau^2}{2} + \frac{c\tau^3}{3} \quad (22)$$

Portanto temos que distribuição de temperatura na direção x é:

$$X(x, \tau) = \left(a\tau + \frac{b\tau^2}{2} + \frac{c\tau^3}{3} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_i^2} \cos(\mu_i x) \left\{ \left[a + b \left(\tau - \frac{1}{\mu_i^2} \right) + c \left(\tau^2 - \frac{2\tau}{\mu_i^2} + \frac{2}{\mu_i^4} \right) \right] - \left(a - \frac{b}{\mu_i^2} + \frac{2c}{\mu_i^4} \right) e^{-\mu_i^2 \tau} \right\} \quad (23)$$

Realizando o mesmo procedimento para direção y e adotando um fluxo de calor transiente aplicado na superfície, $Q_2(\tau) = r\tau^2 + q\tau + p$, temos que a solução é do tipo:

$$Y(y, \tau) = Y_{Av}(\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(y)}{N_j} \tilde{Y}(\tau) \quad (24)$$

Para solução deste problema definimos um novo problema auxiliar de autovalor, do qual resulta os autovalores e autofunções:

$$\lambda_j = \frac{j\pi}{l} \quad \text{e} \quad \phi_j(y) = \cos(\lambda_j y) \quad (25)$$

Definindo-se o par Transformada Integral e Inversa:

$$\tilde{Y}_j(\tau) = \int_0^l \phi_j(y) Y(y, \tau) dy \quad (26)$$

$$Y(y, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(y)}{N_j} \tilde{Y}_j(\tau) \quad (27)$$

Obtemos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{\partial \tilde{Y}_j(\tau)}{\partial \tau} + \lambda_j^2 \tilde{Y}_j(\tau) + Q_2(\tau)(-1)^j = 0 \quad (28)$$

com a condição inicial:

$$\tilde{Y}_j(\tau) = 0 \quad \tau = 0 \quad (29)$$

Cuja solução da Eq. (28) e o potencial médio são:

$$\tilde{Y}_j(\tau) = \frac{(-1)^{j+1}}{\lambda_j^2} \left[-p - q \left(\tau - \frac{1}{\lambda_j^2} \right) - r \left(\tau^2 - \frac{2\tau}{\lambda_j^2} + \frac{2}{\lambda_j^4} \right) + \left(p - \frac{q}{\lambda_j^2} + \frac{2r}{\lambda_j^4} \right) e^{-\lambda_j^2 \tau} \right] \quad \text{e} \quad Y_{Av}(\tau) = \left(p\tau + \frac{q\tau^2}{2} + \frac{r\tau^3}{3} \right) \quad (30)$$

Assim temos a distribuição de temperatura na direção y :

$$Y(y, \tau) = \left(p\tau + \frac{q\tau^2}{2} + \frac{r\tau^3}{3} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{j+1}}{l\lambda_j^2} \cos\left(\frac{j\pi}{l} y\right) \left[-p - q \left(\tau - \frac{1}{\lambda_j^2} \right) - r \left(\tau^2 - \frac{2\tau}{\lambda_j^2} + \frac{2}{\lambda_j^4} \right) + \left(p - \frac{q}{\lambda_j^2} + \frac{2r}{\lambda_j^4} \right) e^{-\lambda_j^2 \tau} \right] \quad (31)$$

Portanto a distribuição de temperatura na fase pré-ablativa é:

$$\theta(x, y, \tau) = \left[(a + p)\tau + (b + q) \frac{\tau^2}{2} + (c + r) \frac{\tau^3}{3} \right] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_i^2} \cos(\mu_i x) \left[a + b \left(\tau - \frac{1}{\mu_i^2} \right) + c \left(\tau^2 - \frac{2\tau}{\mu_i^2} + \frac{2}{\mu_i^4} \right) - \right. \\ \left. + \left(a - \frac{b}{\mu_i^2} + \frac{2c}{\mu_i^4} \right) e^{-\mu_i^2 \tau} \right] + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{j+1}}{l\lambda_j^2} \cos\left(\frac{j\pi}{l} y\right) \left[-p - q \left(\tau - \frac{1}{\lambda_j^2} \right) - r \left(\tau^2 - \frac{2\tau}{\lambda_j^2} + \frac{2}{\lambda_j^4} \right) + \left(p - \frac{q}{\lambda_j^2} + \frac{2r}{\lambda_j^4} \right) e^{-\lambda_j^2 \tau} \right] \quad (32)$$

