



## FLUXO TÉRMICO NUM PONTO DE ESTAGNAÇÃO DE UM ESCOAMENTO DE ALTA VELOCIDADE

Ulisses Côrtes Oliveira

Instituto de Aeronáutica e Espaço — ASE-E/IAE/CTA

12228-904 — São José dos Campos–SP, Brasil

E-mail: [ulisses@iae.cta.br](mailto:ulisses@iae.cta.br)

**Resumo.** *Alguns dos principais métodos aproximados de estimar o fluxo térmico convectivo num ponto de estagnação de um escoamento de alta velocidade de gás ideal ou ar em equilíbrio termodinâmico, sobre uma superfície rombuda são revistos. Incluem-se métodos aplicáveis a casos axissimétricos, e formas usuais de estender estes resultados a casos tridimensionais genéricos, para os quais sugere-se ainda uma equação simples que expressa uma analogia axis-simétrica bastante útil.*

**Descritores:** *Aerotermodinâmica, Aquecimento Aerodinâmico, Ponto de Estagnação.*

### 1 INTRODUÇÃO

Um dos muitos problemas que devem ser considerados no projeto de veículos de alta velocidade é o aquecimento devido aos fluxos aerotermodinâmicos dos gases aquecidos na passagem por choques e desacelerados pelos efeitos viscosos da camada-limite. O fluxo térmico convectivo num ponto de estagnação é de particular interesse, dado que em muitas situações ele corresponde ao máximo fluxo térmico superficial, e também pelo fato de que o seu valor é indispensável para o cálculo da distribuição do fluxo térmico em outros pontos superficiais, mediante o emprego de alguns métodos aproximados.

O cálculo do fluxo convectivo de calor no ponto de estagnação pode ser obtido da solução das equações completas de Navier-Stokes, ou de uma solução acoplada das equações de Euler e da camada-limite. Contudo, qualquer um destes procedimentos pode se tornar muito caro, em termos computacionais, quando se exige um grande número de cálculos — tal como no cálculo realizado ao longo de uma trajetória inteira. Em tais situações é necessário recorrer a técnicas aproximadas, geralmente rápidas e suficientemente precisas para as finalidades práticas corriqueiras.

Em alguns estudos teóricos apresentados na literatura técnica, soluções aproximadas, soluções numéricas exatas e fórmulas de correlações empíricas têm sido oferecidas para representar as relações entre a taxa do fluxo térmico convectivo no ponto de estagnação, as condições ambientes e as propriedades do gás. Com uma dessas técnicas, a taxa do fluxo térmico pode ser calculada para dadas velocidade de vôo e altitude, dispondo-se das condições atmosféricas locais, das equações do choque normal, e das propriedades termodinâmicas e de transporte do escoamento.

A finalidade precípua do presente artigo é apresentar as principais técnicas aproximadas disponíveis, e também sugerir uma nova abordagem, a qual é descrita detalhadamente, para

cálculo do fluxo térmico num ponto de estagnação tridimensional de um escoamento de ar atmosférico.

Inicialmente, será considerado o problema de determinar a taxa do fluxo convectivo de calor num ponto de estagnação axissimétrico. Em seguida, serão apresentados métodos de estender os resultados axissimétricos para pontos de estagnação tridimensionais genéricos.

Uma revisão mais ampla, incluindo detalhes de cálculo e também uma análise comparativa entre métodos, pode ser vista em (Oliveira, 1989), trabalho esse que serviu de base para este artigo.

## 2 FLUXO TÉRMICO NUM PONTO DE ESTAGNAÇÃO AXISSIMÉTRICO

Por causa de sua importância no projeto de veículos espaciais, a taxa do fluxo térmico convectivo num ponto de estagnação começou a ser estimada já nos anos trinta. Primeiro foi Squire (Goldstein, 1938) que, aproveitando a solução de Homann (1936) da equação de quantidade de movimento perto do ponto de estagnação de uma superfície cilíndrica em escoamento incompressível, encontrou, após solução simultânea com a equação da energia, uma expressão para o correspondente fluxo térmico. Depois, também usando os resultados de Homann e seguindo o método de Squire, Sibulkin (1952) obteve uma fórmula para o fluxo térmico convectivo no ponto de estagnação de uma superfície esférica em escoamento incompressível.

