



ESCOAMENTO LAMINAR EM UM CANAL COM MATERIAL POROSO USANDO O MODELO  
NÃO-LINEAR DE FORCHHEIMER E A CONDIÇÃO DE SALTO NA INTERFACE

**Renato A. Silva**

**Marcelo J.S. De-Lemos\***

Departamento de Energia, IEME

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

12228-900 - São José dos Campos, SP – Brasil

\* e-mail: [delemos@mec.ita.br](mailto:delemos@mec.ita.br)

**Resumo.** *Existem inúmeras aplicações industriais de sistemas que consistam em uma região ocupada por um fluido e outra por uma estrutura porosa. Este domínio híbrido, composto por um material poroso e por um fluido, pode ser encontrado, por exemplo, na análise do movimento de petróleo através de falhas geológicas e na simulação do escoamento sobre florestas e vegetações. O tratamento numérico e matemático da interface entre os dois meios é de particular importância quando se busca uma solução numérica confiável. Este trabalho investiga o tratamento numérico da interface levando em consideração a condição de salto da tensão cisalhante para a equação de momentum. As equações que governam o escoamento são discretizadas pelo método de volumes finitos e o sistema de equações algébricas obtido é resolvido pelo método SIMPLE. Os resultados numéricos foram validados com solução analítica disponível na literatura, indicando, em última análise, a exatidão da metodologia numérica desenvolvida.*

**Palavras-chave:** *meio híbrido, escoamento laminar, meio poroso, condição de interface*

## 1. INTRODUÇÃO

Devido à larga ocorrência de escoamentos de fluidos através de meios caracterizados por regiões porosas e limpas, observou-se, nos últimos anos, um interesse crescente de vários pesquisadores no sentido de se descrever adequadamente este tipo de escoamento. Dispersão de poluentes no subsolo e em regiões ribeirinhas, escoamento sobre florestas e plantações e resfriamento de componentes eletrônicos são alguns desses exemplos. Desde os primeiros trabalhos de Darcy (1856), várias investigações tem sido conduzidas nessa área, sendo que as primeiras formulações foram baseadas principalmente na própria lei de Darcy, a qual não leva em conta os efeitos inerciais nem a presença de fronteiras impermeáveis. Com o tempo, o modelo de Darcy foi sendo aprimorado, podendo-se citar as contribuições de Forchheimer (1901), Whitaker (1969), Bear (1972) e Hsu & Cheng (1990), dentre outros.

Um importante aspecto no tratamento de meios porosos é a grande dificuldade em se modelar meios onde existam variações bruscas da porosidade, principalmente para o caso limite de meios apresentando bolsões de vazio (aqui denominados de meios híbridos). Nestes casos, a literatura admite a existência de um salto da tensão cisalhante do fluido na interface entre os domínios limpo e poroso. Nos trabalhos de Ochoa-Tapia & Whitaker (1995a) (1995b) foi proposto um coeficiente ajustável de salto da tensão cisalhante. Nos trabalhos de Kuznetsov (1996) (1997), são feitas investigações analíticas com a condição de salto da tensão cisalhante na interface entre um meio poroso e um meio limpo. Em de Lemos & Pedras (2000) é proposto um tratamento numérico com um único conjunto de equações governantes para estes meios, porém sem considerar a condição de salto na interface. Recentemente, Silva & de Lemos (2001) apresentaram uma solução numérica

para escoamento em meio híbrido levando em conta o salto da tensão cisalhante na interface, entretanto sem a consideração do termo não-linear de Forchheimer.

Com base no exposto, este trabalho estende os desenvolvimentos anteriores e apresenta soluções numéricas tendo como base a metodologia desenvolvida para meios híbridos por Rocamora & de Lemos (2000a), (2000b) e de Lemos & Pedras (2000). Aqui, é considerado o salto da tensão cisalhante na interface em adição ao termo de Forchheimer na equação de momentum. A solução numérica, limitada ao caso de escoamento laminar, é validada com a solução analítica de Kuznetsov (1999) para a geometria analisada.

## 2. MODELAGEM MATEMÁTICA

A Figura 1 mostra um esquema do problema, onde o escoamento totalmente desenvolvido em um canal é considerado. Neste escoamento, pode-se considerar duas camadas limite hidrodinâmicas na região porosa. A primeira camada limite é situada próxima à parede superior enquanto que a segunda camada limite está próxima à interface entre o meio limpo e o meio poroso.

