

- MECÂNICA DOS SÓLIDOS

SOME RECENT ADVANCES ON ADAPTIVE PROCEDURES IN NONLINEAR FE ANALYSIS

C. A. Almeida

Department of Mechanical Engineering
Pontifícia Universidade Católica/RJ
Rio de Janeiro - Brazil

ABSTRACT

A methodology initially proposed for automatic mesh generation of triangular and quadrilateral finite element discretizations in linear two-dimension problems is now extended to material nonlinear analysis. The technique, which is based on a h-adaptive process, is capable of achieving a specified discretization density using a powerful mesh generator. The element solutions at the nodes are obtained through a general stress recovery procedure employing an *a posteriori* error estimator. The constitutive equation is approached in the formulation using a flow theory to describe the elasto-plastic material behavior. In this study the von Mises condition is employed for the state of multiaxial stress corresponding to the start of plastic flow, the normality condition furnishes a flow rule in the plastic strain increments subsequent to yielding and the kinematic hardening is assumed as hardening rule. The adaptive procedure is based on the complete mesh regeneration and specific mesh requirements (boundary conditions, geometry definitions and space node function), and aims for an optimality condition with the least number of elements that yields an uniform error distribution in all elements. In the stress recovery process the nodal values are assumed to belong to a polynomial expansion defined over patches of elements adjoining a particular assembly node considered. The nodal point parameters, at each element, are obtained using a least square fit of superconvergent sampling points existing in the patch. The material uniaxial elasto-plastic constitutive behavior is represented using overlays, defined over small strain increments, allowing for the representation of the material kinematic hardening behavior beyond the classical bilinear relation. The procedure error estimation is obtained from differences between the post-processed stress gradients and those from the finite element solutions. The energy error norm associated with stress field differences and the finite element strain energy gives an effective error estimate, used for comparison with the process tolerance. Evaluation of the proposed technique is presented through numerical sampling analyses to illustrate its applicability in the improvement of the solution accuracy of general two-dimension finite element model solutions.

INTRODUCTION

The success of the finite element method in numerical analysis is based largely on the basic finite element procedures used, namely, the formulation of the problem in variational or weighted residual form, the finite element discretization of this formulation, and the effective

solution of the resulting finite element equations. These basic steps are the same whichever problem is considered and provide a general frame-work and a quite natural approach to engineering analysis. Besides being the most general analysis tool available today, the method may still require from the analyst a broad knowledge and some experience in using the numerical procedures employed, to perform a reliable modelling analysis of practical applications.

In this context, capabilities such solution error estimates, combined with an effective mesh adaptive technique, have been added to extend the method numerical efficiency. For a given mesh, error estimates current available in the literature are classified in two types: residual estimators and flux projection estimators. In the first, the solution error is evaluated over the elements or mesh subdomains by solving a local boundary value problem using samplings of the differential equation residuals in each element domain and the residual in the stress components sampled on the boundary of each element (Kelly, Graco, et. al.-83). In the second type, the error is evaluated from the stress component fields post-processed using some projection technique (Zhu, Zienkiewicz-87; Ladeveze, Coffignal & Pelle-86; Ortiz, Quigley-91), such the least square method. In Ref. (Tetambe, Saigal-94), a comparative study for five flux projection error estimators in elasto-plastic analysis of two-dimension plane strain and axisymmetric solids, undergoing large deformations, is presented. In this study no mesh refinement is employed and it is shown that error estimators based on the energy rate and on the L_2 -norm of the incremental strains accurately predicts the region of maximum error. From all error estimators tested in the analyses considered, the L_2 -norm of the incremented strains gave the most conservative estimate of error.

In this paper the h-adaptive and mesh generation procedures, presented in Ref. [Almeida-94] for the finite element analysis of two-dimension isotropic linear-elastic problems, are extended to account for material nonlinear effects. The material constitutive relation for the uniaxial stress-strain is represented by a multi-linear idealized model using the overlay model procedures reported in Refs. (Nayak, Zienkiewicz-72; Zienkiewicz, Villiapan, King-69; Owen, Prakash, Zienkiewicz-74). In this material modelling technique, the multi-linear relation is replaced by the superposition of a number of elasto-perfectly plastic material models. This technique has been proven attractive on representing the elasto-plastic behavior of materials undergoing cyclic-loadings. It is worthy a notice that that even under complex loading conditions, the material model represented by overlays gives accurate numerical solution responses in representing the Bauschinger and the strain softening effects. In the following sections a brief outline of the finite element steps in the elasto-plastic analysis, the details of the overlay model, a review of the adaptive procedure based on an *a posteriori* error estimator and the conclusions founded from sample analysis results are presented, indicating the applicability of the proposed methodology to general structure analyses.

THE ELASTO-PLASTIC ANALYSIS

In finite element analysis the basic step is the unique representation, within an element (i), of the unknown displacement vector

$$\mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{N}^{(i)} \hat{\mathbf{v}}^{(i)} \quad (1)$$

in terms of the element nodal displacement vector $\hat{\mathbf{v}}^{(i)}$ and the displacement transformation

matrix $\mathbf{N}^{(i)}$ [Bathe-82], which depends on the spatial coordinates and the interpolation function used in the problem discretization. At any point of the problem domain, represented by \mathbf{n} elements, the strains can be then obtained from

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}^{(i)} \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{v}} \quad (2)$$

where matrices $\mathbf{B}^{(i)}$ are generally obtained from the shape functions and their derivatives. From linear elasticity the proportional constitutive law for an initially strained material, with initial strains $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ and initial stresses $\boldsymbol{\sigma}_0$, gives the relation

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (3)$$

in which \mathbf{D} is the elasticity matrix. If nodal forces acting on the structure are listed in a vector \mathbf{R} and the stresses at any point are as in eq. (3), then for equilibrium it is required that

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{R} - \int_V (\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0) dV. \quad (4)$$

In elasto-plasticity eq. (3) does not hold to represent the full constitutive law. However, for the case of small strain analysis, the strain-displacement relationship remaining linear, the problem can be solved without complete reformulation.

Plastic deformations are characterized by an irreversible straining and begins once certain level of stresses has occurred. This level is governed by a yield condition function

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 \quad (5)$$

where κ is a state variable which depends on the plastic strain vector $\boldsymbol{\varepsilon}_p$. Strain state increments in the material may be decomposed into elastic and plastic components, in the form

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_e + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_p. \quad (6)$$

In equation (6) we use the following definition

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{D}^{-1} \delta \boldsymbol{\sigma} \quad (7)$$

according to eq. (3), and the plastic strain increments being associated gradients of the yielding potential by to the following flow rule

$$\delta \varepsilon_{pij} = \lambda \partial F / \partial \sigma_{ij} = \lambda q_{ij} \quad (8)$$

in which λ is a scalar to be determined. Since during plastic deformations the stresses should remain on the yield surface, i.e. $\delta F = 0$, we also have

$$\mathbf{q}^T \delta \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{p}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = 0 \quad (9)$$

where $p_{ij} = \partial \mathcal{E} / \partial \varepsilon_{pij}$. Using eqs. (7) to (9), the scalar λ is evaluated,

$$\lambda = \mathbf{q}^T \mathbf{D} \delta \boldsymbol{\varepsilon} / (\mathbf{p}^T \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{D} \mathbf{q}). \quad (10)$$

Then substituting from (8) and (10) into (9) one obtains

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{ep} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (11)$$

where the matrix

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D} - (\mathbf{D} \mathbf{q})(\mathbf{D} \mathbf{q})^T / (\mathbf{p}^T \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{D} \mathbf{q}) \quad (12)$$

represents the instantaneous elastic-plastic stress-strain law. This constitutive law depends on the yield function F used. In this work the von Mises yield criterion with isotropic hardening was employed.

To solve the nonlinear equilibrium equation resulting from (4), an iterative procedure must be employed with a series of elastic solutions being performed until all the problem nonlinear

conditions are satisfied. In a linear analysis where the resulting stresses are constrained to satisfy the yield criterion, the equilibrium equation in (4) will not be satisfied and the residual forces

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \neq 0 \quad (13)$$

will arise. In eq. (13) $\boldsymbol{\sigma}$ is a vector containing the actual stress components obtained from the stress level reached as governed by the yield criterion. Variations of the out-of-balance force, $\delta \mathbf{R}^*$, due to changes $\delta \hat{\mathbf{v}}$ in the displacement vector leads to the problem tangent stiffness matrix

$$\mathbf{K}_T = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{ep} \mathbf{B} dV. \quad (14)$$

The solution is then obtained by starting from a trial solution, calculating the residuals by means of (13) and then obtaining a corrected solution displacement vector, at iteration $(n + 1)$, in the form

$$\hat{\mathbf{v}}_{n+1} = \hat{\mathbf{v}}_n + \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{R}^*. \quad (15)$$

Since the constitutive law in (11) is expressed incrementally the process is repeated for small increments, starting from previously established conditions until further changes in displacements are sufficiently small.

THE OVERLAY MODEL

The elasto-plastic solution method outlined in the previous section provides adequate numerical results if no load reversal occurs or, for increasing loads, the uniform expansion of the yielding surface is assumed to occur in the analysis. Nevertheless, it does not simulate the Bauschinger effect on reverse loading, and the initial yield value on reversal increases with the amount of straining on the previous loading. As indicated by analytical modelling approaches available in the literature, Refs. (Kröener-61; Hutchinson-64), the Bauschinger effect can be simulated by considering the continuum composed of individual grains each possessing individual properties. Thus, it is quite natural to conceive the structure as an assembly of element models with different material properties assigned to each, or to the Gaussian points, as in the isoparametric element discretization. Although convenient, this procedure would not be practical to use because the internal stress and displacement distribution would be meaningless, being dependent on the prescribed distribution of the material properties. To overcome this difficulty the overlay model has been proposed [Owen, et. al-74]. By this modelling technique the material is assumed to be composed of several layers of overlays. Each overlay may have different material properties and thickness, with an elastic-perfectly plastic behavior being assigned. Nodes in each overlay are coincidental and the same strain pattern is produced in each overlay. As a result, different stress fields are produced in each overlay, which contribute to the total stress distribution

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{\ell} \boldsymbol{\sigma}_i \xi_i \quad (16)$$

suitable weighted by the overlay thickness ξ_i . in eq. (16) the condition $\sum_{i=1}^{\ell} \xi_i = 1$ must hold.

This material model has the advantage of providing stress and displacement distributions that

are physically meaningful. These stresses may be recognized as the continuum average of the stresses in the material individual grains.

Considering the constitutive linear elastic relation in each overlay to be equal to the material Young's Module E_1 and the slopes in the multi-linear model as E_2, E_3, \dots , the overlay thicknesses are evaluated by imposing the conditions in eq. (16) to ℓ sampling points from the uniaxial stress-strain relation, resulting in

$$\xi_i = (E_i - E_{i+1})/E_1, \text{ for } i=1 \text{ to } \ell \quad (17)$$

Although being originally developed for plane stress state representations, the overlay technique is readily extensible to three-dimension stress states and, in this case, the overlay thicknesses become weight parameters. Negative values for these parameters allows the technique to simulate materials with strain-softening effects, Ref. (Owen, Prakash, Zienkiewicz-74).

ADAPTIVITY AND MESH GENERATION

In elasto-plastic analyses, lacking an exact solution for comparison with a particular finite element solution requires, at a certain loading, approximation of the numerical results to evaluate the solution error. Numerical experiments with various solution error procedures indicates the energy norm error measure as one of the simplest but reliable to use error estimate, in the evaluation of a particular problem discretization performance, Ref. [5]. For a certain mesh, the energy error norm is obtained from approximations of the stress field in the error evaluation at each element level, based on differences between numerical results and the approximation fields, as detailed in Refs. (Zhu, Zienkiewicz-87; Zienkiewicz, Zhu-91; Zienkiewicz, Zhu-92). This technique has been implemented and tested in two-dimension applications presenting severe stress singularities (Almeida-94; Almeida & Santana-93). It was shown that with the use of triangular and quadrilateral isoparametric finite element discretizations a great improvement in the solution efficiency is obtained when quadratic elements were used versus linear interpolation elements. Thus, the methodology initially presented for linear applications, and detailed in Ref. (Almeida-94), was extended for material nonlinear analyses, and is based on the following steps:

- after numerical convergence has been achieved, at a certain load step, an *a posteriori* solution error estimation is evaluated from differences between post-processed stress gradients and those from the finite element solutions. The energy error norm associated with stress field differences and the finite element predicted strain energy gives an effective error estimate used for comparison with the process tolerance;
- if the convergence condition is not satisfied, an h-adaptive process is employed, based on a complete mesh regeneration, guided by specified mesh requirements such as boundary conditions, geometry definitions, and space node functions to achieve an optimal refinement. The optimality condition used requires the mesh refinement with the least number of elements that yields a uniform strain energy norm error distribution in all elements. This is generally referred as Zienkiewicz-Zhu condition, described in Ref. (Zienkiewicz, Zhu-91);
- to proceed with the analysis, a general stress recovery is required to obtain the element solution at the new node positions. In this procedure, the nodal values are assumed to belong to a polynomial expansion of the same complete order in the interpolation function basis used, which is valid over all elements adjoining a node. A least-square fit of superconvergent sampling points existing in the path is used to obtain the recovered nodal point parameters for

each element. These parameters, stresses and displacements, are averaged to all elements adjoining the node of interest.

The numerical solution continues for increasing load steps, using the new discretization mesh and solutions for evaluation of the equilibrium condition in (4).

SAMPLE ANALYSIS

The foregoing enhancements for the material nonlinear representation in two-dimension continuum mechanics problems have been implemented to the adaptivity procedures presented earlier. Although the prime motivation for these enhancements is the better description of the material behavior under cyclic loading, the analysis that follows provides an assessment of the model for results in conventional plasticity analysis with monotonically increasing loads. In such situations isotropic hardening plasticity gives accurate results.

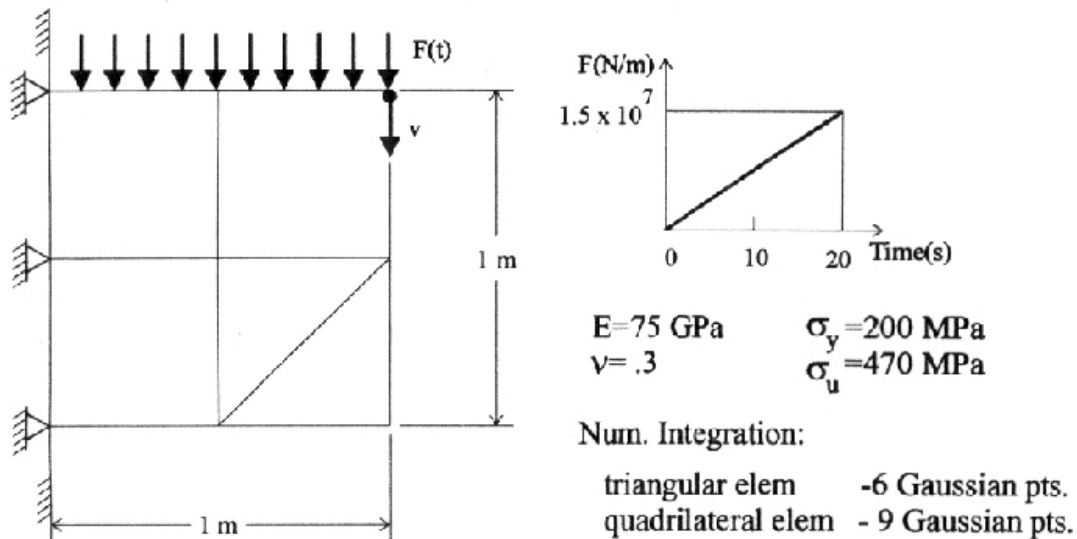


Figure 1 - Short Cantilever Beam Under Transverse Uniform Loading.
Initial Finite Element Meshes Used.

The first problem concerns the plane strain behavior of a short cantilever beam, subjected to uniform transverse loading, linearly incremented in 20 time steps, as shown in Fig. 1. Figure 1 also presents the initial triangular (6 nodes) and quadrilateral (9 nodes) quadratic isoparametric element meshes employed. Five elastic perfectly-plastic overlays were used to represent the material stress-strain relationship. Computed weighting parameters and yielding stress values are indicated in Fig. 2. In both finite element discretization analyses a 6% energy error criteria for mesh reformation was required and a .1% converge rate was used for the iterative procedure during evaluation of the out-of-balance load \mathbf{R}^* , defined in eq. (13). The energy error norms obtained from the finite element solution and the number of degrees-of-freedom required in each solution step are shown in Tables 1a and 1b, for both discretization models. In the first load step of each analysis, two mesh refinement steps were required due to the very crude discretization

initially used, yielding to large energy error norm solutions. These results are, in essence, the same obtained in previous linear analyses in Ref. (Almeida-94), because at this load step the material is still

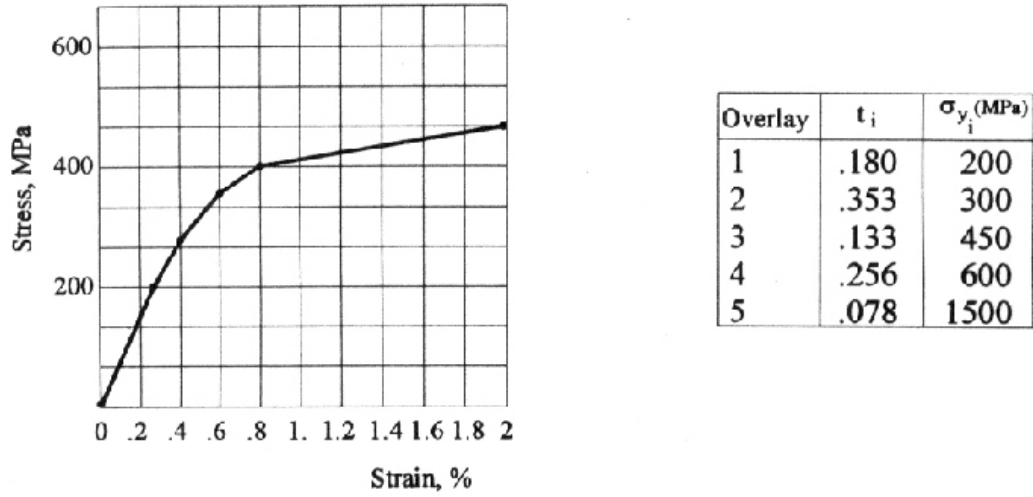


Figure 2 - Material Stress-strain Curve Approximation. Parameters Used in the Overlay Representation.

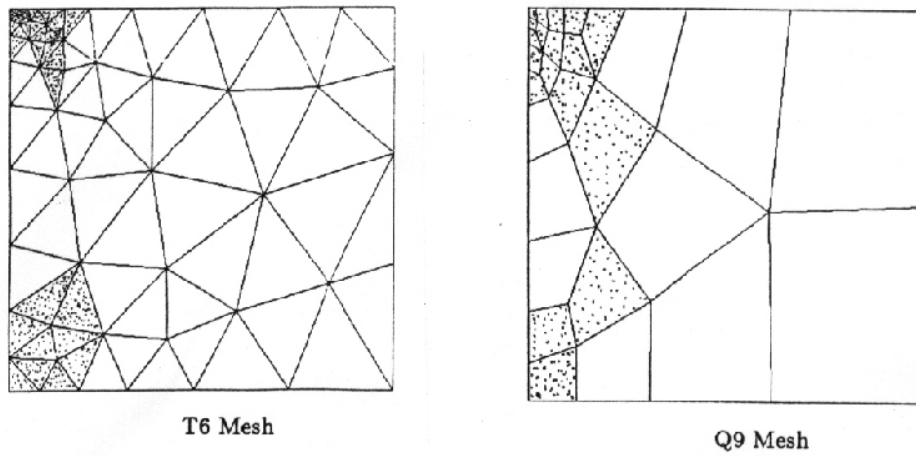


Figure 3 - Final Obtained Meshes with Triangular and Quadrilateral Finite Element Models Used.

elastic. As the analysis proceed, a gradual increasing in the energy norm error is observed but no need of refinements is required until the 7th and the 6th load steps were reached for the triangular e quadrilateral meshes, respectively. At these load steps, only one cycle of refinement was then required for convergence. Further, as plasticity region advances over the elements, larger values for the energy error norm requires frequent cycles of refinements (steps 11 to 20). Figure 3 depicts the obtained final meshes in both analyses; the indicated areas correspond to the elements in which the material yielding conditions have been satisfied in at least one Gauss integration point. The displacement-load curves displayed in Fig. 4 are concerned with four quadrilateral finite element analyses. The vertical displacement solution v for the node located at the structure upper right corner is obtained from the full mesh refinement procedure proposed in this work and compared to the solutions given by discretizations obtained at the first step of mesh refinement. These mesh discretizations were kept constant throughout the analyses with energy error norms equal to 19.9%, 11.1% and 5.62%, see Table 1b step 1. From the results it may be observed that obtained errors in the displacement solutions at the latest steps are larger than at the begining of analysis when almost the entire structure is still under the linear elastic behavior. Moreover, for the entire range of loading considered, the results obtained with the initially proposed mesh are inadequate.

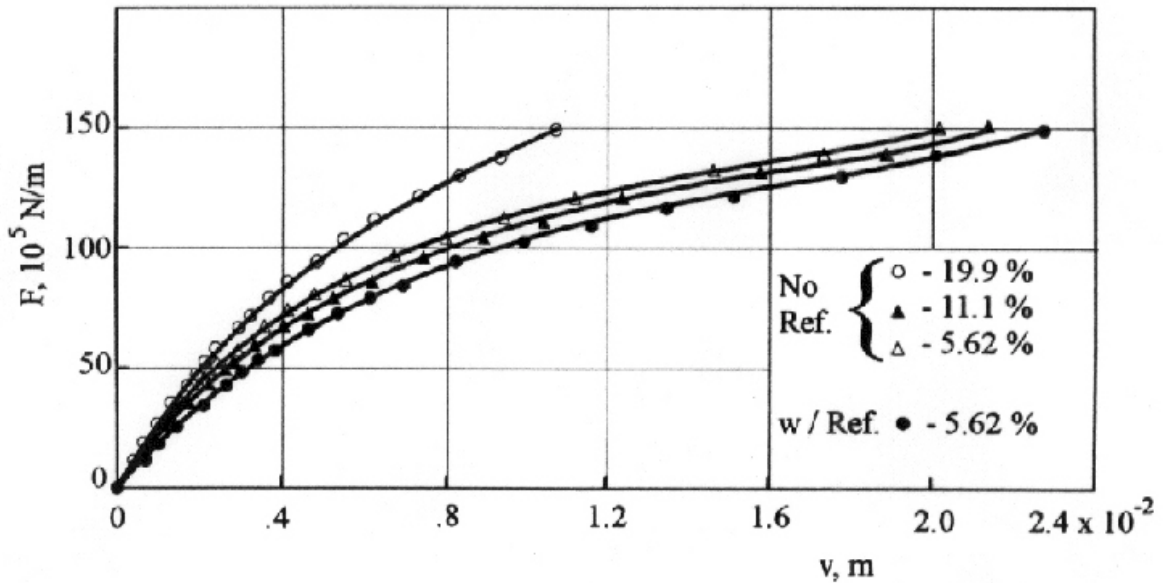


Figure 4 - Displacement-load Relations for the Analyses with Quadrilateral Elements, Using Different Mesh Discretizations, Obtained in the First Step of the h-Adaptive Procedure

Table I - Energy Error Norms and Number of Degrees-of-freedom Required at Each Load Step

(a) the triangular element model (6 node)

STEP	Energy Error Norm (%)	Deg-of-Freed	STEP	Energy Error Norm (%)	Deg-of-Free
1	27.0 - 8.36 - 4.84	312	11	6.57 - 5.14	430
2	4.84	312	12	5.77	430
3	4.97	312	13	6.43 - 5.03	490
4	5.11	312	14	5.78	490
5	5.38	312	15	6.86 - 5.11	568
6	5.87	312	16	5.89	568
7	6.43 - 4.68	384	17	6.99 - 5.27	666
8	4.95	384	18	6.01 - 5.08	772
9	5.27	384	19	5.93	772
10	5.86	384	20	7.22 - 5.45	926

(b) the quadrilateral element model (9 node)

STEP	Energy Error Norm (%)	Deg-of-Freed	STEP	Energy Error Norm (%)	Deg-of-Free
1	19.9 - 11.1 - 5.62	230	11	6.26 - 4.73	306
2	5.62	230	12	5.21	306
3	5.73	230	13	5.77	306
4	5.88	230	14	6.41 - 4.93	342
5	5.97	230	15	5.59	342
6	6.24 - 4.57	272	16	6.23 - 4.90	394
7	4.89	272	17	5.63	394
8	5.16	272	18	6.37 - 5.19	464
9	5.48	272	19	5.97	464
10	5.83	272	20	6.94 - 5.76	558

In the second problem the doubly-cracked square plate reported in Ref. (Almeida-94) and shown in Fig. 5 was considered. The uniform loading was linearly increased in 12 time steps, bringing the material to the behavior beyond its elastic limit. As in linear analysis, only one fourth of the plate was represented in the model analyses with four and eight element discretizations in the initial quadrilateral and triangular meshes, respectively. In both analyses only quadratic elements were considered with nine nodes for the quadrilateral mesh and six nodes for the triangular. As in the first problem, the material constitutive law employed is as shown in Fig. 2, using the overlay modelling technique. A 6% energy error norm criteria for mesh updating was required with 0.1% convergence rate for evaluation of the out-of-balance loading, during iterations. Obtained error norms from the finite element solutions are presented in Tables 2a and 2b for the element discretizations employed. As in the short cantilever beam problem, two mesh refinement steps were required due to the proposed crude initial meshes. The energy error norms gradually increase with loading increments, not requiring requirements until steps 5 and 6 for the triangular and quadrilateral meshes, respectively. At these steps one cycles of refinement was required for convergence. Larger values of the energy error norms require frequent cycles of refinements, as the plastic region advances over the elements. Final obtained meshes are shown in Figure 5; in dashed area is represented the elements with the stress state fulfilling the yielding condition, in eq. (5).

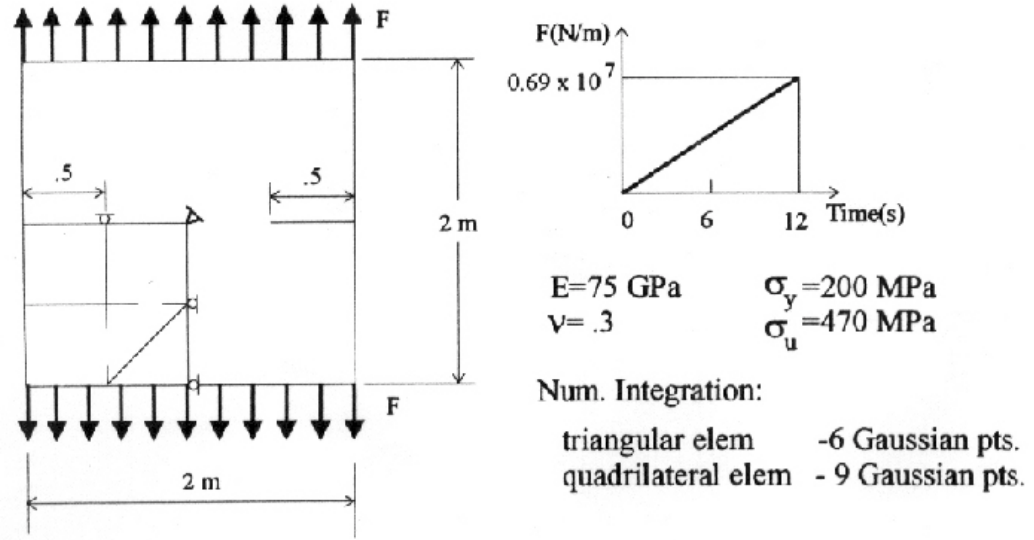


Figure 5 - Doubly-notched Plate Under Uniaxial Loading
Initial Finite Element Meshes Used.

Table II - Energy Error Norms and Number of Degrees-of-freedom Required at each Step for the Doubly-cracked Plate Analyses.

a)triangular element model (6 node)

STEP	Energy Error Norm(%)	Deg-of-Freed	STEP	Energy Error Norm(%)	Deg-of-Freed
1	33.8 - 16.4 - 7.31 - 2.49	2524	7	6.98 - 5.02	3048
2	2.57	2524	8	6.18 - 4.11	3392
3	2.96	2524	9	5.79	3392
4	3.61	2524	10	6.61 - 5.37	3858
5	4.57	2524	11	6.21 - 4.46	4276
6	5.72	2524	12	5.85	4276

b) quadrilateral element model (9 node)

STEP	Energy Error Norm(%)	Deg-of-Freed	STEP	Energy Error Norm(%)	Deg-of-Freed
1	27. - 10.8 - 3.16	1252	7	5.77	1666
2	3.51	1252	8	6.63 - 5.17	1836
3	4.02	1252	9	5.94	1836
4	4.87	1252	10	7.03 - 5.28	2018
5	5.67	1252	11	6.09 - 4.67	2204
6	6.65 - 4.91	1480	12	5.23	2204

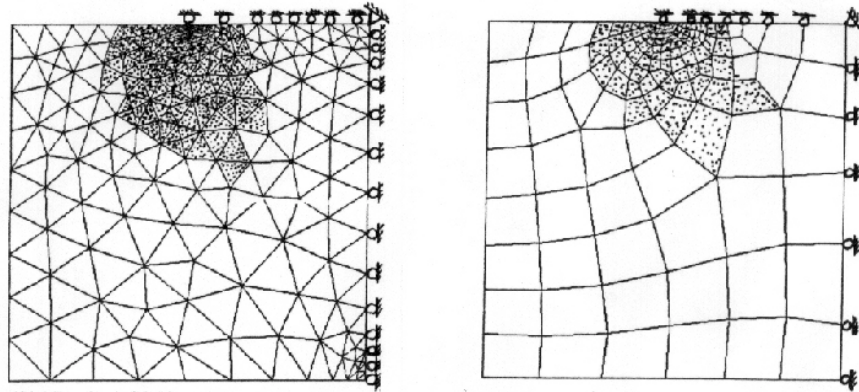


Figure 6 - Final Obtained Meshes with Triangular and Quadrilateral Finite Element Models Used in the Second Exemple.

CONCLUSIONS

Some recent developments with a fully automated h-adaptive strategy for an efficient two-dimensional finite element analysis has been presented and demonstrated with applications in two sampling problems presenting stress singularities. The use of the overlay concept to represent element constitutive behavior beyond yielding in a multi-linear relationship is physically considered as representing the action of individual grains. Moreover, the procedure can be treated as a mathematical artifice and, as stated, extended to general three dimension stress state representations. Moreover, the use of negative overlay weights may allow to simulate material strain-softening effects. As implemented the overall strategy provides an adequate basis for the formulation of a general h-p adaptive procedure.

Acknowledgments - The work has been partially supported by CNPq through research grant no. 530417 which is greatly appreciated.

REFERENCES

- Almeida, C.A., "Adaptivity and Mesh Generation in 2-D Finite Element Analysis", ASME Computers in Enging. Conf., 2, pp. 561-566, 1994.
- Almeida, C.A. & Santana, W.C., "An Effective H-Adaptive Procedure in Finite Element Analysis", Structural Optmization'93 Conf., 2, pp. 275-282, 1993.
- Bathe, K.J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice Hall, 1982.
- Hutchinson, J.W., "Plastic Deformation of Body-centered Cubic Polycrystals", J.Mech. Phys. Solids, 12, pp. 25- , 1964.

- Kelly, D.W., Gago, J., Zienkiewicz, O.C., and Babuska, I., "A-*Posteriori* Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part I - Error Analysis", *Int. J. Num. Meth. in Enging*, 19, pp. 1593-1619, 1983.
- Kröner, E., "Zur Plastischen Verformung des Viel Kristalls", *Acta Met.*, 9, pp. 155, 1961.
- Ladeveze, P., Coffignal, G. and Pelle, J.P., "Accuracy of Elasto-plastic and Dynamic Analysis", *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, Edited by I. Babuska, O.C. Zienkiewicz, J. Gago and E.R. de A. Oliveira, John Wiley and Sons Ltda, Ch. 11, 1986.
- Nayak, G.C. and Zienkiewicz, O.C., "Elasto-plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening", *Intl. J. Num. Meth. Enging.*, 5, pp. 113, 1972.
- Ortiz, M. and Quigley IV, J.J., "Adaptive Mesh Refinement in Strain Localization Problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. and Enging.*, pp 781-804, 1991.
- Owen, D.R.J., Prakash, A., and Zienkiewicz, O.C., "Finite Element Analysis of Nonlinear Composite Materials by Use of Overlay Systems", *Computers and Structures*, 4, pp. 1251-1267, 1974.
- Tetambe, R.P. and Saigal, S., "A Comparative Study of Flux Projection Type Error Estimators in Elasto-Plastic Finite Element Analysis", *ASME Computer in Enging. Conf.*, pp. 545-554, 1994.
- Zhu, J.Z., and Zienkiewicz, O.C., "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", *Intl. J. for Num. Meth. Eng.*, 24, pp. 337-357, 1987.
- Zienkiewicz, O.C., Valliappan, S., and King, I.P., "Elasto-plastic Solution of Engineering Problem; Initial Stress Finite Element Approach", *Intl. J. Num. Meth. Enging.*, 1, pp. 75, 1969.
- Zienkiewicz, O.C., and Zhu, J.Z., "Adaptive and Mesh Generation", *Int. J. for Num. Meth. Eng.*, 32, pp. 783-810, 1991.
- Zienkiewicz, O.C., and Zhu, J.Z., "The Superconvergent Patch Recovery and A *Posteriori* Error Estimates. Part I: The Recovery Technique", *Intl. J. for Num. Meth. Eng.*, 33, pp. 1331-1364, 1992.

ESTUDO DA DEGRADAÇÃO MICROESTRUTURAL DE UMA LIGA DE TITÂNIO EM FUNÇÃO DA TAXA DE DEFORMAÇÃO E DA TEMPERATURA

Miguel Justino Ribeiro Barboza
Carlos Antonio Reis Pereira Baptista
Sergio Schneider
Olivério Silva^(*)

Faculdade de Engenharia Química de Lorena, Departamento de Engenharia de Materiais, Caixa Postal 116, 12600-000, Lorena, SP, Brasil. E-mail: mbarbosa@demar.fcenquil.br

^(*) Centro Técnico Aeroespacial, Divisão de Materiais, Praça Mal. Eduardo Gomes, 50, Campo Montenegro, 12228-000, São José dos Campos, SP, Brasil.

Resumo

Neste trabalho são empregados conceitos da mecânica do dano contínuo (MDC), que constitui uma área da mecânica dos sólidos iniciada com a definição de um parâmetro escalar de características isotrópicas associado à redução de área útil de um elemento estrutural sob condições de fluência. A MDC atingiu um estágio de desenvolvimento que permite seu uso em diversas aplicações práticas. Seu forte embasamento em análises e observações experimentais permitiu compreender os vários mecanismos responsáveis pelos processos de degradação microestrutural e sua íntima relação com a ruptura dos diferentes tipos de componentes mecânicos. Este trabalho tem como objetivo associar o comportamento elástico a um parâmetro representativo da degradação microestrutural através de medidas do módulo de Young, visando avaliar e quantificar o efeito do dano por deformação plástica sobre esta propriedade. Para tanto, realizaram-se testes com amostras da liga Ti-13V-11Cr-3Al, sob condições de tração uniaxial e diferentes taxas de deformação, à temperatura ambiente e em temperatura criogênica (77 K). O trabalho é complementado por análises fractográficas das amostras ensaiadas.

Palavras-chaves: Propriedades mecânicas, liga de titânio, temperaturas criogênicas.

INTRODUÇÃO

As diferentes solicitações mecânicas e ambientais provocam alterações na microestrutura dos metais e ligas empregados com fins estruturais. Tendo em vista que essas alterações reduzem a resistência mecânica dos materiais, o termo “dano” é empregado para designá-las. Os processos de acumulação de dano podem ocorrer sob deformação elástica (como no caso da fadiga de alto ciclo), deformação elasto-plástica e sob condições de fluência. Em presença de grandes deformações plásticas, o dano se manifesta pela nucleação e crescimento de microcavidades e microtrincas no metal (Kachanov, 1986). Os diversos tipos de defeitos e sua distribuição correspondem a diferentes descrições matemáticas do dano. A mecânica do dano contínuo (MDC) introduz um parâmetro, que pode ser entendido como uma variável contínua que se relaciona à densidade dos defeitos gerados durante a degradação do material. No caso mais simples, assumindo-se que o dano seja isotrópico, o parâmetro de dano pode ser de natureza escalar. O efeito do dano nas propriedades elásticas do material permite que se avalie

indiretamente o dano sofrido através da variação de seu módulo elástico (Lemaitre, 1992). Neste caso, o dano d pode ser estimado de acordo com a equação (1), sendo conhecido o módulo de Young E e medindo-se o módulo de elasticidade do material danificado, \tilde{E} :

$$d = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad (1)$$

Esta metodologia foi empregada em um trabalho recente (Paes *et al*, 1999), em que medidas do módulo de Young obtidas em ensaios de tração e também através do teste não destrutivo de ultra-som foram associadas a um parâmetro de dano com o objetivo de estimar a degradação associada à fadiga em amostras de titânio de pureza comercial.