Concluído a fase pré-ablativa passa-se a resolver a parte ablativa. Uma mudança de variável nas Eqs. de (7) a (12) se faz conveniente para melhor desenvolvimento do problema, assim tornando-o homogêneo. Desta forma, define-se:

$$\theta^*(x, y, \tau) = \theta(x, y, \tau) - 1 \quad \begin{array}{l} S(y, \tau) \leq x \leq 1 \\ \tau > \tau_f \end{array} \quad (33)$$

ainda por razões de mudança de eixo na direção x , adotamos $\eta = 1 - x$. Denotando a posição da fronteira por $x = S(y, \tau)$, para a nova coordenada $\eta = \eta_b(y, \tau) = 1 - S(y, \tau)$. Sendo $S(y, \tau)$ definido como:

$$S = S(y, \tau) = \xi \left(1 - \frac{Q_2 y}{Q_1 l} \right) \quad (34)$$

onde ξ representa a espessura ablativa ao longo da coordenada x , e é função somente do tempo $\xi = f(\tau)$.

A equação de acoplamento na nova variável:

$$-\left[1 + \left(\frac{dS}{dy} \right)^2 \right] \frac{\partial \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial \eta} + v \frac{\partial S}{\partial \tau} = Q_1 \quad (35)$$

A equação do período ablativo na nova variável, e suas condições inicial e contorno, tornam-se:

$$\frac{\partial^2 \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial y^2} = \frac{\partial \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial \tau} \quad \begin{array}{l} \tau \geq \tau_f \\ 0 \leq y \leq l \\ 0 \leq \eta \leq \eta_b(y, \tau) \end{array} \quad (36)$$

$$\theta^*(\eta, y, \tau) = \theta_{inicial}(x, y, \tau) - 1 \quad \tau = \tau_f \quad (37)$$

$$\frac{\partial \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 0 \quad 0 \leq y \leq l \quad (38)$$

$$\theta^*(\eta, y, \tau) = 0 \quad \eta = \eta_b \quad 0 \leq y \leq l \quad (39)$$

$$\frac{\partial \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial y} = 0 \quad y = 0 \quad 0 \leq \eta \leq \eta_b(y, \tau) \quad (40)$$

$$\frac{\partial \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial y} = -Q_2(\tau) \quad y = l \quad 0 \leq \eta \leq \eta_b(y, \tau) \quad (41)$$

Para a solução da Eq. (36) segundo a direção η adota-se um problema auxiliar de autovalor, cuja solução conduz aos autovalores e autofunções:

$$\lambda_i(y, \tau) = \frac{(2i-1)\pi}{2\eta_b} \quad \text{e} \quad \phi_i(\eta, y, \tau) = \cos(\lambda_i \eta) \quad (42)$$

Definindo-se uma autofunção normalizada:

$$K_i(\eta, y, \tau) = \frac{\phi_i(\eta, y, \tau)}{N_i^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta_b}} \cos \left[\frac{(2i-1)\pi}{2\eta_b} \eta \right] \quad (43)$$

Após algumas manipulações matemáticas obtemos a seguinte expressão:

$$\int_0^{\eta_b} K_i(\eta, y, \tau) \frac{\partial \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial \tau} d\eta + \int_0^{\eta_b} [K_i(\eta, y, \tau) L \theta^*(\eta, y, \tau) - \theta^*(\eta, y, \tau) L K_i(\eta, y, \tau)] d\eta + \lambda_i^2(y, \tau) \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, y, \tau) \theta^*(\eta, y, \tau) d\eta - \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, y, \tau) \frac{\partial^2 \theta^*(\eta, y, \tau)}{\partial y^2} d\eta = 0 \quad (44)$$

onde $L = -\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \eta^2}$.

