



## SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO TURBULENTO DE BAIXO REYNOLDS EM DUTO DE SEÇÃO QUADRADA COM MODELOS $k - \epsilon$ NÃO LINEARES

**José Diniz Mesquita Abrunhosa**

Dept.Eng. Mecânica, PUC/RJ, 22453-900, RJ, RJ, Brasil, e-mail: diniz@mec.puc-rio.br

**Angela Ourivio Nieckele**

Dept.Eng. Mecânica, PUC/RJ, 22453-900, RJ, RJ, Brasil, e-mail: nieckele@mec.puc-rio.br

**Resumo.** O escoamento turbulento de baixo Reynolds em duto de seção quadrada foi simulado com o modelo de turbulência  $k - \epsilon$  não linear originalmente proposto por Speziale com a versão modificada baseada na Teoria do Grupo de Renormalização (RNG). Em ambos os modelos numéricos, utiliza-se a técnica de volumes finitos, com esquema de segunda ordem para os fluxos e condição de não deslizamento na parede. O número de Reynolds, baseado na velocidade média e diâmetro hidráulico, foi de 4410. Os resultados são comparados com dados de simulação direta e experimentais, ambos publicados na literatura, mostrando uma boa concordância, a baixo custo, se comparados com aqueles obtidos por DNS.

**Palavras-chave:**  $k - \epsilon$  não linear, baixo Reynolds, capacidade de predição, volumes finitos

### 1. INTRODUÇÃO

Os escoamentos turbulentos em dutos de seção quadrada são escoamentos complexos e freqüentemente encontrados em arranjos físicos de engenharia. Eles se caracterizam pela presença de um escoamento secundário no plano perpendicular ao eixo do duto. Este escoamento, comumente chamado escoamento secundário de Prandtl de segunda classe, é induzido pelo movimento turbulento. O padrão do escoamento é bem definido, consistindo de 8 (oito) vórtices, dois em cada quina, girando em sentidos opostos. Cada vórtice está confinado entre a diagonal (bissetor da quina) e a parede bissetora (eixo de simetria).

Embora as velocidades transversais sejam menores que 3% da velocidade de mistura, seus efeitos sobre o escoamento médio, sobre a distribuição da tensão cisalhante na parede e a transferência de calor são significativos (Gavrilakis, 1992). Nikuradse (1933), foi um dos primeiros a observar experimentalmente a existência deste escoamento e a sua influência sobre o escoamento principal. Ele observou que as linhas de contorno da velocidade axial deformavam-se efetivamente próximo as quinas. Fato que não era visto em dutos circulares e escoamentos laminares completamente desenvolvidos em dutos de seção não circular.

Recentemente, simulações diretas de escoamento turbulento de baixo Reynolds em duto de seção quadrada confirmaram as observações de Nikuradse. Há uma forte distorção das linhas de isovelocidades do escoamento principal, nas proximidades das quinas do duto, devido a transferência de quantidade de movimento das velocidades secundárias nessa região (Gavrilakis, 1992, e Huser e Birigen, 1993).

Speziale (1984) mostrou analiticamente que o escoamento secundário em dutos não circulares resulta do desbalanceamento das tensões normais no plano transversal. Esta é a razão por que modelos de turbulência, baseados na isotropia das tensões de Reynolds, tal como o popular modelo  $\kappa - \epsilon$  linear, não reproduzem qualquer escoamento secundário. Deste modo, Speziale, inspirado na derivação das equações constitutivas de fluido não Newtoniano, propõe uma relação constitutiva não linear para o tensor de Reynolds. Como este modelo incorpora a anisotropia, melhora a predição da tensões de Reynolds,

especialmente o desbalanceamento dos componentes normais, que induzem o movimento secundário.

Yakhot et al. (1992), utilizando a teoria do grupo de renormalização, obtiveram o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  renormalizado (RNG). Este modelo é caracterizado por um novo termo de produção na equação da dissipação e avaliação teórica das constantes. Comparativamente ao modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  tradicional, o modelo RNG apresenta melhores resultados para o problema do degrau ('backstep') (Nieckele et al., 1996). O acoplamento do tensor de Reynolds, proposto por Speziale, ao modelo RNG, obtido por Yakhot et al. (1992), deu origem a variante anisotrópica do modelo RNG. A melhor predição das tensões de Reynolds faz com que melhores resultados sejam obtidos (Yakhot et al. 1992).

Modelos não lineares têm sido utilizados para prever o escoamento secundário em duto de seção quadrada, como por exemplo Mompean (1997) e Assato e de-Lemos (2000). No presente trabalho propõe-se investigar os modelos não lineares, propostos por Speziale (1987) e por Yakhot et al. (1992), na predição do escoamento turbulento de baixo Reynolds em duto de seção quadrada, buscando identificar as limitações e vantagens dos modelos. As suas predições são comparadas com os resultados da simulação direta de Gavrilakis, (1992), e dados experimentais de Cheesewright et al, (1990).