O titânio e suas ligas, devido à possibilidade de uma combinação favorável entre propriedades mecânicas e físicas, vêm sendo muito utilizados nas mais variadas áreas: indústria aeronáutica e aeroespacial, indústria naval e em aplicações criogênicas diversas. Além da alta razão resistência por densidade, as ligas de titânio apresentam a característica de serem não magnéticas. Possuem maior resistividade elétrica e menor condutividade térmica que o aço inox austenítico. Geralmente, todas essas propriedades são favoráveis em aplicações como material estrutural em ambientes criogênicos. O titânio apresenta, à temperatura ambiente, estrutura cristalina hexagonal compacta, denominada fase α . Esta estrutura se transforma alotrópicamente para cúbica de corpo centrado, chamada fase β , a 1155,5 K. É basicamente na manutenção de uma ou outra fase que se baseia a adição de elementos de liga ao Ti. Os elementos que favorecem a fase β (chamados betagênicos) reduzem a temperatura de transformação alotrópica e incluem os metais de transição do grupo IV. As ligas Ti- β além de apresentarem alta resistência, boa plasticidade e alta temperabilidade, podem combinar baixo módulo de elasticidade com alta resistência à corrosão. Dentre essas, destaca-se a liga Ti-13V-11Cr-3Al, que, tendo sido a primeira liga Ti- β comercial (introduzida em 1952), é empregada na indústria aeroespacial em componentes estruturais de alta resistência (Donachie Jr., 1988; Flower, 1990; Nagai *et al*, 1985). Além disso, de acordo com a norma ASTM E399 (1990) esta liga é a mais indicada para a confecção de braços para medidores de deslocamento (*clip gauges*) empregados nos ensaios de tenacidade à fratura, devido à sua alta relação entre limite elástico e módulo de Young na condição solubilizada. A possibilidade do emprego desses medidores em baixas temperaturas é um fator adicional a justificar o estudo de seu comportamento mecânico a 77 K.

O presente trabalho tem como objetivo associar o comportamento elástico da liga Ti-13V-11Cr-3Al a um parâmetro representativo da degradação microestrutural através de medidas do módulo de Young, visando avaliar e quantificar o efeito do dano por deformação plástica sobre esta propriedade. Para tanto, realizaram-se testes com amostras da liga Ti-13V-11Cr-3Al, sob condições de tração uniaxial e diferentes taxas de deformação, à temperatura ambiente e em temperatura criogênica (77 K). O trabalho é complementado por análises fractográficas das amostras ensaiadas.

MATERIAIS E MÉTODOS

O material foi recebido na forma de barras cilíndricas com 7,6 mm de diâmetro. Através de análise química por ICP encontrou-se, para os teores dos elementos de liga e para o ferro, os valores mostrados na Tabela 1. Estes valores são comparados com as faixas de variação estabelecidas para esta liga de acordo com a especificação AMS 4917. A análise metalográfica mostrou que a microestrutura do material compõe-se de grãos da fase metaestável β , conforme pode ser observado na Figura 1.

Tabela 1. Composição da liga (% em peso)

	V	Cr	Al	Fe
Mat. Recebido	14,1	11,1	3,32	0,18
AMS 4917	12,5-14,5	10,0-12,0	2,5-3,5	0,35 máx.

Os ensaios mecânicos foram realizados em uma máquina servo-hidráulica MTS com capacidade de 250 kN. Os corpos de prova foram confeccionados segundo as dimensões mostradas na Figura 2, de acordo com a norma ASTM E8M. Os ensaios foram realizados nas temperaturas ambiente (293 K) e do nitrogênio líquido (77 K), sendo que para os ensaios a baixa temperatura foi necessário desenvolvimento de um dispositivo para imersão das amostras em um banho de nitrogênio líquido. Para a aquisição dos dados de deformação foi utilizado o extensômetro MTS mod. 632.11F21, com faixa de trabalho de $\pm 15\%$ e adequado para uso em baixa temperatura.

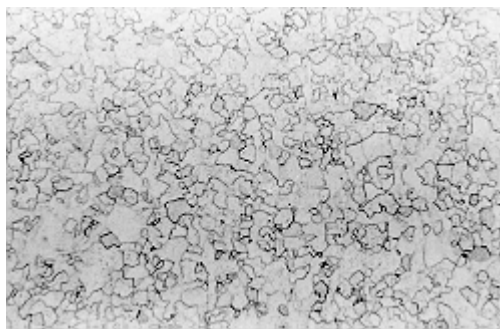


Figura 1. Microestrutura do material, corte transversal (aumento 100 \times)

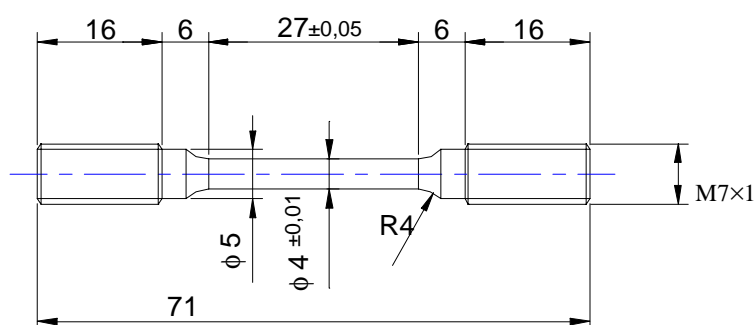


Figura 2. Corpo de prova para ensaios de tração

Para os ensaios de tração à temperatura ambiente foram adotadas 3 taxas de deformação: 0,001/min, 0,01/min e 0,1/min. As duas primeiras foram adotadas também no caso dos ensaios a baixa temperatura. Estas taxas foram reproduzidas em ensaios com descarregamentos sucessivos, realizados com o objetivo de se avaliar o dano por deformação

plástica. As superfícies de fratura de amostras ensaiadas à temperatura ambiente e a 77 K foram observadas ao microscópio eletrônico de varredura.

RESULTADOS

Na Figura 3 são apresentadas as curvas $\sigma \times \epsilon$ correspondentes aos ensaios de tração sob as diferentes condições de temperatura e taxas de deformação adotadas. Os valores do módulo de Young correspondentes às diferentes condições de ensaio são mostrados na Tabela 2. Pode-se observar que o efeito da temperatura se sobrepõe ao efeito da taxa de deformação no que diz respeito ao comportamento sob tração uniaxial do material, nas condições estudadas neste trabalho. A Figura 4 mostra a variação do limite de escoamento (σ_e) e do limite de resistência à tração (σ_t) com a taxa de deformação, para o caso dos ensaios à temperatura ambiente.

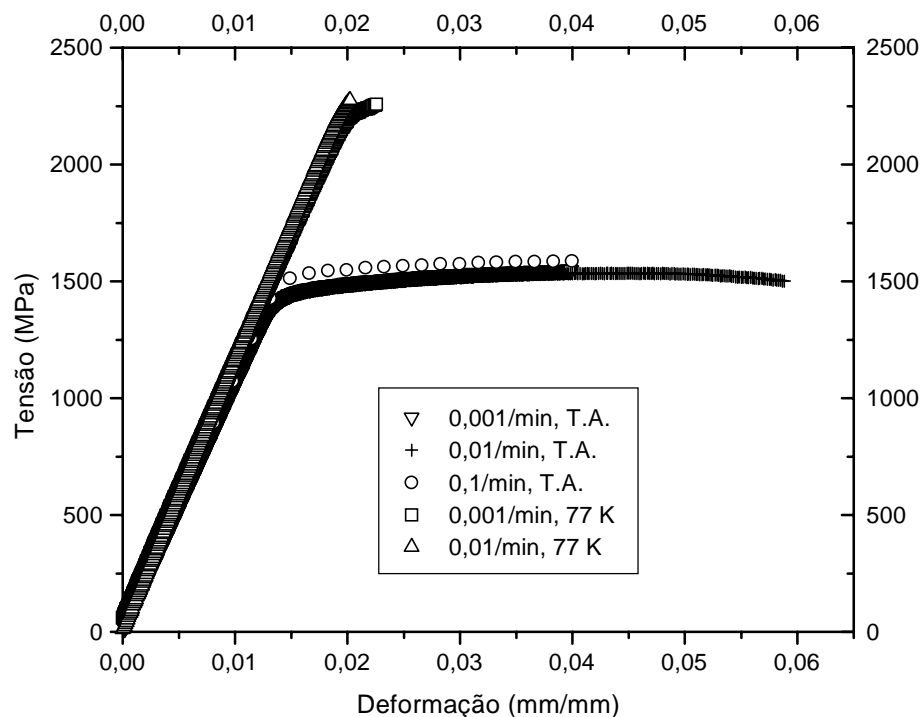


Figura 3. Curvas Tensão-Deformação

Tabela 2. Variação do Módulo de Young

E (GPa)	0,001/min	0,01/min	0,1/min
Temp. Ambiente	105,7	104,8	106,6
77 K	108,5	112,8	-

Na Figura 5 pode-se observar o efeito da taxa de deformação sobre o coeficiente de encruamento, obtido de acordo com a norma ASTM E646, para os ensaios à temperatura ambiente. No caso dos ensaios a 77 K, devido à pouca deformação plástica, esses parâmetros não puderam ser determinados.

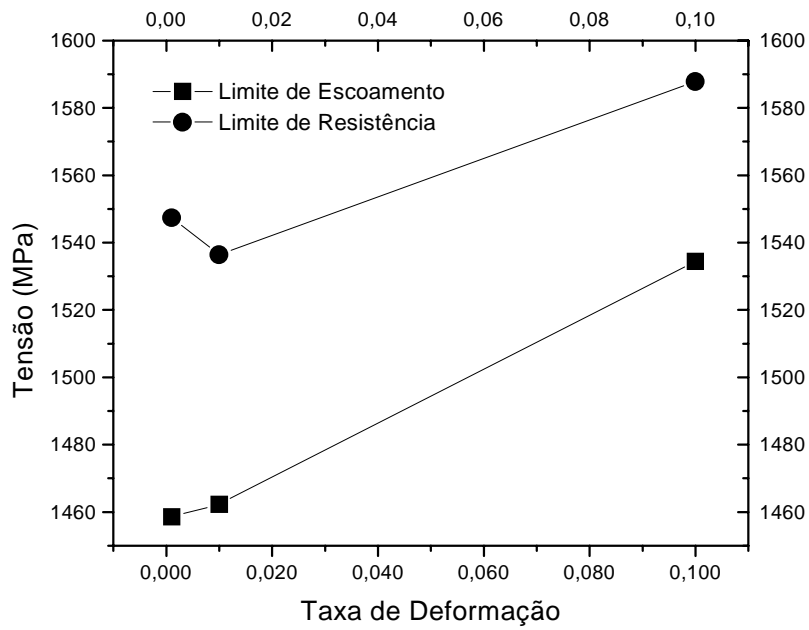


Figura 4. Variação das Propriedades de Tração com a Taxa de Deformação

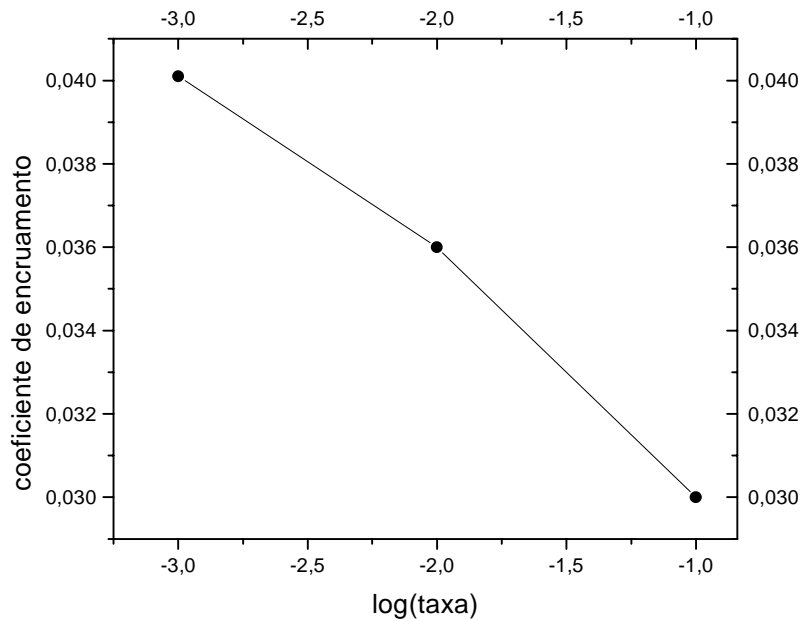


Figura 5. Variação do Coeficiente de Encruamento com a Taxa de Deformação

Para analisar o efeito do dano, foram realizados ensaios de tração com descarregamentos sucessivos, nas diferentes temperaturas e taxas de deformação estudadas. Como exemplo, mostra-se na Figura 6 a curva $\sigma \times \epsilon$ correspondente à taxa de 0,01/min para a temperatura ambiente.

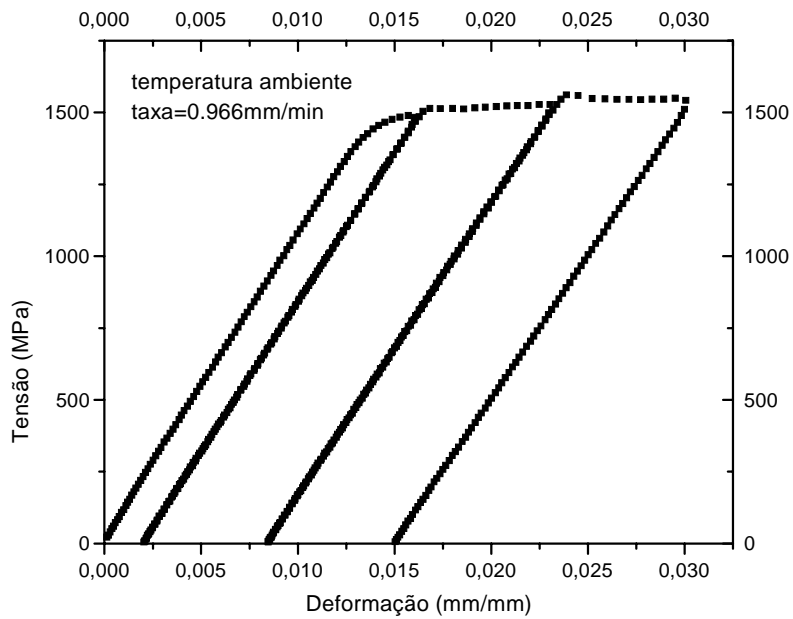


Figura 6. Ensaio com Descarregamentos Sucessivos

A evolução do dano, calculado de acordo com a equação (1), é mostrada nas Figuras 7 (temperatura ambiente) e 8 (77 K). Observa-se na Figura 7 que a evolução do dano é independente da taxa de deformação. Na Figura 8, pode-se notar que o dano a 77 K atingiu níveis compatíveis com aquele à temperatura ambiente, embora a deformação plástica tenha atingido apenas 0,25%, ante 1,5% de deformação plástica atingida no ensaio com descarregamentos sucessivos à temperatura ambiente.

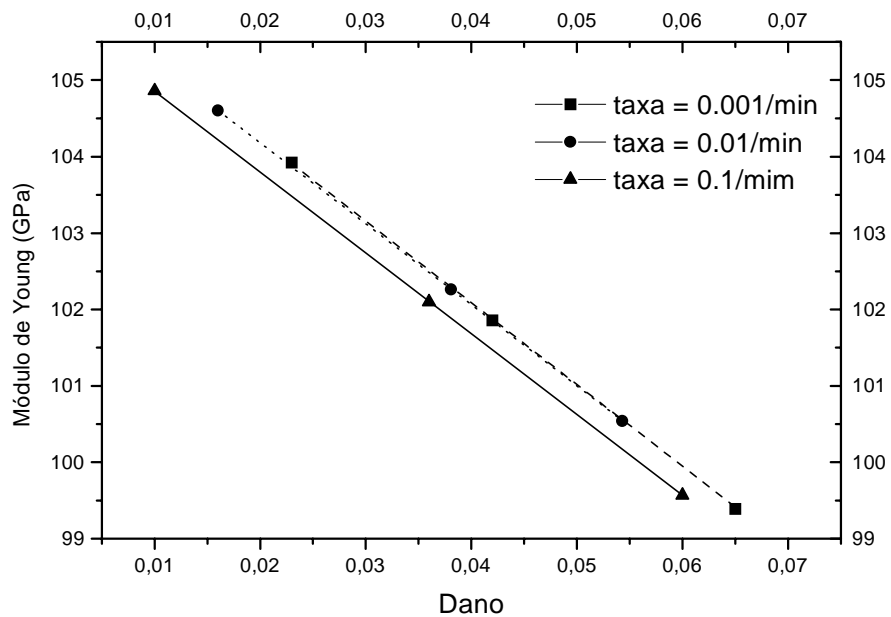


Figura 7. Correlação entre Dano e Módulo de Young, Temperatura Ambiente

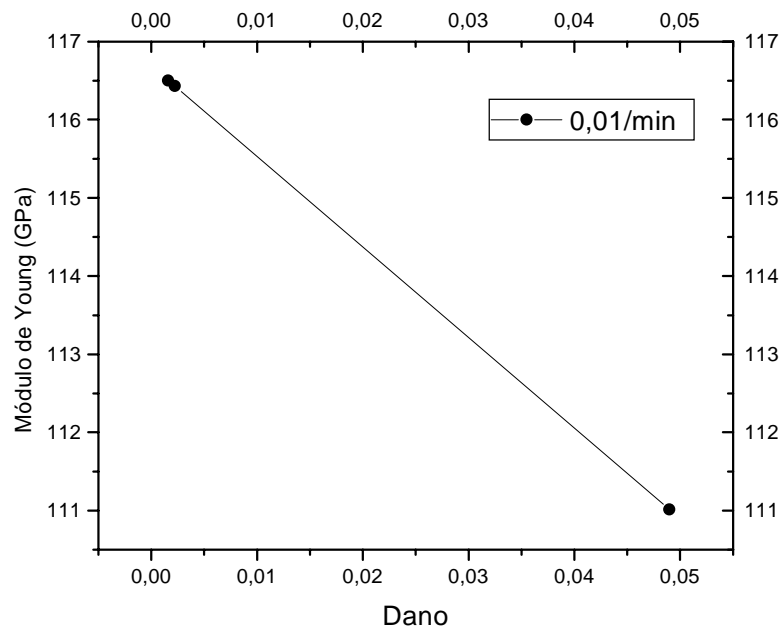


Figura 8. Correlação entre Dano e Módulo de Young, 77 K

As Figuras 9 e 10 são dois exemplos representativos da superfície de fratura, respectivamente a 77 K e à temperatura ambiente. Na Figura 9 o principal aspecto concentra-se no mecanismo intergranular, caracterizando intensa fragilidade nessas condições de ensaio. No entanto, a Figura 10 apresenta poucas regiões relativas a estrutura alveolar, destacando-se de forma mais intensa os micromecanismos responsáveis pela fratura intergranular.

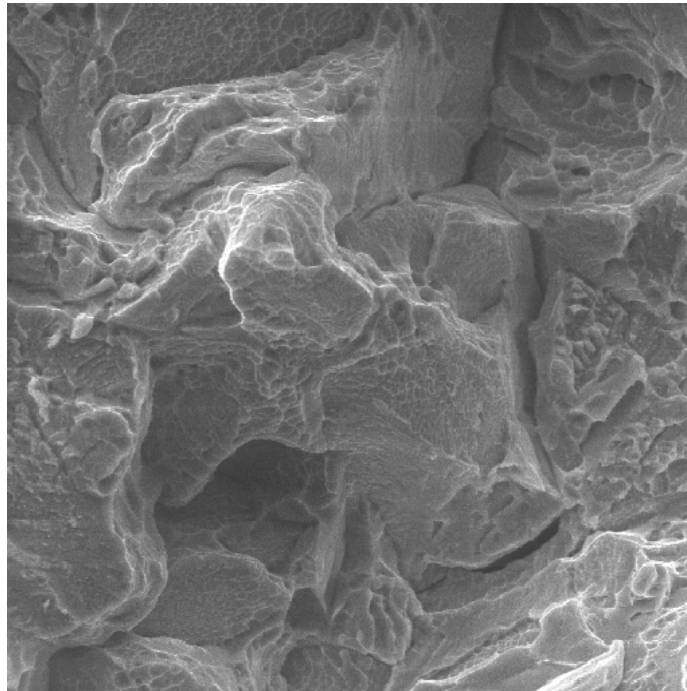


Figura 9. Superfície de Fratura a 77 K (1000 ×)

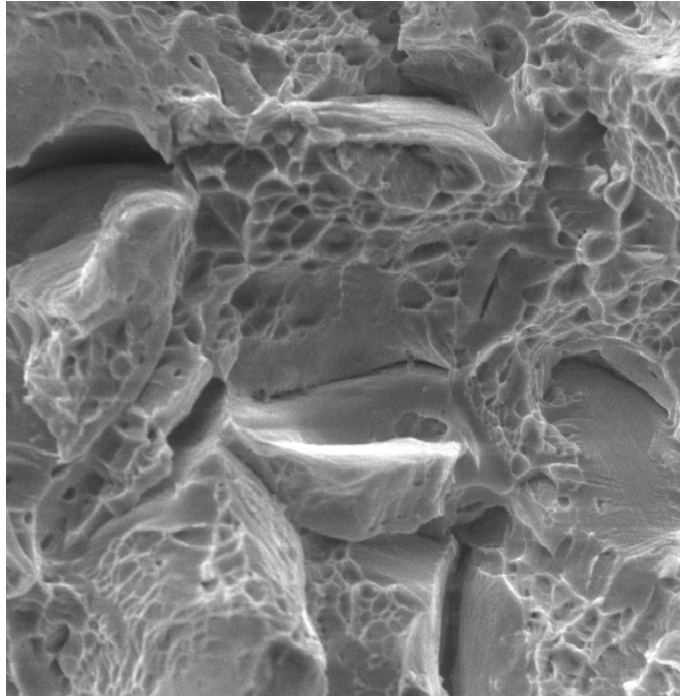


Figura 10. Superfície de Fratura à Temperatura Ambiente (1000 ×)

CONCLUSÕES

Observou-se que as propriedades em tração e a evolução do dano não foram significativamente afetadas pela taxa de deformação, dentro dos limites estudados neste trabalho. Os ensaios a 77 K resultaram em um aumento significativo das propriedades de resistência em tração e uma intensa redução na componente plástica até a fratura. O principal mecanismo de fratura corresponde a cavidades intergranulares, independente da temperatura de ensaio. O parâmetro de dano não apresentou uma dependência significativa em relação à temperatura, embora os níveis de deformação plástica verificados nos ensaios com descarregamentos sucessivos a 77 K tenham sido 6 vezes menores que no caso da temperatura ambiente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Donachie Jr., J.D., 1988, "Titanium, A Technical Guide", ASM International, Metals Park, Ohio, 469 p.
- Flower, H.M., 1990, "Microstructural Development in Relation to Hot Working of Titanium Alloys. Materials Science and Technology, v.6(11), p.1082-1092.
- Kachanov, L.M., 1986, "Introduction to Continuum Damage Mechanics", Martinus Nijhoff, Dordrecht, Holanda, 135p.
- Lemaitre, J., 1992, "A Course on Damage Mechanics", Springer-Verlag, Berlin, Alemanha, 228p.
- Nagai K., Yuri T., Umezawa O. Andishikawa, 1985, "Fatigue and fracture of Ti alloys at cryogenic temperatures", 11th International Conf. on Magnet Technology, p.754-759.
- Paes, M., Baptista, C.A.R.P., Barboza, M.J.R., Silva, E.M.R., Reis, F.P., Pastoukhov, V.A., 1999, "Aspectos do Comportamento Mecânico do Titânio Grau 2 Submetido a Carregamentos Cíclicos", Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Águas de Lindóia, SP, Brasil, 10p. (em CD-ROM).

FRACTURE AND FATIGUE ANALYSIS USING A GRADIENT-ENHANCED CONTINUUM DAMAGE THEORY

Heraldo S. Costa Mattos, Stella Maris Pires-Domingues

Laboratório de Mecânica Teórica e Aplicada, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal Fluminense - UFF, Niterói - RJ - Brasil - 24210-240

Fulvio Giacomo Chimisso

Departamento de Materiais de Construção, Fundação Universidade do Rio Grande - FURG, Rio Grande - RS - Brasil - 96200-210

Fernando Alves Rochinha

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro - EE-COPPE/UFRJ, CP 68503, Rio de Janeiro - RJ - Brasil - 21945-970

Abstract

This paper discusses the possibility of structural failure prediction using a theory of continuum media with microstructure. The proposed theory allows an adequate description of the strain-softening and localization behaviors due to the material degradation. This theory is similar to some other continuum damage theories for elastic materials that introduce higher order gradients of the damage variable in the constitutive model in order to avoid the ill-posedness in the post-localization range. The possibility and main features of such kind of approach are discussed through examples concerning elastic-plastic and brittle-elastic behaviors.

Keywords: Continuum Damage Mechanics; Fracture, Fatigue.

1- INTRODUCTION

Continuum Damage Mechanics uses a phenomenological approach to model the effect of microscopic geometric discontinuities induced by the deformation process (micro-cracks, micro-voids, so on) on the macroscopic behaviors of a structure. In continuum damage theories an internal variable related to the growth and coalescence of micro-defects before the macroscopic crack initiation (whose definition and physical interpretation may vary from one model to the other). Therefore, the problem becomes to establish the constitutive relations for the damage variable as a function of the other state variables.

Many different continuum damage theories have been proposed to describe the degradation process in elastic brittle materials. The local damage theories, Kachanov (1986) and Lemaitre *et al* (1990), often lead to a physically unrealistic description of strain localization phenomena. In general, due to the loss of ellipticity of the governing equations in the post-localization range, the resulting mathematical problems may present an infinite number of solutions with discontinuous fields of displacement gradients what leads to numerical difficulties of mesh-dependence, Knowles *et al.* (1978), Bazant *et al.* (1988) and Vree *et al* (1995). In order to avoid the loss of well-posedness in the post-localization range, some alternative non-local approaches were proposed, Costa-Mattos *et al* (1992) and (1995), Frémond *et al* (1996) and Domingues (1996), for example. Some of these alternative theories

introduce higher order gradients of the damage variable in the constitutive model. Although such theory allow a mathematically correct modeling of the strain localization phenomena, they are usually considered very complex to handle from the numerical point of view.

The present paper deals with an alternative gradient enhanced theory in which the continuum is supposed to possess a microstructure. In the resulting nonlinear mathematical problems the coupling between damage and strain is circumvented by means of a splitting technique which allows to solve the nonlinear problem through a sequence of simpler linear problems, Domingues (1996). To demonstrate the capability of the proposed model some examples involving elastic and elastic-plastic problems are exploited.

2- MODELING - BASIC BALANCE EQUATIONS

A body is defined as a set of material points B which occupies a region Ω of the Euclidean space at the reference configuration. In this theory, besides the classical variables that characterize the kinematics of a continuum medium (displacements and velocities of material points), an additional scalar variable $\beta \in [0,1]$, is introduced. This variable is related with the links between material points and can be interpreted as a measure of the local cohesion state of the material. If $\beta = 1$, all the links are preserved and the initial material properties are preserved. If $\beta = 0$ a local rupture is considered since all the links between material points have been broken. The variable β is associated to the damage variable D by the following relation: $\beta = 1 - D$. Since the degradation is an irreversible phenomena, the rate $\dot{\beta}$ must be negative or equal to zero.

In this section are presented a summary of the basic balance equations of the modeling. Here, the appropriate conservation laws that governing the evolution of a continuous damageable body are postulated. To simplify the presentation, non mechanical external actions that may affect the cohesion of the material points are neglected. A more detailed discussion about the basic principles can be found in Costa-Mattos *et al* (1995).

The main difference from other damage theories are some additional terms in the balance of energy equations and a additional conservation law for the microscopic forces associated to β must be postulated. Thus, besides the classical balance relations for linear momentum and angular momentum, the evolution is supposed to be governed by the following local balance relations:

$$\text{div } \mathbf{H} - \mathbf{F} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{H} \cdot \nabla \dot{\beta} + F \dot{\beta} - \text{div } \mathbf{z} + \rho r \quad (2)$$

where ρ is the density, $\boldsymbol{\sigma}$ is the stress tensor, e is the specific internal energy, \mathbf{u} is the displacement, \mathbf{z} is the heat flux vector, \mathbf{H} is the microscopic internal force related to $\nabla \beta$, F is the microscopic internal force related to β and r is a heat source per mass and time. The equation (1) is the balance of microscopic forces and the equation (2) is the balance of energy.

3- CONSTITUTIVE EQUATIONS

The balance equation and the second law restriction are valid for any kind of process. A complete modeling requires additional information in order to characterize the behavior of

each kind of material. In this section it is presented a general constitutive theory for damageable materials.

State variables: Under the hypothesis of small deformations and isothermal process, the local state of a damageable material is supposed to be a function of the total strain $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]$, of the cohesion variable β and its gradient $\nabla\beta$. To complete the presentation of the constitutive theory of a hypothetical material, initially only a scalar internal variable ζ related with other dissipative mechanisms is considered.

Free energy - state laws: Following the classical assumption of the Thermodynamic of Irreversible Processes, the free energy Ψ is supposed to be a function of the state variables with the following form:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta, \nabla\beta, \theta, \zeta) = \hat{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta, \nabla\beta, \zeta) + \frac{1}{2}k\nabla\beta \cdot \nabla\beta \quad (3)$$

where $\hat{\Psi}$ is a differentiable function such that $\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\beta} \geq 0$ and k is a positive function of the absolute temperature θ . The term $(\frac{k}{2})\nabla\beta \cdot \nabla\beta$ is so considered to give β a diffusive behavior, thus smoothing the field β on Ω .

The here called thermodynamic forces $(\boldsymbol{\sigma}, B^\beta, \mathbf{H}, s, B^\zeta)$ related to the state variables $(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta, \nabla\beta, \zeta)$ are defined from the free energy by the state laws:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial\Psi}{\partial(\nabla\beta)} = k\nabla\beta \quad (5)$$

$$B^\beta = \frac{\partial\Psi}{\partial\beta} \quad (6)$$

$$B^\zeta = \frac{\partial\Psi}{\partial\zeta} \quad (7)$$

It can be observed that the state variables are taken as independent parameters in equations (4) - (7). To complete the constitutive equations additional information about the dissipative behavior must be obtained from the Fourier law and evolution laws for β and ζ .

Evolution laws

The evolution laws are obtained from a potential $\Phi(B^\beta, B^\zeta; \boldsymbol{\varepsilon}, \beta, \zeta)$:

$$\dot{\zeta} = -\frac{\partial\Phi}{\partial B^\zeta} \quad \text{and} \quad \dot{\beta} = -\left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial B^\beta} - \frac{1}{c_0}\mathbf{F} \right\rangle \quad (8)$$

where c_0 is a positive material constant, $\langle a \rangle = \max\{0, a\}$. An alternative set of constitutive equations is given by:

$$\dot{\zeta} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial B^\zeta} \quad \text{and} \quad \dot{\beta} = -\left\langle \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial B^\beta} - \frac{1}{c_0} F \right\rangle, \quad \lambda \geq 0; \Phi \leq 0; \lambda \Phi = 0 \quad (9)$$

In Chimisso (1994) and Costa-Mattos *et al* (1995) is shown that the state laws, equations (4) - (7), and the evolution laws, equations (8) or (9), form a complete set of constitutive equations that always verify the second law restriction, regardless the geometry of the body, the external actions, the initial and boundary conditions, provided Φ is a convex and positive function of (B^ζ, B^β) such that:

$$\Phi(B^\beta = 0, B^\zeta = 0; \boldsymbol{\varepsilon}, \beta, \zeta) = 0 \quad \forall (\boldsymbol{\varepsilon}, \beta, \zeta) \quad (10)$$

3.1- Brittle-elastic constitutive model

The constitutive equations for brittle-elastic material are presented after some specific assumptions about the state variables and the state laws.

State variables: The local state of a brittle-elastic material is supposed to be a function of the total strain $\boldsymbol{\varepsilon}$, of the cohesion variable β and of its gradient $\nabla\beta$.

Free energy – state laws: In linear elasticity, it can be supposed that the free energy of the elastic material is composed by a mechanical term $\hat{\Psi}_e(\boldsymbol{\varepsilon})$. Thus, the proposed free energy Ψ can be represented by the following expression:

$$\Psi = \beta \hat{\Psi}_e(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{2} k \nabla\beta \cdot \nabla\beta \quad (11)$$

$$\hat{\Psi}_e(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mu \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \lambda (\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 \quad (12)$$

where μ and λ are Lamé's constants. The here called thermodynamic forces $(\boldsymbol{\sigma}, B^\beta, \mathbf{H}, s)$ related to the state variables $(\boldsymbol{\varepsilon}, \beta, \nabla\beta)$ are defined from the free energy by the state laws. These equations have the same form presented in the equations (4) to (7).

Evolution laws: The evolution law for cohesion variable β can be derived from the evolution law adopted in the local damage theory:

$$\dot{\beta} = -\frac{1}{C} \langle (B^\beta - w) - F \rangle, \quad \text{if } \beta > 0 \quad \text{and} \quad \dot{\beta} = 0, \quad \text{if } \beta = 0 \quad (13)$$

where C and w are positive constants of the material, respectively, a coefficient related to the viscosity and the elastic strain energy (the area below the linear part of the curve stress versus strain). The constant C is associated to constant c_0 of (8).

After some consideration, Costa-Mattos *et al* (1995) and Domingues (1996), the final relations are the following:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\beta E}{1+\nu} \right) \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon} \right] \quad (14)$$

$$F = \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \left[\frac{\nu}{(1-2\nu)} (\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \right] - w + \lambda_\beta + C\dot{\beta} + \lambda_{\dot{\beta}} \quad (15)$$

$$\mathbf{H} = k(\nabla\beta) \quad (16)$$

where E is the Young modulus, ν is the Poisson's ratio, C is a coefficient related to the viscosity and k is a diffusive constant. The terms λ_β and $\lambda_{\dot{\beta}}$ are Lagrange multipliers associated, respectively, to the constraints $\beta \geq 0$ and $\dot{\beta} \leq 0$, they are such that: $\lambda_\beta \leq 0$, $\beta\lambda_\beta = 0$ and $\lambda_{\dot{\beta}} \leq 0$, $\dot{\beta}\lambda_{\dot{\beta}} = 0$.

3.2- Elastic-plastic constitutive model

State Variables : Under the hypothesis of small deformations, the local state of a elastic-plastic material is supposed to be a function of the total strain $\boldsymbol{\varepsilon}$, of the plastic strain $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, of the cohesion variable β , of its gradient $\nabla\beta$, and also of a scalar variable p associated with the isotropic hardening, and of a second order tensor variable \mathbf{c} associated with the kinematic hardening .

Free Energy - State Laws: Following the classical assumption of the Thermodynamic of Irreversible Processes, the free energy is supposed to be a function of the state variables. Thus, the following expression is proposed for the free energy, considering a elastic-plastic behaviour:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p, \mathbf{c}, \beta, \nabla\beta) = \beta \left[\Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \Psi_p(p) + \Psi_c(\mathbf{c}) \right] + \frac{1}{2} k \nabla\beta \cdot \nabla\beta \quad (17)$$

$$\Psi_p = v_1 \left(p + \frac{e^{-v_2 p}}{v_2} \right) + p \sigma_y \quad (18)$$

$$\Psi_c = \frac{1}{2} a (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) \quad (19)$$

where $\Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \hat{\Psi}_e(\boldsymbol{\varepsilon})$, equation (12), v_1 , v_2 , a , σ_y are non negative constants and $(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \boldsymbol{\varepsilon}^e$ is the elastic strain tensor. The here called thermodynamic forces $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}, y, G, \mathbf{H})$, related to the state variables $(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbf{c}, p, \beta, \nabla\beta)$ are defined from the free energy by the state laws:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{\beta E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}^e \right] \quad (20)$$

$$\mathbf{x} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{c}} = \beta (a \mathbf{c}) \quad (21)$$

$$y = \frac{\partial \Psi}{\partial p} = \beta \left[v_1 (1 - e^{-v_2 p}) + \sigma_y \right] \quad (22)$$

$$G = \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = \Psi_e + \Psi_p + \Psi_c \quad (23)$$

where $\boldsymbol{\sigma}$ is the stress tensor and \mathbf{H} was presented in last section.