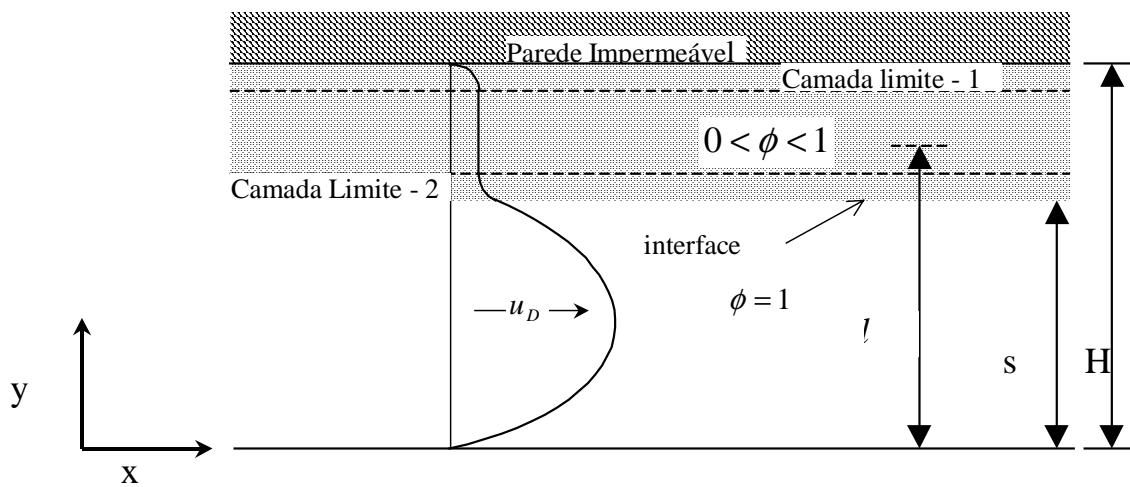


Figura 1: Escoamento em um canal parcialmente preenchido com um material poroso.

As equações que governam o escoamento do fluido, para este caso tem, a seguinte forma:

$$-\frac{d\langle p \rangle^i}{dx} + \mu \frac{d^2 u_D}{dy^2} = 0 \quad 0 \leq y \leq s \quad (1)$$

$$-\frac{d\langle p \rangle^i}{dx} + \mu_{eff} \frac{d^2 u_D}{dy^2} - \frac{\mu}{K} u_D - \frac{\rho c_F}{\sqrt{K}} u_D^2 = 0 \quad s \leq y \leq H \quad (2)$$

A Equação (1) descreve o escoamento totalmente desenvolvido no meio limpo enquanto que a Equação (2) descreve o fluxo do escoamento totalmente desenvolvido no meio poroso. O terceiro termo na Equação (2) é o termo de Darcy e o segundo é o termo de Brinkman. O quarto termo na equação do *momentum* no meio poroso é o termo de Forchheimer.

## 3. SOLUÇÃO ANALÍTICA, CONDIÇÕES DE CONTORNO E DE INTERFACE

De Kuznetsov (1999) temos que a distribuição das velocidades no meio limpo, na camada limite 2 (vide Figura 1), no centro do meio poroso e na camada limite 1 é da seguinte forma:

a) Velocidade no meio limpo; para  $0 \leq Y \leq S$ :

$$u = -\frac{Y^2}{2} + \left(\frac{u_i}{S} + \frac{S}{2}\right)Y \quad (3)$$

onde  $u_i$  é a velocidade na interface entre o meio limpo e o meio poroso.

b) No centro do meio poroso isto é, em  $Y=l$ , a velocidade é constante tendendo a  $u_\infty$ .

c) Distribuição de velocidade na camada limite 2 ( $S \leq Y \leq L$ ) é:

$$u = (u_\infty + u_1) \left[ \frac{1 - z_2}{1 + z_2} \right]^2 - u_1 \quad (4)$$

sendo  $z_2$  uma função da coordenada  $y$ .

$$u_1 = 2u_\infty + \frac{3}{2DaF} \quad (5)$$

d) Distribuição da velocidade na camada limite 1 ( $l \leq Y \leq 1$ ) é:

$$u = (u_\infty + u_1) \left[ \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} \right]^2 - u_1 \quad (6)$$

onde  $z_1$  é uma função da coordenada  $y$ .

A velocidade na interface entre o meio limpo e o meio poroso,  $u_i$  é dado da seguinte forma:

$$u_i = S \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{u_i + u_1}{u_\infty + u_1}} (u_\infty - u_i) \sqrt{\frac{2}{3} \phi F(u_\infty + u_1)} + \frac{S^2}{2} - S\beta\sqrt{Da}u_i \quad (7)$$

onde  $\beta$  é um coeficiente adimensional ajustável na representação do salto da tensão cisalhante na interface.

A Equação (7) deve ser resolvida numericamente para  $u_i$  usando, por exemplo, o método de Newton.