## 2. MODELOS MATEMÁTICOS

As equações de governo para o escoamento turbulento médio, obtidas a partir da decomposição de Reynolds, de um fluido viscoso e incompressível, são dadas como:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ n \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \right] \quad (2)$$

onde  $\bar{u}_i$  são os componentes da velocidade média turbulenta;  $\bar{P}$  é a pressão média turbulenta;  $n$  é a viscosidade cinemática; e  $\tau_{ij}$  é o tensor das tensões de Reynolds ( $\tau_{ij} = -\overline{u'_i u'_j}$ ). Como estas equações não constituem um sistema determinado, equações adicionais precisam ser escritas para  $\tau_{ij}$ . Muitos dos esquemas de fechamento assumem a seguinte forma funcional.

$$\overline{u'_i u'_j} = P_{ij}(\bar{u}_j(\mathbf{x}, t), k(\mathbf{x}, t), e(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t) \quad (3)$$

onde  $k$  e  $e$  são, respectivamente, a energia cinética turbulenta e a taxa de dissipação turbulenta. Este tipo de modelamento implica que duas equações diferenciais de transporte, uma para  $k$  e outra para  $e$ , sejam introduzidas. Foi Hanjalic e Launder (1972), na última década de 70, que estabeleceram a versão original destas equações. A associação do transporte turbulento com o conceito de viscosidade leva a definição da viscosidade turbulenta como:

$$n_t = C_m f_m k^2 / e \quad (4)$$

onde  $C_m$  é uma constante e  $f_m$  uma função que reflete a influência da parede sobre a viscosidade turbulenta. Na região da parede, os efeitos da viscosidade molecular são mais importantes. Como o escoamento é de baixo Reynolds e as equações de governo foram integradas até a parede, a função  $f_m$  mostrou-se fundamental, para melhorar as predições, especialmente na região vizinha à quina do duto. A forma da função, que melhor descreveu o padrão do escoamento na referida região, foi:

$$f_m = [1 - \exp(-A^+ y^+)] [1 - \exp(-A^+ z^+)] \quad (5)$$

sendo  $A^+ = 7,0 \times 10^{-2}$  para modelo RNG e  $A^+ = 8,5 \times 10^{-3}$  para o modelo de Speziale.

A forma funcional do tensor de tensões de Reynolds e as equações modeladas de  $k$  e  $e$ , dos modelos de interesse, são apresentadas a seguir

## 2.1. Modelo $k$ - $e$ não linear de Speziale

Sabe-se que o modelo  $k$ - $e$  tradicional produz um escoamento turbulento médio unidimensional em dutos não circulares, o qual está em contradição com a presença de escoamentos secundários. Speziale (1987) obteve um modelo não linear, baseando-se na similaridade entre o escoamento turbulento médio de um fluido Newtoniano e o escoamento laminar de um fluido viscoelástico (Mompean,1997). O modelo não linear produz melhores resultados que o modelo  $k$ - $e$  tradicional, para escoamentos, onde as tensões normais de Reynolds ocupam um importante papel. Este é o caso em dutos não circulares e no escoamento em degrau ('backstep'). Speziale (1987) propõe o tensor de tensões de Reynolds como:

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3} \kappa S_{ij} + 2 C_{\mu} \frac{\kappa^2}{\varepsilon} S_{ij} + 4 C_D C_{\mu}^2 \frac{\kappa^3}{\varepsilon^2} x \left[ S_{ij}^o - \frac{1}{3} S_{kk}^o \delta_{ij} + S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right] \quad (6)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

$$S_{ij}^o = \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} S_{kj} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} S_{ki} \quad (8)$$

onde  $S_{ij}$  é o tensor deformação médio,  $C_m = 0,09$  e  $S_{ij}^o$  é a derivada de Oldroyd de  $S_{ij}$ : A constante  $C_D$  foi ajustada por Speziale (1987), em um escoamento em canal, com Reynolds de 30.800. Dos dados experimentais, obteve-se  $C_D = 1,68$ . As equações modeladas para a energia cinética e sua taxa de dissipação são expressas como:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \kappa)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right] + P_K - e \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_1 \frac{e}{k} P_K - C_2 \frac{e^2}{k} \quad (10)$$

$$P_K = \tau_{ij} S_{ij} \quad (11)$$

As equações de  $k$  e  $e$  contém quatro constantes empíricas, para as quais são atribuídos os seguintes valores:  $C_1=1,44$ ;  $C_2 = 1,92$ ;  $\sigma_K = 1,00$ ;  $\sigma_\varepsilon = 1,30$ .

## 2.2. Modelo $k$ - $e$ RNG não linear

Yakhot et al. (1992) obtiveram as equações modeladas de  $\kappa$  e  $\varepsilon$ , usando a teoria do grupo de renormalização. A técnica possibilita a obtenção das equações modeladas de  $k$  e  $e$ , permitindo ainda a avaliação teórica das constantes do modelo. O  $k$ - $e$  RNG não linear é resultado do acoplamento do tensor de Reynolds não linear, proposto por Speziale, ao modelo  $k$ - $e$  RNG, desprezando-se neste caso, os efeitos convectivos da derivada de Oldroyd (Yakhot et al., 1992). Assim o modelo tem a mesma forma do modelo  $k$ - $e$  RNG, sendo o tensor de tensão de Reynolds definido conforme a Eq. (6). Um termo usualmente desprezado no modelo  $k$ - $e$  tradicional é agora considerado, para corrigir a produção da dissipação. No entanto, este termo não é estritamente levantado das considerações da teoria RNG, sendo:

$$R = 2\nu S_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \quad (12)$$

Sua modelagem baseia-se na escala de expansão  $h$ , a qual é definida como a razão da turbulência para a escala de deformação média [ $h=S(k/e)$ , onde  $S=\sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}$ ]. Se este novo termo for incluído em  $C_1$  da Eq. (9), as equações de  $k$  e  $e$  tem a mesma forma das equações de transporte do modelo  $k$  e  $e$  não linear de Speziale, com as constantes definidas como:  $C_m=0,085$ ;  $C_1=1,42-R$ ;  $C_2=1,68$ ;  $s_k=0,7179$ ;  $s_e=0,7179$ , onde  $R$  é dado por

$$R = \frac{C_\mu \eta^3 (1 - (\eta/\eta_o))}{1 + \beta \eta^3} ; h = S k / e ; b = 0,012 ; h_o = 4,38 \quad (13)$$

Comparando-se os valores das constantes para os modelos, verifica-se o valor reduzido de  $C_2$  no modelo RNG. A consequência interessante desta característica é aumentar o valor da taxa de dissipação e diminuir o valor da energia cinética turbulenta, levando a menores valores de viscosidade turbulenta ( $n_t$ ), de acordo com a Eq. (4).