Plastic Potential - Evolution Laws: To complete the constitutive equations additional information about the dissipative behaviour must be given. This information can be obtained from a plastic potential F and are called evolution laws. The potential F is supposed to have the following form :

$$\chi = J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x}) - y + g(\mathbf{x}, G; \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p, c, \beta) \quad (24)$$

with $J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x})$ being the Von Mises equivalent stress, and

$$g = \frac{b}{2a}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) - \frac{ab}{2}(\beta \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) + \frac{G^2}{2S_0} - \frac{1}{2S_0} \left(\frac{\Psi_e + \Psi_p + \Psi_c}{\beta} \right)^2 \quad (25)$$

Besides the plastic potential χ , another potential $\hat{\chi}(\hat{\beta}) = \hat{\beta}$, is used to take into account the restriction $\hat{\beta} \leq 0$. Hence the following evolution laws are postulated:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial \chi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda \frac{3}{2} [(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x})_{\text{dev}} / J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{x})] \quad (26)$$

$$\dot{\mathbf{c}} = -\lambda \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{b}{a} \mathbf{x} \lambda \quad (27)$$

$$\dot{p} = -\lambda \frac{\partial \chi}{\partial y} = \lambda \quad (28)$$

$$\dot{\beta} = F - \lambda \frac{\partial \chi}{\partial G} - \hat{\lambda} \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \hat{\beta}} = F - \frac{\lambda (\Psi_e + \Psi_p + \Psi_c)}{S_0} - \hat{\lambda} \quad (29)$$

where $\lambda \geq 0$, $\chi \leq 0$, $\lambda \chi = 0$ and $\hat{\lambda} \geq 0$, $\hat{\chi} \leq 0$, $\hat{\lambda} \hat{\chi} = 0$. Besides, F is a microscopic internal force associated with β , λ is the Lagrange multiplier related with the restriction $\chi \leq 0$, and $\hat{\lambda}$ is the Lagrange multiplier related with the restriction $\hat{\chi} \leq 0$.

It is possible to prove that the state laws (20) - (23) and the evolution laws (26) - (29) define a complete set of thermodynamically admissible constitutive equations.

Introducing equations (16) and (29) in the equation of the balance of microscopic forces (Chimisso & Costa Mattos, 1994) and using the change of variables: $\beta = 1 - D$, the following balance equation is obtained:

$$\langle C \Delta D + \lambda (\Psi_e + \Psi_p + \Psi_c) / S_0 \rangle = \dot{D} \quad (30)$$

4- EXAMPLES

The main goal of this work is to show a general idea of the theory which is presented and discussed in several papers, for example, Domingues (1996) and Chimisso (1994).

4.1- Brittle-elastic

The double edge cracked plate, which contains crack length $a = 4$ mm, length $L = 25$ mm and width $W = 10$ mm, is loaded with a prescribed displacement $u(t)$ at the both sides, figure 1. The existent symmetry permits to analyze only a quarter of the plate, in that case the upper right quarter of the plate, figure 1.

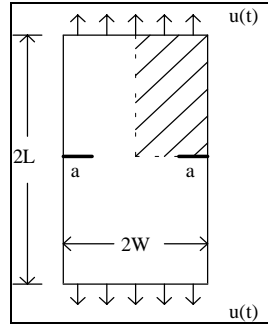


Figure 1. The cracked plate

The usual bilinear quadrilateral finite element mesh are used on the discretization of the problem. In the region where the highest levels of damage are expected the mesh has a great quantity of elements with small mesh parameter. In this study were considered plates of concrete and the following values: $E=27.0\text{GPa}$, $k = 0.2\text{MPa}\cdot\text{mm}^2$, $C=1.0 \times 10^{-3} \text{MPa}\cdot\text{s}$ and $w=5.0 \times 10^{-5} \text{MPa}$, Domingues (1996). The prescribed displacement and the adopted time step are given respectively by $u(L,t) = \alpha t$, ($\alpha = 5.0 \times 10^{-3} \text{mm/s}$).

Figure 2 shows the damage evolution on the plate. To simulate the damage evolution on the plate, the damage field ($D = 1 - \beta$) at four different time steps are presented. After the instant 1.577s , the plate is broken in two parts undergoing a rigid body motion.

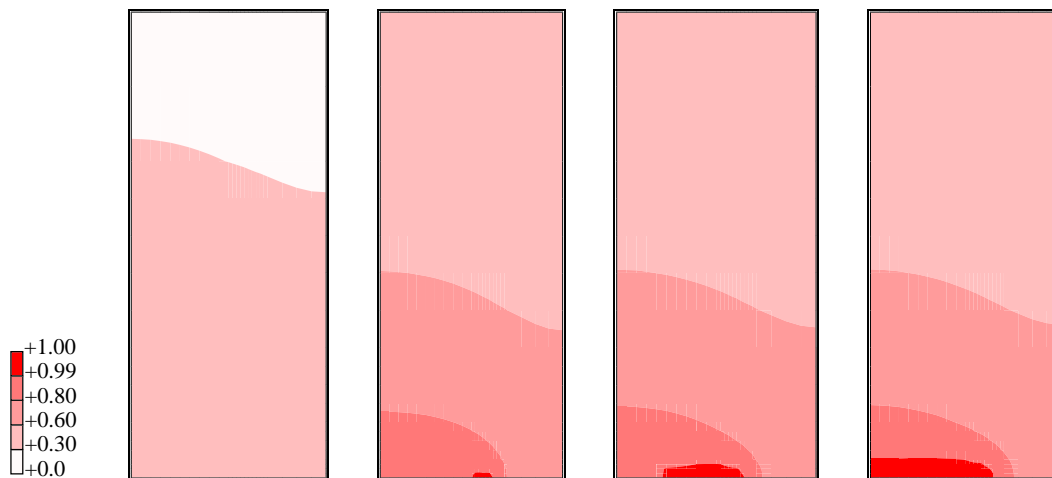


Figure 2. Damage levels at the instants $t=1.3\text{s}$, $t=1.573\text{s}$, $t=1.575\text{s}$ e $t=1.577\text{s}$.

In order to complete the study a curve of the external force versus the displacement $u(t)$ are presented in the figure 3. The curve permit to observe the expected softening behavior.

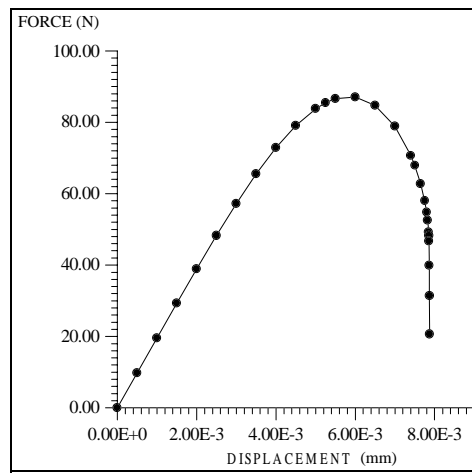


Figure 3. Force x displacement $u(t)$.

4.2- Elastic-plastic

A near rupture behaviour example

To exemplify the use of the theoretical model, we simulate a monotonic test in an ASTM 6351 aluminium alloy and its behaviour near the final rupture. The test was simulated with controlled strain amplitude where the displacement initial conditions was $u(t = 0, z = L) = 0$ and $u(t = T, Z = L) = 0,7 L$. It is considered length $L = 1,0$, $k = 0,01$ and $S_0 = 56,0$.

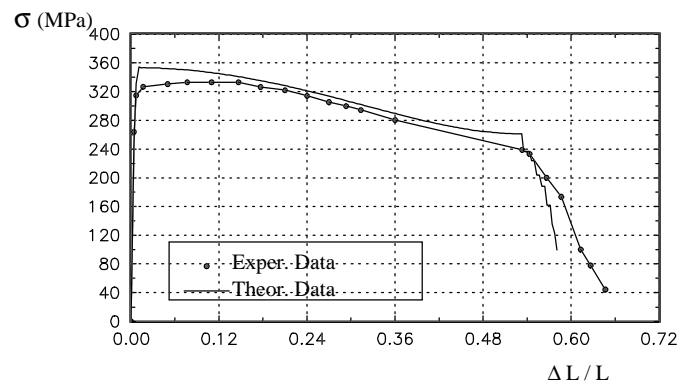


Figure 4. Curve $\sigma \times \Delta L/L$.

Figure 4 shows the axial stress component for different elongations, where dot line is the experimental data and hairline is the theoretical results. The theoretical results are in agreement with the experimental data.

5- CONCLUSIONS

The study of different problems demonstrate that the gradient-enhanced damage theories allows a correct qualitative description of the strain-softening phenomena. Also, the proposed damage theory can describe the evolution of the damage, the stress and the displacement fields for structure formed by different materials (concrete, glass and ceramic, metallic alloy, for instance), Domingues (1996) and Chimisso (1994).

6- ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to thanks: **FAPERJ** - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro and **CNPq** - Conselho Nacional de Desenv. Científico e Tecnológico.

7- REFERENCES

- Bazant, Z. P., Pijandier Cabot, G., Nonlocal Continuum Damage, Localisation, Instability and Convergence, ASME J. Appl. Mech., Vol.55, pp. 287-293, 1988.
- Chimento, F.E.G., Um Modelo de Dano Contínuo para Materiais com Comportamento Elasto-Plástico, Doctor Thesis, Pontifícia Univ. Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio, 1994.
- Chimento, F.E.G. and Costa-Mattos, H. (1994). Modeling the softening behavior of damageable elasto-plastic bars. In Localized Damage III. Computer Aided Assesment and Control. M. H. Aliabadi, A. Carpinteri, S. Kaliszky and D. J. Cartwright eds. Computational Mechanics Publication.
- Costa Mattos, H. & Sampaio, R., Analysis of the Fracture of Brittle Elastic Materials Using a Continuum Damage Model, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 3, N°5, pp. 411-428, 1995.
- Costa Mattos, H., Frémond, M. & Mamiya, E.N., A Simple Model of the Mechanical Behavior of Ceramic-Like Material, Int. J. for Solids and Structures, Vol. 20, N° 24, pp. 3185-3200, 1992.
- Domingues, S.M.P., Análise de Materiais Elásticos Frágeis através de um Modelo de Dano Contínuo, Doctor Thesis, Pontifícia Univ. Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio, 1996.
- Domingues, S.M.P., Costa-Mattos, H. & Rochinha, F.A., Continuum Damage Problems Solved by the Splitting technique in Connection with Finite element method, Anais do COBEM97, 1997.
- Frémond, M. & Nedjar, B., “Endommagement et Principe des Puissances Virtuelles”, C. R. Acad. Sci., tome 317, serie II, n° 7, pp. 857-864, Paris, 1993.
- Frémond, M. & Nedjar, B., Damage, Gradient of Damage and Principle of Virtual Power, Int. J. Solids Structures, Vol. 33, No. 8, pp. 1083-1103, 1996.
- Kachanov, L. M., Introd. to Continuum Damage Mech., Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Netherland, 1986.
- Knowles, J.K. & Sternberg, E., "On the Failure of Ellipticity and the Emergence of Discontinuous deformation Gradients in Plane Finite Elastostatics", J. Elast., 8, 329-378, 1978.
- Lemaitre, J. & Chaboche, J.L., Mech. of Solid Materials, Cambridge Univ. Press, 1990.
- Vree, J. H. P. de, *et al.*, "Comparison of Nonlocal Approaches in Continuum Damage Mechanics", Computer and Structure, Vol. 55, No. 4, pp. 581-588, 1995.

DINÂMICA DE SISTEMAS CONSTITUÍDOS POR VIGAS SUJEITAS A CARGAS MÓVEIS ORIUNDAS DE SUBSISTEMAS MECÂNICOS

Wallace M. Bessa

Instituto Militar de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica e Materiais
Praça General Tibúrcio, 80, Praia Vermelha – 22290-270 – Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Fernando R. da Silva

Universidade Católica de Petrópolis, Escola de Engenharia
Rua Barão do Amazonas, 124, Centro – 25685-070 – Petrópolis, RJ, Brasil

Resumo

Apresenta-se um estudo da interação entre uma estrutura, representada por uma viga, e um carregamento oriundo de um subsistema mecânico em movimento. O efeito de parâmetros importantes do subsistema, como por exemplo, sua velocidade e suas características mecânicas, são levados em consideração na análise da resposta da estrutura. Utiliza-se o método dos elementos finitos e a técnica dos grafos de ligação na modelagem do sistema. O modelo matemático obtido na forma de equações de estado permite uma análise física do sistema global, isto é, uma análise do comportamento dinâmico da estrutura e do subsistema mecânico, interagindo entre si. São apresentados resultados de simulação para a validação do procedimento, com o intuito de destacar a importância de um modelo que considere o comportamento global do sistema.

Palavras-chave: Dinâmica, Vibrações, Cargas Móveis, Elementos Finitos, Grafos de Ligação

1. INTRODUÇÃO

O comportamento dinâmico de uma estrutura submetida a um carregamento móvel vem sendo investigado desde a construção das primeiras pontes para estradas de ferro no começo do século XIX. O interesse por essa classe de problemas surgiu quando se observou que, em uma determinada estrutura, o deslocamento dinâmico proporcionado por um carregamento móvel era maior do que o deslocamento estático máximo.

Diferentes aspectos do problema em questão foram investigados ao longo das últimas décadas. Biggs(1964), Timoshenko(1965) e Warburton(1976) apresentaram soluções analíticas para a equação diferencial de governo de uma viga Bernoulli-Euler submetida a uma carga móvel simples e constante. Considerando o efeito do cisalhamento e da inércia rotatória e desconsiderando o regime transiente do modelo estrutural, Achembach e Sun(1965) analisaram o comportamento de uma viga de Timoshenko infinita apoiada em uma fundação elástica, quando atravessada por uma carga móvel.

Utilizando o método dos elementos finitos para discretizar a estrutura, Lin e Trethewey(1990) analisaram o comportamento dinâmico de uma viga Bernoulli-Euler interagindo com sistemas mecânicos de um e dois graus liberdade, e Thambiratnam e Zhuge(1996) investigaram o caso de uma viga apoiada em uma fundação elástica e submetida a uma carga simples.

Em trabalhos mais recentes, Henchi *et al.*(1997), Wu & Shih(1998), Kwon *et al.*(1998), Wang & Lin(1998), Wang & Chou(1998) e Chant *et al.*(1999), propuseram-se a investigar o

problema de cargas móveis em estruturas. Apesar da crescente complexidade que vem sendo atribuída ao modelo estrutural, o carregamento continua sendo tratado como uma carga simples e constante. Em alguns casos, como por exemplo na análise de veículos pesados trafegando sobre pontes e viadutos, esta simplificação não é apropriada, pois necessita-se de um subsistema que represente a dinâmica veicular.

Aliando as vantagens do método dos elementos finitos à versatilidade da técnica dos grafos de ligação, Da Silva(1994) apresentou um procedimento para a representação de uma estrutura que esteja acoplada a subsistemas de naturezas físicas distintas.

Utilizando este procedimento, Bessa(2000) investigou o comportamento dinâmico de vigas e placas com condições de contorno arbitrárias e submetidas a subsistemas mecânicos em movimento com diferentes níveis de complexidade.

Neste trabalho analisa-se a interação de uma viga com um carregamento oriundo de um subsistema mecânico que possua uma dinâmica própria. Apresenta-se, ainda, um modelo específico para a análise do comportamento de um trem interagindo com uma ferrovia.

2. MODELAGEM DO SISTEMA

2.1. Viga submetida a um oscilador móvel

A abordagem do problema de cargas móveis em vigas, através de uma metodologia clássica, pode representar um grande desafio quando o carregamento móvel é proveniente de um subsistema mecânico, como por exemplo, no modelo físico ilustrado na Figura 1(a).

A técnica dos grafos de ligação tem se mostrado como a alternativa mais apropriada, quando se necessita analisar um sistema composto por subsistemas de natureza distinta. Devido a sua característica modular, esta técnica permite que o modelo representativo de cada subsistema seja desenvolvido separadamente, e mediante o acoplamento destes modelos, torna-se possível a avaliação do comportamento global do sistema dinâmico. O grafo de ligação proposto para a representação deste sistema é apresentado na Figura 1(b).

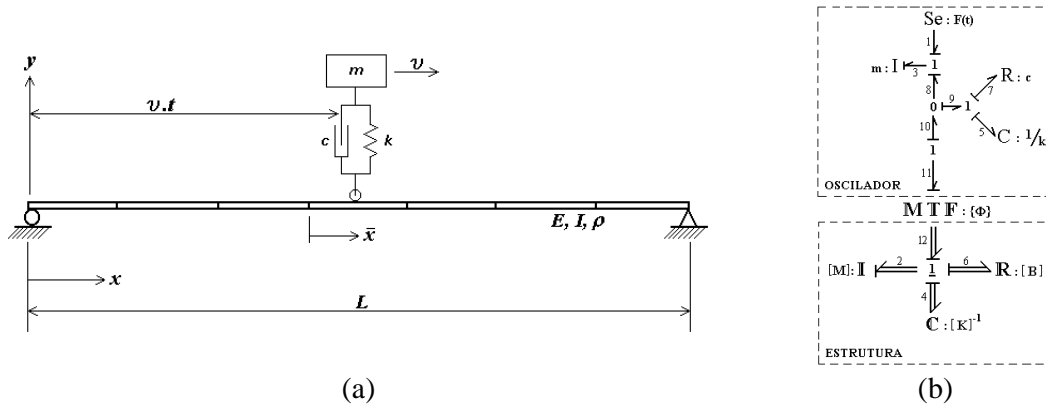


Figura 1. (a) Modelo físico do sistema e (b) Grafo de ligação do sistema

A parte deste grafo correspondente a estrutura baseia-se no modelo proposto por Da Silva(1994), e aplica-se a qualquer estrutura que possa ser representada em termos de suas matrizes de massa $[M]$, de flexibilidade $[K]^{-1}$ e de amortecimento $[B]$, representadas na Figura 1(b) pelos campos multiportas \mathbf{I} , \mathbf{C} e \mathbf{R} respectivamente. Para o oscilador foi construído um grafo no qual estivessem incluídos seus efeitos inerciais (m), capacitivos ($1/k$) e resistivos (c), característicos de um sistema massa-mola-amortecedor .

Pelo fato do oscilador estar em movimento, seu ponto de contato com a estrutura varia a cada instante de tempo. Deste modo, como o carregamento não limita-se apenas aos nós, torna-se necessária sua representação no interior do elemento de viga.

Na técnica dos grafos de ligação esta função é desempenhada por um multitransformador modulado (**M T F**), cujo módulo é definido através das funções de interpolação, calculadas no ponto de contato do oscilador com a viga.

Para um elemento de viga Bernoulli-Euler, utiliza-se as funções de interpolação cúbica de Hermite (Reddy, 1993), apresentadas a seguir em função das coordenadas locais do elemento.

$$\begin{aligned}\phi_1^e &= 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3, & \phi_2^e &= -\bar{x}\left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2, \\ \phi_3^e &= 3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3, & \phi_4^e &= -\bar{x}\left[\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 - \left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)\right]\end{aligned}\quad (1)$$

onde h_e é o comprimento do elemento de viga.

Deste modo, definidas as funções de interpolação, determina-se os coeficientes das matrizes elementares de massa (M_{ij}^v) e rigidez (K_{ij}^v).

$$K_{ij}^v = EI \int_{x_e}^{x_{e+1}} (d^2\phi_i^e/dx^2)(d^2\phi_j^e/dx^2) dx \quad (2)$$

$$M_{ij}^v = \rho A \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e \phi_j^e dx \quad (3)$$

onde E , I , ρ e A são, respectivamente, o módulo de elasticidade, o momento de inércia, a massa específica e a área da seção reta da viga.

A matriz de amortecimento do modelo estrutural pode ser obtida através de uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, conhecida como amortecimento proporcional.

$$B_{ij}^v = \alpha \cdot M_{ij}^v + \beta \cdot K_{ij}^v \quad (4)$$

Estas matrizes foram definidas, através de uma formulação consistente, para um elemento isolado da malha. Para a construção das matrizes globais $[M]$, $[K]$ e $[B]$, que são utilizadas por este procedimento para a representação da estrutura, deve-se compatibilizar os deslocamentos nos graus de liberdade do modelo, impondo condições de continuidade e equilíbrio às variáveis primárias e secundárias.

Assim, o modelo de estado obtido a partir do grafo da Figura 1(b), escrito em função das variáveis de estado de entrada do sistema, é apresentado na Equação 5.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \\ \dot{\mathbf{q}}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -([B] + \{\Phi\}c\{\Phi\}^T)[M]^{-1} & \{\Phi\} \frac{c}{m} & -[K] & -\{\Phi\}k \\ c\{\Phi\}^T[M]^{-1} & -\frac{c}{m} & 0 & k \\ [M]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \{\Phi\}^T[M]^{-1} & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [e_1] \quad (5)$$

onde \mathbf{p}_2 e \mathbf{q}_4 são os vetores com as quantidades de movimento e com os deslocamentos associados a cada grau de liberdade do modelo estrutural, \mathbf{p}_3 , \mathbf{q}_5 e e_1 representam a quantidade de movimento, o deslocamento e o peso relativo a massa do oscilador.

Deve-se ressaltar que o módulo do multitransformador $\{\Phi\}$, é um vetor cujo número de coeficientes depende do número de graus de liberdade do modelo estrutural. Porém, apenas quatro destes coeficientes, correspondentes aos graus de liberdade do elemento de viga no qual a carga esteja atuando, assumem valor diferente de zero. Assim, existe um sub-vetor 4×1 , que a medida que a carga se move para o próximo elemento, ele se desloca para os graus de liberdade representativos deste elemento.

Os valores dos termos deste sub-vetor podem ser calculados a partir das funções de interpolação do elemento. Como a carga está em movimento sua posição \bar{x} pode ser substituída por:

$$\bar{x} = \mathbf{v} \cdot (t - t_e) \quad (6)$$

onde \mathbf{v} é a velocidade do oscilador e t_e é o instante em que o oscilador entra no elemento.

2.2. Aplicativo: interação trem – ferrovia

A dinâmica da interação entre trens e ferrovias possui uma série de questões que ainda não foram resolvidas. Um dos principais problemas encontrados, consiste na deterioração dos trilhos, devido a passagem de vagões de trens. Portanto, a melhor compreensão do comportamento dinâmico deste sistema (ver Figura 2), pode significar uma redução nos custos de manutenção de uma ferrovia.

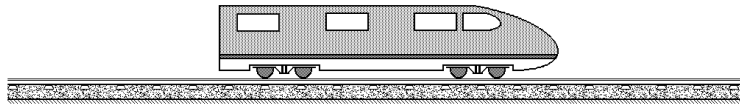


Figura 2. Modelo Real

Para representar corretamente este sistema dinâmico, é de extrema importância que seja considerada a influência do terreno, no qual os trilhos estejam apoiados. O modelo físico proposto, consiste em um sistema massa-mola-amortecedor, deslocando-se com uma velocidade constante, sobre uma viga simplesmente apoiada em uma fundação elástica.

Como pode ser observado na Figura 3, a fundação elástica, utilizada para representar o terreno, foi modelada como sendo uma série de molas (k_f) e amortecedores (c_f) linearmente distribuídos ao longo de todo o comprimento da viga.

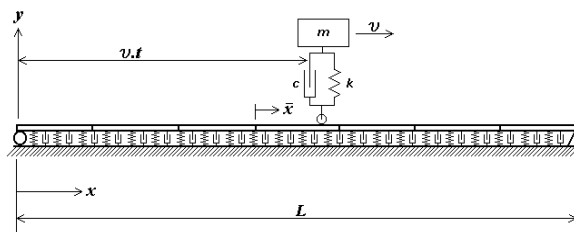


Figura 3. Modelo físico

Deste modo, as matrizes características deste modelo estrutural, podem ser obtidas através da simples adição das matrizes do elemento de viga Bernoulli-Euler (K_{ij}^v e B_{ij}^v), com as matrizes relativas à fundação elástica (K_{ij}^f e B_{ij}^f).

$$K_{ij}^f = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e k_f \phi_j^e dx \quad (7)$$

$$B_{ij}^f = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e c_f \phi_j^e dx \quad (8)$$

Destaca-se que, como não existe nenhum efeito inercial associado à fundação elástica, a matriz elementar de massa permanece idêntica à matriz de massa do elemento de viga Bernoulli-Euler.

Devido a característica generalizada da técnica dos grafos de ligação, e a versatilidade do método dos elementos finitos, pode-se representar este sistema, utilizando o mesmo grafo de ligação desenvolvido para o modelo físico da Figura 1(a).

3. RESULTADOS OBTIDOS

3.1. Viga submetida a um oscilador móvel

Utilizando um código computacional, desenvolvido em FORTRAN 90, simulou-se o comportamento dinâmico da estrutura para diferentes velocidades do carregamento, e comparou-se os resultados obtidos com resultados provenientes da literatura.

As propriedades de cada subsistema, utilizadas para a comparação dos resultados, foram: (1) Viga de 1,938 m modelada com doze elementos e engastada nas suas duas extremidades; seção reta com 0,0342 m de largura por 0,1491 m de altura; $\rho = 2,9602 \times 10^3$ kg/m³; $E = 104,79$ GPa e (2) Oscilador; $m = 9,0641$ kg; $k = 8,3459 \times 10^6$ N/m; $c = 173,9517$ N.s/m.

A Tabela 1 apresenta o fator dinâmico de amplificação (F_{din}), definido como sendo a razão do máximo deslocamento dinâmico pelo máximo deslocamento estático ($W_{est} = FL^3/192EI$), para diferentes parâmetros adimensionais de velocidade (T/τ). O símbolo T representa o período fundamental da estrutura, enquanto τ é tempo necessário para o oscilador percorrer todo o vão da viga.

Tabela 1. Fator dinâmico de amplificação (F_{din})

T/τ	Este trabalho	Lin e Trethewey(1990)
0,1	1,017	1,028
0,5	1,245	1,206
1,0	1,548	1,533
1,5	1,459	1,460
2,0	1,281	1,307

Verifica-se que a máxima discrepância entre os fatores dinâmicos de amplificação obtidos por este trabalho e pelos obtidos na referência está em torno de 3%. Ressalta-se que os resultados apresentados Lin e Trethewey(1990) foram obtidos a partir de um modelo em elementos finitos, cuja malha era composta por apenas quatro elementos de viga, e as equações relativas aos graus de liberdade de rotação ($\partial w/\partial x$) foram resolvidas estaticamente para reduzir o tempo de processamento.

O deslocamento transversal do nó central da viga em função da posição do carregamento, é apresentado na Figura 4, para cada parâmetro adimensional de velocidade da Tabela 1. Destaca-se que o oscilador só está em contato com a viga no intervalo $0 \leq x/L \leq 1$, portanto os deslocamentos para $x/L > 1$ correspondem à vibração livre da estrutura.

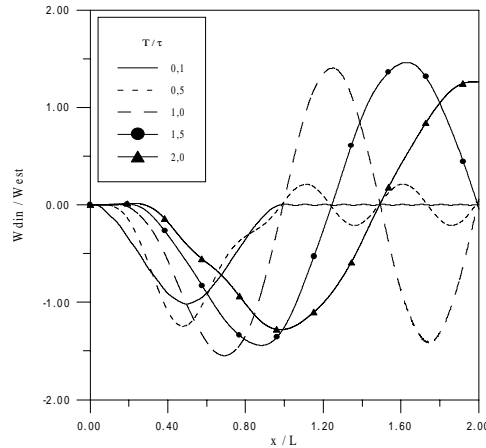


Figura 4. Deslocamento vertical do centro da viga em função da posição do oscilador

Observando a Tabela 1 e a Figura 4, pode-se constatar a presença de uma velocidade crítica, para a qual o deslocamento dinâmico apresenta um valor máximo. Este deslocamento dinâmico máximo foi identificado (Bessa, 2000), para o caso de uma carga móvel simples, como sendo 73,5% maior que o deslocamento estático máximo ($F_{din} = 1,735$), e ocorria quando o tempo necessário para a carga percorrer todo o vão da viga era 0,81 vezes o período fundamental ($T / \tau = 1,234$). Para o caso de uma viga submetida a um oscilador, a velocidade crítica do sistema depende da razão entre a massa do oscilador e a massa da viga (m/M_v).

Apresenta-se a seguir o deslocamento dinâmico de uma viga para dois diferentes parâmetros de massa. Pela Figura 5(a), verifica-se que para um carregamento com velocidade abaixo da velocidade crítica (velocidade subcrítica), as maiores amplitudes de deslocamento ocorrem para os valores mais elevados de m/M_v . No entanto, para velocidades supercríticas, como mostra a Figura 5(b), observa-se exatamente o inverso, as maiores amplitudes de deslocamento ocorrem para os menores valores de m/M_v .

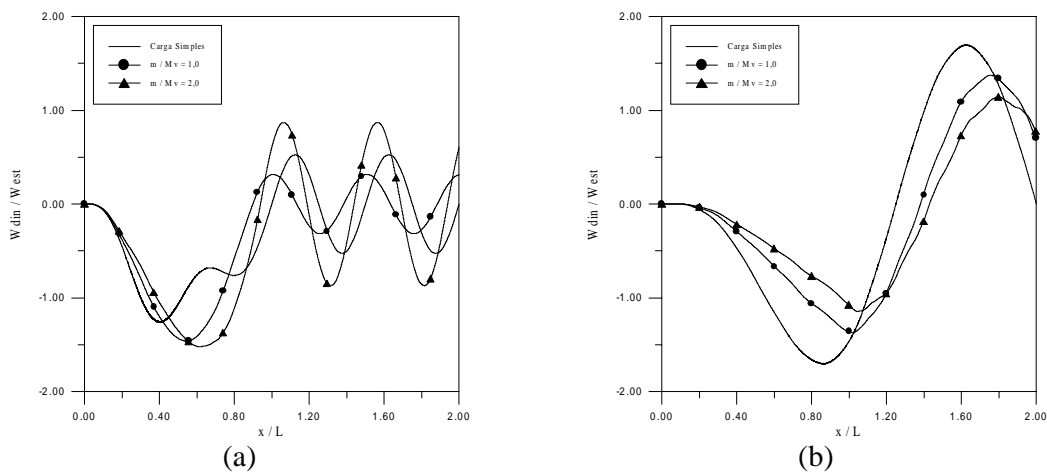


Figura 5. Deslocamento vertical do centro da para: (a) $T/\tau = 0,5$ e (b) $T/\tau = 1,5$

Destaca-se que os gráficos relativos a uma carga simples foram incluídos na Figura 5 apenas para demonstrar que esta simplificação nem sempre representa adequadamente a realidade, e deve ser adotada somente quando a massa do subsistema representar uma pequena fração da massa da estrutura.

3.2. Aplicativo: interação trem – ferrovia

Para apresentar alguns resultados de simulação, que ilustrem o comportamento do trilho e do vagão interagindo entre si, considerou-se um sistema com as seguintes propriedades: (1) Trilho de aço de 500 m, com uma seção reta de 10 cm de largura por 10 cm de altura e $\xi_1 = \xi_2 = 5\%$; (2) Fundação elástica com rigidez $k_f = 4 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ e amortecimento $c_f = 1,5 \times 10^4 \text{ N.s/m}^2$; (3) Vagão com $m = 40.000 \text{ kg}$, $k = 6 \times 10^7 \text{ N/m}$ e $c = 4 \times 10^5 \text{ N.s/m}$.

A Figura 6 mostra o deslocamento dinâmico do trilho modelado com 20 elementos, submetido a um vagão com velocidade constante de 50 m/s.

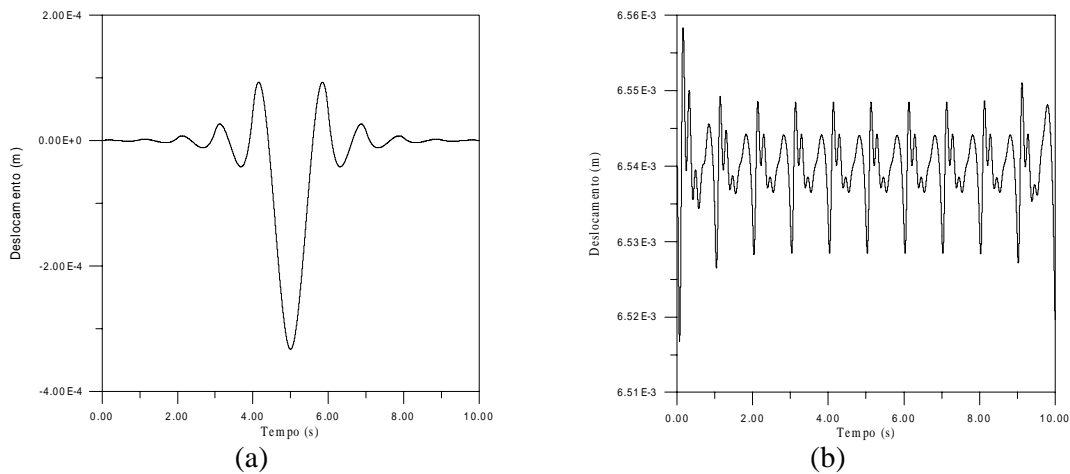


Figura 6. Deslocamento vertical: (a) do trilho em $x = L/2$ e (b) do vagão

Ressalta-se que outros resultados, podem facilmente ser obtidos através do código computacional desenvolvido. Para o veículo, por exemplo, pode-se avaliar a variação dos esforços, das acelerações, das velocidades e dos deslocamentos, relativos a cada um de seus componentes (mola, amortecedor e inércia).

Para a estrutura, além dos deslocamentos associados a cada grau de liberdade, poderia se explorar os esforços, as deformações e as tensões atuantes.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma análise do comportamento dinâmico de uma viga submetida a um carregamento móvel foi apresentada. Verificou-se, através dos resultados obtidos, que o comportamento do sistema está diretamente relacionado com a velocidade desenvolvida pelo carregamento.

Investigou-se a influência que a massa do subsistema exerce sobre a resposta da estrutura. Deste modo, foi constatado que para velocidades subcríticas, o aumento da massa do oscilador proporciona uma maior amplitude no deslocamento dinâmico da viga, ao passo que para velocidades supercríticas, ocorre justamente o contrário.

Verificou-se, também, que o carregamento só deve ser aproximado por uma carga simples, quando a massa do subsistema for desprezível, se comparada com a massa da estrutura. Portanto, para a análise da interação entre estruturas e veículos pesados, a dinâmica veicular precisa ser considerada.

É importante lembrar que os resultados aqui discutidos, limitaram-se a considerar uma um carregamento com velocidade constante . Porém, nada impede que o oscilador assuma um movimento do tipo uniformemente variado.

Embora tenha-se analisado apenas vigas biapoiadas ou com engastes em ambas as extremidades, devido a versatilidade do método dos elementos finitos, este procedimento permite que vigas com as mais diversas condições de contorno, apresentando inclusive, apoios intermediários, possam ser analisadas.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Achenbach, J.D. and Sun, C.T., 1965, “Moving Load on a Flexibly Supported Timoshenko Beam”, *International Journal of Solids Structures*, vol. 1, p. 353 – 370.
- Bessa, W.M., 2000, “Abordagem do Problema de Cargas Móveis Através de uma Técnica Multidisciplinar de Modelagem”, Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, R.J., Brasil.
- Biggs, J.M., 1964, “Introduction to Structural Dynamics”, McGraw Hill, New York.
- Chan, T.H.T. et al., 1999, “An Interpretative Method for Moving Force Identification”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 219, N° 3, p. 503 – 524.
- Da Silva, F.R. , 1994, “Procedimentos para a Análise Estrutural Dinâmica Através da Técnica Generalizada dos Grafos de Ligação”, Tese de Doutorado, COPPE, Rio de Janeiro.
- Henchi, K. et al., 1997, “Dynamic Behaviour of Multi-Span Beams Under Moving Loads”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 199, N° 1, p. 33 – 50.
- Kwon, H.-C., Kim, M.-C. and Lee, I.-W., 1998, “Vibration Control of Bridges Under Moving Loads”, *Computers & Structures*, vol. 66, N° 4, p. 473 – 480.
- Lin, Y.-H. and Trethewey, M.W., 1990, “Finite Element Analysis of Elastic Beams Subjected to Moving Dynamic Loads”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 136, N° 2, p. 323 – 342.
- Reddy, J.N. , 1993, “Introduction to the Finite Element Method”, McGraw Hill, New York.
- Thambiratnam, D. and Zhuge, Y., 1996, “Dynamic Analysis of Beams on Elastic Foundations Subjected to Moving Loads”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 198, N° 2, p. 149 – 169.
- Timoshenko, S.P. , 1965, “Theory of Structures”, John Wiley, New York.
- Wang, R.-T. & Lin, J.-S., 1998, “Vibration of Multi-Span Timoshenko Frames due to Moving Loads”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 212, N° 3, p. 417 – 434.
- Wang, R.-T. & Chou, T.-H., 1998, “Non-Linear Vibration of Timoshenko Beam due to a Moving Force and the Weight of Beam”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 218, N° 1, p. 117 – 131.
- Warburton, G.B. , 1976, “The Dynamic Behavior of Structures”, Pergamon Press, Oxford.
- Wu, J.-S. and Shih, P.-Y., 1998, “Moving-Load-Induced Vibrations of a Moored Floating Bridge”, *Computers & Structures*, vol. 66, N° 4, p. 435 – 461.

MODELAGEM DA INTERAÇÃO DINÂMICA ENTRE ESTRUTURAS DE PLACA E SUBSISTEMAS MECÂNICOS EM MOVIMENTO

Wallace M. Bessa

Instituto Militar de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica e Materiais
Praça General Tibúrcio, 80, Praia Vermelha – 22290-270 – Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Fernando R. da Silva

Universidade Católica de Petrópolis, Escola de Engenharia
Rua Barão do Amazonas, 124, Centro – 25685-070 – Petrópolis, RJ, Brasil

Resumo

Procura-se, neste trabalho, apresentar uma formulação para o estudo da interação entre uma estrutura, representada por uma placa, e um carregamento oriundo de um subsistema mecânico em movimento, que percorra uma trajetória qualquer ao longo da superfície da placa. O efeito de parâmetros importantes do subsistema, como por exemplo, sua velocidade, sua trajetória, e suas características mecânicas, são levados em consideração na análise da resposta da estrutura. Utiliza-se o método dos elementos finitos e a técnica dos grafos de ligação na modelagem do sistema. O modelo matemático obtido na forma de equações de estado permite uma análise física do sistema global, isto é, uma análise do comportamento dinâmico da estrutura de placa e do subsistema mecânico, interagindo entre si. São apresentados resultados de simulação para a validação do procedimento, com o intuito de destacar a importância de um modelo que considere o comportamento global do sistema.