Definindo-se o par Transformada Integral e Inversa:

$$\tilde{\theta}_i^*(y, \tau) = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, y, \tau) \theta^*(\eta, y, \tau) d\eta \quad (45)$$

$$\theta^*(\eta, y, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(\eta, y, \tau) \tilde{\theta}_i^*(y, \tau) \quad (46)$$

Substituindo a Eq. (45) na Eq. (44), obtemos a equação transformada na direção η :

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(y, \tau)}{\partial \tau} + \lambda_i^2(y, \tau) \tilde{\theta}_i^*(y, \tau) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \tilde{\theta}_i^*(y, \tau) - \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(y, \tau)}{\partial y} - \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_i^*(y, \tau)}{\partial y^2} = 0 \quad (47)$$

onde:

$$A_{ij} = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, y, \tau) \frac{\partial K_j(\eta, y, \tau)}{\partial \tau} d\eta - \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, y, \tau) \frac{\partial^2 K_j(\eta, y, \tau)}{\partial y^2} d\eta$$

$$B_{ij} = 2 \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, y, \tau) \frac{\partial K_j(\eta, y, \tau)}{\partial y} d\eta$$

com condições de contorno:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \tilde{\theta}_i^*(y, \tau) + \frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(y, \tau)}{\partial y} = 0 \quad y = 0 \quad (48)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\theta}_i^*(y, \tau) B_{ij} + \frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(y, \tau)}{\partial y} = f(y, \tau) Q_2(\tau) \quad y = l \quad (49)$$

onde:

$$f(y, \tau) = \frac{2\sqrt{2\eta_b}}{(2i-1)\pi} (-1)^{i+2}$$

Para a solução na direção y , adota-se um novo problema auxiliar de autovalor, cuja solução são os autovalores e autofunções:

$$\mu_k = \frac{(k-1)\pi}{l} \quad \text{e} \quad \psi_k = \cos\left[\frac{(k-1)\pi}{l}y\right] \quad (50)$$

Definindo-se uma autofunção normalizada do tipo:

$$M_k(y, \tau) = \frac{\psi_k(y, \tau)}{N_k^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \cos\left[\frac{(k-1)\pi}{l}y\right] \quad (51)$$

Após algumas manipulações matemáticas obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \int_0^l M_k(y, \tau) \frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(y, \tau)}{\partial \tau} dy + \int_0^l \lambda_i^2(y, \tau) M_k(y, \tau) \tilde{\theta}_i^*(y, \tau) dy + \mu_k^2 \int_0^l \tilde{\theta}_i^*(y, \tau) M_k(y, \tau) dy + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^l M_k(y, \tau) A_{ij} \tilde{\theta}_i^*(y, \tau) dy + \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^l M_k(y, \tau) B_{ij} \frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(y, \tau)}{\partial y} dy + \int_0^l [M_k(y, \tau) L \tilde{\theta}_i^*(y, \tau) - \tilde{\theta}_i^*(y, \tau) L M_k(y, \tau)] dy = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

onde $L = -\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}$.

Definindo-se o par Transformada Integral e Inversa:

$$\hat{\theta}_{ik}^*(\tau) = \int_0^l \tilde{\theta}_i^*(y, \tau) M_k(y, \tau) dy \quad (53)$$

$$\tilde{\theta}_i^*(y, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k(y, \tau) \hat{\theta}_{ik}^*(\tau) \quad (54)$$

Substituindo na Eq. (52) obtemos um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{\theta}_{im}^*(\tau)}{\partial \tau} + \mu_k^2 \hat{\theta}_{im}^*(\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^l A_{ij} M_k(y, \tau) M_m(y, \tau) dy \hat{\theta}_{im}^*(\tau) - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^l B_{ij} M_k(y, \tau) \frac{\partial M_m(y, \tau)}{\partial y} dy \hat{\theta}_{im}^*(\tau) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^l \lambda_i^2(y, \tau) M_k(y, \tau) M_m(y, \tau) dy \hat{\theta}_{im}^*(\tau) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} M_k(l, \tau) M_m(l, \tau) B_{ij}(l, \tau) \hat{\theta}_{im}^*(\tau) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{ij}(0, \tau) M_k(0, \tau) M_m(0, \tau) \hat{\theta}_{im}^*(\tau) + M_k(l, \tau) f_i(y, \tau) Q_2(\tau) \end{aligned} \quad (55)$$