As Equações (1) e (2) são resolvidas sujeitas as seguintes condições de contorno:

$$u_D|_{y=0} = 0 \quad (8)$$

$$u_D|_{y=H} = 0 \quad (9)$$

$$u_D|_{y=s^-} = u_D|_{y=s^+} \quad (10)$$

$$\mu_{eff} \frac{\partial u_{Dp}}{\partial y} \Big|_{y=s^+} - \mu \frac{\partial u_{Dp}}{\partial y} \Big|_{y=s^-} = \beta \frac{\mu}{\sqrt{K}} u_{Dp} \Big|_{y=s} \quad (11)$$

As Equações (10) e (11) apresentam as condições de contorno sugeridas por Ochoa-Tapia & Whitaker (1995a) (1995b). A Equação (10) representa a continuidade da velocidade de Darcy e a Equação (11) a condição de salto da tensão cisalhante na interface entre o meio limpo e o meio poroso. Fisicamente, o coeficiente  $\beta$  representa uma possível diferença no valor da tensão cisalhante na interface.

#### 4. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

A Figura 2 mostra dois volumes de controle, **N** e **P**, respectivamente no meio poroso (PM) e no meio limpo (CF) em um sistema de coordenadas generalizado  $\eta-\xi$ , onde  $\mathbf{u}_{D_i}$  é a velocidade na interface,  $\mathbf{u}_{D_p}$  é velocidade paralela a interface,  $\mathbf{u}_{D_N}$  é a velocidade de Darcy no PM e  $\mathbf{u}_{D_P}$  é a velocidade no CF. A tensão de cisalhamento  $\tau_{\xi}^{PM}$  age na interface sobre a face do meio poroso PM. Similarmente, a tensão de cisalhamento  $\tau_{\xi}^{CF}$  age na interface sobre a face do meio limpo CF.

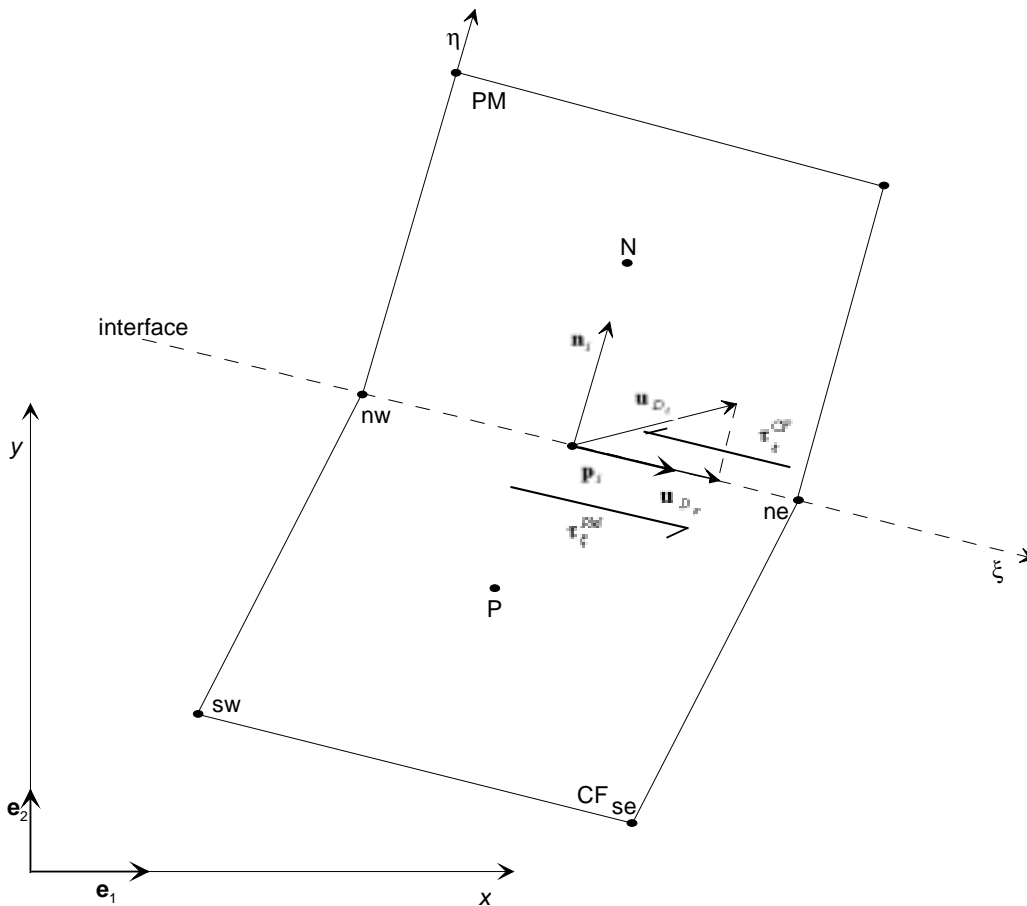


Figura 2: Implementação Numérica do Salto da Tensão de Cisalhamento.