Palavras-chave: Dinâmica, Vibrações, Cargas Móveis, Elementos Finitos, Grafos de Ligação

1. INTRODUÇÃO

A análise dinâmica do problema de cargas móveis em placas é de grande importância para algumas áreas da engenharia mecânica, civil e aeroespacial. Em boa parte dos casos, o carregamento pode perfeitamente ser representado por uma carga constante, concentrada ou linearmente distribuída. Porém, nem sempre esta simplificação representa adequadamente a realidade.

Com o desenvolvimento de novos materiais e o crescimento dos transportes urbanos de massa, pontes e viadutos têm se tornado cada vez mais esbeltos, à medida que ônibus e trens, por sua vez, tornam-se mais pesados. Devido a esse aumento da relação entre o peso do veículo e o peso da estrutura, para que um modelo represente bem esta interação, a dinâmica veicular precisa ser considerada. Essa necessidade, porém, esbarra na dificuldade de se considerar, em um mesmo modelo, subsistemas de parâmetros distribuídos e concentrados que interajam entre si.

Apesar da grande maioria dos trabalhos, Henchi *et al.*(1997), Wu & Shih(1998), Kwon *et al.*(1998), Wang & Lin(1998), Wang & Chou(1998) e Chant *et al.*(1999), abordar o problema de cargas móveis através de modelos simplificados, onde o carregamento é constante e a estrutura é representada por uma viga, alguns autores propuseram-se a investigar o comportamento de uma placa submetida a um carregamento móvel.

Considerando o efeito do cisalhamento e da inércia rotatória e desconsiderando o regime transiente do modelo estrutural, Jahanshahi e Monzel(1965) e Adler e Reismann(1974), utilizando a teoria de Mindlin para placas analisaram o comportamento uma placa infinita sob a ação de um carregamento móvel distribuído em linha perpendicularmente à sua trajetória.

Utilizando o método dos elementos finitos para discretizar a estrutura, Taheri e Ting(1990) analisaram o comportamento dinâmico de uma placa de Kichhoff submetida a uma carga simples.

Através de uma formulação baseada na análise modal e na técnica dos grafos de ligação, Da Silva e Bessa(1999), analisaram a interação entre uma placa de Kichhoff e um carregamento oriundo de um subsistema mecânico em movimento. Apesar de sua grande eficiência esta metodologia está condicionada ao conhecimento das autofunções do modelo estrutural.

Aliando as vantagens do método dos elementos finitos à versatilidade e da técnica dos grafos de ligação, Da Silva(1994) apresentou um procedimento para a representação de uma estrutura que esteja acoplada a subsistemas de natureza física distinta.

Utilizando este procedimento, Bessa(2000) investigou o comportamento dinâmico de vigas e placas com condições de contorno arbitrárias e submetidas a subsistemas mecânicos em movimento com diferentes níveis de complexidade.

Neste trabalho analisa-se a interação de uma placa de Kichhoff com um carregamento oriundo de um subsistema mecânico que possua uma dinâmica própria. Apresenta-se, ainda, um modelo específico para a análise da interação veículo-estrutura.

2. MODELAGEM DO SISTEMA

2.1. Placa submetida a um oscilador móvel

A abordagem do problema de cargas móveis em placas, através de uma metodologia clássica, pode representar um grande desafio, quando o carregamento móvel é proveniente de um subsistema mecânico, como por exemplo, no modelo físico ilustrado na Figura 1(a).

A técnica dos grafos de ligação supera esta dificuldade, pois permite que um sistema complexo, seja dividido em subsistemas mais simples, e que podem ser posteriormente acoplados, para a obtenção do modelo matemático representativo do sistema global. O grafo de ligação proposto para a representação deste sistema é apresentado na Figura 1(b).

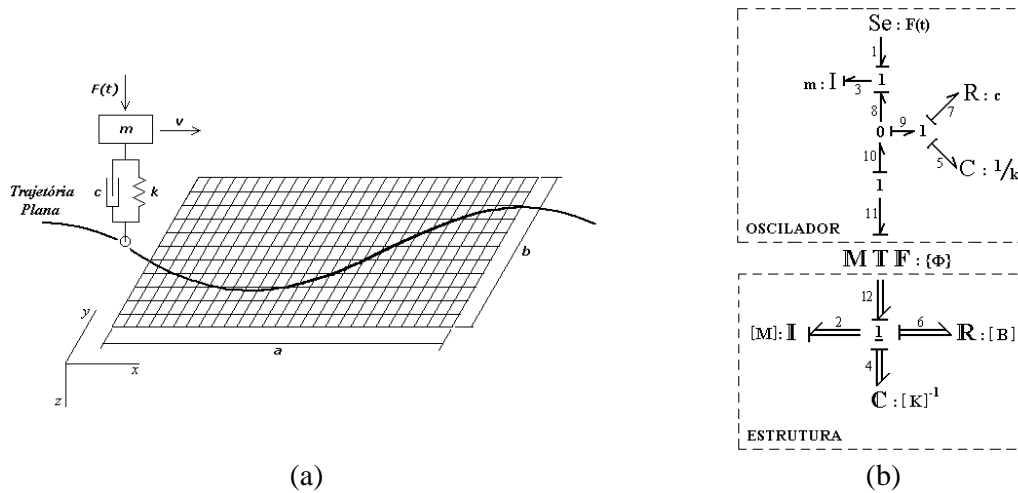


Figura 1. (a) Modelo físico do sistema e (b) Grafo de ligação do sistema

A parte deste grafo correspondente a estrutura baseia-se no modelo proposto por Da Silva(1994), e aplica-se a qualquer estrutura que possa ser representada em termos de suas matrizes de massa $[M]$, de flexibilidade $[K]^{-1}$ e de amortecimento $[B]$, representadas na Figura 1(b) pelos campos multiportas \mathbf{I} , \mathbf{C} e \mathbf{R} respectivamente. Para o oscilador foi construído um grafo no qual estivessem incluídos seus efeitos inerciais (m), capacitivos ($1/k$) e resistivos (c), característicos de um sistema massa-mola-amortecedor .

Pelo fato do oscilador estar em movimento, seu ponto de contato com a estrutura varia a cada instante de tempo. Deste modo, como o carregamento não limita-se apenas aos nós, torna-se necessária sua representação no interior do elemento de placa.

Na técnica dos grafos de ligação esta função é desempenhada por um multitransformador modulado ($\mathbf{M T F}$), cujo módulo é definido através das funções de interpolação, calculadas no ponto de contato do oscilador com a viga.

As matrizes elementares do modelo estrutural foram definidas, através de uma formulação consistente, para um elemento de dezesseis graus de liberdade (quatro graus de liberdade por nó – w , $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ e $\partial^2 w/\partial x \partial y$). As funções de interpolação para este elemento são obtidas a partir do produto das funções de Hermite unidimensionais nas direções x e y .

Para a construção das matrizes globais $[M]$, $[K]$ e $[B]$, que são utilizadas por este procedimento para a representação da estrutura, deve-se compatibilizar os esforços e deslocamentos nos graus de liberdade do modelo, impondo condições de continuidade e equilíbrio às variáveis primárias e secundárias.

Assim, o modelo de estado obtido a partir do grafo da Figura 2, escrito em função das variáveis de estado de entrada do sistema, é apresentado na Equação 1.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \\ \dot{\mathbf{q}}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -([B] + \{\Phi\}c\{\Phi\}^T)[M]^{-1} & \{\Phi\} \frac{c}{m} & -[K] & -\{\Phi\}k \\ c\{\Phi\}^T[M]^{-1} & -\frac{c}{m} & 0 & k \\ [M]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \{\Phi\}^T[M]^{-1} & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [e_1] \quad (1)$$

onde \mathbf{p}_2 e \mathbf{q}_4 são os vetores com as quantidades de movimento e com os deslocamentos associados a cada grau de liberdade do modelo estrutural, \mathbf{p}_3 , \mathbf{q}_5 e e_1 representam a quantidade de movimento, o deslocamento e o peso relativo a massa do oscilador.

Deve-se ressaltar que o módulo do multitransformador $\{\Phi\}$, é um vetor cujo número de coeficientes depende do número de graus de liberdade do modelo estrutural. Porém, apenas dezesseis destes coeficientes, correspondentes aos graus de liberdade do elemento de placa no qual a carga esteja atuando, assumem valor diferente de zero. Assim, existe um sub-vetor 16×1 , que a medida que a carga se move para o próximo elemento, ele se desloca para os graus de liberdade representativos deste elemento.

Os valores dos termos deste sub-vetor podem ser calculados a partir das funções de interpolação do elemento. Como a carga está em movimento sua posição \bar{x} pode ser substituída por:

$$\bar{x} = \mathbf{v} \cdot (t - t_e) \quad (2)$$

onde \mathbf{v} é a velocidade do oscilador e t_e é o instante em que o oscilador entra no elemento.

2.2. Aplicativo: interação carro – ponte

A técnica dos grafos de ligação tem se mostrado eficaz na solução de sistemas que envolvam solicitações dinâmicas, inclusive quando há interação entre subsistemas com elevado grau de complexidade. Assim, esta técnica torna-se perfeitamente aplicável à modelagem da interação entre um veículo e uma ponte, como apresentado na Figura 2.

O modelo físico proposto para representar este sistema consiste de um veículo, modelado com sete graus de liberdade, que trafega sobre uma ponte (placa apoiada por dois lados opostos), discretizada pelo método dos elementos finitos e representada pela técnica dos grafos de ligação.

Devido a modularidade da técnica de modelagem utilizada, o modelo dinâmico global pode ser obtido através do acoplamento dos grafos desenvolvidos, isoladamente, para cada subsistema. Deste modo, o grafo multiligação representativo do sistema completo é apresentado na Figura 2(c).

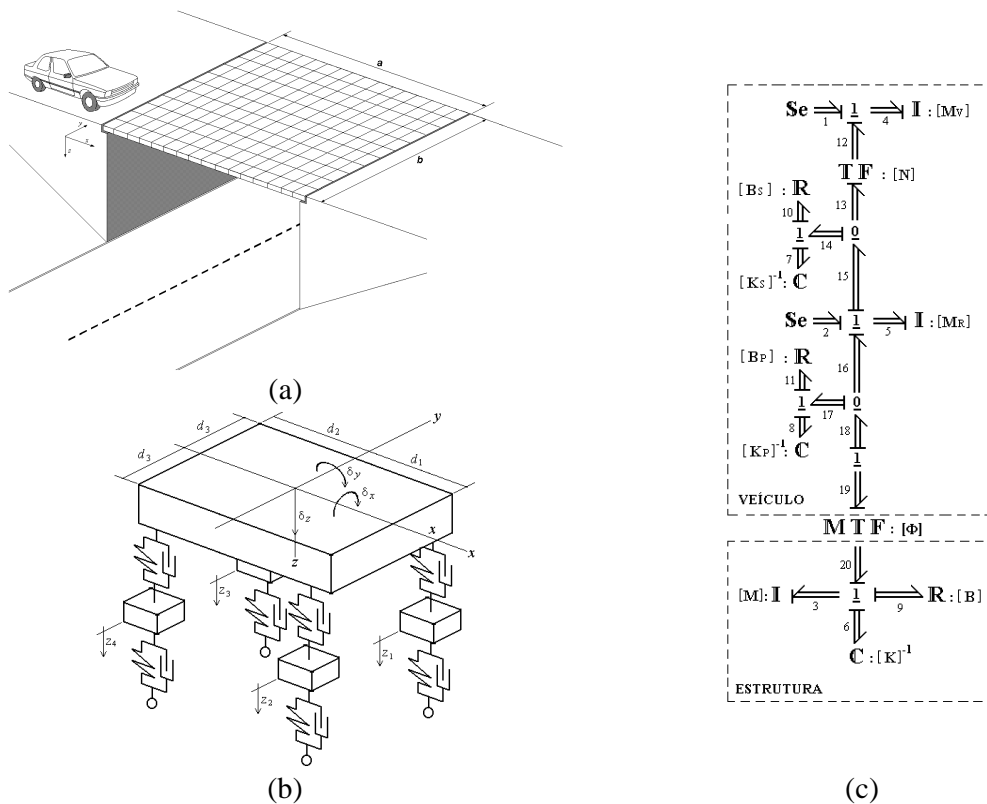


Figura 2. (a) Subsistema estrutural; (b) Veículo e (c) Grafo multiligação do sistema

A partir deste grafo, pode-se determinar as equações de estado do modelo, aqui escritas na sua forma matricial, em função das variáveis de estado (X) e do vetor de entradas (U).

$$\dot{X} = AX + BU \quad (3)$$

$$Y = CX + DU \quad (4)$$

Neste caso, os vetores X , U e Y , e as matrizes A , B , C e D , presentes no modelo de estado, podem ser expressos por:

$$\begin{aligned}
X &= [\mathbf{p}_3 \quad \mathbf{p}_4 \quad \mathbf{p}_5 \quad \mathbf{q}_6 \quad \mathbf{q}_7 \quad \mathbf{q}_8]^T \\
U &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]^T \\
Y &= [\mathbf{f}_4] \\
A &= \begin{bmatrix} -([\mathbf{B}] + [\Phi][\mathbf{B}_p][\Phi]^T)[\mathbf{M}]^{-1} & 0 & [\Phi][\mathbf{B}_p][\mathbf{M}_R]^{-1} & -[\mathbf{K}] & 0 & -[\Phi][\mathbf{K}_p] \\ 0 & -[\mathbf{N}][\mathbf{B}_s][\mathbf{N}]^T[\mathbf{M}_v]^{-1} & [\mathbf{N}][\mathbf{B}_s][\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & [\mathbf{N}][\mathbf{K}_s] & 0 \\ [\mathbf{B}_p][\Phi]^T[\mathbf{M}]^{-1} & [\mathbf{B}_s][\mathbf{N}]^T[\mathbf{M}_v]^{-1} & -([\mathbf{B}_p] + [\mathbf{B}_s])[\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & -[\mathbf{K}_s] & [\mathbf{K}_p] \\ [\mathbf{M}]^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -[\mathbf{N}]^T[\mathbf{M}_v]^{-1} & [\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ [\Phi]^T[\mathbf{M}]^{-1} & 0 & -[\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{I}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{I}] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
C &= \begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{M}_v]^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
D &= [0]
\end{aligned}$$

onde $[\mathbf{N}]$ e $[\Phi]$ são os módulos dos transformadores, expressos por:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ d_3 & -d_3 & d_3 & -d_3 \\ d_1 & d_1 & -d_2 & -d_2 \end{bmatrix}; \quad [\Phi] = \{ \{\Phi\}_1 \quad \{\Phi\}_2 \quad \{\Phi\}_3 \quad \{\Phi\}_4 \}$$

Os elementos $\{\Phi\}_n$ da matriz $[\Phi]$, são os vetores responsáveis pela representação de cada roda do veículo, nos pontos de contato situados no interior do elemento de placa.

Destaca-se, que para modelar o veículo, foram adotadas algumas propriedades características da área de dinâmica veicular. A matriz $[\mathbf{M}_v]$, por exemplo, contém as inércias referentes ao deslocamento vertical (m) e aos deslocamentos angulares (I_x e I_y) do veículo, ao passo que a matriz $[\mathbf{M}_R]$, representa a massa de cada roda.

$$[\mathbf{M}_v] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{M}_R] = \begin{bmatrix} M_R^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_R^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_R^4 \end{bmatrix}$$

As propriedades de rigidez e amortecimento da suspensão e do pneu, foram incorporadas ao modelo, através das matrizes:

$$[\mathbf{K}_s] = \begin{bmatrix} K_s^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_s^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_s^4 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{B}_s] = \begin{bmatrix} B_s^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_s^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_s^4 \end{bmatrix}; \\
[\mathbf{K}_p] = \begin{bmatrix} K_p^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_p^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_p^4 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{B}_p] = \begin{bmatrix} B_p^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_p^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_p^4 \end{bmatrix}$$

3. RESULTADOS OBTIDOS

3.1. Placa submetida a um oscilador móvel

Utilizando um código computacional, desenvolvido em FORTRAN 90, simulou-se o comportamento dinâmico da estrutura para diferentes velocidades do carregamento.

Nesta simulação, considerou-se uma placa de dimensões: $a=b=1\text{m}$ e $h=0,001\text{m}$, discretizada por uma malha com dezesseis elementos. Para o oscilador, a massa (m) e a rigidez (k) foram escolhidas, de modo que se obtivesse uma razão $m/M_p = 0,125$ (m/M_p – massa do oscilador dividido pela massa da placa) e uma frequência natural (ω) de 38,73 rad/s, enquanto sua trajetória foi definida ao longo de uma linha reta, paralela ao lado a da placa, e que passava pelo centro desta estrutura.

Apresenta-se na Figura 3, o deslocamento transversal do nó central da placa, para diferentes parâmetros adimensionais de velocidade (T/τ). O símbolo T representa o período fundamental da estrutura, enquanto τ significa o tempo necessário para o oscilador atravessar a superfície da placa.. Destaca-se que os deslocamentos a partir de $x/a > 1$ correspondem à vibração livre da estrutura, pois neste instante o oscilador perde o contato com a estrutura.

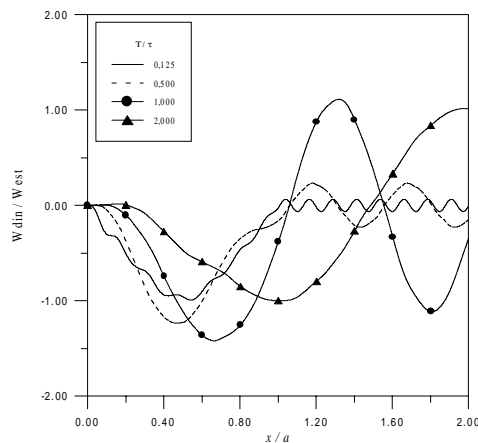


Figura 3. Deslocamento vertical do centro da placa em função da posição do oscilador

Observando a Figura 3, pode-se constatar a presença de uma velocidade crítica, para a qual o deslocamento dinâmico apresenta um valor máximo.

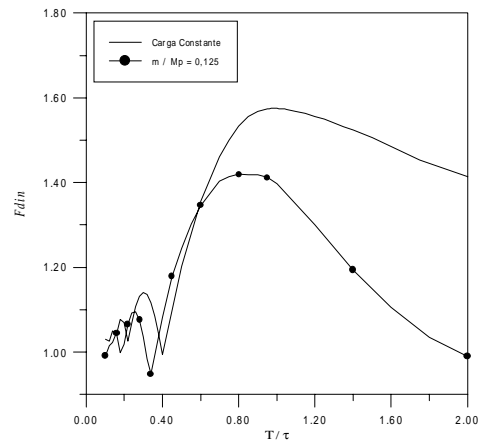


Figura 4. Fator dinâmico de amplificação para diferentes velocidades do carregamento

A Figura 4 mostra a variação do fator dinâmico de amplificação (F_{din}), definido como sendo a razão do máximo deslocamento dinâmico pelo máximo deslocamento estático ($W_{est} = 0,0116Fa^2/D_E$, onde D_E é a rigidez flexional de uma placa isotrópica), em função da velocidade desenvolvida pelo carregamento. Verifica-se que para uma carga constante, o deslocamento dinâmico transversal do centro da placa pode chegar a ser 57,5% vezes maior que deslocamento estático máximo ($F_{din} = 1,575$) quando o tempo necessário para a carga atravessar a placa for igual ao seu período fundamental ($T/\tau = 1,0$). Observa-se também que, para um subsistema mecânico, sua inércia gera um desvio na curva do Fator Dinâmico de Amplificação. É interessante notar que, para uma velocidade pré-determinada, este desvio causa uma diferença no comportamento da estrutura. Considerando, por exemplo, a região acima da velocidade crítica, verifica-se as maiores amplitudes de deslocamento ocorrem para o modelo com a carga constante, enquanto que em grande parte da região abaixo da velocidade crítica, as maiores amplitudes acontecem para o modelo com o oscilador.

3.2. Aplicativo: interação carro – ponte

Procurando simular o comportamento dinâmico deste sistema, considerou-se um veículo trafegando com uma velocidade constante de 20 m/s, sobre uma ponte, representada por uma placa apoiada por dois lados opostos.

A Figura 5, mostra o deslocamento vertical no tempo, do ponto central da ponte.

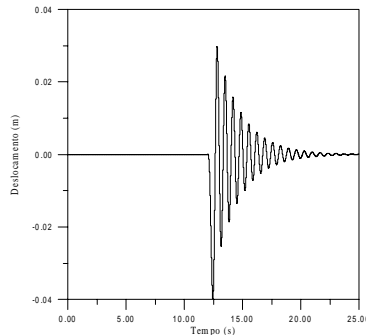


Figura 5. Deslocamento vertical da ponte em $x = a/2$ e $y = b/2$

Para o veículo, apresenta-se, na Figura 6 as velocidades relacionadas ao movimento vertical (Bounce) e as velocidades relacionadas aos movimentos angulares em y e x , (Pitch e Roll, respectivamente).

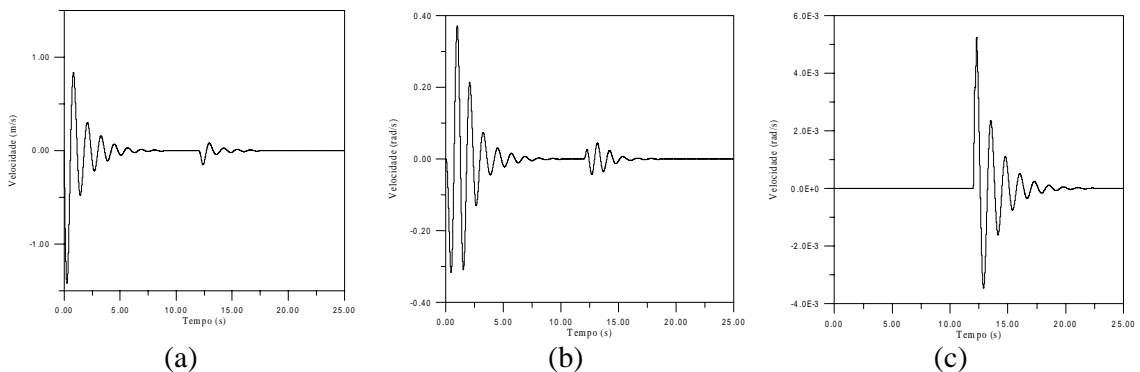


Figura 6. Velocidades relacionadas ao : (a) Bounce $\dot{\delta}_z$, (b) Pitch $\dot{\delta}_y$ e (c) Roll $\dot{\delta}_x$

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma análise do comportamento dinâmico de uma placa submetida a um carregamento móvel foi apresentada. Verificou-se, através dos resultados obtidos, que o comportamento do sistema está diretamente relacionado com a velocidade desenvolvida pelo carregamento, identificando, inclusive, a presença de uma velocidade crítica, para a qual o subsistema estrutural apresenta suas maiores amplitudes de deslocamento.

Observou-se que o deslocamento dinâmico transversal de uma placa simplesmente apoiada, sujeita a uma carga simples, deslocando-se com uma velocidade constante, em uma trajetória paralela a um de seus lados, pode chegar a ser 1,575 vezes maior que deslocamento estático máximo, quando o tempo necessário para a carga atravessar a placa for igual ao seu período fundamental ($T/\tau = 1,0$). Considerando que o carregamento atuante tenha sido proveniente de um subsistema massa-mola-amortecedor, investigou-se a influência que a massa do subsistema exerce sobre a resposta da estrutura.

Ressalta-se, através do modelo proposto para representar a interação veículo-estrutura, as vantagens de se utilizar um procedimento generalizado e modular na representação de um sistema de maior complexidade.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adler, A.A. and Reismann, H., 1974, “Moving Loads on a Elastic Plate Strip”, Transactions of the ASME, 1974, vol. 41, p. 713 – 718.
- Bessa, W.M., 2000, “Abordagem do Problema de Cargas Móveis Através de uma Técnica Multidisciplinar de Modelagem”, Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, R.J., Brasil.
- Chan, T.H.T. et al., 1999, “An Interpretative Method for Moving Force Identification”, Journal of Sound and Vibration, vol. 219, N° 3, p. 503 – 524.
- Da Silva, F.R. , 1994, “Procedimentos para a Análise Estrutural Dinâmica Através da Técnica Generalizada dos Grafos de Ligação”, Tese de Doutorado, COPPE, Rio de Janeiro.
- Da Silva, F.R. e Bessa, W.M., 1999, “Cargas Móveis Sobre Placas: Uma Formulação Através da Análise Modal”, XV COBEM, Águas de Lindóia.
- Henchi, K. et al., 1997, “Dynamic Behaviour of Multi-Span Beams Under Moving Loads”, Journal of Sound and Vibration, vol. 199, N° 1, p. 33 – 50.
- Jahanshahi, A. and Monzel, F.J., 1965, “Effects of Rotatory Inertia and Transverse Shear on the Response of Elastic Plates to Moving Loads”, Ingenieur-Archiv, vol. 34, N° 6, p. 401 – 410.
- Kwon, H.-C., Kim, M.-C. and Lee, I.-W., 1998, “Vibration Control of Bridges Under Moving Loads”, Computers & Structures, vol. 66, N° 4, p. 473 – 480.
- Taheri, M.R. & Ting, E.C., 1990, “Dynamic Response of Plates to Moving Loads: Finite Element Method”, Computers & Structures, vol. 34, N° 3, p. 509 – 521.
- Wang, R.-T. & Lin, J.-S., 1998, “Vibration of Multi-Span Timoshenko Frames due to Moving Loads”, Journal of Sound and Vibration, vol. 212, N° 3, p. 417 – 434.
- Wang, R.-T. & Chou, T.-H., 1998, “Non-Linear Vibration of Timoshenko Beam due to a Moving Force and the Weight of Beam”, Journal of Sound and Vibration, vol. 218, N° 1, p. 117 – 131.
- Wu, J.-S. and Shih, P.-Y., 1998, “Moving-Load-Induced Vibrations of a Moored Floating Bridge”, Computers & Structures, vol. 66, N° 4, p. 435 – 461.

ESTUDO DA UTILIZAÇÃO DE ELEMENTOS HIERÁRQUICOS EM OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA

Julio Antonio Beltrami da Silva

Janito Vaqueiro Ferreira

Renato Pavanello

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Faculdade de Engenharia Mecânica - FEM, Departamento de Mecânica Computacional - DMC, CEP 13083-970, Campinas, SP, Brasil.
E-mail: beltrami@fem.unicamp.br

Resumo

Este trabalho faz a avaliação da utilização de uma modelagem de Elementos Finitos p adaptativa em um processo de Otimização Estrutural Evolucionária (OEE) tendo como critério de projeto a tensão equivalente de von Misses. Apresenta-se também uma comparação entre duas formas de se fazer a retirada gradual dos elementos da estrutura: retirando-os ou alterando suas propriedades estruturais.

Os testes são realizados em estruturas planas, em exemplos de otimização de forma e topologia. A implementação é feita em um programa comercial mostrando a simplicidade do método de otimização.

Palavras-chave: Otimização Evolucionária, Estruturas, Método dos Elementos Finitos, Elementos Hierárquicos.

1. INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica computacional utilizada na modelagem de estruturas ou de um meio contínuo através da montagem de pequenos subdomínios, que são os elementos, de modo a se ter uma discretização do domínio completo [Cook,1989]. Cada elemento apresenta geometria simples facilitando sua análise, o que permite que um problema que antes não tinha ou apresentava solução analítica muito difícil, seja resolvido através da superposição de vários problemas simples. A implementação deste método só é viável usando-se computação intensiva.

Os resultados encontrados neste tipo de modelo são uma aproximação ou simulação numérica da solução. A engenharia de simulação é realidade desde 1960, mas a partir de 1970 sistemas de simulação tem sido vendidos comercialmente, sendo que hoje em dia com o desenvolvimento da eletrônica digital e dos computadores, a simulação computacional de sistemas complexos tem se tornado cada vez mais viável do ponto vista de tempo de processamento e custo computacional [Cook,1989]. Como benefícios introduzidos pela simulação computacional nos processos de projeto tem-se: refinamento de componentes, descoberta e previsão de problemas antes da construção do componente, otimização do desempenho e performance. Em resumo, como já disse Bruce Irons, um dos pioneiros no

MEF,” Se houver a oportunidade de se melhorar um projeto, então alguém em algum lugar estará tentando fazê-lo com o MEF” [Xie,1997].

Após larga utilização do MEF como poderosa ferramenta na análise de tensões e em outras áreas, a sua próxima utilização se fez na otimização de sistemas mecânicos. Com a introdução de algoritmos de otimização, onde centenas de variáveis de projeto e restrições puderam ser manipuladas, o conceito de projeto otimizado tornou-se disponível para engenheiros e cientistas de uma forma confiável, barata e de bom entendimento [Xie,1997].

Otimização Estrutural é a fusão de várias áreas como: Engenharia, Matemática, Ciência e Tecnologia, que tem como objetivo a melhor performance para uma dada estrutura. A maioria dos métodos tratam o problema de uma forma matemática onde procura-se maximizar ou minimizar uma característica do sistema. Em contrapartida a este rigor matemático, um método de otimização evolucionário foi desenvolvido por pesquisadores da Austrália (Xie e Steven), onde o processo de otimização é feito de uma forma mais intuitiva e heurística [Xie,1997].

Xie e Steven vêm propondo um método de otimização estrutural evolucionário (OEE) desde 1992. O método é baseado na observação das estruturas da natureza como ossos, galhos de árvores e conchas, tentando-se explicar como estas estruturas adquiriram suas características ao longo do processo de evolução natural [Xie,1993]. Este método é baseado no simples conceito de remoção gradual de material ineficiente da estrutura, sendo que o material não removido tende a comportar-se como uma estrutura melhor adaptada a suas funções. Uma importante característica deste método é o seu fácil entendimento e implementação [Xie,1997].

Existem basicamente três tipos de otimização estrutural: de topologia – que pode ser exemplificado como a melhor localização das barras de uma treliça, dimensional – que determina os parâmetros geométricos como espessuras ou área da seção, e de forma – em que se escolhe o formato do componente.

Vários tipos de projeto já foram solucionados via OEE como por exemplo: minimizar o peso de estruturas fazendo-se a remoção segundo o nível de tensão [Xie,1993] ou com restrição relacionadas a deslocamentos [Nha Chu,1996]; maximizar ou minimizar uma frequência natural escolhida [Zhao,1997] ou ainda controlar o intervalo entre duas frequências naturais de vibração de uma estrutura variando-se sua forma e topologia [Zhao,1997]; otimizar peso variando-se parâmetros dimensionais [Xie,1997]; otimizar forma com vistas a reduzir concentração de tensão [Xie,1997].

Este trabalho apresenta um estudo da utilização do método adaptativo-p de resolução no processo OEE. O método é aplicado em problemas de otimização de forma e topologia cujo objetivo é a diminuição de peso, tendo como variável de controle a tensão de von Mises ao longo da estrutura. Avalia-se também duas maneiras de se fazer a retirada gradual dos elementos da estrutura. Os algoritmos foram implementados no *software* ANSYS 5.4, usando-se uma linguagem própria, que permite a adequação do pacote comercial para fins de otimização evolucionária [Silva, 1999].

2. PROCESSO EVOLUCIONÁRIO DE OTIMIZAÇÃO

A remoção gradual de material da estrutura determina a tendência da configuração desta estrutura em direção a um ótimo, tendo-se a otimização de forma e de topologia simultaneamente. Este é o conceito simples de otimização evolucionária estrutural (OEE), sendo que vários critérios de projeto podem ser admitidos no sentido de orientar esta retirada de material redundante da estrutura. Como critérios pode-se destacar tensão máxima, rigidez em uma determinada região, frequência natural, entre outros.

O critério escolhido para este trabalho foi a tensão local. Na prática apenas algumas partes da estrutura estão sujeitas a tensões elevadas, tal fato leva a idéia de retirada das regiões que estão sendo pouco utilizadas, ou seja, aquelas em que os níveis de tensão estão bem baixos, usando-se para isso algum critério de rejeição [Xie,1993].

Este procedimento se inicia partindo-se de um domínio de trabalho grande o suficiente para cobrir a área final da peça. Em seguida divide-se este domínio com uma malha suficientemente fina de elementos finitos e aplica-se as condições de contorno, carregamento e restrições, nos seus devidos locais e determina-se a distribuição de tensão ao longo da estrutura.

Elementos são retirados conforme um critério de rejeição **RC** que escolhe aqueles com os mais baixos valores de tensão em toda a estrutura. Para o caso de estado plano de tensão e material isotrópico, a tensão utilizada é a equivalente de von Misses calculada no centróide do elemento, que é definida como:

$$\sigma_{EQV} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (1)$$

onde σ_x σ_y são as componentes normais do tensor de tensões nas direções x e y e τ_{xy} é a componente de cisalhamento.

Inicialmente, elementos com valor σ_{EQV} menor que o produto do **RC** pela σ_{EQV} máxima encontrada ao longo da estrutura são eliminados, sendo que **RC** também é chamada de razão de rejeição inicial **RR₀**. O ciclo de eliminação de elementos é repetido até que não existam mais elementos a serem retirados para **RR₀**. A estrutura ótima não é determinada em apenas uma etapa, o processo evolucionário é adotado, ou seja, adiciona-se à **RR₀** uma razão de evolução **ER** e um novo ciclo de eliminação inicia-se até que não exista mais elementos a serem eliminados para esta nova razão de rejeição (**RR = RR₀+ER**), a razão de rejeição vai sendo atualizada até se obter uma configuração otimizada.

Os valores escolhidos para as constantes **RR** e **ER** devem ser pequenos, aproximadamente 1%, para que se tenha uma melhor convergência e não seja retirado muito material, a semelhança do que ocorre nos processos evolutivos da natureza. A cada etapa (**RR**) é possível observar a nova forma e topologia determinada, bem como congelar alguma parte da estrutura que não possa ser eliminada.

O processo evolucionário pode ser resumido assim:

- 1) discretizar o domínio de análise com uma malha fina de elementos finitos,
- 2) determinar a distribuição de tensões para as restrições e carregamentos,
- 3) selecionar e remover os elementos com $\sigma_{EQV} < \sigma_{EQV} \text{ máxima} \times \mathbf{RR}$,
- 4) repetir passos 2 e 3 até não haver elementos selecionados,
- 5) atualizar **RR** e iniciar nova retirada de elementos repetindo-se os passos 2, 3 e 4,

Como exemplo analítico de estrutura otimizada com o uso do OEE, é apresentada uma estrutura de Michell mostrada na Figura 1-a [Hemp,1973]. O domínio de projeto tem dimensões 2H x H e foi discretizado em 50 x 25 elementos quadrilateral bilineares de estado plano de tensão. Os nós dos cantos inferiores foram fixados e uma carga nodal foi aplicada na metade do lado inferior do domínio inicial, conforme Figura 1-b. O processo evolucionário teve início com **RR₀ = 1%**, a razão de evolução **ER = 0,5%**, e os elementos foram retirados da estrutura modificando a topologia da matriz de rigidez global.

A figura 2 mostra diferentes etapas do processo evolucionário para **RR** igual a 5%, 12,5% e 19,5%.

A forma otimizada foi alcançada para **RR=19,5%**. Em cada passo de **RR** foram necessárias 3,5 iterações em média. Observa-se uma concordância do ângulo de 45° entre a solução numérica otimizada e a solução analítica mostrada na figura 1-a. A distribuição das barras na forma final não se apresentou idêntica, mas é bastante semelhante à encontrada por

Steven [Xie,1993], o que pode ser explicado pelo fato da estrutura de Michell assumir solução para elementos de barra pivotados onde a força é aplicada, ao passo que o modelo evolucionário é contínuo[Xie,1997].



Figura 1. a) Estrutura de Michell e b) domínio inicial de projeto



Figura 2. Etapas do processo evolucionário para $RR = 5\%$, $12,5\%$ e $19,5\%$

3. ELEMENTO HIERÁRQUICO E O PROCESSO EVOLUCIONÁRIO

No contexto deste trabalho a adaptatividade é o processo de modificação da discretização dos elementos finitos com o objetivo de buscar uma melhor precisão no cálculos dos campos de deslocamentos, deformações e tensões. Desta forma, a estimativa e o controle dos erros é feita através de uma série de modificações sistemáticas na aproximação, geralmente aumentando o número de graus de liberdade no final de cada modificação.

Dois tipos de adaptatividade são os mais utilizados. O primeiro consiste em variar o tamanho dos elementos, que é chamada de versão h do método. Pode-se mostrar [Cook,1989] que a medida que a malha é refinada, a solução tende a convergir para a solução exata do modelo matemático que se está resolvendo. O segundo tipo é baseado no aumento da ordem das funções de interpolação do elemento, que é chamada de versão p [Babuska, 1986] do método adaptativo.