As fórmulas de Squire e Sibulkin podem ser resumidas numa única expressão:

$$\dot{q}_o = 0,763 \sqrt{(1+k)/2} \text{Pr}_\infty^{-0,6} (\rho_\infty \mu_\infty)^{0,5} \lambda_o^{1/2} (h_\infty - h_w)_o, \quad (1)$$

onde  $k = 0$  para uma superfície cilíndrica, e  $k = 1$  para uma superfície esférica.

Na Eq. (1) e no que segue,  $h$  e  $H$  representam as entalpias específicas estática e total,  $\text{Pr}$  e  $\text{Le}$  os números de Prandtl e Lewis,  $\rho$  a massa-específica,  $\mu$  o coeficiente de viscosidade dinâmica,  $p$  a pressão estática,  $u$  a componente de velocidade paralela à superfície,  $\lambda$  o gradiente de velocidade, e  $s$  uma distância superficial medida a partir do ponto de estagnação. Os subscritos “w” e “e” denotam condições parietais e na borda da camada-limite; “o”, o ponto de estagnação; “s”, a condição de estagnação; “D”, dissociação; e  $\infty$  refere-se ao escoamento não perturbado.

O gradiente de velocidade no ponto de estagnação,  $\lambda_o \equiv (du_e/ds)_o$ , é um parâmetro importante na determinação do fluxo térmico. Ele pode ser calculado a partir do escoamento superficial na região de estagnação.

As fórmulas de Squire e Sibulkin, com as pertinentes adequações, passaram a ser empregadas para estimar os fluxos também em escoamentos supersônicos e hipersônicos. Em particular, a fórmula de Sibulkin para a taxa do fluxo térmico convectivo  $\dot{q}_{o,\text{axi}}$  num ponto de estagnação axissimétrico, Eq. (1) com  $k = 1$ , quando extrapolada para altas velocidades torna-se

$$\dot{q}_{o,\text{axi}} = 0,763 \text{Pr}_w^{-0,6} (\rho_e \mu_e)_o^{0,5} \lambda_o^{1/2} (H_e - h_w)_o. \quad (2)$$

A partir dos anos cinquenta, uma enorme quantidade de fórmulas semi-empíricas, de complexidades variadas, surgiram para condições supersônicas e hipersônicas. As principais serão sumarizadas a seguir.

Lees (1956) desenvolveu uma fórmula similar à de Sibulkin, para escoamento de um gás perfeito em alta velocidade, com número de Lewis unitário e  $h_w \ll H_e$ . Aqui, ela será expressa como:

$$\dot{q}_{o,\text{axi}} = 0,664 \text{Pr}_w^{-2/3} (\rho_e \mu_e)_o^{0,5} \lambda_o^{1/2} (h_r - h_w)_o. \quad (3)$$

Fay e Riddell (1958) desenvolveram uma correlação semi-empírica baseada em soluções numéricas do fluxo de calor num ponto de estagnação axissimétrico de um escoamento de alta

velocidade, nas quais mantiveram constantes os valores dos números de Prandtl e de Lewis. No caso de gás em equilíbrio químico, sua expressão é a seguinte:

$$\dot{q}_{o,axi} = 0,763 \text{Pr}_w^{-0,6} (\rho_w \mu_w)_o^{0,1} (\rho_e \mu_e)_o^{0,4} \lambda_o^{1/2} \left[ 1 + (\text{Le}^{0,52} - 1) \frac{h_D}{H_e} \right] (H_e - h_w)_o. \quad (4)$$

O método de [Cohen \(1961\)](#), adequado para  $V_\infty < 8840 \text{ m/s}$  e para temperaturas parietais na faixa  $300 \text{ K} \leq T_w \leq 1750 \text{ K}$ , expressa-se por

$$\dot{q}_{o,axi} = 0,767 \text{Pr}_w^{-0,6} (\rho_w \mu_w)_o^{0,07} (\rho_e \mu_e)_o^{0,43} \lambda_o^{1/2} (H_e - h_w)_o. \quad (5)$$