O método numérico utilizado para a discretização das equações é o método de volumes finitos. A descrição detalhada do processo de discretização para os volumes da Figura 2 encontra-se em Pedras & de Lemos (2001). Aqui, as equações de *momentum* em  $x$  e  $y$  são acrescidas de mais um termo por se tratar a condição de salto. A forma discreta da equação de momentum em  $x$  para o volume **P** da Figura 2 levando em consideração a condição (12) pode ser escrita como,

$$S^{*x} = (S_{e^x}^*)_N - (S_w^*)_N + (S_n^*)_N - (S_s^x - I_i^{\beta x})_N + S^x \quad (12)$$

Observe que o termo  $I_i^{\beta_x}$  em (12) só existirá para casos onde houver diferença de tensão entre o meio limpo e meio poroso, isto é, para  $\beta \neq 0$ . A forma discreta do termo fonte  $I_i^{\beta_x}$  representando o componente da diferença de tensão na interface na direção x é dada por:

$$I_i^{\beta_x} = \mu)_i \frac{\beta}{\sqrt{K}} \frac{[u_{D_i} \Delta x_i^\xi + v_{D_i} \Delta y_i^\xi] \Delta x_i^\xi}{A_i} \quad (13)$$

Os quatro primeiros termos da Equação (12) representam parte do fluxo difusivo (Pedras & de Lemos (2001)), sendo que o quarto termo está sendo subtraído de  $I_i^{\beta_x}$ . O quinto termo é referente ao termo de pressão. A Equação (13) inclui os componentes dos termos de Darcy e de Forchheimer na direção x.

A malha computacional, comprimida nas paredes do canal e na interface entre o meio limpo e o meio poroso, é mostrada na Figura 3. Na direção do escoamento foi aplicada a condição de periodicidade espacial (vide Pedras & de Lemos (2001)) e foram utilizados 50 pontos nodais. A condição de periodicidade espacial foi aplicada à malha da Figura 3 com a finalidade de se obter escoamento totalmente desenvolvido e, portanto, compatibilidade com a equação (7).