Este método oferece duas vantagens: elementos p que são de grande tamanho absorvem melhor problemas de distorção da malha e a topologia da malha não se modifica como resultado da adaptatividade.

Uma vez que na otimização evolucionária estrutural proposta por Steven a posição dos elementos não é alterada, pois a modificação da topologia da estrutura ocorre com a eliminação dos elementos, introduziu-se o método adaptativo p no processo evolucionário com a intenção de se ter um cálculo mais preciso do campo de tensões do modelo. Estando melhor avaliadas as tensões, espera-se um melhor desempenho do método de otimização em relação a razões de evolução e até mesmo mudanças nas etapas do processo evolucionário.

O algoritmo de otimização evolucionária adaptativa p pode assim ser resumido:

- 1) discretizar o domínio de análise com uma malha fina de elementos finitos,
- 2) determinar o campo de deslocamentos e tensões da estrutura,
- 3) calcular erro na norma de energia dos elementos e selecionar aqueles com erro maior que 5% ,
- 4) aumentar em um grau a ordem das funções de forma dos elementos selecionados no item 3,
- 5) repetir 2, 3 e 4 até alcançar a convergência requerida para todos os elementos,
- 6)selecionar e remover os elemento com $\sigma_{EQV} < (\sigma_{EQV \text{ máxima}} \times RR)$,

- 7) repetir 4 a 6 até não haver elementos selecionados,
- 8) atualizar **RR** e repetir e iniciar nova retirada de elementos partindo-se do item 4,

O mesmo exemplo anterior foi resolvido usando-se o algoritmo descrito acima, estando os resultados obtidos registrados na Figura 3, onde observa-se que a forma final obtida é semelhante. No próximo item os métodos são comparados.

4. RESULTADOS

Vários testes numéricos foram realizados para se verificar a influência da modelagem adaptativa *p* (*michellpc*) no processo de otimização estrutural evolucionária. A seguir será feita a comparação desta modelagem com o processo evolucionário convencional (*michellhc*).

Em todos os casos a malha inicial, as condições de contorno e o carregamento foram mantidos iguais. Para o *michellpc* adotou-se como critério de erro limite 5% na energia de distorção [Zienkiewicz, 1987], sendo que as funções de forma (hierárquica) de cada elemento eram acrescidas em um grau quando a convergência requerida não era alcançada, ou seja, comparando-se o erro da norma da energia da última iteração com a anterior e verificando se a diferença era menor que 5%.



Figura 3. Etapas do processo evolucionário para $RR = 5\%$, $12,5\%$ e $16,5\%$

Com a utilização do método-*p* houve um evidenciamento de erros devido a concentração de tensão que promoveram valores de tensão máxima 50% em média superiores aos valores encontrados com o método de resolução convencional, conforme mostrado na Tabela 1.

Tabela 1. Valores de tensão máxima ao longo do processo evolucionário

RR(%)	Método- <i>p</i> σ_{EQV} máxima (Pa)	Convencional σ_{EQV} máxima (Pa)
2,5	15333,3	9578,9
5,0	15546,1	9662,0
7,5	16470,5	10187,9
10,0	16469,4	10671,5
12,5	17444,6	10813,8
15,0	16640,1	11040,6
16,5	16635,5	11035,0
17,5	Colapso	11552,4
19,5	Colapso	11566,8
>19,5	Colapso	Colapso

O fato de se obter tensões máximas superiores para o *michellpc* determina uma maior retirada de elementos para cada **RR**, uma vez que os elementos são selecionados baseado no produto da **RR** pela tensão máxima encontrada na estrutura. A Figura 5-a mostra a evolução do volume, sendo que o *michellpc* atingiu a estrutura ótima para **RR**=16,5% e o *michellhc* em **RR**=19,5%. Tal fato pode também ser comprovado comparando-se as configurações para **RR**=12,5% mostradas nas Figuras 2 e 3. Pode-se observar uma estrutura mais esbelta referente ao *michellpc*.

No processo adaptativo-p os elementos com funções de ordem mais alta localizaram-se próximos às restrições e nos pontos de retirada de elementos, pois nestes pontos o contorno perde suavidade causando certa singularidade, o que causa uma perda de precisão nos cálculos. Tal fato pode ser comprovado observando as regiões mais escuras da Figura 4.

O número médio de iterações para cada **RR** foi de 3,5 para o michellhc e de 3,7 para o michellpc, que teve seu tempo de resolução por iteração inicialmente maior. Com maior retirada dos elementos, ou melhor depois de **RR**=3,5%, o tempo de resolução por iteração para michellpc tornou-se menor, conforme mostrado na Figura 6-a.

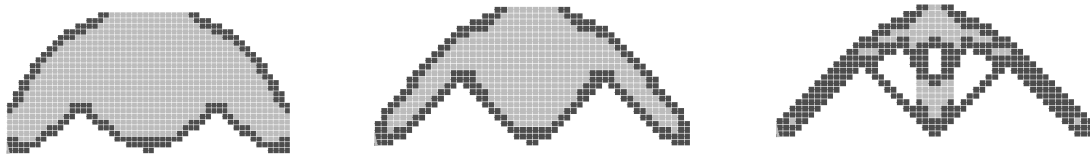


Figura 4. Elementos hierárquicos p para **RR** = 2,5%, 5% e 7,5%

A fim de diminuir a excessiva concentração de tensão evidenciada pelo método adaptativo p, será feita a comparação novamente para os dois casos: método adaptativo p e o método convencional com cargas distribuídas. Os exemplos serão identificados por michellpd e michellhd respectivamente.

O que se verificou é que o michellpd apresentou tensões máximas em um patamar superior, 15% em média, mas o colapso se deu praticamente para o mesmo valor de **RR**, sendo **RR**=31,5% para o michellpd e **RR**=32% para o michellhd, conforme Figura 5-b. Os tempos de resolução foram equivalentes, sendo que depois de **RR**=13%, Figura 6-b, o tempo de resolução para o michellpd ficou menor. O número médio de iterações para cada **RR** foi de 4,9 para o método convencional e de 3,7 para o método-p.

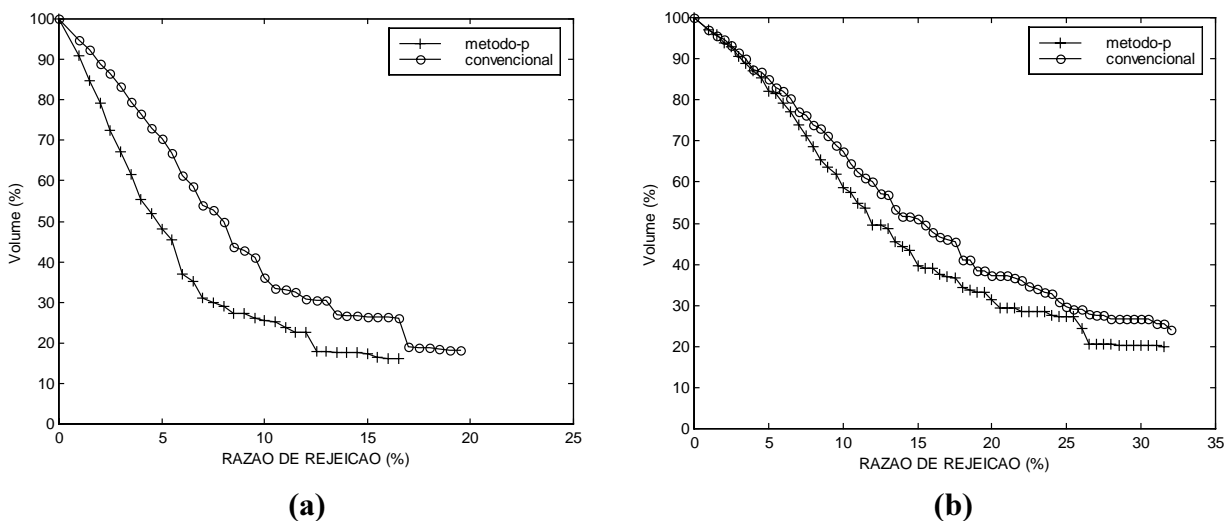


Figura 5. Variação do volume em função da **RR**, a) carga concentrada., b) carga distribuída

Outro ponto analisado, refere-se a forma como é feita a retirada dos elementos ao longo do processo evolucionário. Duas maneiras são apresentadas: retirando os elementos do modelo, ou alterando as propriedades estruturais dos elementos selecionados. Neste caso é imposto módulo de elasticidade E muito pequeno, de tal forma que a contribuição destes elementos na rigidez do sistema passa a ser desprezível, ou seja, os elementos são considerados mortos estruturalmente. As condições de contorno são do tipo concentrada, e já descritas inicialmente, e o método de resolução é o convencional em ambos os casos.

Observou-se que as duas formas são idênticas no que diz respeito ao número de elementos retirados, tensão máxima, tensão mínima e configurações geradas para cada valor de **RR**. A diferença se deu na **RR** de colapso e no tempo total de resolução.

No caso em que os elementos foram retirados da estrutura, o colapso se deu em **RR**=19%, e para o caso que os elementos foram mortos o colapso se deu em **RR**=24%. Para o primeiro caso, embora a retirada de elementos tenha sido idêntica ao segundo, depois de **RR**=19% surgem instabilidades numéricas que causam o colapso, pois elementos ficam ligados entre si por um nó apenas, determinando antecipadamente o aparecimento de singularidades. Em contrapartida, o tempo total de resolução se torna constante no modelo de elementos mortos, uma vez que os elementos se tornam pouco rígidos e não são retirados da estrutura, conservando-se o número total de graus de liberdade da estrutura. A Figura 7 mostra a evolução dos tempos de resolução em função da razão de rejeição para as duas formas de se eliminar elementos.

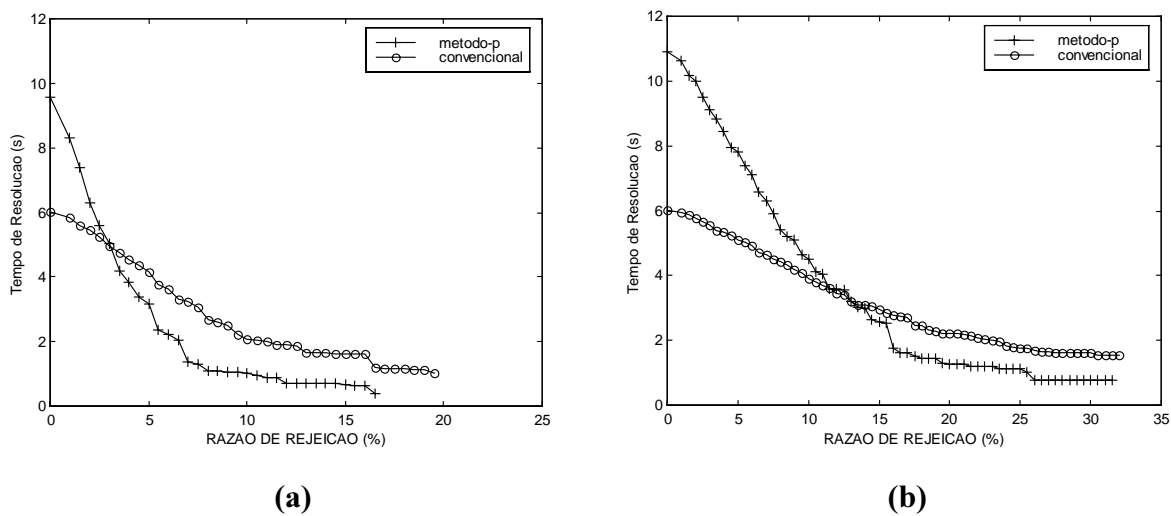


Figura 6. Variação do Tempo de Resolução em função de **RR**, a) carga concentrada, b) carga distribuída

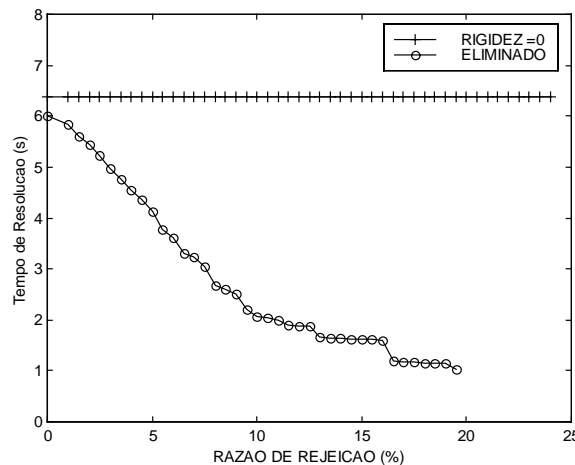


Figura 7. Variação do Tempo de Resolução em função de **RR**

5. CONCLUSÕES:

O método evolucionário adaptativo proposto acelerou o processo evolucionário, convergindo para as soluções otimizadas em razões de rejeição menores. As configurações de forma e topologia encontradas concordam, de forma satisfatória, com as soluções analíticas e

numéricas encontradas na literatura. Os testes preliminares realizados mostram um pequeno ganho do ponto de vista de custo computacional, quando comparado ao método evolucionário convencional. Observa-se que este ganho é fortemente influenciado pelo nível de concentração de tensão.

Nos exemplos estudados, o ganho em precisão na avaliação das distribuições do campo de tensão não foi muito significativo na obtenção das configurações finais.

Quanto às maneiras de retirada dos elementos: retirando-os da estrutura ou alterando suas propriedades estruturais, conclui-se que são idênticas até as etapas de evolução em que instabilidades numéricas aparecem, sendo que quando elemento são retirados, a estrutura resultante se torna singular antecipadamente. Uma implementação mais eficiente seria a combinação das duas formas, iniciando-se com a retirada de elementos, e a partir de certa etapa utilizar a modificação do módulo de elasticidade como forma de se anular os elementos selecionados, uma vez que a última exige um maior custo computacional.

O método de otimização estrutural evolucionário (OEE) é simples, de fácil compreensão e pode ser implementado em qualquer código comercial.

6. REFERÊNCIAS

- Babuska, I; Zienkiewicz, O.C.; Gago, J; Oliveira, E.R.A., "Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations.", John Wiley & Sons – 1986
- Cook, R.D., Malkus, D.S. and Plesha, M.E., 1989, "Concepts and applications of finite element analysis", 3rd edn, John Wiley & Sons, New York.
- Hemp, W. S., "Michell's structural continua. In Optimal Structures", 1973, Clarendon Press, Oxford.
- Nha Chu, D.N., Xie, Y.M., Hira, A. and Steven, G.P., "Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints ", Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 21, (1996), pp. 239-251.
- Silva, J.A.B., Pavanello R., Evolutionary structural optimization using finite element method. IX Seminário de Elementos Finitos - ANSYS. São Paulo SP, Brasil, 09 e 10 de Novembro, 1999. 20 pp. (CD ROM).
- Silva J.A.B., Pavanello R., Evolutionary structural optimization using finite element method. SAE Technical Paper Series 1999-013033E. VIII Internacional Mobility Technology Conference & Exhibit. São Paulo , Brazil , October 4 to 6, 1999. 7 pp. (CD ROM). ISSN 0148-7191.
- Xie, Y.M, Steven, G.P., 1997, "Evolutionary structural optimization " 1st edn, Springer-Verlag, London.
- Xie, Y.M, Steven, G.P., "Evolutionary structural optimization for dynamic problems", Computer and Structures, Vol. 58, 6, pp 1067-1073, (1996).
- Xie, Y.M, Steven, G. P., "A simple evolutionary procedure for structural optimization", Computer and Structures, Vol. 49, 5, pp 885-896, (1993).
- Zhao, C. B., Steven, G. P., Xie, Y.M, "Evolutionary optimization of maximizing the difference between two natural frequencies of a vibration structure", Structural Optimization, 13, (1997), pp148-154, © Springer-Verlag.
- Zhao, C. B., Steven, G. P., Xie, Y.M, "Effect of initial nodesign domain on optimal topologies of structures during natural frequency optimization", Computer and Structures, Vol. 62, 1, pp 119-131, (1997).
- Zienkiewicz, O. C., Zhu, J. Z., "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 337-357 (1987).

ALGORITMO PARA IMPLEMENTAÇÃO DO CRITÉRIO DE PLANO CRÍTICO PARA FADIGA MULTIAXIAL

José A. Araújo*

José C. Balthazar**

Nelison R.C. Vilela**

* Departamento de Ciências de Engenharia, Universidade de Oxford, Oxford, Reino Unido. E-mail: alex.araujo@christ-church.oxford.ac.uk

** Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica, 70910-900, Brasília, DF, Brasil. E-mail: jcb@enm.unb.br

Resumo

A grande maioria das teorias propostas para análise do problema da fadiga multiaxial o fazem segundo tres metodologias básicas: a) métodos baseados nas tensões ou deformações equivalentes; b) métodos de plano crítico e; c) métodos de energia ou do trabalho de deformação. As teorias de plano crítico, desenvolvidas a partir da interpretação física dos mecanismos de crescimento de trincas de fadiga são as que tem mostrado resultados mais promissores. Entretanto, a aplicação destas teorias não é tão simples, pois nos carregamentos fora de fase, os eixos das tensões e deformações principais mudam de orientação ao longo do tempo, dificultando a identificação do plano crítico, e o cálculo dos parâmetros envolvidos, mesmo nos casos de carregamentos proporcionais. Neste trabalho é descrito um algoritmo para implementação de dois modelos de plano crítico para fadiga multiaxial.

Palavras-chave: fadiga, fadiga multiaxial, carregamentos combinados, plano crítico.

1. INTRODUÇÃO

Componentes mecânicos com funções estruturais são frequentemente submetidos a carregamentos variáveis no tempo. Árvores de transmissão, eixos, barras de torção, vasos de pressão, tubulações em plantas químicas e refinarias, junções pás de turbina/rotor, componentes aeronáuticos e mesmo junções parafusadas, entre outros, estão frequentemente sob estados bi-axiais ou tri-axiais de tensão que, quando originados por carregamentos dinâmicos, podem levar à iniciação e propagação de trincas de fadiga. O processo de fadiga sob estes estados complexos de tensão é conhecida como *Fadiga Multiaxial* e sua consideração é de fundamental importância para o correto dimensionamento e aumento da confiabilidade de componentes que na sua vida operacional estejam submetidos a este tipo de carregamento. As primeiras investigações sobre o assunto datam do século passado, quando Lanza (1886) publicou os primeiros resultados de testes envolvendo carregamento combinado de flexão e torção. Já neste século, Mason (1917), Haigh(1923), Nishiara e Kawamoto (1941), Gough *et al* (1951) e Sines (1955), publicaram mais resultados experimentais e formularam as primeiras hipóteses teóricas para explicar o processo de fadiga sob cargas multiaxiais. Na tentativa de desenvolver teorias que possam ser utilizadas nas situações mais gerais e complexas da fadiga multiaxial, mais de duas dezenas de modelos já

foram propostos para tentar solucionar o problema. De um modo geral, as teorias já apresentadas são derivadas a partir de três diferentes abordagens: a) da tensão ou deformação equivalente (Sines, 1959), b) da energia de deformação (Garud, 1979, Ellyin et al., 1991, Ellyin e Golos, 1993, Liu, 1993 e Glinka et al., 1995) e; c) do plano crítico (Brown e Miller, 1973, Lohr e Ellison, 1980, Socie, 1987, Fatemi e Socie, 1988, McDiarmid, 1991, e Socie, 1993).

As teorias de tensão ou deformação equivalente propõem a transformação das tensões multiaxiais de amplitude constante em uma amplitude de tensão uniaxial, a qual, assume-se, irá produzir a mesma vida à fadiga que as tensões multiaxiais combinadas. A amplitude de tensão equivalente é então usada para determinar a vida à fadiga a partir de curvas S-N, obtidas em ensaios convencionais de fadiga sob carregamento uniaxial alternado. Um modelo deste tipo bastante conhecido foi proposto por Sines (1959) o qual estabelece que a tensão cisalhante octaedral admissível é uma função linear da soma das tensões normais médias sobre os planos octaedrais, expresso matematicamente como:

$$\frac{1}{3} \left\{ (\sigma_{1a} - \sigma_{2a})^2 + (\sigma_{2a} - \sigma_{3a})^2 + (\sigma_{1a} - \sigma_{3a})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq A - \alpha (\sigma_{xm} + \sigma_{ym} + \sigma_{zm}) \quad (1)$$

onde σ_{1a} , σ_{2a} e σ_{3a} são as tensões principais alternadas, σ_{xm} , σ_{ym} e σ_{zm} são as tensões normais médias, A é uma constante para o material, proporcional a resistência a fadiga para carregamentos alternados, e α é uma medida da influência da tensão média normal sobre a resistência à fadiga do material para uma vida esperada. A falha ocorrerá se o valor da expressão do lado esquerdo exceder o do lado direito. A constante A é obtida a partir de ensaios sob carregamentos alternados, e α sob carregamentos repetidos. Formulações baseadas nas deformações também são utilizadas. Araújo e Balthazar (1997) mostraram que o critério de Sines apresenta resultados satisfatórios para o cálculo da resistência à fadiga em carregamentos combinados de flexão e torção em fase. Entretanto, critérios deste tipo não prevêm o crescimento de trincas de fadiga de forma coerente com o observado experimentalmente pois não considera os aspectos físicos da resposta do material submetido à carregamentos dinâmicos, isto é, não oferece uma interpretação em termos dos processos de nucleação e crescimento de trincas, parte fundamental do processo de fadiga. O modelo de Sines, por exemplo, prevê que a vida à fadiga é controlada pela amplitude da tensão cisalhante octaedral e, portanto, seria esperado que as trincas de fadiga propagassem nestes planos, o que não ocorre, conforme mostrado por Socie (1987). Outro problema deste tipo de critério é que sua aplicabilidade é restrita à carregamentos proporcionais, ou seja, aos casos em que os eixos principais das componentes alternadas de tensão permanecem invariáveis ao longo do ciclo de carga.

Uma outra abordagem para o problema foi considerada através do uso da energia como parâmetro de correlação para a falha por fadiga multiaxial. O método consiste em computar o trabalho plástico realizado em cada ciclo sob um estado multiaxial de tensões e correlacioná-lo com a vida à fadiga. Um método deste tipo é o modelo de Garud (1979) o qual propõe que a vida à fadiga para iniciação de uma trinca, N_f , é uma função do trabalho plástico por ciclo de carregamento, W_c , expresso pela equação:

$$N_f = F(W_c) \quad (2)$$

onde F é uma função a ser determinada experimentalmente a partir de ensaios sob controle de deformação.

Combinando-se um modelo deste tipo com uma teoria de acumulação de dano, como a

Regra de Miner, por exemplo, pode-se fazer uma previsão da vida à fadiga. Entretanto, para determinar o trabalho plástico realizado por ciclo é necessário o uso de relações constitutivas de plasticidade, o que torna difícil a utilização prática do modelo. Além disso a precisão deste tipo de modelo é questionável quando aplicada a fadiga policíclica, onde as deformações plásticas são muito pequenas ou inexistentes, o que torna as estimativas do trabalho plástico realizado em cada ciclo difíceis e imprecisas. De acordo com Nelson e Tipton (1985) uma pequena variação no valor do trabalho de deformação plástica resulta em grandes discrepâncias na previsão da vida à fadiga.

2. AS TEORIAS DE PLANO CRÍTICO

As teorias de plano crítico são fundamentadas em observações experimentais mostrando que as trincas de fadiga nucleiam-se e crescem inicialmente em planos preferenciais. As tensões e deformações são determinadas em vários planos durante um ciclo de carregamento para o mesmo estado de tensão e, uma combinação empírica destas variáveis é então usada para prever o plano mais severamente carregado ou “plano crítico”, onde espera-se que as trincas de fadiga tenham origem. Além do local de nucleação da trinca, tais parâmetros também podem ser correlacionados com a vida por fadiga obtida a partir de simples testes de flexão ou torção alternada pura.

Brown e Miller (1973) afirmaram que o plano crítico é o plano de máxima amplitude da deformação cisalhante e que as trincas poderiam crescer sobre estes paralelamente a superfície (caso A) ou indo desta para o interior (caso B), como mostra a Fig. 1. Mais recentemente Bannantine e Socie e (1985) e Socie (1987) mostraram que os planos críticos, ou os planos mais prováveis de crescimento das trincas são os planos de máxima amplitude da deformação normal ou de máxima amplitude da deformação cisalhante e que o processo de crescimento e propagação das trincas depende não apenas do tipo do carregamento aplicado, mas do material, assim como da amplitude do carregamento.

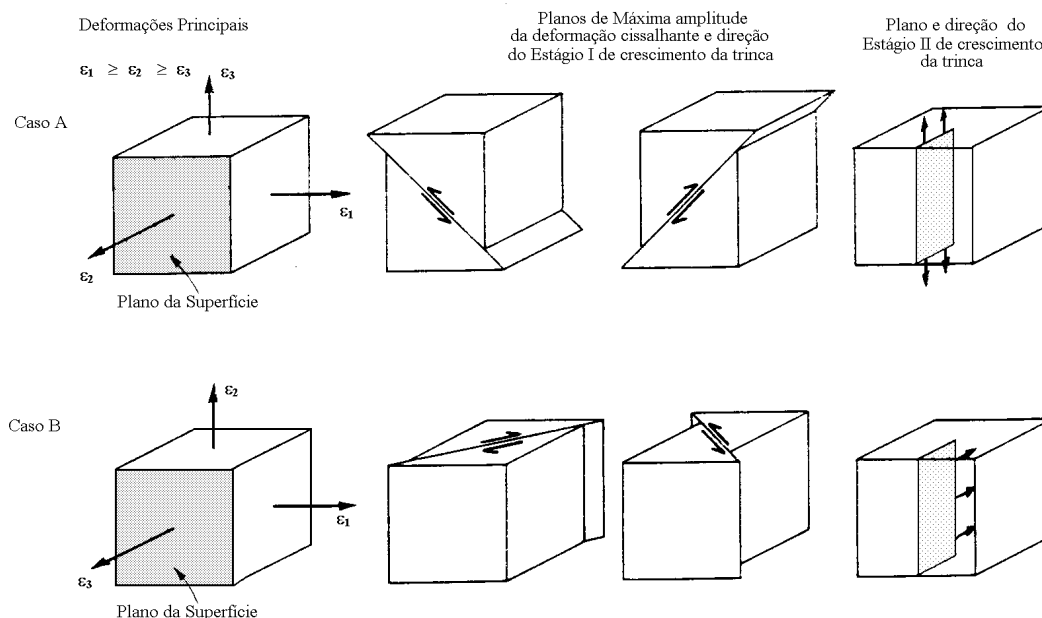


Figura 1 - Caso A e B de formação das trincas.

Como há dois casos de crescimento das trincas de fadiga, Socie (1987) e Fatemi e Socie (1988) mostraram que pelo menos 2 modelos diferentes são necessários para à análise da fadiga sob estados multiaxiais de deformações: (a) o modelo da deformação normal, para falhas que ocorrem devido a propagação de trincas normais (modo I) e b) o modelo da deformação

cisalhante, para falhas que ocorrem devido a propagação de trincas de cisalhamento (modo II).

Dois modelos de plano crítico têm sido amplamente usados e discutidos na literatura. O critério SWT de Smith, Watson and Topper (1970) é apropriado para previsão da vida de trincas que crescem em planos sujeitos a grandes deformações normais e que, portanto, crescem inicialmente no Modo I (estágio II). Este modelo é descrito pela eq. (3)

$$\Gamma = \sigma_{max} \epsilon_a = \frac{(\sigma_f')^2}{E} (2N_{ff})^{2b} + \sigma_f' \epsilon_f' (2N_{ff})^{b+c} \quad (3)$$

onde ϵ_a é a amplitude de deformação no plano de máxima amplitude de deformação e σ_{max} é a máxima tensão sobre este plano para um dado estado de tensão. Note-se que de acordo com o parâmetro de SWT o plano crítico é definido como o plano que experimenta a maior combinação de $\epsilon_a \sigma_{max}$. Para encontrar o valor máximo de Γ , correspondente ao plano crítico, situado a um ângulo θ_c , medido em relação aos planos principais ou outro referencial previamente definido, precisa-se calcular os campos de tensão e deformação para cada passo de carga em cada diferente ponto x,y da região mais severamente carregada. Mais ainda, as equações de transformação de tensão e deformação devem ser usadas para avaliar o parâmetro em diferentes planos em cada ponto e passo de carga. O lado direito da eq. (3) é a descrição de uma curva $\epsilon-N$ onde σ_f' e b são, respectivamente, o coeficiente e o expoente de resistência à fadiga, e ϵ_f' e c são o coeficiente e expoente de ductilidade à fadiga; E é o módulo de elasticidade e $2N_{ff}$ é o número de reversões necessárias para nuclear uma trinca de 1mm de comprimento.

Para situações onde a trinca cresce no Modo II (estágio I), em planos sujeitos a altos esforços cisalhantes, Fatemi e Socie (1988) propuseram o seguinte modelo:

$$\Psi = \gamma_a \left[1 + \alpha \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_e} \right) \right] = \left(\frac{\tau_f'}{G} \right) (2N_{ff})^{b_1} + \gamma_f' (2N_{ff})^c \quad (4)$$

onde γ_a é a máxima amplitude de deformação cisalhante e σ_{max} é a máxima tensão normal sobre este plano. σ_e é a tensão de escoamento e α é uma constante obtida a partir de ensaios de fadiga uniaxiais e de torção pura, a qual se aproxima de um para vidas longas ($>10^7$) e diminui para vidas curtas (Neu, Pape and Swalla-Michaud, 1999). Aqui, o plano crítico é definido como o plano experimentando a maior combinação γ_a e σ_{max} , e para avaliar-se o valor máximo do parâmetro Ψ , usa-se um procedimento similar ao descrito anteriormente para o parâmetro de SWT. Novamente, o lado direito da eq. (4) representa a curva $\epsilon-N$ para testes de torção alternada pura.

3. ALGORITMOS PARA IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS DE SWT E FS

A quantificação do dano por fadiga e determinação do plano crítico é uma tarefa complexa. Um código que fosse capaz de descrever em detalhes os passos necessários para a implementação numérica destes modelos seria de grande relevância para aplicação prática em situações de projeto. O algoritmo apresentado a seguir, utilizando os modelos de Smith, Watson e Topper, e Fatemi e Socie, tem esta finalidade. O procedimento é adequado para determinação da vida inicial por fadiga de componentes estruturais sujeitos a carregamentos combinados cíclicos, de amplitude constante ou variável. Assume-se que os materiais estudados sejam isotrópicos e que o estado de tensão ou deformação seja plano, limitando a análise ao plano x,y. O detalhamento independe do regime de carregamento (elástico ou plástico) e da geometria analisada. Note-se que de acordo com os modelos de plano crítico, as variáveis que controlam o mecanismos de nucleção

da trinca são as tensões e deformações presentes no material na ausência de imperfeições. Para configurações com geometrias mais complicadas a determinação destas variáveis requer o uso de um método numérico como, por exemplo, o método de Elementos Finitos. Apesar da maioria de componentes estruturais de interesse prático possuírem geometrias complexas, ainda assim é possível obter soluções relativamente precisas para os campos de tensão/deformação de estruturas como eixos, árvores de transmissão ou tubos sob regime de carregamento elástico cíclico. Independentemente do método utilizado para determinação dos campos de tensão/deformação, deve-se enfatizar que, no procedimento abaixo, o objetivo é a determinação dos parâmetros de fadiga multiaxial e, portanto, assumir-se-á que a determinação dos campos de tensão/deformação pode ser conduzida pelo leitor com a precisão desejada.

Algoritmo:

- 1- Delimitar a região do componente onde as tensões são mais severas para conduzir a análise, por exemplo, as redondezas de concentradores de tensão (Fig. 2);

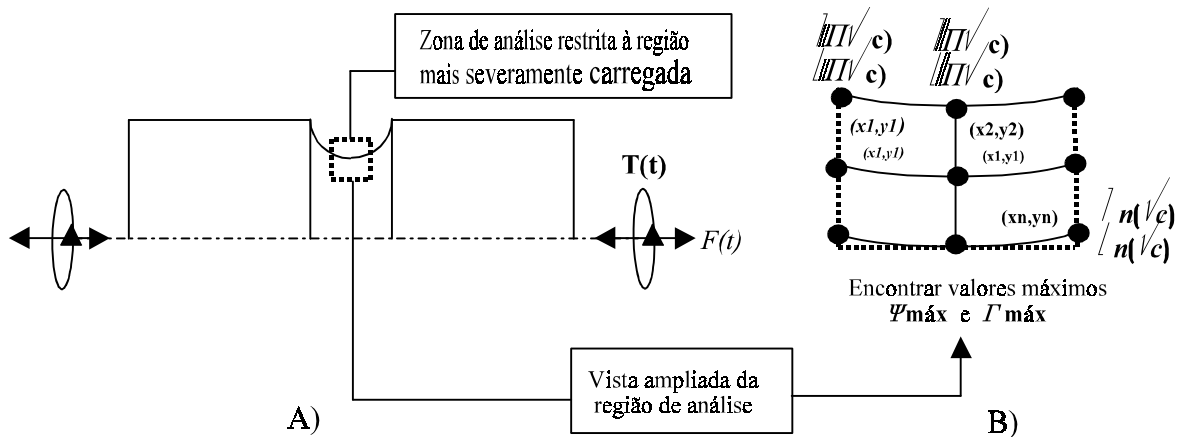


Figura 2 – A) Corpo-de-prova com entalhe mostrando a região onde a análise deve ser conduzida e B) vista ampliada desta região com pontos discretos onde os parâmetros Γ e Ψ serão avaliados.

- 2- Dividir esta região em uma malha de pontos x_i, y_i , onde $i=1, M$;
- 3- Escolher uma posição inicial, por exemplo, x_i^0, y_i^0 ;
- 4- Dividir a história de carregamento em N pontos discretos, onde N é um número inteiro suficientemente grande;
- 5- Iniciar a análise sobre o plano x ($\theta = 0^\circ$), vai-se para o primeiro passo da história de carregamento ($j = 1$) e avalia-se o tensor de tensão σ_{kl}^j e o tensor de deformação ϵ_{kl}^j ;
- 6- Repetir o passo 5 até $j = N$.
- 7- Calcular $\sigma_{xx}^{max}, \epsilon_{xx}^{max}, \epsilon_{xx}^{min}, \gamma_{xy}^{max}, \gamma_{xy}^{min}$, onde o índices superiores *max* e *min* indicam os valores máximos e mínimos da tensão máxima (média + alternada) e da deformação máxima dentro do ciclo de carregamento (ver Fig. 3);
- 8- Calcular os parâmetros $\Gamma_i(\theta)$ e $\Psi_i(\theta)$ para o plano estudado e na posição i , correspondendo cada posição i a um par ordenado (x_i, y_i) ;
- 9- Usando-se as equações básicas de transformação de tensão e deformação, calcular σ_{kl}^{ij} e ϵ_{kl}^{ij} em um plano na posição $\theta_i = \theta + \Delta\theta$;

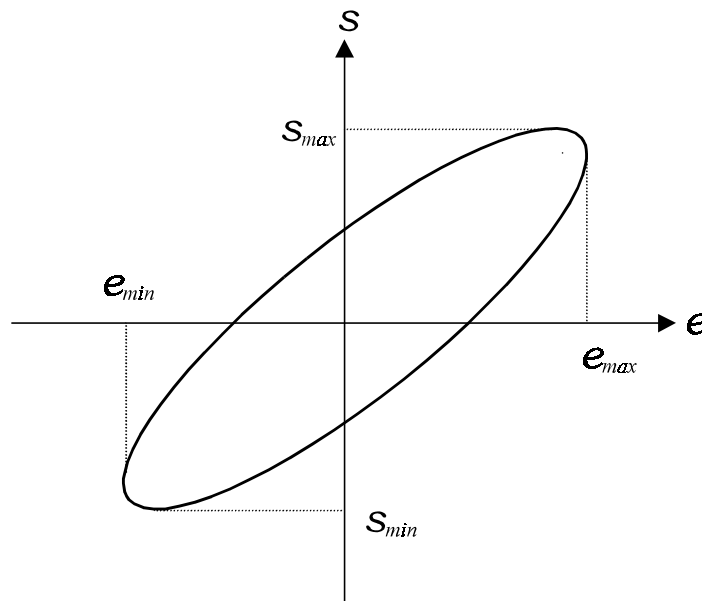


Figura 3 – Diagrama esquemático do ciclo de tensão x deformação do material em um determinado plano θ , mostrando os pontos onde a tensão e a deformação máxima (média + alternada) alcançam valores máximos e mínimos.

- 10- Repetir os passos 7 e 8 para novos planos, variando θ de 0° até $\theta = 180^\circ$;
- 11- Encontrar e armazenar os maiores valores de Γ_i e Ψ_i e os correspondentes planos críticos locais θ_c entre todos os planos investigados para o ponto inicial;
- 12- Incrementar x_i e ir para o passo 2;
- 13- Repetir o passo 12 até $i = M$;
- 14- Incrementar y_i e ir para o passo 2;
- 15- Repetir o passo 14 até $i = M$;
- 16- Encontrar o valores máximos globais Γ_{max} e Ψ_{max} entre todos os diferentes pontos i (estados de tensão) analisados e os planos críticos θ_c associados a cada um destes parâmetros;
- 17- Entrar com os valores de Γ_{max} e Ψ_{max} nas Eqs. 3 e 4 e calcular o número de reversões ($2N_f$) necessárias para iniciar uma trinca de 1mm de comprimento. Adotar a previsão mais conservativa (menor vida) como solução.