Nas regiões de pequenas taxas de tensão turbulenta ( $h < 4,38$ ), o termo  $R$  tende a aumentar a viscosidade turbulenta. Contudo, nas regiões de grandes taxas de tensão turbulenta ( $h > 4,38$ ), o sinal de  $R$  é invertido e a viscosidade turbulenta diminui mais neste modelo comparativamente ao modelo tradicional.

### 3. DOMÍNIO COMPUTACIONAL E CONDIÇÕES DE CONTORNO

A Fig. (1) mostra o duto com os eixos de referência. A seção transversal foi dividida em quatro quadrantes, sendo o domínio computacional tomado como um quadrante, com condições de simetria ao centro. O comprimento  $L_x$  é igual ao diâmetro hidráulico ( $H$ ) e o número de Reynolds, baseado na velocidade média e no diâmetro hidráulico, é  $Re = 4410$ .

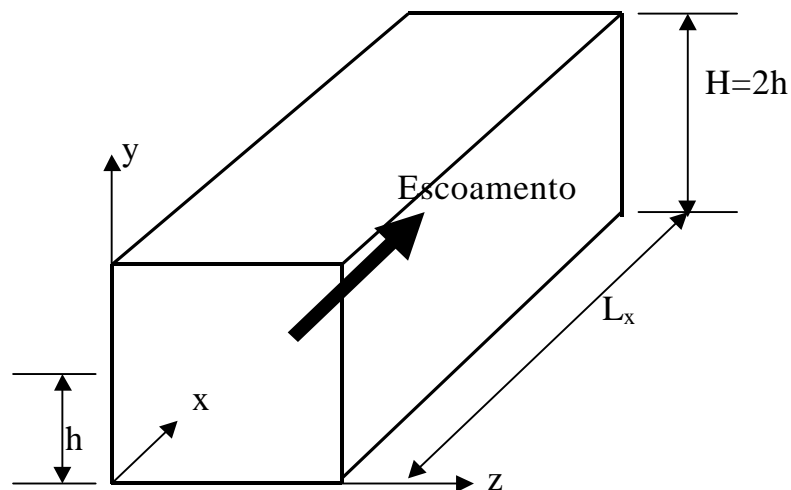


Figura 1: Geometria e sistema de coordenadas

No estabelecimento das condições de contorno, nas superfícies sólidas, considerou-se o fato que o primeiro ponto interno estava dentro da subcamada laminar. Em todo o domínio, a coordenada de parede do primeiro ponto interno foi sempre menor que 3 ( $n^+ = nu_\tau/\nu$ , onde  $u_\tau$  é a velocidade de atrito). Deste modo, utilizou-se a condição de contorno de não deslizamento para as velocidades ( $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$ ) na parede, enquanto as condições para  $\kappa$  e  $\epsilon$  foram tomadas como:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial n} = 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon_w = \nu \frac{\partial^2 \kappa}{\partial n^2} \quad (14)$$

onde 'n' é a coordenada normal a parede. Na linha de simetria impôs-se variação nula na direção transversal para  $\bar{u}$ ,  $\kappa$ , e  $\varepsilon$  e nula a componente transversal da velocidade ( $\bar{v} = 0$  ou  $\bar{w} = 0$ ). Não foi necessário especificar os perfis de velocidade média, de  $\kappa$  e de  $\varepsilon$  na entrada do domínio, bem como as condições de contorno na saída, pois o escoamento foi resolvido como sendo periódico na direção homogênea. O gradiente de pressão médio na direção principal é prescrito de forma a produzir o número de Reynolds desejado.

#### 4. MÉTODO NUMÉRICO

As equações de governo foram resolvidas utilizando o método de volumes finitos, com esquema de segunda ordem para os fluxos (Quick) (Leonard, 1979, e Hayase et al., 1992). A solução em regime permanente foi obtida pela resolução do sistema de equações algébricas, utilizando-se a técnica da sub-relaxação, com aplicação repetida do algoritmo TDMA linha por linha periódico (Patankar et al., 1980). Para aumentar a velocidade de convergência, utilizou-se o algoritmo de correção por blocos (Settari e Aziz, 1973).

Utilizou-se uma malha não uniforme, com 6 pontos nodais na direção x e 50x50 pontos nodais nas direções y e z, respectivamente. Concentrou-se os pontos nas regiões próximas a parede, garantindo-se  $n^+ < 3$  em todos os primeiros pontos internos ao longo do perímetro. O problema também foi resolvido com uma malha uniforme 6x34x34. Os resultados não apresentaram variações significativas.

Para a convergência da solução numérica, controlou-se os resíduos da equação da continuidade e das equações de conservação de todas as outras variáveis, além do comportamento das propriedades do escoamento, tais como velocidade máxima e velocidade média. A solução foi considerada convergida, quando o resíduo da equação de conservação de massa foi da ordem de  $10^{-15}$  e no caso das outras equações de conservação da ordem de  $10^{-5}$ .