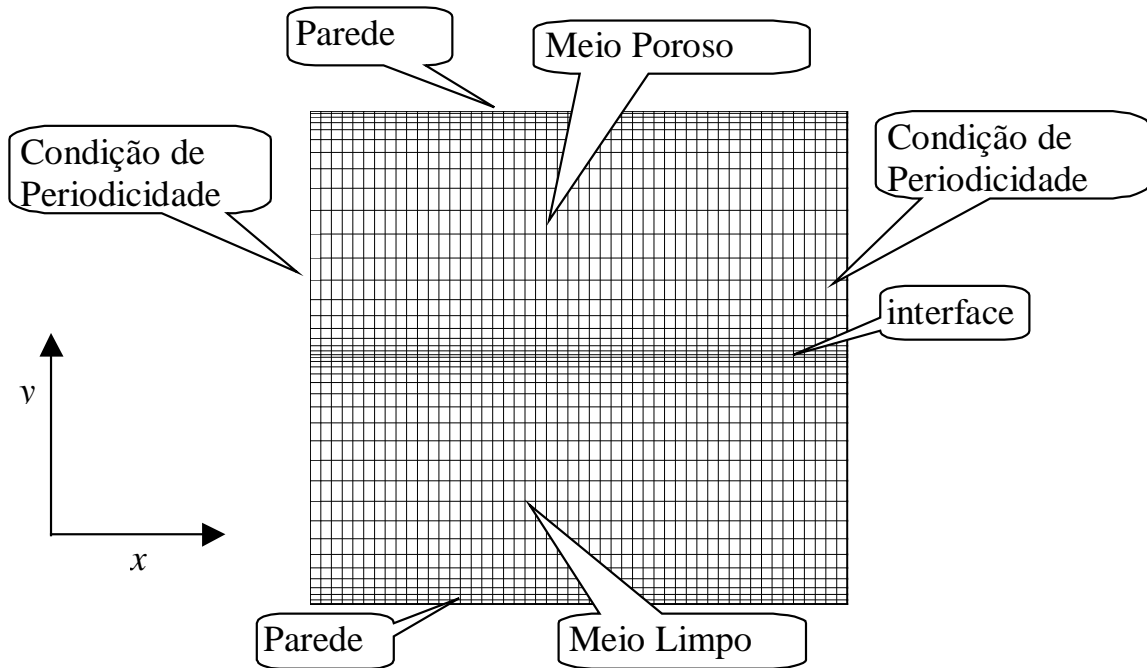


Figura 3: Malha computacional empregada com concentração de pontos na interface e nas paredes ao norte e ao sul do canal.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 4 mostra vários perfis de velocidade com  $\phi=1.0$ ,  $K=4 \times 10^{-7} \text{ m}^2$ ,  $Da=1 \times 10^{-3}$  e  $\beta=0$  para malhas computacionais de tamanhos  $50 \times 40$  a  $50 \times 160$  pontos nodais nas direções longitudinal  $x$  e transversal  $y$ , respectivamente. A hipótese de  $\beta=0$  implica que a tensão de cisalhamento no meio limpo é igual a do meio poroso e, portanto, nesta condição não há salto da tensão de cisalhamento na interface. Nota-se que para a faixa de pontos utilizadas, a solução é praticamente independente da malha já a partir de  $50 \times 40$  pontos nodais.

A Figura 5 apresenta o erro relativo em relação à solução analítica e indica que na parede e na interface ocorrem os maiores erros. Entretanto, estes valores diminuem com o refinamento da malha computacional.