[Sutton e Graves \(1971\)](#) desenvolveram uma equação para a taxa do fluxo térmico num ponto de estagnação axissimétrico, devido ao escoamento de uma mistura gasosa arbitrária em equilíbrio, na forma

$$\dot{q}_{o,axi} = K \left( \frac{p_s}{R_\ell} \right)_o^{1/2} (H_e - h_w)_o, \quad (6)$$

onde a constante de proporcionalidade  $K$  pode ser determinada usando um método simples, todavia preciso, sobre uma ampla faixa de misturas gasosas. Para ar, seu valor é igual a  $0,1113 \text{ kg}/(\text{s} \cdot \text{m}^{3/2} \cdot \text{atm}^{1/2})$ .

[DeFilippisSerpico \(1998\)](#) também desenvolveram uma fórmula para cálculo da taxa do fluxo térmico num ponto de estagnação axissimétrico. Ela se expressa por

$$\dot{q}_{o,axi} = K \left( \frac{p_s}{R_\ell} \right)_o^{1/2} (H_e - h_w)_o^{1,17}, \quad (7)$$

onde, nas unidades usuais,  $K = 0,000027 \text{ kg}^{0,5} \cdot \text{m}^{-1,34} \cdot \text{s}^{0,34}$ . A fórmula de [DeFilippisSerpico \(1998\)](#) surgiu a partir de correlação de resultados numéricos das equações de Navier-Stokes. Segundo os autores ([DeFilippisSerpico, 1998](#)), esta fórmula se aplica a paredes completamente catalíticas, apresentando melhores resultados do que a fórmula de [Fay e Riddell \(1958\)](#) para altas entalpias, i.e., para  $(H_e - h_w)_o > 23 \text{ MJ/kg}$ . Sua precisão também foi confirmada, embora indiretamente, por [Zuppardi e Verde \(1998\)](#), através da comparação com dados experimentais clássicos.

Apesar da limitações discutidas por [DeFilippisSerpico \(1998\)](#) e [Zuppardi e Verde \(1998\)](#), tem sido mostrado que a fórmula de Fay e Riddell fornece resultados que têm boa concordância com resultados experimentais e numéricos, estes obtidos de cálculos mais detalhados da camada-limite ([Fay e Riddell, 1958](#); [Rose and Stark, 1958](#)). A fórmula de Cohen também fornece estimativas confiáveis, e cálculos com a fórmula de Sutton e Graves comparam-se bem com resultados do método de Cohen. Ademais, estes três últimos métodos, Eqs. (4), (5) e (6), não apenas são mais precisos do que os métodos de Sibulkin e Lees, Eqs. (1), (2) e (3), mas também têm validade em condições mais amplas.

Concluindo esta revisão de métodos para cálculo da taxa do fluxo térmico convectivo num ponto de estagnação axissimétrico, deve-se observar que, exceto as duas últimas, as demais fórmulas aqui descritas podem ser genericamente expressas na forma

$$\dot{q}_{o,axi} = f(p_s, h_s, h_w) \sqrt{\lambda_o} (h_r - h_w)_o, \quad (8)$$

onde  $f(p_s, h_s, h_w)$  é uma função das condições parietais e de estagnação do escoamento, a qual assume formas particulares nos diferentes métodos já abordados.

### 3 FLUXO TÉRMICO NUM PONTO DE ESTAGNAÇÃO GENÉRICO

Considere agora o escoamento na vizinhança de um ponto de estagnação genérico, i.e., um ponto de estagnação com diferentes curvaturas principais, como mostrado na Fig. (1). Este problema foi formulado e resolvido numericamente por vários pesquisadores, a partir da década de 1950. Por exemplo, no âmbito da teoria da camada limite pode-se citar os seguintes trabalhos: [Howart \(1951\)](#) analisou o escoamento incompressível; [Reshotko \(1958\)](#) analisou o caso de parede fria; e [Tirskii \(1965\)](#) estudou um caso mais geral, incluindo dissociação e injeção de gás na região de estagnação.