#### 5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O escoamento turbulento de baixo Reynolds em duto de seção quadrada foi simulado com o modelo  $\kappa$ - $\varepsilon$  não linear RNG e com o proposto por Speziale (SPZ). Os resultados obtidos com os modelos são comparados com os resultados da simulação direta de Gavrilakis (1992) e medidas experimentais de Cheesewright et al. (1990). Tanto nos experimentos numéricos como no arranjo físico, o número de Reynolds, baseado na velocidade média e no diâmetro hidráulico, é 4410.

Como o gradiente de pressão média é constante neste escoamento, a tensão cisalhante média e consequentemente a velocidade de atrito média são dadas por:

$$\bar{\tau}_\omega = u_\tau^2 = -\frac{H}{4} \frac{d\bar{P}}{dx} \quad (15)$$

onde H é o diâmetro hidráulico e, no caso do duto do quadrado, é o próprio lado do duto (H=2h). Dos valores fixados para o gradiente de pressão e da geometria do duto, obtém-se  $\bar{t}_w = 5,875 \times 10^{-3}$  Pa e  $u_\tau = 7,66485 \times 10^{-2}$  m/s. Já na simulação numérica com o modelo RNG tem-se  $\bar{t}_w = 5,969 \times 10^{-3}$  Pa e  $u_\tau = 7,72593 \times 10^{-2}$  m/s, enquanto com o modelo proposto por Speziale obteve-se  $\bar{t}_w = 5,964 \times 10^{-3}$  Pa e  $u_\tau = 7,72269 \times 10^{-2}$  m/s. Estes valores diferem do valor calculado pelo gradiente de pressão por menos que 1,6% e 1,5% do valor teórico, respectivamente. O número de Reynolds, baseado na velocidade de atrito e diâmetro hidráulico, foi obtido como 300,2 no modelo RNG e 303,6 no modelo de Speziale (SPZ), enquanto na simulação direta este é 300.

A Fig. (2) mostra o comportamento da tensão cisalhante na parede. Verifica-se que os

resultados da simulação direta apresentam dois máximos relativos, um a 0,31h da quina do duto e o outro no centro da parede. O modelo de Speziale só apresenta um máximo no centro do duto. Já o modelo RNG tem um máximo a 0,7h e outro no centro do duto, embora este seja subavaliado e incorretamente menor que o primeiro. A razão entre a tensão cisalhante no ponto médio da parede e a tensão cisalhante média foi igual a no modelo RNG 1,14 e 1,30 no modelo de Speziale, enquanto pela simulação direta obteve-se 1,18. Contudo, a razão entre a tensão cisalhante e seu valor médio, na seção, apresentou com o modelo RNG, um máximo entre o centro do canal e a parede, igual a 1,19.

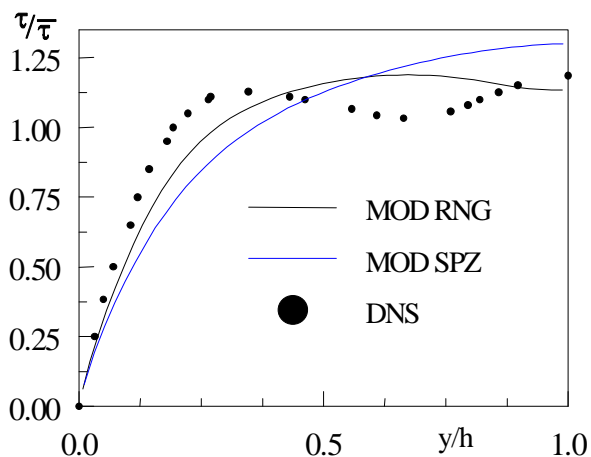


Figura 2. Tensão cisalhante na parede do duto

O fator de atrito, obtido pela simulação direta foi igual a 0,037, semelhante ao resultado da correlação de Jones (Gavrilakis, 1992). A presente simulação obteve 0,037 para o modelo RNG e 0,038 para o modelo SPZ, valor que é 2,7% menor que o obtido por 'DNS'. Outra relação importante é a razão entre a velocidade máxima e a velocidade de média do escoamento, que na simulação direta foi obtida igual a 1,33. Mais uma vez, o modelo RNG mostrou-se em excelente concordância com a simulação direta, obtendo-se também 1,33. Já no modelo SPZ foi obtido 1,31, que é 1,2% menor que o 'DNS'. A Fig. (3) apresenta as isovelocidades  $u$  obtidas pelos modelos. Comparativamente à simulação direta, verifica-se que nenhum modelo foi capaz de prever as distorções existentes nestas linhas, nas proximidades da quina.