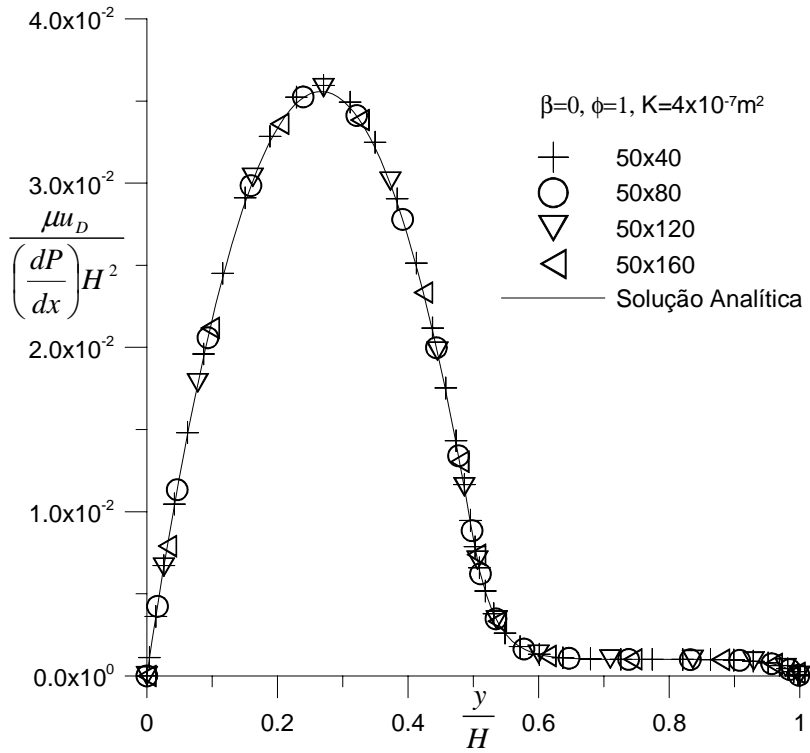


Figura 4: Efeito do tamanho da malha computacional

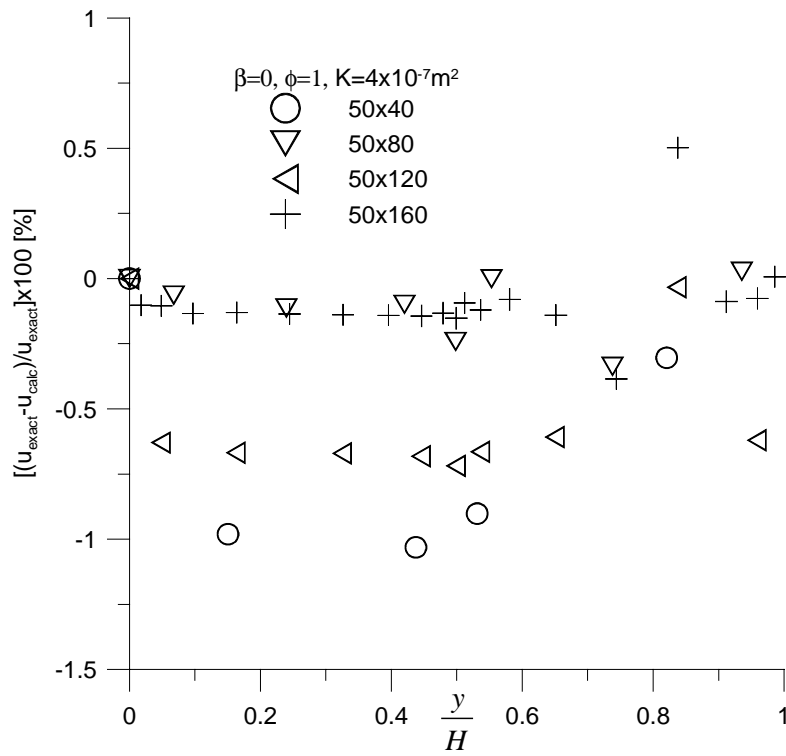


Figura 5: Erro relativo entre as soluções analítica e numérica.

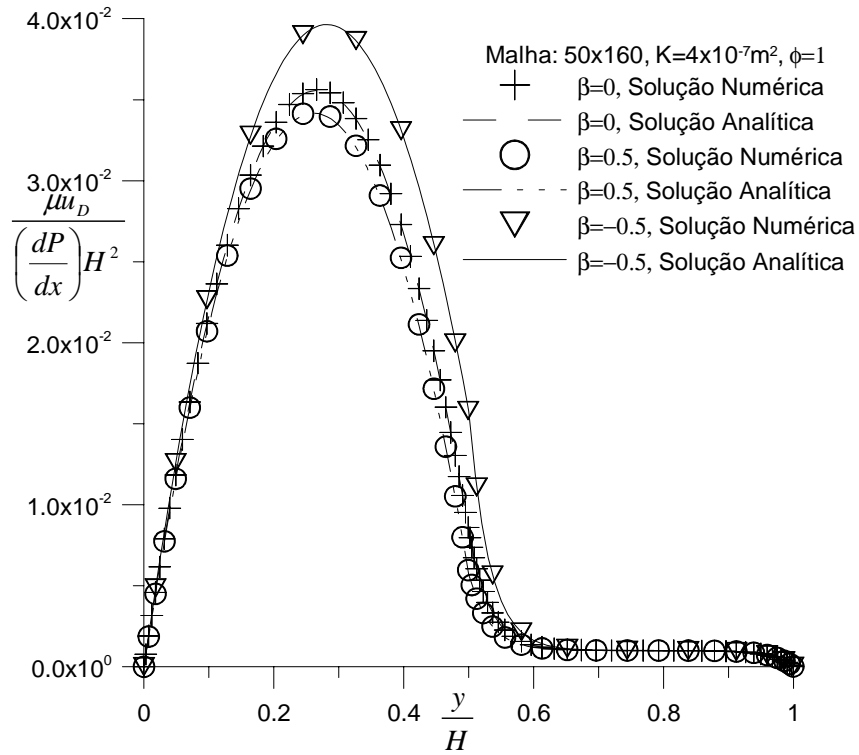


Figura 6: Comparação entre as soluções analítica e numérica para diferentes valores de  $\beta$ .

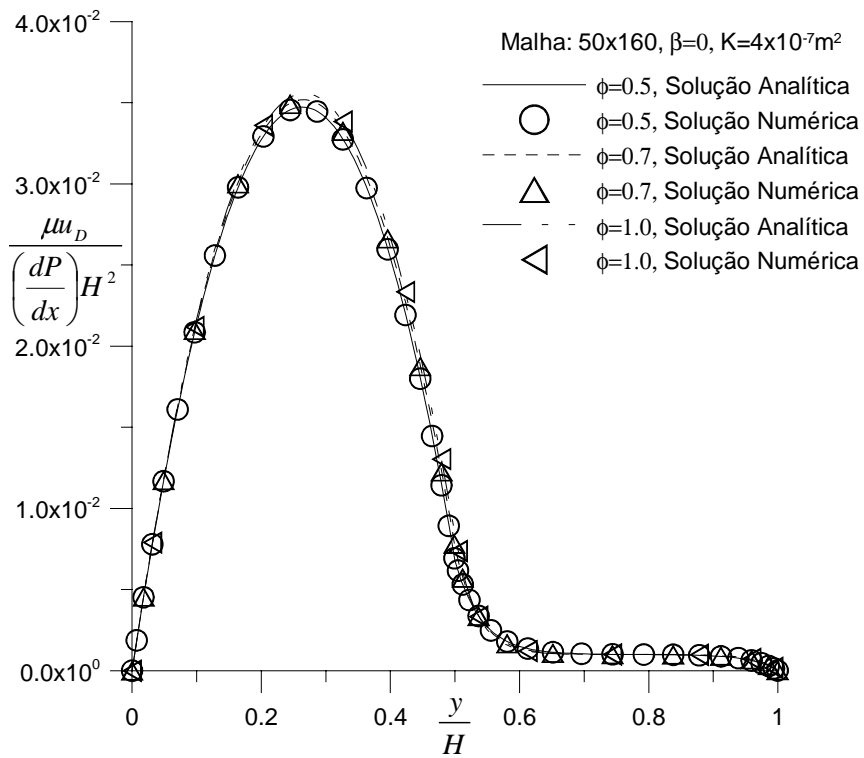


Figura 7: Comparação entre as soluções analítica e numérica para diferentes porosidades,  $\phi$ .