Para tomar em conta os efeitos da geometria e do escoamento tridimensional sobre a taxa do fluxo térmico num ponto de estagnação genérico, faz-se necessária uma correção ao procedimento de cálculo da taxa do fluxo térmico num ponto de estagnação axissimétrico. As correções usuais são funções do parâmetro do gradiente de velocidade introduzido por [Reshotko \(1958\)](#), numa tentativa de aplicar as equações da camada-limite tridimensional a um ponto de estagnação tridimensional genérico. Este parâmetro pode ser expresso como

$$k \equiv \frac{(dv_\ell/ds_\ell)_o}{(dv_t/ds_t)_o}, \quad (9)$$

onde  $(dv_\ell/ds_\ell)_o$  e  $(dv_t/ds_t)_o$  são os gradientes de velocidade ao longo de duas direções principais da superfície. Para um escoamento newtoniano, como será visto adiante,  $k$  seria igual à  $R_t/R_\ell$ , onde  $R_\ell$  e  $R_t$  são os raios de curvatura nas direções principais  $s_\ell$  e  $s_t$ , no ponto de estagnação. Além disso, se a coordenada  $s_t$  é sempre identificada com o menor raio de curvatura principal da superfície,  $R_t$ , então o parâmetro  $k$  cairá sempre dentro da faixa  $0 \leq k \leq 1$ . Contudo, em situações em que o ponto de estagnação esteja numa região subsônica relativamente grande, na qual raios de curvatura local mudem significativamente, os raios de curvatura geométricos locais podem não definir adequadamente o gradiente local de velocidade. Portanto, em tais casos, gradientes de velocidade baseados num campo de escoamento mais exato devem ser empregados, dado que os raios de curvatura podem variar rapidamente (de um segmento esférico a uma curva cúbica) na região de estagnação.

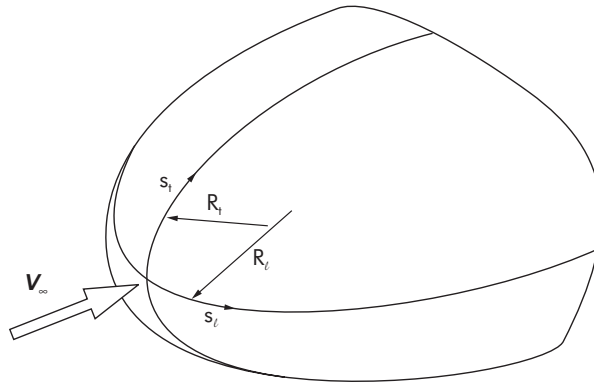


Figura 1: Coordenadas para um ponto de estagnação genérico.

[Reshotko \(1958\)](#) mostrou que, para uma parede fria, a taxa do fluxo de calor nesse ponto de estagnação genérico pode ser relacionada à taxa do fluxo de calor num ponto de estagnação axissimétrico através da seguinte expressão:

$$\dot{q}_o = \sqrt{\frac{1+k}{2}} \dot{q}_{o,axi}, \quad (10)$$

onde, de acordo com a Fig. (1),  $\dot{q}_{o,axi}$  é baseado em  $R_t$  (aqui suposto o menor raio de curvatura), e  $k$  é o parâmetro definido por (9). Esta correção, introduzida por Reshotko em 1958, tem

seja usada por outros pesquisadores (DeJarnette e Hamilton, 1973; Hamilton, 1982; Goodrich et al., 1977; Rakich e Lanfranco, 1977).

Combinando as Eqs. (8) e (10), resulta a seguinte expressão para o fluxo térmico num ponto de estagnação genérico:

$$\dot{q}_o = f(p_s, h_s, h_w) \sqrt{\frac{(1+k)}{2}} \lambda_o (h_r - h_w)_o, \quad (11)$$

onde deve prevalecer uma coerência no cálculo do gradiente de velocidade  $\lambda_o$  e do coeficiente  $k$ . Assim, se  $\lambda_o$  representar o gradiente de velocidade ao longo da direção principal  $s_t$ , então  $k$  deverá ser dado por (9).