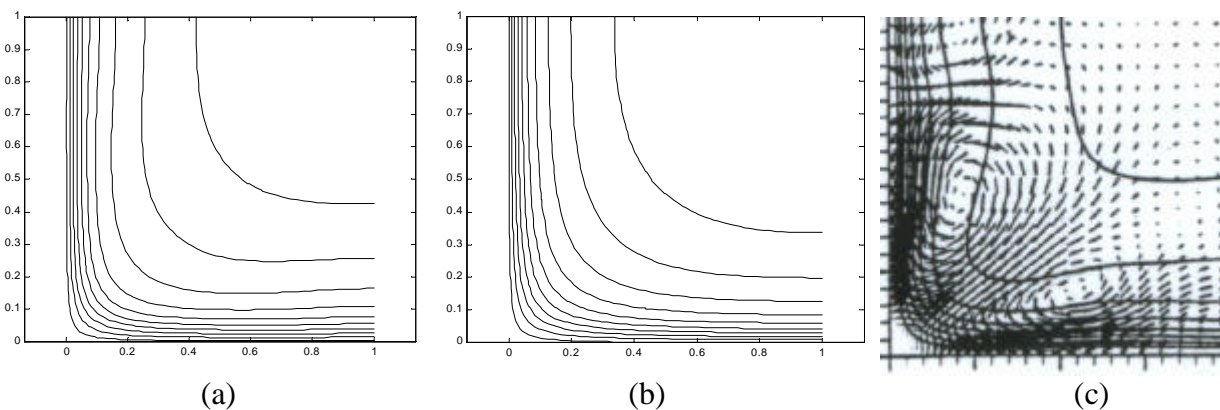


Figura 3. Linhas de isovelocidade  $u$ , (a) modelo RNG, (b) modelo SPZ (c) DNS

Os perfis de velocidade longitudinal média são mostrados na Fig. (4), respectivamente, para  $z/h=0,1$ ,  $z/h=0,5$  e  $z/h=1,0$ . Na primeira seção, junto a parede, os dados DNS e experimentais mostram uma forte distorção, induzida pelo escoamento secundário (Gavrilakis, 1992, e Huser e Birigen, 1993). Os modelos não foram capazes de reproduzir este comportamento, embora os resultados do modelo RNG indiquem uma leve distorção no perfil nesta seção. De um modo geral, o modelo RNG apresenta resultados mais próximos ao DNS e experimental, que o modelo SPZ, em todas as seções. Os resultados obtidos aqui concordam com os dados de Mompean, 1997.

A variação, ao longo da diagonal, da velocidade  $u$ , adimensionalizada pela velocidade de atrito, é mostrada na Fig. (5). Da comparação qualitativa dos resultados com a simulação direta, verifica-se que o modelo RNG é o que melhor reproduz o comportamento de  $U^+$  na diagonal, embora ambos modelos subavaliem a região e não predizem o ponto de inflexão do perfil ao redor da abcissa 0,75.

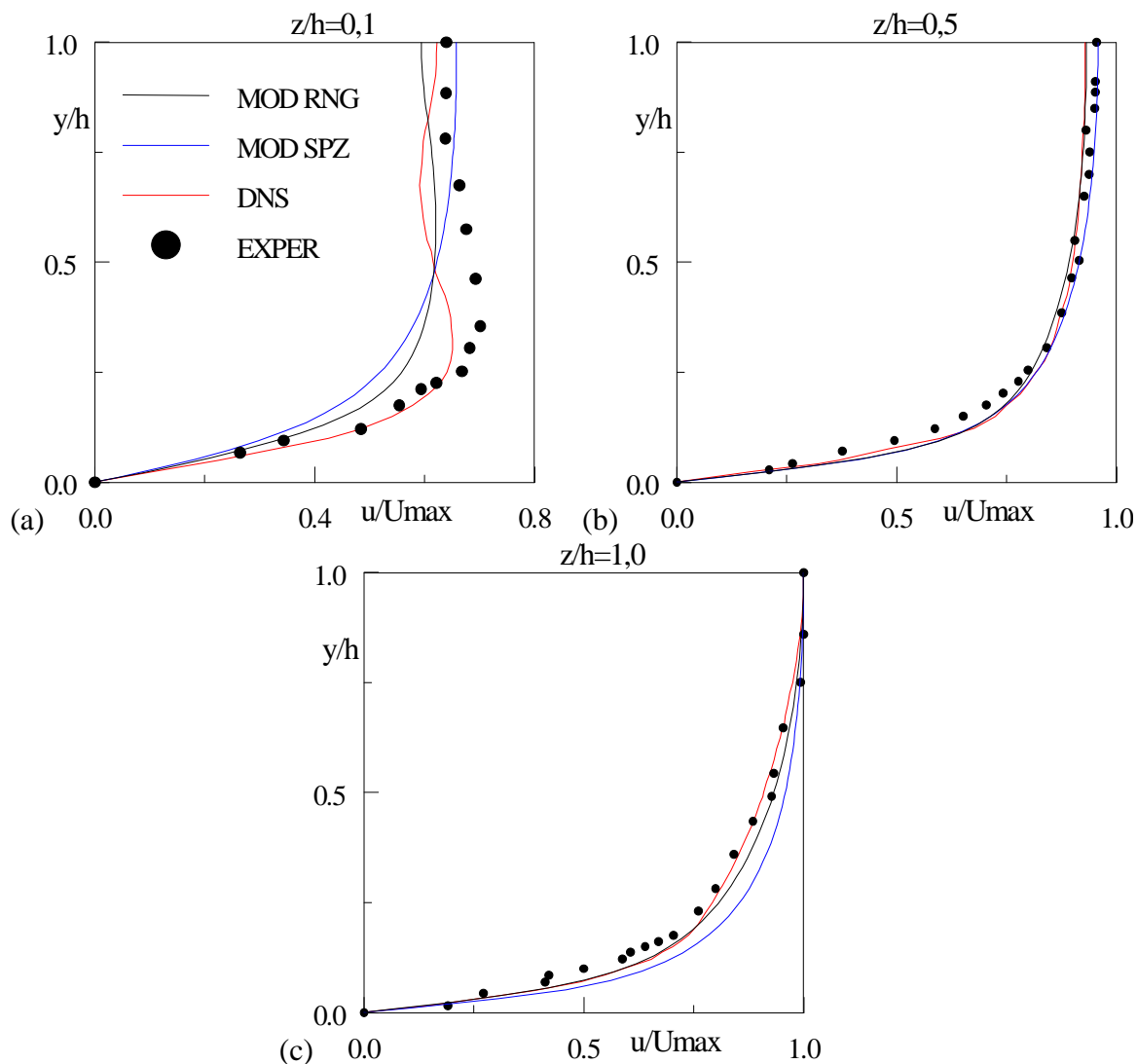


Figura 4. Perfil de velocidade  $u/U_{max}$ . (a)  $z/h=0,1$ ;  $z/h=0,5$ ;  $z/h=1,0$ .