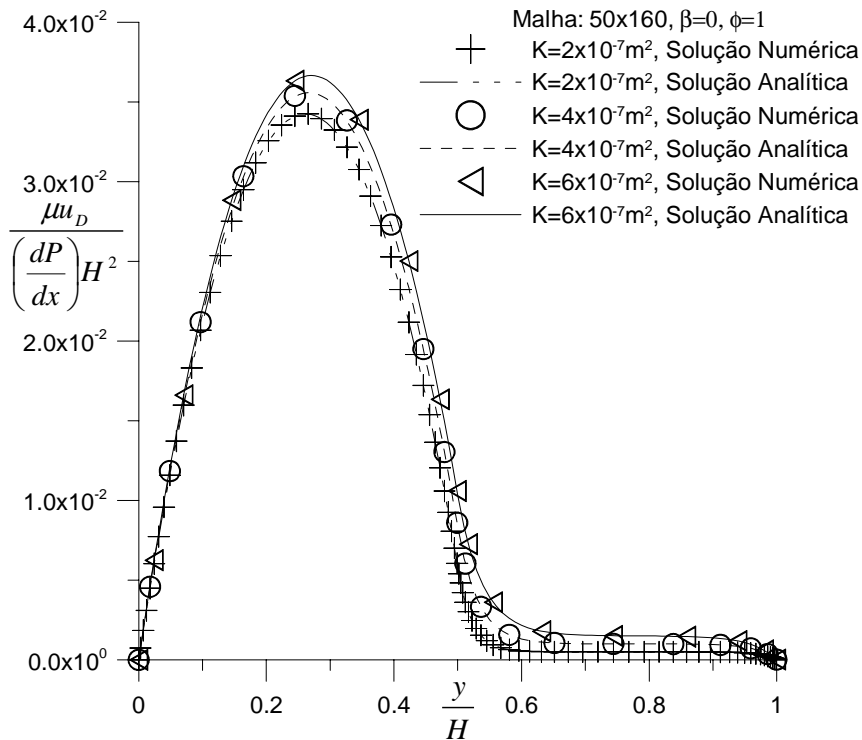


Figura 8: Comparação entre as soluções analítica e numérica para diferentes permeabilidades, K.

A Figura 6 compara o resultado analítico e o numérico para  $\beta = -0.5$ ,  $\beta = 0$  e  $\beta = 0.5$  com  $\phi = 1.0$ ,  $K = 4 \times 10^{-7} \text{ m}^2$  e  $Da = 1 \times 10^{-3}$  para uma malha com  $50 \times 160$  pontos nodais. A Figura indica que, independentemente do salto na interface, a solução numérica reproduz com fidelidade a solução analítica.

Na Figura 7 o efeito da porosidade é investigado para  $\beta = 0$ ,  $K = 4 \times 10^{-7} \text{ m}^2$  e  $Da = 1 \times 10^{-3}$  e uma malha  $50 \times 160$ . Observa-se que, como esperado, quanto maior a porosidade, maior a vazão mássica global através do canal. Também aqui a solução numérica apresenta excelente precisão quando comparada com a solução analítica.

Finalmente, a Figura 8 mostra resultados similares, variando-se agora a permeabilidade, K. A Figura indica que um incremento na permeabilidade aumenta a vazão mássica do fluido através do canal. Ainda, a solução numérica reproduz com fidelidade a solução analítica.

## 6. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou resultados para a solução numérica do escoamento em um canal parcialmente preenchido com material poroso considerando o salto da tensão de cisalhamento na interface e o termo de Forchheimer. A discretização das equações governantes utilizou o método do volumes de finitos e o conjunto de equações algébricas foi resolvido pelo método SIMPLE. Os resultados numéricos foram validados com a solução analítica de Kuznetsov (1999), indicando, em última análise, a exatidão da metodologia numérica apresentada.

## 7. AGRADECIMENTOS

Os autores são gratos à CAPES e ao CNPq pelo suporte financeiro durante a preparação deste trabalho.