Conforme tem sido mostrado (Oliveira, 1989), o efeito de combinar na Eq. (11) os termos  $(1+k)/2$  e  $\lambda_o$  é obter um gradiente efetivo de velocidade, o qual é a média dos dois gradientes principais de velocidade, ou seja,

$$\frac{(1+k)}{2} \lambda_o = \frac{1 + (dv_\ell/ds_\ell)/(dv_t/ds_t)}{2} \frac{dv_t}{ds_t} = \frac{1}{2} \left( \frac{dv_\ell}{ds_\ell} + \frac{dv_t}{ds_t} \right). \quad (12)$$

Logo, esse termo em (11) pode ser substituído por

$$\lambda_{o,M} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{dv_\ell}{ds_\ell} + \frac{dv_t}{ds_t} \right). \quad (13)$$

Ao se usar a *teoria newtoniana modificada*, podem ser obtidas as seguintes expressões para os dois gradientes principais de velocidade:

$$\left( \frac{dv_\ell}{ds_\ell} \right)_o = \frac{1}{R_\ell} \sqrt{\frac{2}{\rho_s} (p_s - p_\infty)}, \quad (14)$$

$$\left( \frac{dv_t}{ds_t} \right)_o = \frac{1}{R_t} \sqrt{\frac{2}{\rho_s} (p_s - p_\infty)}. \quad (15)$$

Note, de antemão, que as Eqs. (18) e (19) do artigo de Reshotko (1958) indicam incorretamente uma relação com a raiz quadrada (potência de 1/2) entre o gradiente de velocidade e o raio de curvatura, em vez da correta dependência linear expressa em (14) e (15), a qual é bem conhecida (Fay e Riddell, 1958; Oliveira, 1989).

Admitindo-se válidas as Eqs. (14) e (15), a inserção destas em (9) e (13) conduz, respectivamente, a  $k = R_t/R_\ell$  (*ponto de estagnação newtoniano*), e a

$$\lambda_{o,M} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_\ell} + \frac{1}{R_t} \right) \sqrt{\frac{2}{\rho_s} (p_s - p_\infty)}. \quad (16)$$

Esta última equação pode ser re-escrita do modo

$$\lambda_{o,M} = \mathcal{K}_M \sqrt{\frac{2}{\rho_s} (p_s - p_\infty)} = \frac{1}{R_M} \sqrt{\frac{2}{\rho_s} (p_s - p_\infty)}, \quad (17)$$

onde  $\mathcal{K}_M$  e  $R_M = 1/\mathcal{K}_M$  são respectivamente a curvatura média e o raio da curvatura média da superfície no ponto de estagnação. Observe-se que a curvatura média é definida por

$$\mathcal{K}_M = \frac{1}{2} (k_\ell + k_t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_\ell} + \frac{1}{R_t} \right), \quad (18)$$

e que, portanto,  $R_M$  é, em geral, diferente de  $(R_\ell + R_t)/2$ .

Em suma, as equações finais para se calcular o fluxo térmico num ponto de estagnação genérico (axissimétrico, bi ou tridimensional) são sintetizadas na equação

$$\dot{q}_o = f(p_s, h_s, h_w) \sqrt{\lambda_{o,M}} (h_T - h_w)_o, \quad (19)$$

onde o gradiente de velocidade médio  $\lambda_{o,M}$  é dado pela Eq. (13), num caso geral, ou por (17), no caso de um ponto de estagnação newtoniano. Especificamente, o gradiente de velocidade tridimensional efetivo deve ser tomado como a média aritmética dos dois gradientes de velocidade principais, no ponto de estagnação. Assim, a taxa do fluxo térmico num ponto de estagnação tridimensional,  $\dot{q}_o$ , pode ser estimada mediante o uso de uma relação para a taxa do fluxo térmico num ponto de estagnação axissimétrico. Deve-se observar, entretanto, que esta correção baseada nos gradientes de velocidade é muito dependente da precisão da solução do escoamento no corpo rombudo. Por outro lado, admitindo um ponto de estagnação newtoniano, tal correção pode ser facilmente calculada, dado que, conhecida a forma da região de estagnação, ambos os raios de curvatura,  $R_\ell$  e  $R_t$ , podem ser determinados (Oliveira, 1989). Particularmente, entre os casos de maior interesse teórico e prático encontram-se o escoamento bidimensional e o axissimétrico. No escoamento bidimensional tem-se  $R_\ell = \infty$ ,  $\frac{dv_\ell}{ds_\ell} = 0$  e  $k = 0$ ; e no escoamento axissimétrico,  $R_t = R_\ell$ ,  $\frac{dv_t}{ds_t} = \frac{dv_\ell}{ds_\ell}$  e  $k = 1$ .