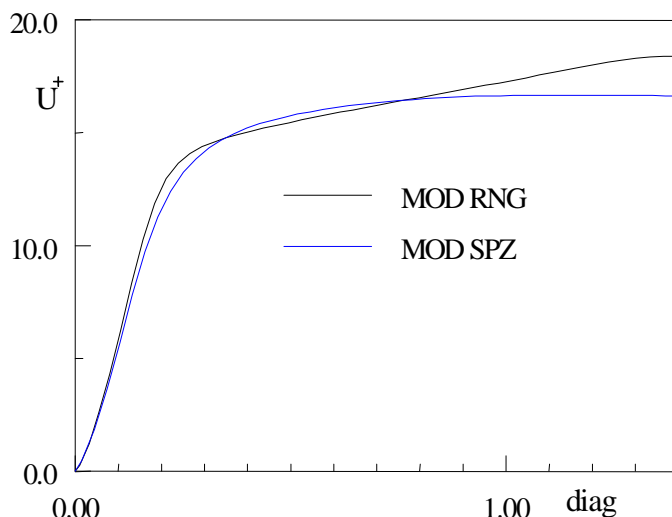


Figura 5. Variação da velocidade  $U^+$  ao longo da diagonal do duto

A comparação entre os resultados do modelo, medidas experimentais e dados da simulação direta, para a velocidade transversal  $w$ , é apresentada na Fig. (6), respectivamente, para as seções  $z/h=0,16$ ,  $z/h=0,5$  e  $z/h=0,8$ . o perfil da referida velocidade é melhor previsto pelo modelo RNG, embora ambos os modelos subavaliem o escoamento secundário na maioria do domínio e apresentem grandes desvios em relação ao DNS e experimental. A velocidade secundária máxima prevista pelo DNS é 1,9% da velocidade de mistura e está localizada em  $y/h=0,071$  e  $z/h=0,4$ . A máxima velocidade secundária no modelo RNG é 0,65% e está em  $y/h=0,056$  e  $z/h=0,59$ , enquanto a velocidade máxima no modelo SPZ é 0,25% e está em  $y/h=0,052$  e  $z/h=0,55$ .