4. ANÁLISE CRÍTICA DOS MODELOS DE PLANO CRÍTICO

O grande apelo das teorias de plano crítico é que a mesma apresenta uma interpretação física do processo de dano de fadiga sob estados multiaxiais de tensões. Entretanto, de um modo geral, elas requerem um maior número de parâmetros a serem determinados experimentalmente. Na fadiga oligocíclica há necessidade do uso de teorias de plasticidade para caracterizar o comportamento plástico dos materiais nos modelos que utilizam tensão e deformação como parâmetros. Isto pode ser feito através das teorias da deformação total ou da plasticidade incremental. A teoria da deformação total é de fácil implementação, porém não pode ser aplicada a casos de carregamentos não proporcionais. A teoria da plasticidade incremental prevê que o comportamento plástico dos materiais pode ser aproximado em uma curva tensão-deformação

por segmentos lineares. Estas regiões de inclinação constante são definidas através de condições de escoamento previamente estabelecidas e devem ser redefinidas sempre que ocorrerem deformações plásticas. Isto requer a aplicação de regras de encruamento para definir as mudanças no estado do material, tornando complicada a implementação da teoria.

É evidente que a escolha do modelo apropriado para avaliar a vida por fadiga depende do prévio conhecimento do modo de nucleação e crescimento inicial da trinca (Modo I ou II). Esta não é uma tarefa trivial pois o modo de crescimento da trinca depende não apenas do tipo do carregamento aplicado, mas do material, assim como da amplitude do carregamento. Isto essencialmente quer dizer que, *a priori*, não se pode definir qual dos modelos propostos, eq. 3 ou 4, seria mais indicado para avaliar o dano por fadiga em um dado tipo de material e carregamento. Sabe-se entretanto que, a aplicação do modelo usado para quantificar o dano em trincas dominadas por deformações cisalhantes para casos em que o crescimento da trinca é controlado por deformações normais fornece resultados ligeiramente conservativos, e *vice-versa*. Portanto, uma solução para este impasse passa pelo cálculo da vida por fadiga usando-se ambos os modelos. A vida esperada será a fornecida pela menor estimativa.

A determinação da constante α presente no modelo de Fatemi e Socie exige dados experimentais tanto para ensaios de fadiga uniaxiais assim como para ensaios de fadiga à torção pura. Um outro problema do modelo da deformação cisalhante (Fatemi e Socie) é que o mesmo não consegue distinguir entre o crescimento de trincas do tipo A e do tipo B. Além disto, segundo Socie (1987), os modelos da deformação cisalhante e da deformação normal não fornecem bons resultados nos casos de fadiga policíclica, pois neste caso, o processo de fadiga é controlado pelas tensões elásticas.

As tensões normais médias de tração diminuem a resistência à fadiga em carregamentos de flexão e torção alternada. Portanto, qualquer modelo proposto dentro das diferentes abordagens para o problema da fadiga multiaxial, deve possuir termos capazes de quantificar o efeito das tensões normais médias. Na fadiga oligocíclica o relaxamento da tensão média acontece devido a existência de grandes deformações plásticas o que também deve ser quantificado pelo modelo.

Resultados apresentados por Das e Sivakumar (1999) mostram que os métodos de Plano Crítico apresentam boa correlação com resultados experimentais

5. CONCLUSÃO

Embora os critérios de tensão/deformação equivalentes sejam de simples implementação e apresentem resultados satisfatórios em alguns casos, sua aplicabilidade é limitada às situações envolvendo carregamentos proporcionais (Araújo e Balthazar, 1997). Os métodos de energia apresentam dificuldades em situações onde as deformações plásticas são reduzidas ou inexistentes, como no caso da fadiga policíclica. Por estarem vinculados a uma interpretação física do processo de fadiga, os modelos de plano crítico parecem mais adequados para abordagem do problema da fadiga multiaxial, particularmente para carregamentos fora-de-fase e não-proporcionais. A identificação dos planos críticos é essencial neste processo. O algoritmo apresentado permite identificar o plano crítico, segundo os modelos SWT e Fatemi-Socie. Este trabalho é parte de um programa de pesquisa em andamento, para avaliar a capacidade dos modelos de plano crítico para previsão da resistência e vida à fadiga de componentes estruturais sob estados multiaxiais de tensões.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BALTHAZAR, J.C. e ARAÚJO, J.A. - "Biaxial Fatigue: An Analysis of the Combined Bending / Torsion Loading Case", *Proc. of 5th International Conference on Biaxial /*

Multiaxial Fatigue and Fracture, Cracóvia, Polônia, Setembro, 1997, pp. 9-23.

- BROWN, M. W. and MILLER, K.J., (1973), A Theory for Fatigue Failure under Multiaxial Stress-Strain Conditions, Proc. IMechE, Vol. 187, pp. 745-755.
- DAS, J., e SIVAKUMAR, S.M., An Evaluation of Multiaxial Fatigue Life Assessment Methods for Engineering Components, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 76, 1999,
- ELLYIN, F., GOLOS, K. and XIA, Z., (1991), In-Phase and Out-of-Phase Multiaxial Fatigue, J. Engng. Mat. Tech., ASME, vol. 113, pp.112-118.
- ELLYIN, F., and KUJAWSKI, D., (1993), A Multiaxial Fatigue Criterion Including Mean-Stress Effect, Advances in Multiaxial Fatigue, ASTM STP 1191, (Ed. D.L. McDowell and R. Ellis), pp. 55-66.
- FATEMI, A., and SOCIE, D. F., (1988), A Critical Plane Approach to Multiaxial Fatigue Damage Including Out-of-Phase Loading, Fatigue & Fracture Engng. Mat. Struct., vol. 11, pp. 149-165.
- GARUD, Y. S., (1979), A New Approach to the Evaluation of Fatigue under Multiaxial Loading, proc. Symp. on Methods for Predicting Material Life in Fatigue, ASME, New York, pp. 247-264.
- GARUD, Y.S., (1981), Multiaxial Fatigue: A Survey of the State of the Art, J. of Testing and Evaluation, vol. 9, No. 3, pp. 165-178.
- GLINKA, G., SHEN, G. and PLUMTREE, A., (1995), A Multiaxial Fatigue Strain Energy Density Parameter Related to the Critical Fracture Plane, Fatigue & Fracture of Engng. Mat. Structures, vol. 18, pp. 37-46.
- HAIGH, B.P., (1923), The Thermodynamic Theory of Mechanical Fatigue and Hysteresis in Metals, Rep. British Association for the Advancement of Science, pp. 358-368.
- LANZA, G., (1886), Strength of Shafting Subjected to Both Twisting and Bending, Trans. ASME, vol. 8, pp. 121-196.
- LIU, K. C., (1993), A Method Based on Virtual Strain-Energy Parameters for Multiaxial Fatigue Life Prediction, Advances in Multiaxial Fatigue, ASTM STP 1191, (Ed. D.L. McDowell and R. Ellis), pp. 67-84.
- LOHR, R.D. and ELLISON, E.G., (1980), A Simple Theory for Low-Cycle Multiaxial Fatigue, Fatigue & Fracture of Engng. Mat. Structures, vol. 3, pp. 1-17.
- MASON, W., (1917), Alternating Stress Experiments, Proc. IMechE, Feb., pp. 121-196.
- McDIARMID, D.L., (1991), A General Criterion for High Cycle Multiaxial Fatigue Failure, Fatigue & Fracture Engng. Mat. Struct., vol. 14, pp. 429-453.
- NISHIARA, T. and KAWAMOTO, M., (1941), The Strength of Metals under Combined Alternating Bending and Twisting, Memoirs, College of Engineering, Kyoto Imp. University, Japan, vol. 10, pp. 177-201.
- NEU, R. W., PAPE, J. A., and SWALLA-MICHAUD, D. R., Methodologies for Linking Nucleation and Propagation Approaches for Predicting Life under Fretting Fatigue, Fretting Fatigue: Current Technology and Practices, ASTM STP 1367, D.W. Hoepfner, V. Chandrasekaran, and C.B. Elliotts, Eds., American Society for Testing Materials, 1999.
- SINES, G., (1955) , Failure of Materials under Combined Repeated Stresses with Superimposed Static Stresses, NACA Technical Note 3495, Washington, USA.
- SMITH, K.N., WATSON, P., and TOPPER, T.H., A Stress-Strain Function for the Fatigue of Metals, J. Mater., Vol. 5, No. 4, 1970, pp. 767-778.
- SOCIE, D. F., (1987), Multiaxial Fatigue Damage Models, J. of Engineering Materials and Technology, ASME, Vol. 109, Oct. pp. 293-298.
- SOCIE, D.F., (1993), Critical Plane Approaches for Multiaxial Fatigue Damage Assessment, Advances in Multiaxial Fatigue, ASTM STP 1191, (Ed. D.L. McDowell and R. Ellis), pp.7-36.

DETERMINAÇÃO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neilor Cesar dos Santos *

Jonas de Carvalho

João Lirani

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de São Paulo - São Carlos

Av. Trabalhador São-carlense, 400 - Centro, CEP 13566-590 - São Carlos - SP

e-mail: neilor@sc.usp.br, prjonas@sc.usp.br

Resumo

Apresenta-se diversas abordagens para determinação do fator de intensidade de tensão, para o modo I e modo combinado de carregamento da abertura das faces da trinca. Estas abordagens são baseadas em uma única análise pelo método dos elementos finitos. As metodologias aqui estudadas são as que utilizam a correlação do deslocamento na região próxima da ponta da trinca. A precisão das metodologias é discutida e analisada. Diferentes configurações de geometria e refinamento de malha foram testadas para se verificar a aplicabilidade das rotinas desenvolvidas. Estas metodologias foram implementadas em um *software* comercial para análise pelo método dos elementos finitos, com o objetivo de verificar a possibilidade de criação de um ambiente amigável para análise dentro do campo da mecânica da fratura. Propiciou-se assim, uma integração conveniente com o *software* utilizado, oferecendo-se condições suficientes para a avaliação do crescimento de trincas governado pela mecânica da fratura linear elástica.

Palavras-chave: Correlação do deslocamento, Fator de intensidade de tensão, Mecânica da fratura linear elástica, Método dos elementos finitos.

1. INTRODUÇÃO

O uso da mecânica da fratura, nos projetos de engenharia, evoluiu muito nos últimos anos, principalmente devido a utilização de métodos numéricos. Estes são utilizados na determinação dos parâmetros de tenacidade à fratura, na análise de tensões e/ou deformações de corpos contendo trincas e no estudo do crescimento de trincas.

No método dos elementos finitos, considera-se como etapas para análise no campo da mecânica da fratura: o modelamento da singularidade na ponta da trinca, determinação dos parâmetros de tenacidade à fratura (fator de intensidade de tensão, integral J, etc.) e definição de crescimento e/ou estabilização da trinca.

Algoritmos para a determinação do fator de intensidade de tensão e conseqüentemente verificação da propagação da trinca, foram aplicados e testados através de diversos critérios

* Professor do Centro Federal de Educação Tecnológica – CEFETPB
Av. 1º de Maio, 720 - Jaguaribe, CEP: 58015-430, João Pessoa – PB
e-mail: neilor@cefetpb.br

de convergência por: (Owen & Fawkes, 1983), (Gerstle & Abdalla, 1990), (Bittencourt et al., 1992) e (Lin & Smith, 1999).

Referências bibliográficas, cujas abordagens, revelam os estudos iniciais do método dos elementos finitos aplicados a mecânica da fratura podem ser encontradas no trabalho de (Liebowitz & Moyer, 1989). Nestes trabalhos iniciais, a precisão na obtenção das soluções, das tensões e/ou deformações próximas à ponta da trinca, não podiam ser garantidas sem que houvesse um refinamento na malha suficientemente adequado. Esta limitação, levou alguns pesquisadores a desenvolverem elementos especiais, (Liebowitz & Moyer, 1989).

Entretanto, grande passo foi dado por (Henshell & Shaw, 1975) e (Barsoum, 1976). Eles observaram que movimentando-se o nó do meio de um dos lados de um elemento quadrilátero de oito nós, para a posição a um quarto, a representação da singularidade de deformação e tensão era obtida, *quarter point element*.

Entretanto, (Barsoum, 1976) mostrou que esta singularidade não era atingida na região interna ao elemento. E desta forma, ele obteve a representação correta da singularidade quando construiu um elemento triangular a partir de um elemento quadrilátero de oito nós, pela união dos nós de um dos lado do elemento, *colapsed side*.

Outra classe de elementos usados para o estudo de problemas envolvendo trincas foram os desenvolvidos por (Benzley, 1974) conhecidos como *enriched elements* e os desenvolvidos por (Tong *et al.*, 1973) conhecidos como *hybrids elements*.

Na fase de determinação dos parâmetros de tenacidade à fratura há vários métodos para se calcular o fator de intensidade de tensão: os que utilizam a correlação dos campos de tensão e/ou deslocamento na ponta da trinca, métodos híbridos, integral J, a abordagem da energia de deformação, a técnica da extensão virtual da trinca e a integral de fechamento da trinca.

Este trabalho tem o objetivo de analisar as técnicas que usam a correlação do campo de deslocamento na ponta da trinca para a determinação do fator de intensidade de tensão. Os procedimentos foram implementados em um *software* comercial para análise pelo método dos elementos finitos, ANSYS, com o intuito de criar um ambiente amigável para que se possa fazer análises dentro do campo da mecânica da fratura.

Este *software* permite a criação de rotinas, através de uma linguagem de programação própria, denominada *Ansys Parametric Design Language - APDL* (Ansys, 1998a). Tornando-se assim, um sistema adequado à implementação e realização de análises dentro do campo da mecânica da fratura.

2. DETERMINAÇÃO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO

2.1. O campo de deslocamento na ponta da trinca

Os deslocamentos na ponta da trinca, para o caso bidimensional, segundo (Irwin, 1957), são dados por:

$$u = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{2}(\kappa - 1) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{2}(\kappa + 1) + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (1)$$

$$v = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{2}(\kappa + 1) - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{2}(1 - \kappa) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (2)$$

Onde, r e θ , são as coordenadas definidas a partir da ponta da trinca, K_I e K_{II} são os fatores de intensidade de tensão correspondentes ao modo de carregamento (Irwin, 1957),

$\mu=E/2(1+\nu)$ é o módulo de elasticidade no cisalhamento; $\kappa=3-4\nu$ para deformação plana e $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ para tensão plana; ν é o coeficiente de Poisson.

Avaliando-se as Equações 1 e 2 para $\theta = \pm\pi$, tem-se:

$$\begin{cases} u(\theta = +\pi) \\ u(\theta = -\pi) \end{cases} = \begin{cases} +K_{II} \\ -K_{II} \end{cases} \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1) \quad (3)$$

$$\begin{cases} v(\theta = +\pi) \\ v(\theta = -\pi) \end{cases} = \begin{cases} +K_I \\ -K_I \end{cases} \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1) \quad (4)$$

2.2. Técnicas baseadas no campo de deslocamento próximo a ponta da trinca

2.2.1. Malha utilizada na ponta da trinca (elemento *quarter point*)

Na metodologia que usa o campo de deslocamentos na ponta da trinca, relaciona-se os deslocamentos obtidos a partir da solução por elementos finitos com as expressões analíticas, Equações 1 e 2. Entretanto, o elemento usado para determinação do fator de intensidade de tensão é o elemento desenvolvido por (Henshel e Shaw, 1975) e (Barsoum, 1976). As relações geométricas do corpo de prova, da malha na ponta da trinca e do elemento utilizado neste trabalho, estão mostradas na Figura 1.

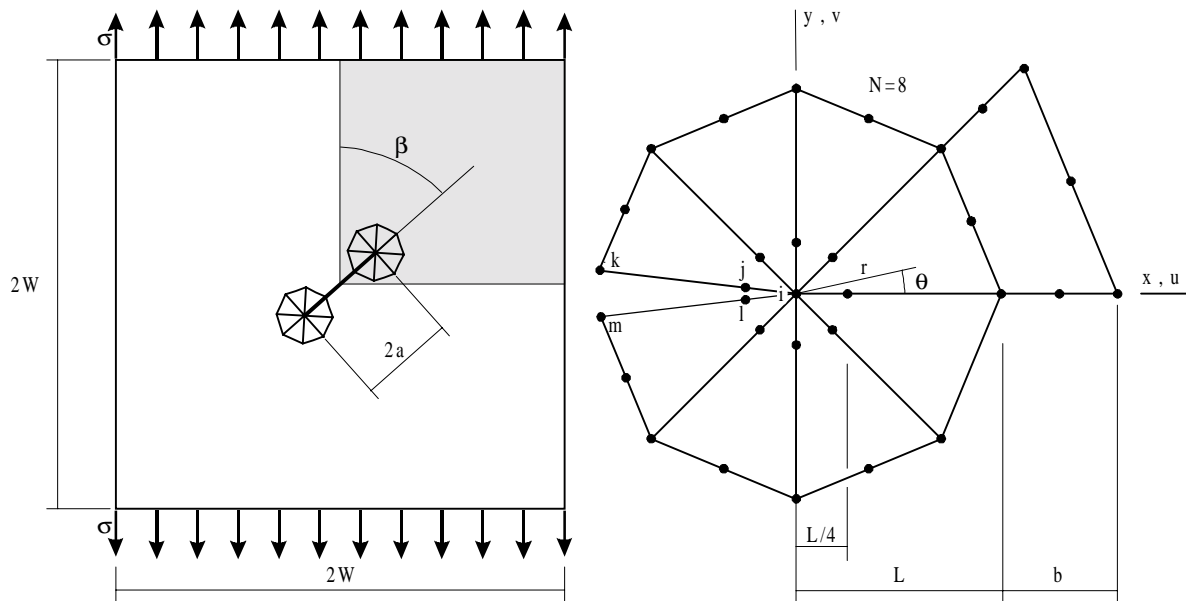


Figura 1. Relações geométricas do corpo de prova e da malha na ponta da trinca.

2.2.2. Extrapolação do campo de deslocamento, com os deslocamentos avaliados em vários pontos (nós) nas faces da trinca

A partir das Equações 3 e 4, arranjando-as para se determinar o fator de intensidade de tensão, segundo (Owen & Fawkes, 1983), para $1/4$ do corpo de prova analisado com $\beta=90^\circ$ (modelo simétrico), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} K_{II} \\ K_I \end{Bmatrix}_i = \frac{2\mu}{(\kappa+1)} \sqrt{\frac{2\pi}{r_i}} \begin{Bmatrix} u(\theta = \pi) \\ v(\theta = \pi) \end{Bmatrix}_i \quad (5)$$

O índice i indica que os valores de K_I , K_{II} , são determinados em vários nós na face da trinca, para os vários valores de u , v e r . Ou seja, substituindo-se os valores de u ou v e r para os pontos nodais ao longo da face da trinca determina-se K_I ou K_{II} , dependendo do modo de carregamento, em função da distância r a partir da ponta da trinca.

Os valores de K , assim obtidos, foram avaliados graficamente em função da distância r . O valor de K para $r = 0$ foi obtido fazendo-se uma regressão dos pontos da curva (Owen & Fawkes, 1983) e (Wilson & Meguid, 1995). Neste Trabalho, utilizou-se o método dos mínimos quadrados.

2.2.3. Extrapolação do campo de deslocamento, com os deslocamentos avaliados em dois pontos (nós) nas faces da trinca

Esta metodologia é a recomendada pelo fabricante do *software* ANSYS (Ansys, 1995). Sendo que os deslocamentos são avaliados nos nós dos elementos singulares.

Analisando-se o caso para $\frac{1}{4}$ do corpo de prova analisado com $\beta=90^\circ$ (modelo simétrico), e considerando-se que:

$$\frac{|u(\theta = \pi)|}{\sqrt{r}} = A + Br \quad \text{e} \quad \frac{|v(\theta = \pi)|}{\sqrt{r}} = C + Dr \quad (6)$$

E como os parâmetros $\frac{|u(\theta = \pi)|}{\sqrt{r}}$ e $\frac{|v(\theta = \pi)|}{\sqrt{r}}$, são baseados nos deslocamentos e localizações do nós j e k , Figura 1, obtém-se duas equações com duas incógnitas (A e B ou C e D). Desta forma as constantes A , B , C e D são determinadas diretamente.

Fazendo-se r tender a zero, tem-se:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|u(\theta = \pi)|}{\sqrt{r}} = A \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|v(\theta = \pi)|}{\sqrt{r}} = C \quad (7)$$

E a partir das Equações 3 e 4, os valores do fator de intensidade de tensão podem ser obtidos por:

$$K_{II} = \frac{2\mu}{(\kappa+1)} \sqrt{2\pi} A \quad \text{e} \quad K_I = \frac{2\mu}{(\kappa+1)} \sqrt{2\pi} C \quad (8)$$

Analisando-se o caso para o modelo completo, e considerando-se que:

$$\frac{|u(\theta = \pi) - u(\theta = -\pi)|}{\sqrt{r}} = A' + B'r \quad \text{e} \quad \frac{|v(\theta = \pi) - v(\theta = -\pi)|}{\sqrt{r}} = C' + D'r \quad (9)$$

E fazendo-se r tender a zero, tem-se:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|u(\theta = \pi) - u(\theta = -\pi)|}{\sqrt{r}} = A' \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|v(\theta = \pi) - v(\theta = -\pi)|}{\sqrt{r}} = C' \quad (10)$$

Analogamente ao caso anterior os valores do fator de intensidade de tensão podem ser obtidos por:

$$K_{II} = \frac{\mu}{(\kappa + 1)} \sqrt{2\pi} A' \quad \text{e} \quad K_I = \frac{\mu}{(\kappa + 1)} \sqrt{2\pi} C' \quad (11)$$

2.2.4. Formulação baseada no deslocamento da abertura da trinca – *Crack Opening Displacement (COD)* e deslocamento do deslizamento da trinca – *Crack Sliding Displacement (CSD)*

Esta técnica também foi utilizada por (Bittencourt, *et al.*, 1992) e é também chamada de *two-point formulae* por (Aliabadi & Rooke, 1992).

Para a análise de ¼ do corpo de prova com $\beta=90^\circ$ (modelo simétrico), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \frac{2\mu}{(\kappa + 1)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \begin{Bmatrix} 4v^j - v^k \\ 4u^j - u^k \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Para a análise com o modelo completo, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \frac{\mu}{(\kappa + 1)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \begin{Bmatrix} 4(v^j - v^l) - (v^k - v^m) \\ 4(u^j - u^l) - (u^k - u^m) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

onde: $v^j, v^l, v^k, v^m, u^j, u^l, u^k$ e u^m , são os deslocamentos dos nós j, l, k e m, e L o comprimento do elemento singular (*quarter point*), Figura 1.

2.2.5 Formulação baseada no deslocamento do nó a ¼ da ponta da trinca - *¼ Point Displacement*

Esta metodologia foi utilizada por (Lin & Smith, 1999) e é também chamada de *one-point formulae* por (Aliabadi & Rooke, 1992). Esta considera simplesmente, a avaliação das expressões teóricas dos deslocamentos no nó localizado a ¼ do nó da ponta da trinca, Figura 1. O fator de intensidade de tensão é determinado diretamente.

Para a análise de ¼ do corpo de prova com $\beta=90^\circ$ (modelo simétrico), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \frac{4\mu}{(\kappa + 1)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \begin{Bmatrix} v^j \\ u^j \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Para a análise com o modelo completo, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \frac{2\mu}{(\kappa + 1)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \begin{Bmatrix} (v^j - v^l) \\ (u^j - u^l) \end{Bmatrix} \quad (15)$$

onde: v^j , v^l , u^j e u^l , são os deslocamentos dos nós j e l , e L o comprimento do elemento singular (*quarter point*), Figura 1.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A geometria analisada, considera um modelo quadrado $2W=0.1$ m, espessura de 0.005 m e trinca central $2a=0.01$ m, ângulo β variando de 15 a 90° em relação a tensão aplicada, Figura 1. A tensão aplicada foi de 100 MPa. A malha adotada é composta de elementos quadriláteros com oito nós, PLANE 82, (Ansys, 1995), elemento capaz de ser modificado para o tipo singular.

Os resultados puderam ser comparados com os obtidos a partir das expressões utilizadas para o cálculo do fator de intensidade de tensão para a geometria estudada:

$$K_I = \sigma \sin^2 \beta \sqrt{\pi a} \quad K_{II} = \sigma \sin \beta \cos \beta \sqrt{\pi a} \quad (16)$$

Os fatores de intensidade de tensão foram determinados a partir da análise por elementos finitos, tanto para o modelo completo, caso em que se considerou o modo combinado de carregamento (modo I e modo II), e para ¼ do corpo de prova com $\beta=90^\circ$, modo I de carregamento. Em todos os casos considerou-se estado de tensão plana.

Para o modelo de ¼ do corpo de prova com $\beta=90^\circ$, as análises foram feitas levando-se em consideração a influência de alguns parâmetros da geometria dos elementos na ponta da trinca. Por exemplo, o número de elementos na ponta da trinca (N), o comprimento do elemento *quarter point* (L) e o tamanho do elemento regular (b), Figura 1.

Sendo assim, diferentes níveis de refinamento da malha foram obtidos. Para isto, utilizou-se o critério adotado por (Gerstle & Abdalla, 1990). Este considera uma região mínima na qual a singularidade que ocorre na ponta da trinca pode ser representada com bastante precisão com somente necessidade de um refinamento local. Refinamento este, realizado em torno da ponta da trinca.

Os resultados obtidos podem ser verificados nas Tabelas de 1 e 2.

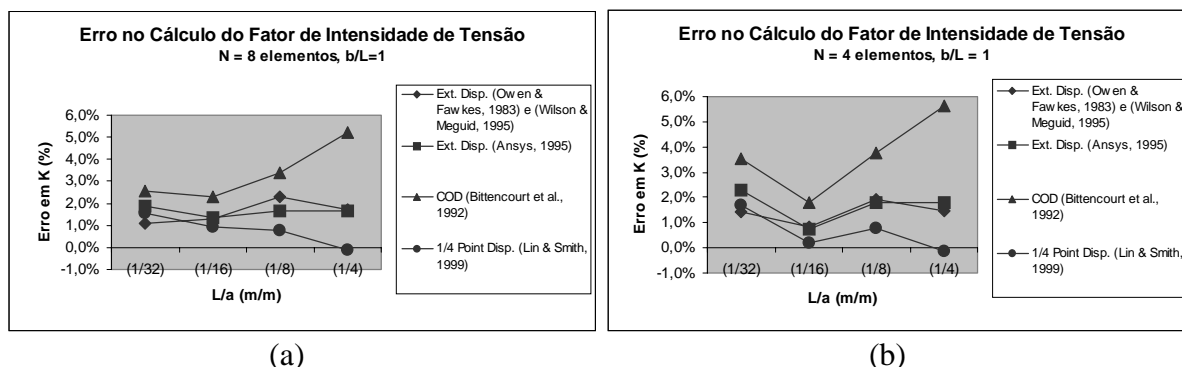
Tabela 1. Valores de $K_I (Pa \sqrt{m})$ com $b/L = 1$. ($K_{\text{teórico}} = 12.533 Pa \sqrt{m}$)

(L/a)	Extrapolação do deslocamento (Owen & Fawkes, 1983)		Extrapolação do deslocamento (Ansys, 1995)		COD (Bittencourt et al., 1992)		Um ponto na ponta da trinca (Lin & Smith, 1999)	
	N = 8 elem.	N = 4 elem.	N = 8 elem.	N = 4 elem.	N = 8 elem.	N = 4 elem.	N = 8 elem.	N = 4 elem.
1/32	12.670	12.711	12.769	12.823	12.851	12.973	12.727	12.748
1/16	12.696	12.640	12.705	12.623	12.823	12.758	12.647	12.555
1/8	12.822	12.775	12.739	12.757	12.955	13.002	12.630	12.634
¼	12.749	12.715	12.743	12.757	13.189	13.239	12.520	12.517

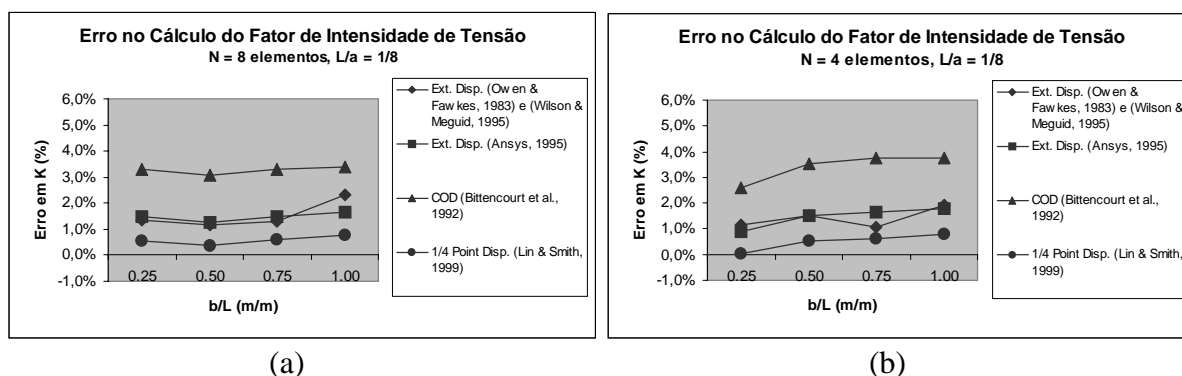
Tabela 2. Valores de $K_I (Pa \sqrt{m})$ com $L/a = 1/8$. ($K_{\text{teórico}} = 12.533 Pa \sqrt{m}$)

(b/L)	Extrapolação do deslocamento (Owen & Fawkes, 1983)		Extrapolação do deslocamento (Ansys, 1995)		COD (Bittencourt et al., 1992)		Um ponto na ponta da trinca (Lin & Smith, 1999)	
	N = 8 elem.	N = 4 elem.	N = 8 elem.	N = 4 elem.	N = 8 elem.	N = 4 elem.	N = 8 elem.	N = 4 elem.
0.25	12.704	12.680	12.716	12.644	12.944	12.859	12.602	12.537
0.50	12.680	12.724	12.693	12.724	12.919	12.974	12.580	12.599
0.75	12.696	12.669	12.721	12.742	12.949	13.003	12.607	12.611
1.00	12.822	12.775	12.739	12.757	12.955	13.002	12.630	12.634

Nos gráficos que seguem, Figuras 2 e 3, podem ser verificados os erros encontrados no cálculo do fator de intensidade de tensão, quando considerando $\frac{1}{4}$ do corpo de prova com $\beta=90^\circ$.



(a) (b)
Figura 2. Gráficos mostrando o erro no cálculo do fator de intensidade de tensão com relação $b/L = 1$ (a) $N=8$ elementos (b) $N=4$ elementos.



(a) (b)
Figura 3. Gráficos mostrando o erro no cálculo do fator de intensidade de tensão com relação $L/a = 1/8$ (a) $N=8$ elementos (b) $N=4$ elementos.

Os resultados obtidos são bastante aceitáveis, pois os erros não foram superiores a 6%, estes resultados são compatíveis com os obtidos por (Gerstle & Abdalla, 1990) e (Bittencourt *et al.*, 1992).

De uma maneira geral os resultados não foram muito influenciados pelo número de elementos em torno da ponta da trinca. Estes resultados tenderam a serem mais susceptíveis a variação do tamanho do elemento singular (L) que a variação do tamanho do elemento regular (b).

Entretanto observando-se os gráficos separadamente, verifica-se que há uma certa divergência nos resultados, quando utilizando-se o método da abertura do deslocamento da trinca – COD, este efeito também foi mostrado por (Aliabadi e Rooke, 1992), quando eles variaram o tamanho do elemento singular, entretanto a análise foi realizada para o caso de uma trinca central inclinada em relação a direção de carregamento (modelo completo), em alguns casos eles chegaram a erros de até 15%, com relações L/a variando de 0.1 até 1.

Da mesma forma, (Bittencourt *et al.*, 1992) apresentaram erros nos resultados que variaram de 2 a 10%, para o caso da determinação do fator de intensidade de tensão a partir do deslocamento da abertura da trinca – COD, a precisão nos resultados, neste caso, foi dependente do refinamento da malha e convergiram mais lentamente que os obtidos pelo método da Integral J, por exemplo.

Para a relação $L/a = 1/16$, Figura 2, houve uma tendência de diminuição nos erros do cálculo dos valores do fator de intensidade de tensão, esta observação está de acordo com os resultados obtidos por (Gerstle & Abdalla, 1990), em que eles consideraram como relação ótima, para obtenção de erros da ordem de 1%, $L/LD = 1/20$. Onde LD significa *least dimension*, onde esta dimensão é usada para calcular um raio aproximado em torno da ponta da trinca, que determina uma região dentro da qual o campo de tensão singular é garantido e domina a solução.

Esta dimensão (LD) para o caso aqui considerado é governado pelo tamanho da trinca “a”, o que faz a relação $L/a=1/16$, mais próxima da relação $L/LD=1/20$, proposta por (Gerstle & Abdalla, 1990).

Para o modo combinado de carregamento, a análise foi feita variando-se o ângulo da trinca em relação a tensão aplicada. A geometria da malha na ponta da trinca adotada para este caso foi com $N = 16$ elementos, $L=a/8$ e $b/L=1$, Figura 1.

Na Tabela 3, mostra-se os resultados obtidos para este caso.

Tabela 3. Valores de K_I e K_{II} ($Pa\sqrt{m}$) - ($N = 16$ elementos, $L/a = 1/8$, $b/L = 1$)

β (°)	Extrapolação do deslocamento (Ansys, 1995)		COD (Bittencourt et al., 1992)		Um ponto na ponta da trinca (Lin & Smith, 1999)	
	K_I	K_{II}	K_I	K_{II}	K_I	K_{II}
15	0.853	3.136	0.868	3.173	0.846	3.117
45	6.373	6.282	6.482	6.356	6.319	6.245
60	9.546	5.413	9.711	5.479	9.463	5.379
90	12.687	-0.0062	12.903	-0.0069	12.579	-0.0059

Na Figura 4, mostra-se os erros encontrados no cálculo dos valores dos fatores de intensidade de tensão, K_I e K_{II} .

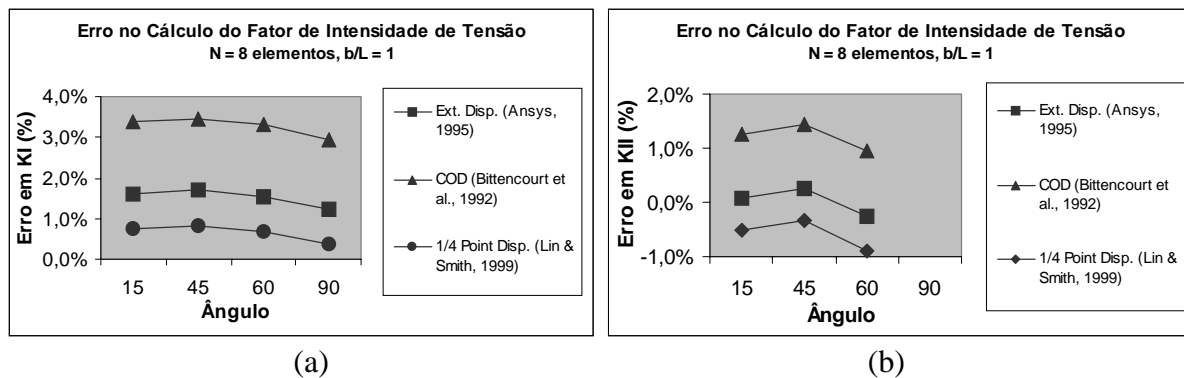


Figura 4. Gráficos mostrando o erro no cálculo dos fatores de intensidade de tensão
(a) Erro no cálculo de K_I (b) Erro no cálculo de K_{II} .

Apesar dos resultados apresentados, considerarem uma única análise de refinamento da malha, verifica-se individualmente, que os erros nos cálculos dos valores dos fatores de intensidade de tensão, para o ângulo da trinca a 90° (modo I de carregamento), tenderam a uma diminuição, quando comparados com os valores obtidos considerando-se $1/4$ do corpo de prova (modelo simétrico).

Em relação aos outros ângulos da trinca, os valores também são compatíveis com os obtidos por (Gerstle & Abdalla, 1990) e (Bittencourt *et al.*, 1992). No caso aqui considerado os erros não foram superiores a 4%.

Na Figura 5, observa-se dois exemplos, considerando-se o modelo completo, das malhas geradas para a análise realizada neste trabalho. Na Figura 5a, observa-se a malha criada utilizando-se a opção de geração “mapeada” enquanto que na Figura 5b, observa-se a malha na condição de geração de malha, “livre”.

Com a opção de geração de malha “mapeada”, utilizando-se modelagem sólida (Ansys, 1998b), é possível obter-se uma malha mais regular e um controle maior do refinamento.

Apesar desta vantagem, muitas vezes se faz necessário a subdivisão do modelo em várias áreas (no caso do modelo 2D), para se ter um controle maior no posicionamento e na forma dos elementos a serem criados. Este tipo de trabalho adicional sempre leva a um aumento nos custos de tempo de geração do modelo.