## 8. REFERÊNCIAS

- Bear, J., 1972, "Dynamics of Fluids in Porous Media", Elsevier, New York.
- Darcy, H., 1856, "Les Fontaines Publiques de la Vile de Dijon", Victor Dalmond, Paris.
- de Lemos, M.J.S., Pedras, M.H.J., 2000, "Simulation of Turbulent Flow Through Hybrid Porous Medium-Clear Fluid Domains", Proc. of IMECE2000 - ASME - Intern. Mech. Eng. Congr. (on CD-ROM).
- Forchheimer, P., 1901, "Wasserbewegung durch Boden", Z. Ver. Deutsch. Ing., Vol. 45, pp. 1782-1788.
- Hsu, C.T., Cheng, P., 1990 "Thermal Dispersion in a Porous Medium". Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 33, pp. 1587-1597.
- Kuznetsov, A.V., 1996, "Analytical Investigation of the Fluid Flow in the Interface Region Between a Porous Medium and a Clear Fluid in Channels Partially Filled with a Porous Medium" Applied Scientific Research, Vol. 56, pp. 53-56.
- Kuznetsov, A.V., 1997, "Influence of the Stress Jump Condition at the Porous-Medium/Clear-Fluid Interface on a Flow at a Porous Wall". Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 24, pp. 401-410.
- Kuznetsov, A.V., 1999, "Fluid Mechanics and Heat Transfer in the Interface Region Between a Porous Medium and a Fluid Layer: A Boundary Layer Solution". Journal of Porous Media, Vol. 2 (3) pp. 309-321.
- Ochoa-Tapia, J.A., Whitaker, S., 1995a, "Momentum Transfer at the Boundary Between a Porous Medium and a Homogeneous Fluid – I". Theoretical development. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 38, pp. 2635-2646.
- Ochoa-Tapia, J.A., Whitaker, S., 1995b, "Momentum Transfer at the Boundary Between a Porous Medium and a Homogeneous Fluid – II". Comparison with experiment. International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 38, pp. 2647-2655.
- Pedras, M.H.J., de Lemos, M.J.S., 2001, "Simulation of Turbulent Flow in Porous Media using a Spatially Periodic Array and a Low Re Two-Equation Closure". Numerical Heat Transfer – Part A Applications, Vol. 39:1, pp. 35-59.
- Rocamora Jr., F. D., de Lemos, M.J.S., 2000a, "Prediction of Velocity and Temperature Profiles for Hybrid Porous Medium-Clean Fluid Domains", Proc. of CONEM2000 - National Mechanical Engineering Congress (on CD-ROM), Natal - RN, Brazil.
- Rocamora Jr., F. D., de Lemos, M.J.S., 2000b, "Laminar Recirculating Flow And Heat Transfer In Hybrid Porous Medium-Clear Fluid Computational Domains", Proc. of 34<sup>th</sup> ASME-National Heat Transfer Conference (on CD-ROM), ASME-HTD-I463CD, Paper NHTC2000-12317, ISBN:0-7918-1997-3, Pittsburgh, Pennsylvania.
- Silva, R.A., de Lemos, M.J.S., 2001, "Escoamento Laminar Em Um Canal Parcialmente Preenchido Com Material Poroso". *Proceedings of COBEM2001 16<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, (on CD-ROM), Uberlândia, MG, Brazil.
- Whitaker, S., 1969, "Advances in Theory of Fluid Motion in Porous Media", Indust. Engng. Chem., Vol. 61, pp. 14-28.

# LAMINAR FLOW IN CHANNEL WITH POROUS MATERIAL USING FORCHHEIMER NON-LINEAR MODEL AND JUMP CONDITION IN INTERFACE

**Renato A. Silva**

**Marcelo J.S. De-Lemos\***

Departamento de Energia, IEME

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA

12228-900 - São José dos Campos, SP – Brazil

\* e-mail: [delemos@mec.ita.br](mailto:delemos@mec.ita.br)

***Abstract.** There are, in science and engineering, a number of industrial applications of systems consisting of one region occupied by a clear fluid and another made of a porous structure. This hybrid clear fluid- porous material domain can be found, for example, in analyzing the movement of oil through geological faults and in solidification processes of binary alloys. The numerical and mathematical treatment of the interface between the two media is of particular importance if reliable numerical solutions are sought. This work investigates the numerical treatment of the interface taking into consideration the stress jump condition and the Forchheimer non-linear term within the porous material. The flow governing equations are discretized by means of the control-volume method and the system of algebraic equations is solved using the SIMPLE method. The numerical results were validated against available analytical solution indicating the accuracy of the numerical methodology herein developed.*

***Keywords** hybrid medium, laminar flow, porous medium, numerical solution, interface condition*