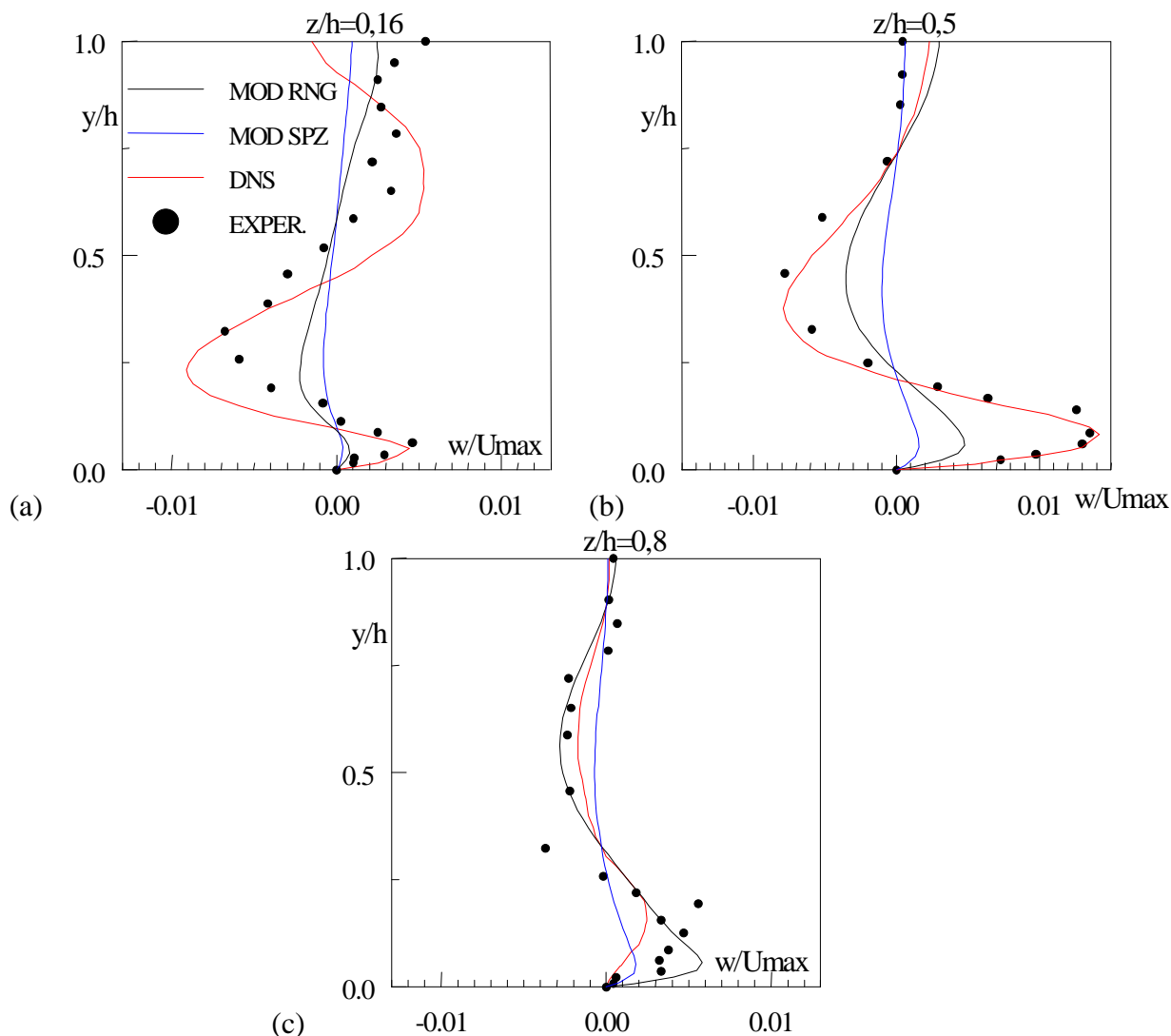


Figura 6. Perfil de velocidade  $w/U_{max}$ . (a)  $z/h=0,16$ ;  $z/h=0,5$ ;  $z/h=0,8$ .

A variação da tensão de Reynolds  $\overline{u'v'}$ , adimensionalizada pela velocidade de atrito, é mostrada na Fig. (7). Os modelos subavaliem o pico desta tensão de Reynolds, além de preverem o pico mais próximo da quina do duto que os dados DNS. Na região  $z/h < 0,12$ , os modelos, particularmente o RNG, obtêm resultados semelhantes aos da simulação direta.

Os isovalores da vorticidade, previstos pelos modelos, são mostrados na Fig. (8). A Fig. (8a) ilustra acima da diagonal, os dados obtidos por Mompean, (1997) para o modelo RNG e os dados da simulação direta abaixo da diagonal. Da análise da figura, verifica-se que ambos os modelos não conseguem prever a existência de uma pequena célula de vórtice, junto a linha de simetria ( $z/h=1$ ) (Gavrillakis, 1992). Conseqüentemente, nesta região, as curvas obtidas afastam-se da forma prevista pelos dados DNS (Madabhushi e Vanka, 1991 e Mompean, 1997). Já, junto à quina ( $z/h < 0,4$ ), as linhas de isovalores reproduzem com sucesso os resultados obtidos pela simulação direta.



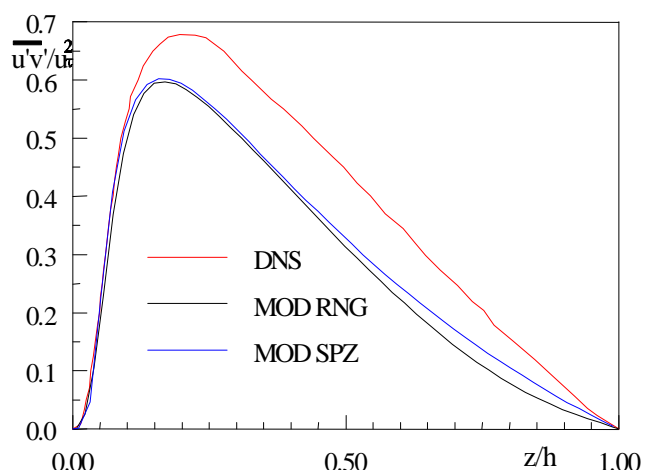
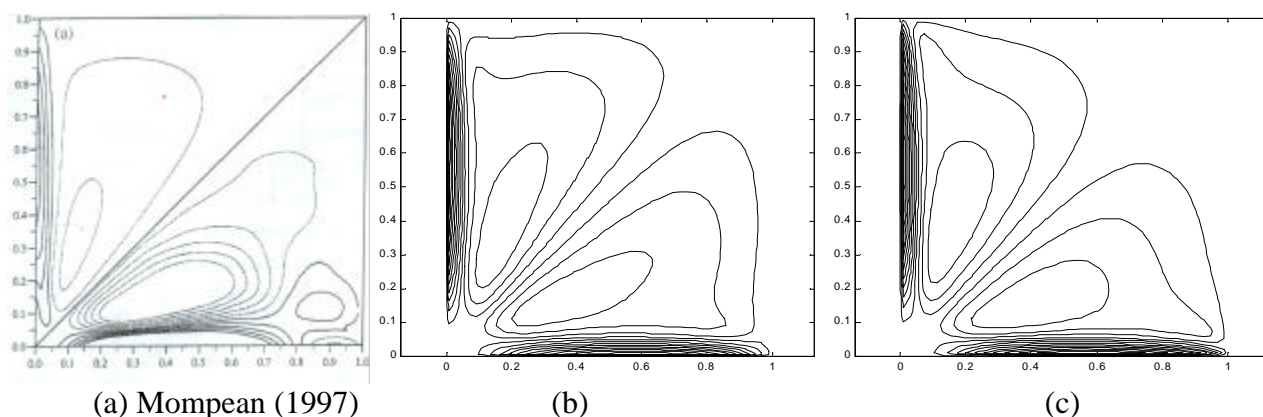


Figura 7. Tensão de Reynolds adimensionalizada com a velocidade de atrito média



(a) Mompean (1997)

(b)

(c)

Figura 8. Linhas de vórtice. (a) modelo RNG e DNS (b) modelo RNG; (c) modelo SPZ

## 6. CONCLUSÕES

Uma investigação numérica da capacidade de predição dos modelos  $\kappa$ - $\epsilon$  não linear de Speziale e  $\kappa$ - $\epsilon$  não linear RNG, em escoamento turbulento de baixo Reynolds, em duto quadrado, foi realizada. Os modelos foram resolvidos até a parede sólida, utilizando-se uma função de amortecimento da viscosidade turbulenta, a fim de considerar os efeitos da viscosidade molecular naquela região. A função foi ajustada, para cada modelo, com base na solução dos parâmetros empíricos conhecidos, tal como fator de atrito. Utilizou-se um PC petium IV, 1,7ghz, consumindo cerca de 15hs de cpu por simulação. O modelo RNG mostrou-se 10% mais rápido.