É importante perceber que, segundo Oliveira (1989), as Eqs. (17) e (19) expressam, conjuntamente, uma analogia axissimétrica segundo a qual o fluxo num ponto de estagnação genérico é igual ao fluxo num ponto de estagnação axissimétrico com curvatura igual à curvatura média da superfície arbitrária no seu ponto de estagnação.

Tirskii (1965) obteve outras expressões, baseando-se na solução numérica da camada limite tridimensional de um gás homogêneo com propriedades físicas variáveis, na vizinhança de um ponto de estagnação com diferentes curvaturas principais, considerando ainda a injeção de um gás com as mesmas propriedades do escoamento incidente.

No caso de ar dissociado, considerando apenas cinco componentes (O, N, NO, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>) e após várias simplificações decorrentes de uma análise de valores relativos de algumas propriedades de transporte dos componentes gasosos, Tirskii (1965) obteve resultados numéricos os quais foram aproximados por uma relação cujos erros não excedem 3–4%, para taxas de injeção moderadas, e que torna-se mais precisa para números de Prandtl próximos de 0,7. Excluindo-se os termos relacionados com a injeção de gás, a expressão fornecida em (Tirskii, 1965) resume-se a:

$$\dot{q}_o = 0,763 \text{Pr}_w^{-0,6} (\rho_w \mu_w)_o^a (\rho_e \mu_e)_o^b \Lambda_{o,t} (H_e - h_w + w)_o, \quad (20)$$

onde, para  $0 \leq k \leq 1$ , os expoentes são  $a = 0,06 + 0,04 k$  e  $b = 0,44 - 0,04 k$ , e o parâmetro  $\Lambda_{o,t}$  é dado por

$$\Lambda_{o,t} \equiv \frac{1 + 0,34 k}{1,34} \sqrt{\left(\frac{dv_t}{ds_t}\right)_o}.$$

A variável  $w$  expressa-se por (Oliveira, 1989):

$$w \equiv (\text{Le}_A^m - 1) h_D - 0,716 C_{\text{NO}} \text{Le}_A^m (1 - 0,73^m). \quad (21)$$

No caso de gás não dissociado foi empregada a fórmula de Sutherland para estimar a viscosidade, e a equação encontrada é idêntica à equação do caso de equilíbrio, quando se faz  $w = 0$ .

DeJarnette e Hamilton (1973) fizeram uma adaptação da expressão de Cohen (1961) para um ponto de estagnação axissimétrico, Eq. (5) do presente trabalho, considerando os trabalhos anteriores de Lees (1956) e Reshotko (1958), e buscando obter resultados compatíveis com

dados experimentais nos casos limites de pontos de estagnação axissimétricos e bidimensionais. A equação proposta por eles é, na presente notação,

$$\dot{q}_o = 0,768 \text{Pr}_w^{-0,6} (\rho_w \mu_w)_s^a (\rho_e \mu_e)_s^b \sqrt{\lambda_{o,M}} g(\beta_s) (H_e - h_w)_o, \quad (22)$$

onde os expoentes  $a$  e  $b$  foram escolhidos de modo a variar linearmente com  $\beta_s$ , entre os valores da esfera e do cilindro:

$$a = 0,1 - 0,08(\beta_s - 0,5), \quad b = 0,5 - a.$$

Aqui,  $g(\beta_s)$ , é um constante que depende apenas do valor de  $\beta_s$ , na forma

$$g(\beta_s) \equiv \frac{\zeta'_w(\beta_s)}{\zeta'_w(\beta_s = 1/2)} = 1,033 \left[ \frac{1 + 0,527\beta_s^{0,686}}{1,116 + 0,411\beta_s^{0,686}} \right].$$

O parâmetro  $\beta_s$ , dado por [DeJarnette e Hamilton \(1973\)](#), expressa-se por

$$\beta_s = \begin{cases} \frac{1}{1+k}, & k > 1 \\ \frac{k}{1+k}, & 0 \leq k \leq 1 \end{cases}. \quad (23)$$

Note que [Beckwith \(1961\)](#) usa  $\beta_s \approx 1 - k/2$ , para  $0 \leq k \leq 1$ , o qual dá os valores corretos para esfera ( $k = 1$ ,  $\beta_s = 1/2$ ) e cilindro ( $k = 0$ ,  $\beta_s = 1$ ), o que não acontece com a Eq. (23), quanto a este último caso.