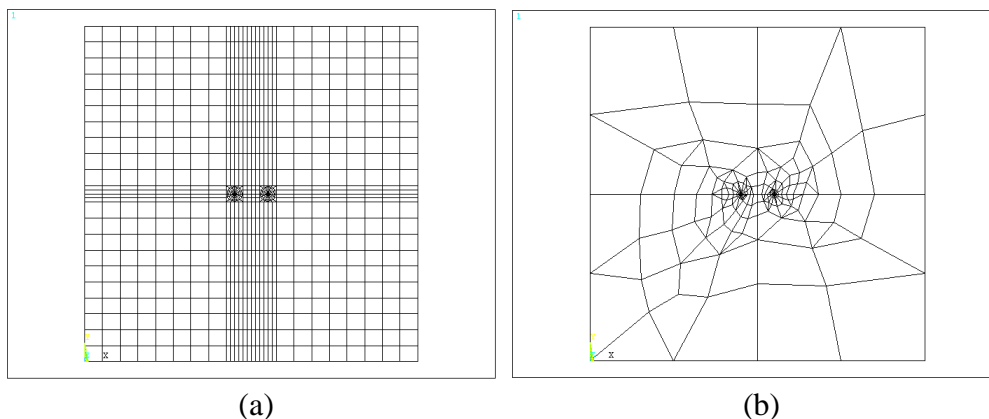


Figura 5. Malha utilizada no cálculo do fator de intensidade de tensão.
(a) malha mapeada (b) malha livre.

5. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos nas análises aqui estudadas foram bastantes compatíveis com os da literatura, especificamente aqui, estes não foram superiores a 6%.

Algumas dificuldades foram encontradas na geração das malhas dos modelos, e um certo trabalho foi realizado para se conseguir malhas mais uniformes e um tempo maior de modelagem foi despendido. Entretanto nenhuma diferença significativa nos valores do fator de intensidade de tensão foi verificado, o que não significa que possa ocorrer para modelos mais complexos.

As metodologias implementadas para a determinação do fator de intensidade de tensão foram todas baseadas na relação com os deslocamentos obtidos a partir da análise pelo método dos elementos finitos, o que provavelmente tenha levado a obtenção de valores do fator de intensidade de tensão muito próximos uns dos outros. Entretanto a geometria da malha na ponta da trinca pôde ser estudada.

Com a possibilidade de programação e adaptação do *software*, ANSYS, às necessidades do usuário, verifica-se que o mesmo torna-se um sistema adequado à implementação e realização de análises dentro do campo da mecânica da fratura.

6. REFERÊNCIAS

- Aliabadi, M. H., Rooke, D. P., 1992, “Numerical Fracture Mechanics”, Kluwer Academic Publishers, London, 276 pp.
- ANSYS APDL Programmer’s Guide, 1998a, SAS IP, Sep.
- ANSYS Modeling and Meshing Guide, 1998b, 3rd Edition. SAS IP, Sep.

- ANSYS User's Manual, 1995, Procedures Volume. I, SAS IP, Aug.
- Barsoum, R., 1976, "On the Use of Isoparametric Elements in Linear Fracture Mechanics", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 10, pp. 25-37.
- Benzley, S. E., 1974, "Representation of Singularities with Isoparametric finite Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 8, pp. 537-545.
- Bittencourt, T. N., Barry, A., Ingraffea, A. R., 1992, "Comparison of Mixed-Mode Stress-Intensity Factors Obtained Through Displacement Correlation, J-Integral Formulation, and Modified Crack-Closure Integral", Fracture Mechanics: Twenty-Second Symposium, ASTM STP 1131, S. N. Atluri, J. C. Newman, Jr., I. S. Raju, and J. S. Epstein, Eds., American Society for Testing Materials, Philadelphia, v.11, pp. 69-82.
- Gerstle, W. H., Abdalla, Jr., J. E., 1990, Finite Element Meshing Criteria for Crack Problems", Fracture Mechanics: Twenty-First Symposium, ASTM STP 1074, J. P. Gudas, J. A. Joyce and E. M. Hackett, Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp. 509-521.
- Henshel, R. D., Shaw, K. G., 1975, "Crack Tip Finite Elements are Unnecessary", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 9, pp. 495-507.
- Irwin, G. R., 1957, "Analysis of Stresses and Strains Near the End of Crack Traversing a Plate", Journal of Applied Mechanics, v. 24, n. 3, pp. 361-364, Jun.
- Liebowitz, H., Moyer, Jr., E. T., 1989, "Finite Element Methods in Fracture Mechanics", Computers & Structures, v. 31, n. 1, pp. 1-9.
- Lin, X. B., Smith, R. A., 1999, "Finite Element Modelling of Fatigue Crack Growth of Surface Cracked Plates Part I: The Numerical Technique", Engineering Fracture Mechanics, v. 63, n. 5, pp. 503-522, Jul.
- Owen, D. R. J., Fawkes, A. J., 1983, "Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications", Pineridge Press Ltd., Swansea, U. K., 305 p.
- Tong, P., Pian, T. H. H., Lasry, S. J., 1973, "A Hybrid-Element Approach to Crack Problems in Plane Elasticity", International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 7, pp. 297-308.
- Wilson, R. L., Meguid, S. A., 1995, "On the Determination of Mixed Mode Stress Intensity Factors of an Angled Crack in a Disc Using FEM", Finite Elements in Analysis and Design, v. 18, n.4, pp. 433-448, Jan.1.

MODELAGEM DE UM DISPOSITIVO DE PRÉ-CARGA COM MEMÓRIA DE FORMA PARA JUNTAS FLANGEADAS

Carlos Américo Panisset Lanhas La Cava

Eduardo Prieto Silva

Luciano Guimarães Machado

Pedro Manuel Calas Lopes Pacheco

CEFET/RJ - Departamento de Engenharia Mecânica

20.271.110 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

E-Mail: calas@cefet-rj.br

Marcelo Amorim Savi

Instituto Militar de Engenharia - Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais

22.290.270 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

E-Mail: savi@epq.ime.eb.br

Resumo

As características das ligas com memória de forma (SMAs) vêm motivando o desenvolvimento de aplicações em diversas áreas do conhecimento que vão desde a robótica até a indústria aeroespacial. No entanto, a sua modelagem ainda não é um ponto bem estabelecido. Durante o processo de recuperação da forma de um componente de SMA, que pode ser induzido aquecendo-se o componente através de uma corrente elétrica ou de um jato de ar quente, grandes forças podem ser geradas num período de tempo relativamente curto. Este trabalho apresenta a modelagem e a simulação numérica de um dispositivo de pré-carga com memória de forma para juntas flangeadas. Este dispositivo permite aplicar a pré-carga nos parafusos da junta de uma forma simples e precisa, além de evitar as tensões de cisalhamento introduzidas pelos processos tradicionais. As simulações numéricas permitem descrever algumas das principais características do dispositivo, fornecendo informações úteis para o seu projeto.

Palavras-Chave: Ligas com Memória de Forma, Modelagem, Simulação Numérica.

1. INTRODUÇÃO

As Ligas com Memória de Forma (SMA – *Shape Memory Alloys*) são ligas metálicas que possuem a capacidade de retornar à sua forma original quando submetidas a um processo termomecânico apropriado. Para temperaturas acima de uma temperatura crítica, as SMAs apresentam o fenômeno conhecido como pseudoelasticidade no qual chega-se a experimentar deformações reversíveis da ordem de 8%. Para temperaturas abaixo de uma outra temperatura crítica, as SMAs apresentam o efeito de memória de forma no qual, após um processo de carregamento e descarregamento, a liga apresenta uma deformação residual que pode ser eliminada através de um carregamento térmico adequado. Estas ligas podem apresentar ainda

um comportamento denominado efeito de memória de forma reversível (*two-way*) no qual associa-se uma determinada forma a faixas temperaturas, fazendo com que uma peça mude sua forma através de um processo cíclico de aquecimento e resfriamento (Hodgson *et al.*, 1999). Este efeito é conseguido através de um processo de treinamento da liga.

Os fenômenos associados às SMAs estão relacionados às transformações de fase que podem ser induzidas tanto pela variação da temperatura quanto pela variação no nível de tensão. Fundamentalmente, duas fases estão presentes nestas ligas: austenita e martensita. Zhang *et al.* (1991) indicam a formação de vinte e quatro variantes de martensita a partir do resfriamento da fase matriz. Estas vinte e quatro variantes estão dispostas em seis placas contendo quatro variantes cada. Com a aplicação de um carregamento, tem-se um processo de conversão (*detwinning*) de três das quatro variantes de martensita obtidas inicialmente em uma única que obedece à direção preferencial dada pelo alinhamento dos planos preferenciais com a direção principal do carregamento.

As ligas de Ni-Ti, Cu-Zn, Cu-Zn-Al, Mg-Cu, Fe-Mn-Si e Cr-Ni são alguns exemplos de ligas com memória de forma. Estas ligas são muito sensíveis a variações na composição, podendo apresentar grandes mudanças em suas propriedades com uma simples adição de um elemento de liga. A liga Ni-Ti é a mais popular por apresentar a maior deformação entre as ligas com memória de forma (próxima de 8%). Além desta característica, a liga Ni-Ti tende a ser muito mais estável termicamente e ainda apresenta uma excelente resistência à corrosão quando comparadas as ligas à base de cobre que apresentam média resistência a corrosão. As ligas de Ni-Ti são suscetíveis a corrosão sob tensão e apresentam uma elevada ductilidade. Por outro lado, possuem um custo maior do que as demais ligas citadas (Hodgson *et al.*, 1999).

De uma maneira geral, as ligas com memória de forma apresentam baixa resistência à fadiga quando comparadas aos aços carbono comum. Visando melhorar esta propriedade, atualmente pesquisas vem sendo desenvolvidas sobre o efeito da adição e combinação de certos elementos de ligas. Uma outra característica destas ligas é o tempo de resposta relativamente elevado. Em situações em que necessita-se de uma resposta rápida existem outros materiais inteligentes, como os piezoelétricos, que podem apresentar resultados mais satisfatórios. Vale ressaltar no entanto, que as SMAs são capazes de gerar grandes forças de restituição com um consumo de energia relativamente baixo, o que é uma característica que as diferenciam em diversas aplicações.

Estes materiais vêm sendo utilizados nas mais diversas aplicações, variando desde a indústria aeroespacial até a biomédica, passando pela robótica. Dentre estas, vale citar inúmeros dispositivos termo-ativados como válvulas pneumáticas para o controle de fluxo (Johnson & Martynov, 1999) e dispositivos que exploram a pseudoelasticidade como armações de óculos (SMA, 1999).

Na indústria aeroespacial, estes materiais são utilizados em dispositivos de separação não-pirotécnicos - *Frangibolt* (Pacheco & Savi, 1997). Outra aplicação é a construção de enrijecedores em asas de aviões, que tendem a aumentar a rigidez na medida em que a pressão aerodinâmica aumenta (SMA, 1999). Na área biomédica, estes materiais são aplicados na construção de pequenos tubos que são colocados dentro dos vasos sanguíneos com a função de reforçar as suas paredes internas. Existem também aplicações em próteses dentárias, na construção de catéter (sonda – instrumento cirúrgico) e ferramentas cirúrgicas (SMA, 1999). Na ortodontia, o emprego de aparelhos com memória de forma trouxe resultados muito satisfatórios, difundindo bastante o uso das SMAs (Airoldi *et al.*, 1997). Recentemente, a indústria robótica tem se dedicado a utilizar fibras de SMA para reproduzir o movimento contínuo dos músculos humanos (Rogers, 1995).

A indústria petroquímica utiliza as propriedades singulares destas ligas em juntas flangeadas (SINTEF, 1999). Tradicionalmente, a pré-carga dos parafusos do flange é obtida

através de um torque de aperto que acaba introduzindo tensões de cisalhamento nos parafusos, reduzindo a resistência mecânica da junta. Existe ainda uma grande incerteza com relação ao valor da pré-carga que a junta efetivamente absorve, podendo variar em torno de $\pm 30\%$ (Juvinal, 1983). As SMAs oferecem uma alternativa a este processo tradicional. A utilização de um dispositivo com memória de forma permite aplicar a pré-carga de uma forma simples e precisa, sem introduzir tensões de cisalhamento.

O dispositivo de pré-carga com memória de forma para juntas flangeadas consiste de uma arruela feita com uma SMA, pré-comprimida. A pré-carga é obtida aquecendo-se o dispositivo através de um jato de ar quente após a sua instalação nas juntas. Com isso, a arruela se expande, recuperando sua forma original, tracionando o parafuso de fixação. Isso promove a pré-carga do parafuso de fixação sem submetê-lo a tensões cisalhantes. O objetivo deste trabalho é apresentar uma discussão sobre a concepção desse dispositivo, propondo um modelo para descrever o seu comportamento termomecânico. Os resultados das simulações numéricas permitem descrever algumas das principais características do dispositivo, fornecendo informações úteis para o seu projeto.

2. DESCRIÇÃO DO DISPOSITIVO DE PRÉ-CARGA COM MEMÓRIA DE FORMA

O dispositivo de pré-carga com memória de forma para juntas flangeadas funciona como um atuador que, além de não introduzir tensões de cisalhamento nos parafusos de fixação do flange, propicia um controle mais preciso da pré-carga. Além disso, a montagem do flange torna-se mais simples uma vez que não requer a aplicação de um torque de aperto em cada parafuso. A Figura 1 mostra a montagem do dispositivo no flange. O dispositivo consiste de uma arruela, inicialmente pré-comprimida que, quando é aquecida, recupera sua forma original gerando uma força axial de restauração, o que provoca uma carga nos parafusos da junta. Desse modo, o aperto do flange é feito sem a introdução de tensões de cisalhamento resultantes do torque de aperto em juntas tradicionais.

Neste trabalho, considera-se um flange padrão DIN 2544 de aço carbono fundido St 37-2 (Acepam, 1997), que é bastante utilizado na indústria petroquímica. Os 8 parafusos utilizados na fixação do flange são de cabeça sextavada, de tolerância grossa (M16 x 2), de acordo com a norma DIN 7990 [DIN 7990, 1983]. A arruela e a porca sextavada estão de acordo com a norma citada. Além disso, admite-se que a tubulação está submetida a uma pressão nominal de 25 atm. A Figura 1 apresenta as características geométricas do flange em questão. Os parâmetros indicados na figura são os seguintes: $DN = 80$ mm, $D = 200$ mm, $B = 160$ mm, $F = 26$ mm, $DF = 18$ mm, $d_1 = 86,4$ mm, $s = 3,2$ mm, $r = 6$ mm.

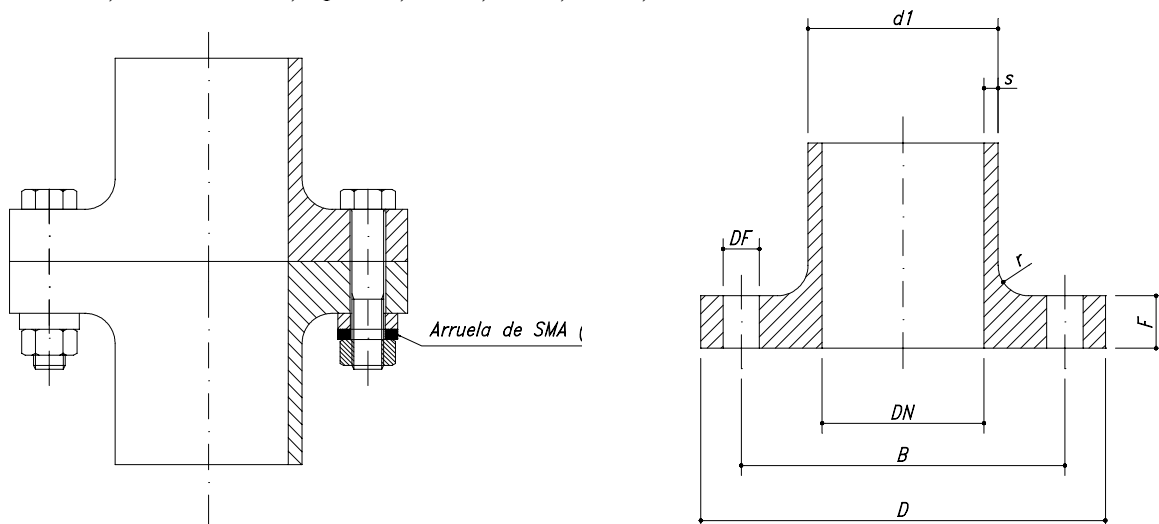


Figura 1 - Flange com o dispositivo com memória de forma.

O dispositivo em questão é modelado em um contexto unidimensional considerando a teoria constitutiva proposta por Tanaka & Nagaki (1982). O modelo proposto permite prever o comportamento termomecânico do dispositivo, obtendo informações úteis para o seu projeto.

3. MODELO CONSTITUTIVO PARA SMAs

A modelagem das ligas com memória de forma possui duas abordagens distintas. A primeira, microscópica, leva em consideração aspectos metalúrgicos. A segunda abordagem, macroscópica, descreve os aspectos fenomenológicos. Os modelos com cinética de transformação de fase assumida consideram que a transformação de fase é regida por uma função conhecida. O primeiro modelo a apresentar esta formulação foi proposto por Tanaka & Nagaki (1982), tendo dado origem a outros modelos que apresentam alterações na cinética de transformação de fase. Pelo fato de seu uso ter se popularizado, esses modelos apresentam maiores comprovações experimentais, ocupando um importante espaço na modelagem das SMAs. Neste trabalho, considera-se o modelo de Tanaka para descrever o comportamento termomecânico das SMAs. Algumas pequenas modificações são introduzidas com o objetivo de obter resultados mais condizentes.

O modelo de Tanaka considera, além da deformação, ε , e da temperatura, T , uma variável interna escalar, β , que representa a fração volumétrica da fase martensítica. A relação constitutiva entre a tensão, σ , e as variáveis de estado pode ser expressa da seguinte maneira, na forma de taxas

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - \alpha\dot{\beta} - \Omega\dot{T} \quad ; \quad E = E_M|\beta| + E_A(1-|\beta|) \quad ; \quad \Omega = \Omega_M|\beta| + \Omega_A(1-|\beta|) \quad (1)$$

onde α é o parâmetro de transformação, E o módulo de elasticidade e Ω o coeficiente de expansão térmica. A variável β é função dos valores de tensão e temperatura, $\beta = \beta(\sigma, T)$, estando contida no intervalo de $-1 \leq \beta \leq +1$. Quando $\beta = +1$, significa que a composição do material é 100% martensita positiva (M^+), induzida por tensão trativa. Quando $\beta = -1$, a composição do material é 100% martensita negativa (M^-), induzida por tensão compressiva. Quando $\beta = 0$, o material está 100% na fase austenítica (A). Para valores de β entre -1 e $+1$ e diferentes de 0, tem-se frações de martensita somadas com austenita. A equação que descreve a transformação da austenita em martensita é a seguinte,

$$\beta = \{1 - \exp[-a_M(M_S - T) - b_M|\sigma|]\} \text{sign}(\sigma) + \beta^M \quad (2)$$

onde $\text{sign}(\sigma) = \sigma/|\sigma|$; a_M e b_M são constantes positivas da martensita, M_S é a temperatura de início da transformação martensítica e β^M representa a fração volumétrica da martensita quando a transformação reversa se inicia. Esta equação se aplica para $\sigma \geq \sigma_M = (a_M/b_M)(T - M_S)$. A transformação reversa, martensita para austenita, é descrita pela seguinte equação

$$\beta = \{\beta^M \exp[-a_A(T - A_S) + b_A|\sigma|]\} \text{sign}(\sigma) \quad (3)$$

onde a_A e b_A são constantes positivas da austenita; A_S é a temperatura de início da transformação austenítica. Esta equação se aplica para $\sigma \leq \sigma_A = (a_A/b_A)(T - A_S)$.

4. MODELO DO DISPOSITIVO DE PRÉ-CARGA COM MEMÓRIA DE FORMA

O modelo proposto para descrever o comportamento termomecânico do dispositivo de pré-carga considera que a cabeça do parafuso e a porca são rígidos. A Figura 2 mostra o modelo considerado e as forças em cada elemento.

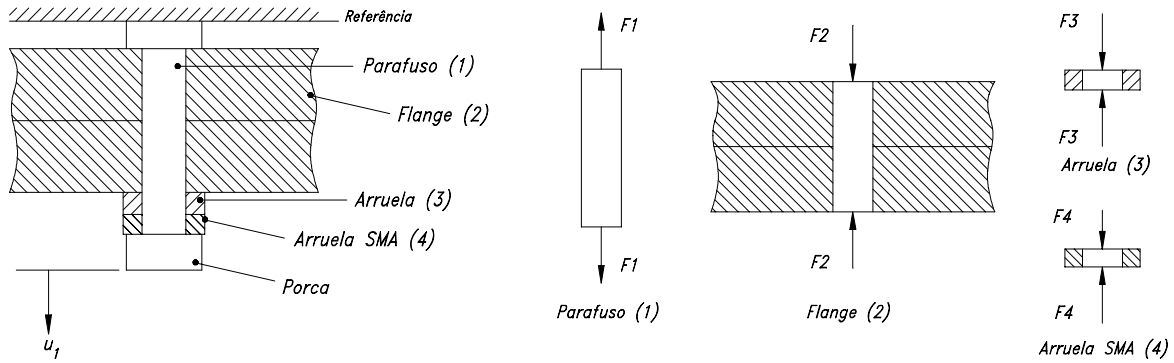


Figura 2 - Modelo do dispositivo com a arruela de SMA.

A partir da análise de compatibilidade geométrica e de equilíbrio de forças nos componentes tem-se a seguinte expressão, onde adota-se a hipótese de pequenos deslocamentos:

$$u_1 = u_4 - u_2 - u_3 \quad ; \quad F_1 = F_2 = F_3 = F_4 \quad (4)$$

onde u_i e F_i ($i = 1, \dots, 4$) representam os deslocamentos e as forças no elemento i , conforme especificado na Figura 2.

A partir da equação constitutiva (1), obtém-se a taxa de deformação para a arruela de SMA:

$$\dot{\epsilon}_4 = \frac{1}{E_4} (\dot{\sigma}_4 + \alpha \dot{\beta} + \Omega \dot{T}) \quad (5)$$

Utilizando a definição de tensão uniaxial para a arruela do dispositivo de SMA e relações lineares entre força e deslocamento para os demais componentes, tem-se

$$\sigma_4 = F_4 / A_4 \quad ; \quad F_i = K_i u_i \quad \text{para } (i = 1, \dots, 3) \quad (6)$$

onde $K_i = E_i A_i / L_i$ ($i = 1, \dots, 4$) é a rigidez dos componentes do dispositivo. E_i , A_i e L_i representam, respectivamente, o módulo de elasticidade, a área transversal e o comprimento dos elementos. Dessa forma, é possível escrever:

$$\dot{\sigma}_4 = - \frac{(\alpha \dot{\beta} + \Omega \dot{T})}{\left(\frac{K_4}{K_1} + \frac{K_4}{K_2} + \frac{K_4}{K_3} + 1 \right)} \quad (7)$$

Um procedimento numérico iterativo, do tipo preditor-corretor, é utilizado para resolver o sistema de equações que descrevem o comportamento do dispositivo. O

procedimento é composto de um preditor termoelástico, durante o qual não ocorre transformação de fase ($\dot{\beta} = 0$). Em seguida, emprega-se um procedimento de integração para obter os valores σ_4 e β . O procedimento é repetido até que algum critério de convergência seja satisfeito.

5. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Considerando o flange apresentado na Figura 1, algumas simulações numéricas são desenvolvidas. Os parafusos são da classe 5.8. Shigley & Mischke (1989) mostram que a carga de aperto necessária para estes parafusos deve ser maior ou igual a 54 kN. A rigidez do parafuso e da junta podem ser calculadas através das seguintes equações (Shigley & Mischke, 1989):

$$K_1 = \frac{K_t K_d}{K_t + K_d} \quad ; \quad K_2 = \frac{0,577\pi E_2 d_p}{2 \ln \left[5 \left(\frac{0,577(2F) + 0,5d_p}{0,577(2F) + 2,5d_p} \right) \right]} \quad (8)$$

onde $K_t = 6,500 \times 10^9$ N/m e $K_d = 0,886 \times 10^9$ N/m representam, respectivamente, a rigidez da parte roscada e da parte lisa do parafuso (Shigley & Mischke, 1989). Admite-se uma arruela com um comprimento de 8 mm, um diâmetro externo de 30 mm e um diâmetro interno de 17,5 mm. O parafuso, o flange e a arruela possuem módulos de elasticidade de 207 GPa. Com isso, têm-se os seguintes valores para a rigidez de cada elemento: $K_1 = 0,780 \times 10^9$ N/m, $K_2 = 3,01 \times 10^9$ N/m e $K_3 = 12,06 \times 10^9$ N/m.

Considera-se que a arruela de SMA possui os mesmos diâmetros, externo e interno, da outra arruela. Dessa forma, para que a arruela de SMA introduza a força de aperto necessária, deve ser capaz de desenvolver uma tensão de restituição de -116 MPa.

Várias simulações foram desenvolvidas para determinar a espessura e a deformação residual inicial da arruela de SMA, chegando-se aos seguintes valores: espessura de 7,1 mm e deformação residual inicial é $\epsilon_0 = -2\%$, o que está associado a uma fração volumétrica inicial de martensita $\beta_0 = -0,754$, a temperatura ambiente de 30°C . As propriedades mecânicas do material da arruela de SMA estão listadas na Tabela 1.

Tabela 1 . Propriedades da liga Ni-Ti (Leuven, 1998).

E_M	35 GPa
E_A	83 GPa
M_S	20 °C
A_S	50 °C
α	1,25 GPa
Ω_M	231 kPa °C ⁻¹
Ω_A	913 kPa °C ⁻¹
a_M	1,10 °C ⁻¹
b_M	0,08 MPa ⁻¹
a_A	1,10 °C ⁻¹
b_A	0,08 MPa ⁻¹

A partir das condições iniciais estabelecidas, simula-se o processo de pré-carga do parafuso. A arruela de SMA é aquecida até uma temperatura de 65°C, necessária para que a transformação de fase se complete ($\beta = 0$). Em seguida, a arruela é resfriada até a temperatura ambiente. As Figuras 3 e 4 mostram a evolução da tensão, deformação e fração volumétrica da fase martensítica em função da temperatura. A transformação de fase induz a recuperação da deformação residual inicial (ϵ_0), promovendo a pré-carga no parafuso de fixação.

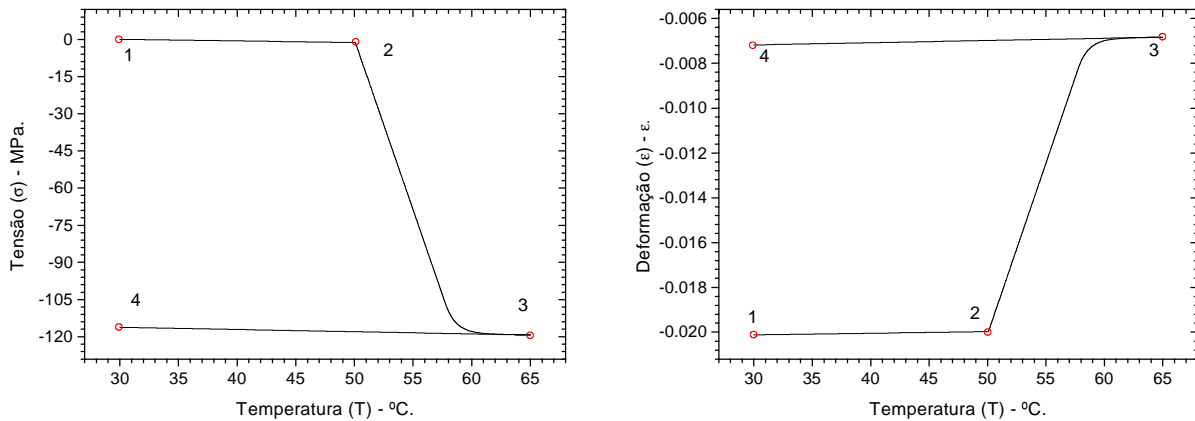


Figura 3 - Evolução da tensão e da deformação com a temperatura.

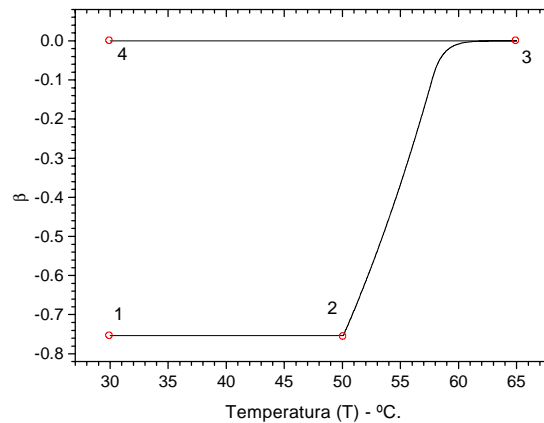


Figura 4 - Evolução da fração volumétrica da fase β com a temperatura.

O processo de pré-carga pode ser acompanhado através de 4 pontos destacados nas figuras. O ponto 1 representa a condição inicial do processo, com uma temperatura inicial de 30°C, uma deformação -2% e uma fração volumétrica $\beta_0 = -0,754$. O ponto 2 indica o início do processo de transformação de fase ($T = 50^\circ\text{C}$), observando-se uma tensão compressiva associada à dilatação térmica. O ponto 3 está associado à temperatura máxima e à tensão mínima ($T = 65^\circ\text{C}$ e $\sigma = -119$ MPa), quando toda a transformação de fase já se processou. Finalmente, o ponto 4 representa a condição final onde se observa, a uma temperatura de 30°C, a recuperação da dilatação térmica e uma tensão final de -116 MPa que é suficiente para aplicar a força de aperto necessária.

Visando avaliar a vantagem deste dispositivo em relação ao processo tradicional de pré-carga, que utiliza um torque de aperto, estabelece-se uma comparação entre as tensões equivalentes de *von Mises* no parafuso de fixação para as duas situações. Segundo Shigley & Mischke (1989), um torque de aperto de 173 N.m é necessário para promover uma pré-carga adequada na junta em questão. Considerando que o parafuso de fixação absorve metade do

torque de aperto aplicado, este elemento apresenta uma tensão equivalente de *von Mises* de 327 MPa. Por outro lado, o uso do dispositivo com memória de forma acarreta uma tensão equivalente de *von Mises* de 269 MPa, o que representa uma redução da ordem de 20% em termos de sollicitação mecânica.

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresenta-se um modelo para descrever o comportamento termomecânico de um dispositivo de pré-carga com memória de forma para juntas flangeadas. Um procedimento numérico é proposto e as simulações numéricas apresentadas permitem prever o comportamento termomecânico do dispositivo, fornecendo dados importantes para o seu projeto. Os resultados mostram que, para a junta analisada, a utilização do dispositivo promove uma redução da sollicitação mecânica da ordem de 20% quando comparada com a observada no processo tradicional que aplica um torque de aperto.

7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte da FAPERJ (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro) e do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico).

8. REFERÊNCIAS

- Acepam, 1997, “Catálogo de Flanges – Válvulas Industriais”.
- Airolidi, G., Riva, G., Vanelli, M., Filippi, V. & Garattini, G., 1997, “Oral Environment Temperature-Changes Induced by Cold/Hot Liquid Intake”, *American J. of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics*, v.112, n.1, pp.58-63.
- DIN 7990, 1983. “Elementos de Fixação Mecânica I – Parafusos e Porcas – Normas de Dimensionamento” - 1ª Edição Brasileira – Editora Is.
- Hodgson, D.E., Wu, M. H., Biermann, R.J., 1999, “Shape Memory Alloys”, www.sma-inc.com/SMAPaper.html, maio.
- Johnson, A.D. & Martynov, V.V., 1999, “Applications Of Shape-Memory Alloy Thin Film”, “<http://www.sma-mems.com/smst.htm>”, maio.
- Juvinall, R.C., 1983, “Fundamentals of Machine Component Design”, John Wiley & Sons.
- Leuven, K.U., 1998, <http://www.mtm.kuleuven.ac.be>.
- Pacheco, P.M.C.L. & Savi, M.A., 1997, “A Non-explosive Release Device For Aerospace Applications Using Shape Memory Alloys”, COBEM 97 – XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica.
- Rogers, C.A., 1995, “Intelligent Materials”, *Scientific American*, September, pp.122-127.
- Schetky, L.M., 1979, “Shape Memory Alloys”, *Scientific American*, v.241(5), pp.68-76.
- Shigley, J.E. & Mischke, C.R., 1989, “Mechanical Engineering Design”, McGraw-Hill.
- SINTEF, 1999, “Shape Memory Alloys in Oil Well Applications”, <http://iku.sintef.no/Borebronn/Brosjyrer/SMA/SMA.htm>.
- SMA, 1999, “Applications of Shape Memory and Superelastic Alloys”, <http://www.sma-inc.com/Applications.html>.
- Tanaka, K. & Nagaki, S.A., 1982, "Thermomechanical Description of Materials with Internal Variables in the Process of Phase Transitions", *Ing. Arch.*, vol.51, pp.287-299.
- Zhang, X.D., Rogers, C.A. & Liang, C., 1991, “Modeling of Two-Way Shape Memory Effect”, *ASME - Smart Structures and Materials*, v.24, pp.79-90.

AVALIAÇÃO DE UM CRITÉRIO DE SELEÇÃO DE MODOS APLICADO NA TÉCNICA DE SÍNTESE MODAL

Cleudmar Amaral de Araújo

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campus Santa Mônica, CP: 593, 38400-089, Uberlândia, MG, Brasil. E-mail: cleudmar@mecanica.ufu.br

Paulo Roberto Gardel Kurka

Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Projeto Mecânico, Campus Zeferino Vaz, CP: 6122, 13083-970, Campinas, SP, Brasil. E-mail: kurka@fem.unicamp.br

Resumo

Em um recente trabalho, os autores propuseram um critério de seleção de modos normais de subestruturas aplicado a um método de síntese modal, com a finalidade de eliminar a interferência do usuário no processo de identificação. Sabe-se que a análise por elementos finitos de uma estrutura específica, gera, na maioria dos casos, modos reais que não podem ser diretamente relacionados com os respectivos modos complexos de uma análise experimental. Neste trabalho, o critério de escolha é avaliado em termos de modos complexos obtidos a partir de uma técnica de conversão de modos reais em modos complexos. O trabalho apresenta o método de síntese modal utilizado, o critério de seleção automática de modos e a técnica de conversão dos modos reais em modos complexos. A validação da metodologia é feita através de um modelo experimental, composto de elementos estruturais do tipo perfil U.

Palavras-chave: Síntese modal, Modos complexos, Flexibilidade residual, Identificação.

1. INTRODUÇÃO

A análise de estruturas de engenharia depende essencialmente do tipo de modelo matemático que é utilizado para descrever o comportamento físico do sistema. Dentre os modelos numéricos comumente utilizados na análise de sistemas destaca-se o método dos elementos finitos. Uma outra forma de análise de sistemas é através da modelagem experimental. Uma análise experimental criteriosa porém, visando minimizar as fontes de erros, é uma tarefa de difícil execução. Além disso, a condensação das matrizes do modelo analítico aos graus de liberdade experimentais para efeito de comparação, ou mesmo, o problema inverso, são operações que podem apresentar problemas numéricos de condicionamento. Em todos os tipos de análise descritos anteriormente, principalmente, quando se tratar de estruturas grandes ou complexas, a solução do sistema completo geralmente torna-se inviável do ponto de vista de tempo de modelagem e esforço computacional. Nestes casos, uma solução seria utilizar um processo de síntese modal que forneça um problema computacional de tamanho reduzido.

Desde o trabalho pioneiro sobre síntese modal de Hurty (1965), vários métodos de síntese modal foram desenvolvidos, sendo que alguns destes métodos foram revisados, Hurty et al.(1971) e Craig (1987). O trabalho de Craig (1981) apresenta uma revisão destes principais métodos, mostrando que os métodos de síntese modal diferenciam-se, basicamente, na forma

de forçar as compatibilidades para a montagem das equações de equilíbrio e na montagem dos superconjuntos modais, que podem incluir modos estáticos e/ou modos normais.

No método proposto as subestruturas são discretizadas através de parâmetros de massa, rigidez e amortecimento, sendo separadas umas das outras através de pontos discretos de inércia. Os modos de flexibilidade residual são estimados à partir dos modos não selecionados da base modal. Aqui, nenhuma restrição é feita quanto a quantidade de modos que devem ser selecionados e não selecionados da base, sendo que é possível obter-se resultados satisfatórios na faixa de 65 a 80% de modos identificados, dentro da faixa de frequência analisada (Duarte, 1994). A qualidade dos modos selecionados e não selecionados da base modal também possui um papel fundamental para o sucesso da síntese. Até então, a eliminação dos modos da base era feita por tentativa pelo analista. Para contornar este problema é proposto uma formulação que utiliza um processo de seleção automática dos modos da base modal, com a vantagem de tornar o procedimento de síntese automático, sem a possível interferência do usuário, (Cleudmar e Kurka, 1999).