Compactando a Eq. (55) resulta num sistema de equações do tipo:

$$\frac{\partial \hat{\theta}_{im}^*(\tau)}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_{ijkm} \hat{\theta}_{im}^*(\tau) = \hat{f}_{ik} \quad (56)$$

onde:

$$E_{ijkm} = \delta_{ij} \delta_{km} \mu_k^2 + \int_0^l \left[A_{ij} M_k(y, \tau) M_m(y, \tau) - B_{ij} M_k(y, \tau) \frac{\partial M_m(y, \tau)}{\partial y} \right] dy +$$

$$+ \delta_{ij} \int_0^l \lambda_i^2(y, \tau) M_k(y, \tau) M_m(y, \tau) dy + \frac{1}{2} B_{ij}(l, \tau) M_k(l, \tau) M_m(l, \tau) - \frac{1}{2} B_{ij}(0, \tau) M_k(0, \tau) M_m(0, \tau)$$

$$\hat{f}_{ik} = M_k(l, \tau) f_i(y, \tau) Q_2(\tau)$$

Sendo o potencial de temperatura definido como:

$$\theta^*(\eta, y, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} K_i(\eta, y, \tau) M_k(y, \tau) \hat{\theta}_{ik}^*(\tau) \quad (57)$$

Substituindo a Eq. (57) na Eq. (35), obtemos a equação de restrição no acoplamento transformada:

$$v \left(l - \frac{Q_2 l}{Q_1} \right) \frac{d\xi}{d\tau} = Q_1 l + v \xi \left(\frac{Q_1 \dot{Q}_2 - \dot{Q}_1 Q_2}{Q_1^2} \right) \frac{l}{2} + \left[1 + \left(\frac{\xi Q_2}{l Q_1} \right)^2 \right] \frac{1}{\sqrt{l}} \pi \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (2i-1) (-1)^{i+2} \hat{\theta}_{ik}^*(\tau) P \left\{ \frac{(-1)^{k+1}}{\left[1 - \xi \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1} \right) y \right]^{5/2}} - 1 \right\} \quad (58)$$

onde:

$$P = \frac{6\xi Q_1 Q_2 l}{15\xi^2 Q_2^2 + 4(k-1)^2 \pi^2 Q_1^2}$$

3. RESULTADOS

As Eqs. (56) e (58) formam um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas que é a solução para o problema de transferência de calor bidimensional em corpos com proteção térmica ablativa. A proposta deste trabalho é apresentar a solução analítica através da utilização da T.T.I.G., onde as variáveis de interesse, profundidade e velocidade ablativas, aparecem no sistema solução.

Para se determinar, numericamente, a profundidade e a velocidade ablativas devemos implementar um programa de computador para se resolver este sistema infinito no qual truncamos o sistema num número suficientemente grande.

4. DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

Na solução do período pré-ablativo utilizamos a técnica de separação de variáveis para obtenção da distribuição de temperatura, onde dividimos o potencial em duas direções x e y, e em cada direção o potencial é função apenas da coordenada espacial e do tempo, mas devemos salientar que estudos estão em desenvolvimento para obtermos um problema homogêneo, onde dividimos o potencial em dois, mas dependente das duas coordenadas espaciais e do tempo.

Em trabalho publicado por Kurokawa & Diniz (2001), na solução para o período ablativo, foi feito inicialmente à solução na direção y. Contudo devido a geometria do problema que nos conduz a fronteira ablativa ser uma função de y, cuidados foram tomados no desenvolvimento analítico, deste modo tomando a solução primeiramente na direção x, como mostra o presente trabalho.

Com a utilização da T.T.I.G. simplificamos o problema que antes era um sistema de equações diferenciais parciais em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem,

no qual a solução numérica é bem conhecida.

Na literatura estes problemas de proteção térmica ablativa são tratados por diferentes técnicas, Técnica da Transformada Integral Clássica (T.T.I.C.), Método de Diferenças Finitas (M.D.F.), Método de Elementos Finitos (M.E.F.), entre outros, Hsiao & Chung (1984), que são aproximações já a T.T.I.G. é uma solução exata, pois se trata de uma solução híbrida analítica-numérica.

A T.T.I.G. é uma poderosa ferramenta visto que facilita o desenvolvimento analítico, para obtenção da solução do problema, no qual o sistema de equações diferenciais parciais é transformado em um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, onde este sistema resultante pode ser resolvido pelas rotinas de solução de equações diferenciais ordinárias conhecidas. Para a obtenção dos resultados numéricos está em desenvolvimento a implementação de um programa de computador em linguagem Fortran.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo financiamento deste trabalho através da concessão da bolsa de Mestrado.