[Oliveira \(1996\)](#) recomenda a seguinte fórmula para estimar a taxa do fluxo térmico convectivo num ponto de estagnação do escoamento de ar em estado de gás perfeito ou em equilíbrio químico, incluindo-se os termos de dissociação em equilíbrio:

$$\dot{q}_o = 0,763 \text{Pr}_w^{-0,6} (\rho_w \mu_w)_o^a (\rho_e \mu_e)_o^b \sqrt{\lambda_{o,M}} \left[ 1 + (\text{Le}^m - 1) \frac{h_D}{H_e} \right]_o (H_e - h_w)_o, \quad (24)$$

onde, para  $0 \leq k \leq 1$ , os expoentes  $a$ ,  $b$  e  $m$  dão-se por

$$a = 0,06 + 0,04k, \quad b = 0,44 - 0,04k, \quad m = 0,52.$$

A entalpia de dissociação do ar é dada por

$$h_D = C_O h_O^\circ + C_N h_N^\circ.$$

Nesta expressão desconsiderou-se a contribuição do NO, por causa de sua baixa concentração parcial (fração mássica) e de sua relativamente pequena energia de formação. As frações mássicas de oxigênio e nitrogênio atômicos,  $C_O$  e  $C_N$ , respectivamente, devem ser determinadas para cada condição de estagnação. Entretanto, as energias de dissociação do oxigênio e nitrogênio podem ser consideradas constantes, com valores  $h_O^\circ = 15,435 \text{ MJ/kg}$  e  $h_N^\circ = 33,624 \text{ MJ/kg}$ , respectivamente ([Oliveira, 1996](#)).

## 4 CONCLUSÃO

Inicialmente, foi considerado o problema de determinar a taxa do fluxo convectivo de calor num ponto de estagnação axissimétrico. Em seguida, foram apresentados métodos de estender os resultados axissimétricos para pontos de estagnação tridimensionais genéricos.

Entre os métodos apresentados para calcular o fluxo num ponto de estagnação axissimétrico, destaca-se o método de Fay e Riddell, o qual se aplica a muitas situações de interesse prático, com boa precisão e de implementação computacional razoavelmente simples.

Combinando a equação desenvolvida por Fay e Riddell para pontos de estagnação axissimétricos, com a equação desenvolvida por Reshotko, obtém-se uma única e simples equação algébrica para estimar o fluxo de calor num ponto de estagnação tridimensional genérico, a qual é suficientemente precisa para a maior parte dos cálculos de engenharia. Além disso, um posterior desenvolvimento deste resultado conduziu a uma equação que expressa uma analogia axissimétrica, segundo a qual o fluxo num ponto de estagnação genérico é igual ao fluxo num ponto de estagnação axissimétrico com curvatura igual à curvatura média da superfície arbitrária no seu ponto de estagnação. Esta analogia generaliza o procedimento de cálculo aproximado do fluxo num ponto de estagnação.