Os modelos foram capazes de prever a existência do escoamento secundário, embora subavaliem a sua intensidade e falhem na predição dos efeitos deste sobre o escoamento médio e distribuição da tensão cisalhante na parede. O escoamento principal foi bem predito pelos modelos. O modelo RNG obteve melhores resultados. Talvez a maior dificuldade do modelo de Speziale venha do fato do escoamento ser em baixo Reynolds e o modelo ser originalmente calibrado para alto Reynolds. O melhor desempenho do modelo RNG está apoiado nos valores das constantes e no novo termo introduzido na equação de  $\epsilon$ .

## 7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pelo apoio recebido para desenvolver este trabalho.

## 8. REFERÊNCIA

Assato, M. e de-Lemos, M.J.S. 2000, "Escoamento Secundário em Dutos de Seção Não circular usando um modelo de turbulência k-e não linear", Anais do VIII Encontro Nacional de Ciências Térmicas, Porto Alegre, RS, CD-ROM.

- Cheesewright, R., McGrath, G., and Petty, D. G., 1990, "LDA measurements of turbulent flow in a duct of square cross section at low Reynolds number", Aeronautical Engineering Dept. Rep. ER 1011, Queen Mary Westfield College, University of London;
- Gavrilakis, S., 1992, "Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct", J. Fluid Mech., vol 244, pp. 101-129;
- Hanjalic, K., Launder, B. E., 1972, "A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows", Journal of Fluids Mechanics, vol 52, pp. 609-638;
- Hayase, T., Humphrey, J. A. C., and Greif, R., 1992, "A consistently formulated QUICK scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative Calculation procedures", Journal of computational physics, 98, pp. 108-118;
- Huser, A., and Biringen, S., 1993, "Direct numerical simulation of turbulent flow in a square duct", J. Fluid Mech., vol 257, pp. 65-95;
- Leonard, B. P., 1979, "A stable accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation", Computer methods in Appl. Mechanics and Engineering, 19, pp. 59-88;
- Mompean, G., 1997, "Numerical Simulation of a Turbulent Flow Near a Right-angled corner using the Speziale Non-Linear Model with RNG  $\kappa$ - $\epsilon$  Equations", Computers & Fluids, Vol 27, n<sup>o</sup> 27, pp 847-859;
- Nikuradse, J., 1932, VDI-Forschungsheft, No. 356.
- Nieckele, A.O., Abrunhosa, J. M. A. e Ronzani, E. R., 1996, "Simulação Numérica do escoamento em um Degrau com o modelo de Turbulência  $\kappa$ - $\epsilon$  Renormalizado", Anais do VI Encontro Nacional de Ciências Térmicas, Florianópolis, SC, BR, vol. 3, pp. 1809-1814.
- Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer e Fluid Flow", Mcgraw-Hill;
- Madabhushi, R. K., and Vanka, S. P., 1991, "Large eddy simulation of turbulence-driven secondary flow in a square duct", Phys. Fluids A3, pp. 2734-2740;
- Settari, A., and Aziz, K., 1973, "A Generalization of the Additive Correction Methods for the Iterative Solution of Matrix Eq.", SIAM J. of numerical Analysis, Vol. 10, pp. 506-521
- Speziale, C. G., 1984, "Computation of internal flows: methods and applications", ASME, New York, FED 14, P. 101;
- Speziale, C. G., 1987, "On Nonlinear  $\kappa$ - $\epsilon$  and  $\kappa$ - $\epsilon$  Models of Turbulence", J. Fluid Mech, Vol. 178, pp 459-475;
- Yakhot, V., Orszag, S. A., Thangam, S., Gatski T. B., and Speziale, C. G., 1992, "Development of Turbulence Models for Shear Flows by a Double Expansion Technique", Phys. Fluids A, Vol. 4 (7) , pp. 1510-1520;

## **SIMULATION OF LOW-REYNOLDS NUMBER TURBULENT FLOW IN A SQUARE DUCT WITH NON-LINEAR MODELS**

**José Diniz Mesquita Abrunhosa**

Dept.Eng. Mecânica, PUC/RJ, 22453-900, RJ, RJ, Brasil, e-mail: diniz@mec.puc-rio.br

**Angela Ourivio Nieckele**

Dept.Eng. Mecânica, PUC/RJ, 22453-900, RJ, RJ, Brasil, e-mail: nieckele@mec.puc-rio.br

**Abstract.** *The low-Reynolds turbulent flow through a straight square duct has been simulated with the non-linear turbulence models proposed by Speziale and renormalization group theory (RNG). The numerical technique used to solve the set of equations is classical finite volume. A second-order scheme is used to evaluate flux. The boundary conditions for the momentum equations were no slip at the duct walls. The Reynolds number based on the bulk velocity and hydraulic diameter is 4410. The results are compared with existing experimental and numerical data, providing good agreement, at low cost, if compared with that for DNS.*

**Keywords.** *non linear k - e , low-Reynolds, predictions.*