6. REFERÊNCIAS

- Chung, B. T. F. and Hsiao, J. S., 1985, "Heat Transfer With Ablation in a Finite Slab Subjected to Time-Variant Heat Fluxes, AIAA Journal, vol. 23, n° 1, pp. 145-150.
- Chung, B. T. F., Chang, T. Y., Hsiao, J. S. and Chang, C. I., Feb. 1983, "Heat Transfer With Ablation in a Half-Space Subjected to Time-Variant Heat Fluxes". Tran. ASME – Journal of Heat Transfer, vol. 105, pp. 200-203.
- Cotta, R. M., 1993, "Review of the Integral Transform Method in Nonlinear Heat and Fluid Flow Problems", I Congresso Iberoamericano de Ingenieria, Madrid, 21-24 de septiembre.
- Cotta, R. M., 1993, "Integral Transforms In Computational Heat and Fluid Flow", CRC Press, Boca Raton, Florida, USA.
- Diniz, A. J., 1996, "Proteção Térmica por Ablação em Corpos de Várias Geometrias Aquecidos Cineticamente", Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), São José dos Campos – SP.
- Hatori, M. E. & Pessoa-Filho, J. B., 1998, "Soluções Similares em Escoamentos Supersônicos", VII Encontro Nacional de Ciências Térmicas, ENCIT98, pp. 257-262.
- Hsiao, J. S. and Chung, B. T. F., 1984, "A Heat Balance Integral Approach for Two-Dimensional Heat Transfer in Solids With Ablation, AIAA 22nd Aerospace Sciences Meeting.
- Kurokawa, F. Y. e Diniz, A. J., 2001, "Analytical Study of Ablation Thermal Protection for Two-dimensional Bodies", 22nd Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering and 2nd Brazilian Congress on Computational Mechanics, November 7-9, Campinas – SP, Brazil.
- Lacaze, H., juillet 1967, "La Protection Thermique Par Ablation", Doc-Air-Espace, n° 105.
- Mikhailov, M. D. and Özisik, M. N., 1984, "Unified Analysis and Solutions of Heat Transfer and Mass Diffusion", John Willey & Sons, New York.
- Steg, L. & Lew, H., 1962, "Hypersonic Ablation", In Agard Meeting on High-Temperature-Aspects of Hypersonic Fluid Dynamics, v. 68, part. 6, pp. 629-680.
- Sutton, G. W., feb.1982, "The Initial Development of Ablation Heat Protection, an Historical Perspective", AIAA – 82-4038-J.Spacecraft, v.19, n.1, pp. 3-11.
- Zien, T. F., Dez. 1978, "Integral Solution of Ablation Problems With Time Dependent Heat Flux", AIAA Journal, vol. 16, pp. 1287-1295.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu

trabalho.

APPLICATION OF THE G.I.T.T. IN THE HEAT TRANSFER IN SOLIDS WITH ABLATIVE THERMAL PROTECTION

Fábio Yukio Kurokawa

Universidade Estadual Paulista – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – Departamento de Engenharia Mecânica – Pós-Graduação

Av. Brasil, 56 – Centro, Ilha Solteira – SP, CEP 15 385 – 000, Cx. Postal 31

E-mail: kurokawa@dem.feis.unesp.br

Antonio João Diniz

Universidade Estadual Paulista – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – Departamento de Engenharia Mecânica

Av. Brasil, 56 – Centro, Ilha Solteira – SP, CEP 15 385 – 000, Cx. Postal 31

E-mail: diniz@dem.feis.unesp.br

Abstract. *The ablative thermal protection is applied through ablative materials, externally on the surface of the structure, isolating it from the thermal effects and guaranteeing a re-entering or a safe launch of space vehicles in the atmosphere, regarding to the material goods (equipments) as well as the crew. The phenomenon is complex, involving phase change with a partial or total loss of mass in the border of the structure which is not known a priori. Problems of this type are inherently non-linear and they involve the movement of the ablative border. To solve the problem of ablative thermal protection that occurs in a body of geometry two-dimensional a non-linear mathematical model of partial differential equations is presented. The system of coupled partial differential equations with the restriction equation in the interface it will be analytically developed using the Generalized Integral Transform Technique (T.T.I.G.), in which we transformed the system of partial differential equations in a infinite system of first order ordinary differential equations, which the solution is well-known. In this work the system of equations originated from of the analytic resolution is searched, which present explicitly the variables of interest such as: the depth of the ablative layer and the removal rate that the ablative material is lost in the atmosphere.*

Keywords: *Thermal protection, Ablation, Generalized integral transform, Two-dimensional geometry, Thermal degradation.*