## REFERÊNCIAS

- Beckwith, I. E., 1961, *Similarity Solutions for Small Cross Flows in Laminar Compressible Boundary Layers*. NASA TR R-107.
- Cohen, N. B., 1961, *Boundary Layer Similar Solutions and Correlation Equations for Laminar Heat-Transfer Distribution in Equilibrium Air at Velocities up to 41,000 Feet per Second*. NASA TR R-118.
- De Filippis, F.; Serpico, M., 1998, “Air High Enthalpy Stagnation Point Heat Flux Calculation”. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, **12**(4): 608–611, October-December.
- DeJarnette, F. R.; Hamilton, H. H., 1973, “Inviscid Surface Streamlines on Shuttle-Type Configurations.” *Journal of Spacecraft and Rockets*, **10**(5): 314–321.
- Fay, J. A.; Riddell, F. R., 1958, “Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air”. *J. Aeron. Sciences*, **25**(2): 73–85, 121.
- Goldstein, S., 1938, *Modern Developments in Fluid Dynamics, 1st. ed., Vol. 2*. Oxford University Press.
- Goodrich J. V.; Li, C. P.; Houston, D. K.; Chiu, P. B.; Olmedo, L., 1977, “Numerical Computation of Orbiter Flow Fields and Laminar Heating Rates.” *Journal of Spacecraft and Rockets*, **14**(3): 257–264.
- Hamilton, H. H. II, 1982, *Approximate Method of Calculating Heating Rates at General Three-Dimensional Stagnation Points During Atmospheric Entry*. NASA TM-84580.
- Homann, F., 1936, *Z. angew Math. u. Mech.*, **16**: 159.
- Howart, L., 1951, “The Boundary Layer in Three Dimensional Flow. Part II: The Flow Near a Stagnation Point”. *Philos. Mag.*, **75**(42): 1433–1440.
- Lees, Lester, 1956, “Laminar Heat Transfer over Blunted-Nosed Bodies at Hypersonic Flight Speeds”. *Jet Propulsion*, **26**(4): 259–269, 274.
- Oliveira, Ulisses C., 1989, *Soluções de Engenharia para Fluxos Térmicos em Pontos de Estagnação Tridimensionais*. São José dos Campos, Brasil. (Disponível com o autor.)
- Oliveira, Ulisses C., 1996, *Fluxo Aerotermodinâmico em Corpos de Revolução com Ângulo de Ataque em Escoamento Supersônico*. Tese de Mestrado, Instituto de Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.



- Rakich, J. V.; Lanfranco, M. J., 1977, “Numerical Computation of Space Shuttle Laminar Heating and Surface Streamlines.” *Journal of Spacecraft and Rockets*, **14**(3): 265–272, 1977. (Também aparece como AIAA Paper 76-464, San Diego, CA, July 1976.)
- Reshotko, E., 1958, “Heat Transfer to a General Three-Dimensional Stagnation Point”. *ARS Journal*, **28**(1): 58–60.
- Rose, P. H.; and Stark, W. L., 1958, “Stagnation Point Heat Transfer Measurements in Dissociated Air”. *J. Aeron. Sciences*, **25**(2): 86–97.
- Sibulkin, M., 1952, “Heat Transfer Near the Forward Stagnation Point of a Body of Revolution”. *J. Aeron. Sci.*, **19**(8): 570–571.
- Sutton, K.; Graves, R. A. Jr., 1971, *A General Stagnation-Point Convective-Heating Equation for Arbitrary Gas Mixtures*. NASA TR R-376.
- Tirskii, G. A., 1965, “Determination of Heat Fluxes in the Neighborhood of a Double Curvature Stagnation Point in a Flow of Dissociating Gas of Arbitrary Chemical Composition”. *Zh. Prikl. Mekh. i Tekh. Fiz.*, (1): 45–56. (Trad.: *J. of Applied Mech. and Tech. Physics*, (1): 38–48, 1965.)
- Zuppardi, G.; Verde, G., 1998, “Improved Fay-Riddell Procedure to Compute the Stagnation Point Heat Flux”. *Journal of Spacecraft and Rockets*, **35**(3): 403–405, May-June.

## DIREITOS AUTORAIS

O autor é o único responsável pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## STAGNATION POINT HEAT FLUX ON A HIGH-SPEED FLOW

**Ulisses Côrtes Oliveira**

Institute of Aeronautics and Space — ASE-E/IAE/CTA

12228-904 — São José dos Campos–SP, Brazil

E-mail: [ulisses@iae.cta.br](mailto:ulisses@iae.cta.br)

**Abstract.** *Some approximate methods for calculating convective heating rate at a stagnation point of a high velocity equilibrium air or perfect gas flow are reviewed. Including are usual formulae that apply to axisymmetric stagnation points, and how to extend them to the general three-dimensional ones. A detailed description of an axisymmetric analogue for three-dimensional stagnation points is given.*

**Keywords:** *Aerothermodynamics, Aerodynamic Heating, Stagnation Point.*