A maioria dos trabalhos que utiliza o método de síntese dos modos do componente para a solução de problemas dinâmicos de grandes estruturas, desprezam o amortecimento ou no caso mais geral consideram amortecimento proporcional. Entretanto, a suposição de leve amortecimento não é válida para algumas estruturas em engenharia. Além disso, geralmente os modos medidos experimentalmente são complexos, ou seja, não satisfazem a condição de proporcionalidade no amortecimento. Na análise do autoproblema de um sistema sem amortecimento, os modos de vibrar considerados são todos reais. Na prática, sabe-se que as estruturas possuem um certo nível de amortecimento levando a um modelo cujo autoproblema fornecerá, necessariamente, modos complexos. Este fato sempre ocorre na análise experimental, onde autovalores e autovetores complexos são extraídos de dados oriundos do domínio da frequência ou do domínio do tempo. Entretanto, os softwares de análise por elementos finitos, geralmente, fornecem apenas modelos de modos reais. Com isso, a transformação destes modos reais em modos complexos similares será de grande importância para a validação de testes experimentais, bem como, para a utilização em métodos de síntese modal que exijam modos complexos.

2. MÉTODO DE SÍNTESE MODAL

O método proposto é utilizado tanto em sistemas sem amortecimento como em sistemas com amortecimento não proporcional. Para isto, as equações de movimento das subestruturas são transformadas em equações de estado de primeira ordem e um superconjunto modal de flexibilidade residual é utilizado para transformar as coordenadas físicas em coordenadas modais, (Cleudmar e Kurka, 1999). Para a aplicação da técnica de síntese modal proposta, suponha que dois componentes (a) e (b) sejam ligados por uma interface comum, para formarem uma estrutura global, como mostrado na figura (1). Estas subestruturas são discretizadas utilizando coordenadas físicas internas (u_i) e de contorno (u_b).

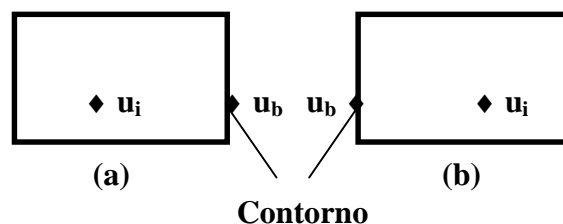


Figura 1. Subestruturas (a) e (b) discretizadas e interligadas por uma interface comum.

A equação de movimento de uma subestrutura supondo amortecimento geral pode ser definida de forma genérica por:

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = f \quad (1)$$

Na equação (1), (M) é a matriz de massa, (C) a matriz de amortecimentos, (K) a matriz de rigidez, (u) o vetor de deslocamentos físicos e (f) o vetor de forças internas e de contorno. A forma mais conveniente de solução desta equação é utilizar a formulação de estado (Santos, 1993), ou seja, transformá-la em um sistema de 2n equações diferenciais de primeira ordem, ou seja:

$$A \dot{v} + B v = P \quad (2)$$

Os modos de flexibilidade residual são obtidos a partir dos modos flexíveis não selecionados (θ_{fu}), ponderados através de forças unitárias (f_b) no contorno, da seguinte forma:

$$\delta_r = \theta_{fu} \Lambda_{fu}^{-1} \theta_{fu}^t f_b = \theta_{fu} \Lambda_{fu}^{-1} \theta_{fub}^t \quad (3)$$

A solução homogênea da equação (2) fornece os autovalores e os autovetores complexos do sistema físico. As coordenadas físicas (v) são substituídas pelas coordenadas modais (η) através da seguinte transformação linear:

$$v = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{ri} & \hat{\theta}_{fki} \\ \hat{\delta}_{rb} & \hat{\theta}_{fkb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_r \\ \eta_k \end{Bmatrix} = \hat{\Psi} \eta \quad (4)$$

Finalmente, a equação de movimento de cada componente em termos das coordenadas modais pode ser obtida como:

$$\hat{\beta} \ddot{\eta} + \hat{\alpha} \dot{\eta} = \hat{\Psi}^t P \quad \text{sendo } \hat{\beta} = \hat{\Psi}^t A \hat{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{rr} & 0 \\ 0 & I_{kk} \end{bmatrix} \quad \text{e } \hat{\alpha} = \hat{\Psi}^t B \hat{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{rr} & 0 \\ 0 & \hat{\Lambda}_{kk} \end{bmatrix} \quad (5)$$

A equação de movimento para as duas subestruturas conectadas é uma extensão da equação (5). As equações de compatibilidade entre as subestruturas podem ser obtidas aplicando-se uma con

$$\begin{cases} u_b^a - u_b^b = 0 \\ \eta_r^a - \eta_r^b = 0 \end{cases} \quad (6)$$

As parcelas de coordenadas modais mantidas são utilizadas para efetuar uma nova transformação linear no sistema, sendo que a matriz de conectividade geral (\bar{S}) é dada por:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} -C_{db}^{-1} C_{ik} \\ I_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \hat{\theta}_{fkb}^a & D \hat{\theta}_{fkb}^b \\ D \hat{\theta}_{fkb}^a & -D \hat{\theta}_{fkb}^b \\ I_{kk}^a & 0 \\ 0 & I_{kk}^b \end{bmatrix} \text{ sendo } D = (\hat{\delta}_{rb}^a + \hat{\delta}_{rb}^b)^{-1} \quad (7)$$

Finalmente, a equação homogênea global de movimento do sistema é dada por:

$$\hat{M} \ddot{\hat{p}} + \hat{K} \hat{p} = 0 \quad \text{Onde; } \hat{M} = \bar{S}^t \hat{\Delta} \bar{S} = \begin{bmatrix} I_{kk}^a + \hat{\theta}_{fkb}^{a^t} \hat{V} \hat{\theta}_{fkb}^a & -\hat{\theta}_{fkb}^{a^t} \hat{V} \hat{\theta}_{fkb}^b \\ -\hat{\theta}_{fkb}^{b^t} \hat{V} \hat{\theta}_{fkb}^a & I_{kk}^b + \hat{\theta}_{fkb}^{b^t} \hat{V} \hat{\theta}_{fkb}^b \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\hat{V} = D^t (\hat{\beta}_{rr}^a + \hat{\beta}_{rr}^b) D \quad \text{e} \quad \hat{K} = \bar{S}^t \hat{\Gamma} \bar{S} = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{kk}^a + \hat{\theta}_{fkb}^{a^t} D \hat{\theta}_{fkb}^a & -\hat{\theta}_{fkb}^{a^t} D \hat{\theta}_{fkb}^b \\ -\hat{\theta}_{fkb}^{b^t} D \hat{\theta}_{fkb}^a & \hat{\Lambda}_{kk}^b + \hat{\theta}_{fkb}^{b^t} D \hat{\theta}_{fkb}^b \end{bmatrix}$$

A equação (8), representa a equação de movimento sintetizada do sistema completo e a sua solução fornece os autovalores e autovetores complexos.

3. CRITÉRIO DE ELIMINAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODOS COMPLEXOS

Nos processos de síntese modal que utilizam o superconjunto modal de flexibilidade residual, o usuário define, aleatoriamente, quais modos deseja retirar da base modal. Estes modos não selecionados vão ser utilizados para definir os modos de flexibilidade residual. Neste caso, mesmo mantendo-se um número suficiente de modos na base, corre-se o risco de selecionar modos que seriam de baixa sensibilidade para a identificação dinâmica do sistema original. Visando automatizar este processo, foi definido um critério de eliminação de modos complexos através da suposição de que as parcelas internas de energia dos modos selecionados são as principais responsáveis pelo movimento de vibração do sistema completo, já que as parcelas relativas do contorno ficarão naturalmente sujeitas às condições impostas pelo acoplamento. Os graus de liberdade do interior de cada subestrutura, por sua vez, tendem a sofrer estes efeitos apenas de forma indireta. No entanto, como o movimento resultante da estrutura completa é devido ao acoplamento mútuo entre os vários modos das subestruturas conectadas, mesmo que um modo isolado de uma subestrutura possua uma pequena influência no contorno, quando este modo for, naturalmente, associado com os outros modos da outra subestrutura conectada, esta vinculação pode acarretar em um aumento do nível de energia de deflexão no contorno. Esta influência foi medida levando-se em conta um peso que fornece um índice de qualidade modal. Considerando, inicialmente, duas subestruturas conectadas, o peso final de cada modo (Z^x) é definido através de um somatório mútuo entre os vários pesos modais de cada subestrutura conectada. Estes pesos modais individuais de cada subestrutura são obtidos através da norma Euclidiana (kreyzig, 1991) entre as parcelas modais do contorno e as parcelas modais internas (Cleudmar e Kurka, 1999). Finalmente, o peso final de cada j-ésimo modo de uma dada subestrutura é obtido por:

$$N^j = \sqrt{|N_x^j|^2 + |N_y^j|^2 + |N_z^j|^2} \quad (9)$$

Onde (N_x^j) representa um somatório de (n) pesos finais na direção (x) . Portanto, um critério consistente é a eliminação daqueles modos de maior peso (N^j) .

4. FORMULAÇÃO EM MODOS COMPLEXOS

Os trabalhos de (Santos, 1993) e (Mitchell, 1990) apresentam um processo de transformação de modos reais em modos complexos similares e que são utilizados como base para a formulação apresentada neste trabalho. Uma base de autovetores complexos pode ser extraída à partir dos modos reais calculados $(\bar{\phi})$. Para que os modos complexos obtidos possam descrever adequadamente o comportamento do sistema físico, deve-se efetuar uma normalização conveniente dos modos reais calculados. A fim de se obter estes parâmetros de normalização, considere um sistema com amortecimento geral descrito pela equação (2). Esta equação diferencial de primeira ordem, de tamanho $2n$ é descrita por;

$$A = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} ; v = \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix} ; P = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

As coordenadas físicas (v) são substituídas pelas coordenadas modais (η) através da seguinte transformação linear:

$$v = \hat{\psi} \eta \quad \text{onde} \quad \hat{\psi} = \begin{bmatrix} \psi & \psi^* \\ \lambda\psi & \lambda^*\psi^* \end{bmatrix} \quad (11)$$

A matriz modal $(\hat{\psi})$ é composta de modos normais mantidos e modos de flexibilidade residual, conforme mostrado na equação (4). Através das equações (10) e (11) e premultiplicando o resultado pela transposta da matriz modal, obtém-se um conjunto de equações diferenciais da forma:

$$a \dot{\eta} + b \eta = \hat{\psi}^t P \quad (12)$$

Onde:

$$a = \begin{bmatrix} 2\lambda^* \psi^h M \psi^* + \psi^h C \psi^* & (\lambda + \lambda^*) \psi^h M \psi + \psi^h C \psi \\ (\lambda + \lambda^*) \psi^t M \psi^* + \psi^t C \psi^* & 2\lambda \psi^t M \psi + \psi^t C \psi \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -\lambda^{*2} \psi^h M \psi^* + \psi^h K \psi^* & -\lambda \lambda^* \psi^h M \psi + \psi^h K \psi \\ -\lambda \lambda^* \psi^t M \psi^* + \psi^t K \psi^* & -\lambda^2 \psi^t M \psi + \psi^t K \psi \end{bmatrix}$$

Os autovalores do sistema são descritos por $(\lambda = -\omega \xi - i \omega \sqrt{1 - \xi^2})$. A equação (12) é diagonal. Com isso, as equações de ortogonalidade podem ser definidas como:

$$\begin{aligned}
-2\omega \xi \psi^h M \psi + \psi^h C \psi &= 0 & -\omega^2 \psi^t M \psi^* + \psi^t K \psi^* &= 0 \\
-2\omega \xi \psi^t M \psi^* + \psi^t C \psi^* &= 0 & -\omega^2 \psi^h M \psi + \psi^h K \psi &= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Para um sistema modelado sem amortecimento, o parâmetro de normalização dos modos reais é obtido da seguinte forma:

$$a = \begin{bmatrix} 2\lambda^* m^* & 0 \\ 0 & 2\lambda m \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} k^* - \lambda^{*2} m^* & 0 \\ 0 & k - \lambda^2 m \end{bmatrix} \tag{14}$$

Onde, as equações de compatibilidade do sistema amortecido são definidas como:

$$\begin{aligned}
\psi^t M \psi &= m & \psi^t K \psi &= k \\
\psi^h M \psi^* &= m^* & \psi^h K \psi^* &= k^*
\end{aligned} \tag{15}$$

Através das equações (13) e (15), obtém-se para a parcela relativa à matriz de massa, a seguinte relação:

$$m = i 2 \psi^t M \psi \tag{16}$$

Para uma normalização pela massa e da equação (14), tem-se que ($2\lambda m = 1$). Finalmente, através das equações (15) e (16) tem-se que:

$$\psi^t M \psi = \frac{1}{4\omega} \tag{17}$$

Utilizando o parâmetro de normalização definido pela equação (17), é possível a obtenção de modos complexos simulados através dos modos reais. Se os modos reais obtidos pelo método de elementos finitos forem normalizados pela massa, os modos complexos simulados de cada subestrutura, serão definidos por:

$$\psi = \phi + i \phi \quad \text{sendo} \quad \phi = \frac{\bar{\phi}}{2\sqrt{\omega}} \quad e \quad \bar{\phi}^t M \bar{\phi} = I \tag{18}$$

5. ESTRUTURA ANALISADA

O modelo avaliado consiste de uma estrutura de alumínio construída em perfil U (Cleudmar, 1998) cujas dimensões são mostradas na figura (2). Para a aplicação do processo de síntese, a estrutura completa foi dividida em duas subestruturas. A subestrutura (1) é definida pela estrutura principal (asa) e a subestrutura (2) é definida pelo quadro (tanque), (kurka e Cleudmar, 1998). Os parâmetros modais experimentais das subestruturas e estrutura completa foram identificados a partir das funções de resposta em frequência (FRF) de pontos aleatoriamente distribuídos nas subestruturas, utilizando-se o programa StarModal, (SMS, 1990).

A estrutura completa, a subestrutura (1) e a subestrutura (2) foram também modeladas analiticamente, utilizando-se o método dos elementos finitos, através do programa Ansys. Os modelos foram construídos utilizando-se elementos de casca com oito nós por elemento e seis graus de liberdade por nó. As dimensões do modelo analítico são idênticas às do modelo experimental. A tabela 1 apresenta a comparação entre as frequências naturais numéricas com as respectivos frequências identificadas experimentalmente. Como os índices de amortecimento são baixos, utilizaram-se, para fins de comparação, somente a parte imaginária dos autovalores experimentais. Os modelos analíticos e experimentais foram avaliados através da comparação dos respectivos autovalores utilizando-se a inspeção visual entre os respectivos modos.

Os autovetores obtidos via análise numérica foram normalizados de acordo com a equação (17) e bases modais complexas equivalentes foram obtidas de acordo com a equação (18). Estas bases modais foram utilizadas para a identificação dos parâmetros dinâmicos da estrutura completa através da técnica de síntese modal. As informações modais analíticas das subestruturas são armazenadas em um arquivo externo e através do Programa Struct, (Cleudmar, 1998) é realizado o processo de síntese modal. Neste caso, eliminaram-se 5 modos da subestrutura (1) e 8 modos da subestrutura (2), correspondendo a 27,8 % e 40% do total dos respectivos modos.

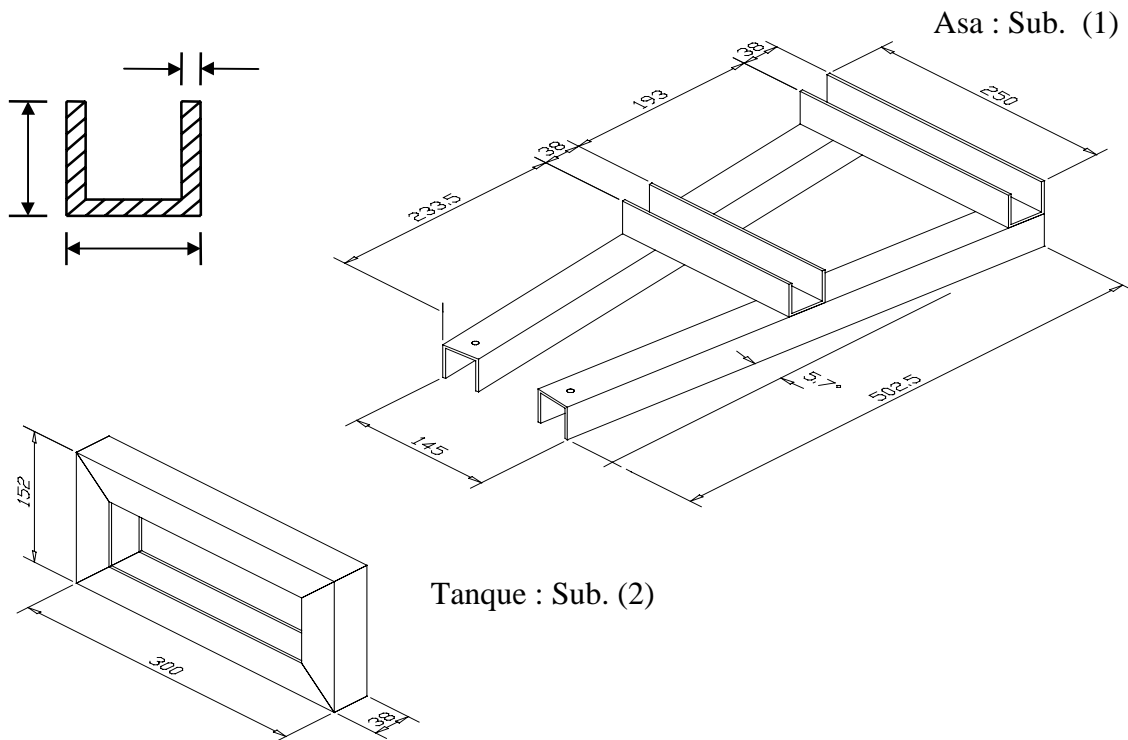


Figura 2. Desenho da estrutura analisada.

A tabela 2 apresenta os resultados da síntese modal do sistema utilizando o critério de seleção automática de modos. Estes valores estão dentro de faixas usuais de identificação obtidos pela técnica de síntese modal (Duarte, 1993).

Tabela 1. Comparação entre as frequências naturais analíticas e experimentais.

	FREQUÊNCIAS NATURAIS (Hz)								
	SUB 1			SUB 2			ESTRUT. COMPLETA		
	EXP.	MEF	ERRO (%)	EXP.	MEF	ERRO (%)	EXP.	MEF	ERRO (%)
1	58,6	57,2	2,4	617,0	776,0	25,8	74,7	75,9	1,6
2	254,0	225,0	11,4	919,0	933,0	1,5	174,7	187,7	7,4
3	354,0	322,0	9,0	988,0	954,0	3,4	356,3	402,1	12,9
4	600,0	616,0	2,7	1210,0	1070,0	11,6	475,1	492,0	3,6
5	626,0	679,0	8,5	1250,0	1160,0	7,2	550,9	578,8	5,1
6	677,0	810,0	19,7	1370,0	1310,0	4,4	726,3	784,8	8,1
7	784,0	894,0	14,0	1510,0	1520,0	0,7	790,6	815,1	3,1
8	809,0	912,0	12,7	1660,0	1600,0	3,6	846,3	915,9	8,2
9	963,9	1030,4	6,9	1770,0	1700,0	3,9	939,7	952,4	1,4
10	964,0	1030,2	6,9	1810,0	1900,0	4,9	966,6	996,6	3,1

Tabela 2. Resultados da síntese modal.

Número do modo	Frequências naturais do sistema (Hz)	Frequências naturais sintetizadas (Hz)	ERRO RELATIVO (%)	MAC
1	0,06	0,07	24,5	0,38
2	0,07	0,05	31,7	0,88
3	0,13	0,14	3,9	0,86
4	75,9	23,2	69,4	0,91
5	187,7	156,3	16,7	0,60
6	492,0	369,5	24,9	0,89
7	784,8	682,1	13,1	0,50
8	815,1	865,4	9,2	0,60
9	1047,7	1028,1	1,9	0,84
10	1048,0	1007,2	3,9	0,60
11	1062,8	1058,6	0,4	0,83

5. CONCLUSÕES

O trabalho apresenta uma técnica de conversão de modos reais em modos complexos. Estes modos complexos equivalentes são utilizados no método de síntese modal que utiliza um superconjunto de flexibilidade residual acoplado a um processo automático de escolha de modos a serem utilizados na síntese do sistema. A indicação dos modos que devem ser selecionados ou não selecionados das subestruturas, é um fator decisivo para a obtenção de precisão na síntese final. Verificou-se, através do modelo experimental, que o critério proposto é uma das possibilidades de escolha das bases modais apropriadas que poderiam ser utilizadas no processo de síntese, não descartando, porém, a possibilidade de existência de outras bases modais que também poderiam levar a resultados satisfatórios. Observou-se que os resultados obtidos com esta base modal equivalente foram satisfatórios, indicando a possibilidade de utilização de tal procedimento quando uma base de modos reais da estrutura for calculada via método dos elementos finitos. Uma avaliação mais criteriosa da metodologia pode ser obtida considerando um outro modelo experimental com um índice de amortecimento mais elevado.

6. REFERÊNCIAS

- Araújo, Cleudmar A., 1998, “Modelagem de Sistemas Dinâmicos Através da Síntese Modal de Componentes”, Doctoral Thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- Araújo, Cleudmar A. e Kurka, P. R. G. “Critério de seleção de modos complexos aplicado a um método de síntese modal generalizado - Parte I : Simulação Numérica.”, COBEM/99, Nov. 1999, Águas de Lindóia, SP.
- Araújo, Cleudmar A. e Kurka, P. R. G. “Critério de seleção de modos complexos aplicado a um método de síntese modal generalizado - Parte II : Ensaio Experimental.”, COBEM/99, Nov. 1999, Águas de Lindóia, SP.
- Craig, Jr., R. R., 1987, “A Review of Time-Domain and Frequency-Domain Component Mode Synthesis Methods”, J. of Modal Analysis, pp. 59-72.
- Craig Jr., R. R., 1981, “Structural dynamics - An introduction to computer methods”, J. Wiley, New York.
- Duarte, M. A. V., 1994, “Ajuste de Modelos de Dinâmicos de Estruturas com Não Linearidades Concentradas”, Doctoral Thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- Hurty, W. C., 1965, “Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes”, AIAA J., vol. 3, n. 4, pp. 678 - 685.
- Hurty, W. C., Collins, J. D., Hart, G. C., 1971, “Dynamic analysis of large structures by modal synthesis techniques. Computers & Structures, v. 1, p. 535-563.
- Kreyszig, E., 1993, “Advanced Engineering Mathematics”, J. Wiley, 7a. ed., New York.
- Kurka, P. R. G. and Araújo, Cleudmar A., 1998, “Practical application of a selection criteria for constructing the superset of residual flexibility modes used in modal synthesis method”, ISMA 23, Internatinal Conference on Noise and Vibration Engineering, Sept., Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, pp. 16-18.
- Mitchell, L., 1990, “Complex modes: A Review.”, Proc. of the 8th International Modal Analysis Conference. Kissimmee, USA, p. 891 -899.
- Programa StarModal, 1990, Theory and Applications. Structural Measurement Systems.
- Santos, J. M. C., 1993, “Ajuste de Modelos de Estruturas Acopladas por Juntas Mecânicas Usando Funções de Resposta em Frequência e Síntese Modal de Componentes”, Doctoral Thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

INFLUÊNCIA DA NÃO-CONFORMIDADE GEOMÉTRICA ENTRE ALOJAMENTO E MANCAL SOBRE O CAMPO DE TENSÕES DE BRONZINAS

Cleber C. Thomazi

Mário M. Pérez

Sonia A. G. Oliveira

Universidade Federal de Uberlândia – Faculdade de Engenharia Mecânica – Departamento de Projetos Mecânicos – E-mail: cthomazi@mecanica.ufu.br

Resumo

O Método dos Elementos Finitos foi usado na investigação dos efeitos da não-conformidade geométrica entre mancal e alojamento sobre o campo de tensões de uma bronzina. A distribuição de pressão hidrodinâmica atuante na bronzina foi calculada através da teoria de Ocvirk para mancais curtos. Na análise das tensões circunferenciais na superfície do mancal e das tensões cisalhantes na interface entre revestimento e a casca de aço da bronzina verificam-se concentrações de tensão nas regiões onde há perda de suporte ou influência de partículas incrustadas entre o mancal e o alojamento, as quais podem contribuir para a nucleação de falha por fadiga.

Palavras-chave: mancais de filme fluido, análise de tensão, não-conformidade geométrica, método dos elementos finitos, falha por fadiga.

1. INTRODUÇÃO

Mancais de biela e mancais principais de virabrequins de motores de combustão interna, conhecidos como bronzinas, ou casquilhos, são usualmente obtidos através da conformação de uma tira de aço de baixo carbono na qual são depositadas camadas de material metálico com o objetivo de reduzir o atrito e permitir suficiente conformabilidade para acomodar o munhão (Wilcock e Booser, 1957).

Os carregamentos cíclicos severos aos quais estes mancais estão sujeitos, podem levar o material antifricção a falhar por fadiga. Em mancais revestidos com babbitt, as trincas de fadiga progridem primeiramente através da espessura da camada de babbitt, mudando de direção à medida que aproximam-se da interface revestimento/casca de aço (encosto, Figura 1.a), passando a propagarem-se paralelamente e logo acima da interface. Quando ocorre o encontro entre trincas radiais e circunferenciais, há desprendimento de pequenos trechos do revestimento. O número destes trechos aumenta gradualmente até que a superfície de apoio restante seja insuficiente para suportar a carga. Se o material antifricção não estiver apropriadamente aderido ao encosto, estas trincas propagar-se-ão rapidamente ao longo da interface (Wilcock e Booser, 1957), causando o desprendimento do revestimento.

Qualquer tentativa na predição de falha em mancais deve ser baseada no conhecimento da distribuição de tensões em serviço. Apesar da falha por fadiga ser facilmente reconhecida, os

fatores e circunstâncias que levam à sua ocorrência ainda não estão completamente esclarecidos.

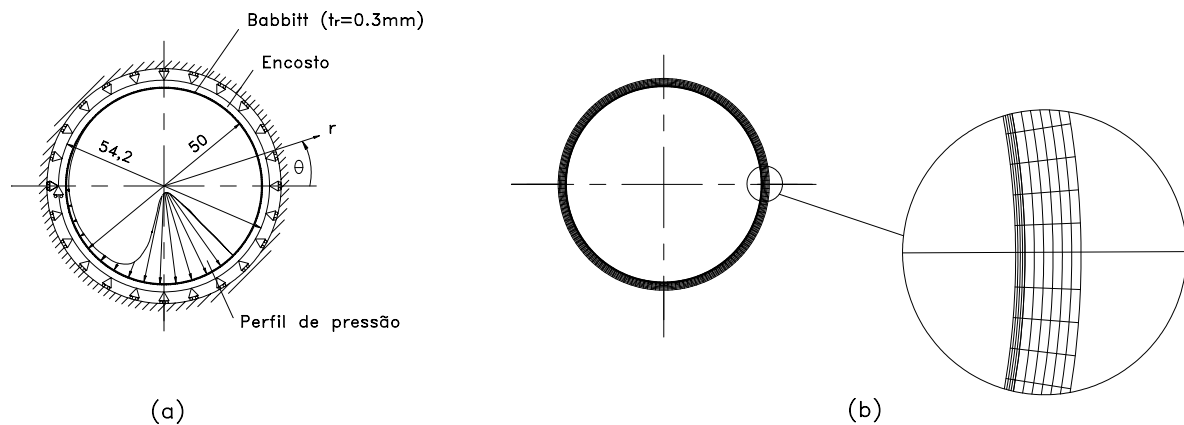


Figura 1. (a) configuração usada na análise e, (b) malha de elementos finitos.

A ausência de soluções analíticas confiáveis e a dificuldade em se obterem resultados experimentais levaram ao uso de técnicas numéricas para se atingir uma melhor compreensão do problema. Ibrahim e McCallion (1970) calcularam as tensões em uma tira bimetálica usando o método das diferenças finitas. Eles sugeriram que a falha por fadiga seria induzida na superfície do mancal devida às tensões normais flutuantes, ou na interface, devida às tensões cisalhantes flutuantes. McCallion e Lofti (1992) usaram o método dos elementos finitos para comparar as posições das tensões circunferenciais de tração máximas com a localização das trincas observadas experimentalmente por Blundell (1977)¹ e encontraram uma excelente correlação entre as posições das trincas de fadiga observadas e a posição das tensões circunferenciais de tração máximas calculadas. Xu (1996) analisou um mancal com revestimento formado por uma liga de alumínio sobre um encosto de aço, suportado por um alojamento também de aço, e propôs que a repetição de tensões cisalhantes elevadas podem iniciar trincas ao longo da interface, tanto na direção axial, quanto na circunferencial. Hacifazlioglu e Karadeniz (1996) analisaram um mancal radial adotando um modelo retificado onde foram usados elementos hierárquicos. Eles estabeleceram que a presença de um canal de lubrificação no alojamento levaria a concentrações de tensão no revestimento. Neste trabalho Hacifazlioglu e Karadeniz (1996) também analisaram os efeitos da ausência de suporte em parte do mancal.

No presente trabalho alguns resultados da influência da falta, ou da não-conformidade do suporte fornecido pelo alojamento a um mancal de filme fluido submetido a uma distribuição de pressão hidrodinâmica são apresentados. O programa de elementos finitos ANSYS[®], versão 5.4 (Swanson Analysis Systems, 1995a,b) foi usado para modelar um mancal como um anel suportado por um alojamento perfeitamente rígido. Os efeitos da ausência de suporte parcial em mancais com encosto de aço e cerâmica e, a presença de partículas incrustadas entre o mancal e o alojamento sobre as tensões circunferenciais na superfície e, sobre as tensões cisalhantes na interface entre o revestimento e o encosto foram analisadas individualmente. Espera-se que os resultados desta investigação sejam úteis no desenvolvimento de métodos que permitam prever falha por fadiga em mancais submetidos a cargas variáveis.

¹ Blundell, J. K., 1977, "The fatigue of dynamically loaded journal bearings", PhD Thesis, University of Nottingham.

2. MODELAGEM EM ELEMENTOS FINITOS

Os mancais considerados nesta análise são constituídos por uma casca cilíndrica de aço ou cerâmica revestida por uma liga antifricção. Foi adotada a hipótese de estado plano de deformação, que, segundo Ibrahim e McCallion (1970), é uma consideração realística para relações comprimento/diâmetro (l/d) usuais. Lang (1977) também adotou estado plano de deformação em seu trabalho, enquanto Hacifazlioglu e Karadeniz (1996) consideraram esta aproximação aceitável para um pré-projeto. Os mancais analisados foram submetidos a carregamentos estáticos. Para todos os modelos assumiu-se uma perfeita aderência entre o revestimento antifricção e o encosto, o que garante a continuidade dos deslocamentos nesta região.

O modelo tomado como referência na comparação dos resultados corresponde a um mancal com alojamento perfeitamente rígido e totalmente apoiado no alojamento (Figura 1.a). O diâmetro interno do mancal é $d = 50,0$ mm, seu comprimento é $l = 25,0$ mm, a espessura do revestimento é $t_r = 0,3$ mm e, a espessura do encosto $t_e = 1,8$ mm. Estas dimensões foram tomadas de uma bronzina de uso corrente na indústria automobilística. O material antifricção é um babbitt base-estanho com módulo de Young $E_b = 50$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu_b = 0,330$ (American Society for Metals, 1985). O aço do encosto possui módulo de Young $E_s = 207$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu_s = 0,292$ (Shigley e Mischke, 1989). O material cerâmico é o Si_3N_4 , com módulo de elasticidade $E_{sn} = 304$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu_{sn} = 0,240$ (Richerson, 1993). Esta cerâmica é usada na fabricação de elementos rolantes de rolamentos para eixos de máquinas ferramentas e, também, como revestimento de ferramentas de usinagem. Schwartz (1992) cita, ainda, o emprego de materiais cerâmicos em buchas.

No modelo com suporte completo os deslocamentos radiais foram restringidos ao longo de toda a circunferência externa (Figura 1.a). O nó na interface entre o encosto e o alojamento em $\theta = \pi$ também possui seus deslocamentos impedidos na direção circunferencial, conforme apresentado na Figura 1.a. Esta restrição circunferencial é necessária para evitar problemas numéricos decorrentes de movimento de corpo rígido e para simular o ressalto encontrado em bronzinas, cuja finalidade é impedir que as mesmas girem ou movimentem-se axialmente no alojamento.

A distribuição de pressão atuante na região compreendida no intervalo $3\pi/4 \leq \theta \leq 7\pi/4$ (Figura 1.a) foi calculada usando-se a teoria de Ocvirk para mancais curtos (Norton, 1996). Adotou-se, para a análise, uma pressão máxima arbitrária, $p_{m\acute{a}x} = 10$ MPa, que ocorre no ângulo $\theta = 297^\circ$. A velocidade de operação é $n = 3600$ rpm. Considerou-se uma folga radial do mancal $c_r = 0,022$ mm.

Foram usados elementos quadrilaterais isoparamétricos de oito nós, PLANE82 (Swanson Analysis Systems, 1995b) para todos os modelos. O revestimento antifricção e o encosto foram discretizados por uma malha regular de 160×4 e 160×6 elementos, respectivamente, conforme ilustrado na Figura 1.b. Esta densidade de malha foi adotada após serem executados sucessivos refinamentos e atingir-se convergência das soluções.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A ausência de suporte em parte da circunferência do encosto pode ser causada por falha de usinagem, ou superfície do alojamento com acabamento grosseiro; aperto insuficiente dos parafusos do alojamento; ou por deformação do alojamento causado por aquecimento e resfriamento brusco. Ranhuras para distribuição de óleo no alojamento devem ser evitadas, a não ser para mancais de parede grossa [Neale (ed), 1973]. Impurezas sólidas entre o mancal e o alojamento também são consideradas causas de não-conformidade.

Na Figura 2 são apresentadas as distribuições de tensões circunferenciais na superfície do mancal para as seguintes situações de apoio: suporte completo, suporte para $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ e $\pi \leq \theta \leq 7\pi/4$. Apesar de ser quase totalmente compressiva, a tensão circunferencial na superfície do mancal com suporte completo, passa a ser de tração ao final da região de pressão, onde ocorrem os maiores gradientes de pressão. Para este mancal, a tensão circunferencial de tração máxima possui o valor de $0,0213 p_{máx}$ e, ocorre ao final da região lubrificada, onde existem os maiores gradientes de pressão.

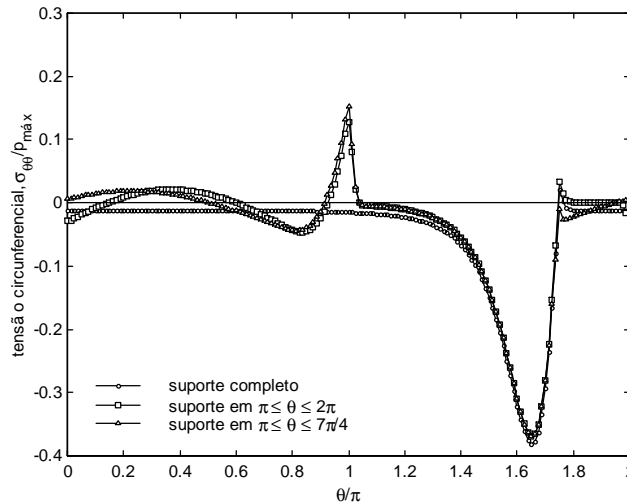


Figura 2. Influência da ausência de suporte fornecido pelo alojamento sobre as tensões circunferenciais na superfície do mancal.

Nota-se que o perfil da curva de tensão circunferencial tem sua forma alterada nas regiões onde termina o apoio do alojamento. Particularmente, se a ausência de suporte ocorre dentro da região de pressão, as tensões circunferenciais de tração tendem a valores bastante elevados, maiores que aqueles encontrados ao final da região lubrificada (fim do perfil de pressão hidrodinâmica), quando esta última apresenta-se apoiada. A ausência de suporte causa deformações de flexão localizadas induzindo as tensões circunferenciais de tração a valores muito elevados. De modo geral, os resultados desta investigação estão de acordo com aqueles apresentados por Hacifazlioglu e Karadeniz (1996).

A influência da não-conformidade geométrica sobre as tensões cisalhantes na interface entre o revestimento e o encosto para as mesmas condições de suporte acima, é apresentada na Figura 3. Para o mancal com suporte completo, a tensão cisalhante máxima na interface entre o revestimento e o encosto ocorre sob a região de maior gradiente de pressão e, seu valor é de $0,0303 p_{máx}$. Da mesma forma como ocorre com as tensões circunferenciais na superfície do mancal, nota-se uma forte modificação na distribuição e magnitude das tensões de cisalhamento nas regiões sob pressão onde há perda de suporte.

A resposta do mancal com encosto de cerâmica ao suporte incompleto do alojamento, também foi analisada. Verifica-se que o mancal com encosto de cerâmica é menos sensível à ausência de suporte do alojamento, tanto no que se refere às tensões circunferenciais de tração na superfície, quanto às tensões cisalhantes na interface entre o revestimento e o encosto (Figuras 4 e 5, respectivamente). Em $\theta = \pi$, têm-se tensões circunferenciais máximas na superfície de $0,1285 p_{máx}$ para o mancal com encosto de aço e, de $0,0921 p_{máx}$ para o mancal com encosto de cerâmica. Comportamento análogo foi obtido com relação às tensões cisalhantes máximas na interface entre o encosto e o revestimento; $0,0178 p_{máx}$ para o mancal com encosto de aço e, $0,0133 p_{máx}$ para o mancal com encosto de cerâmica.

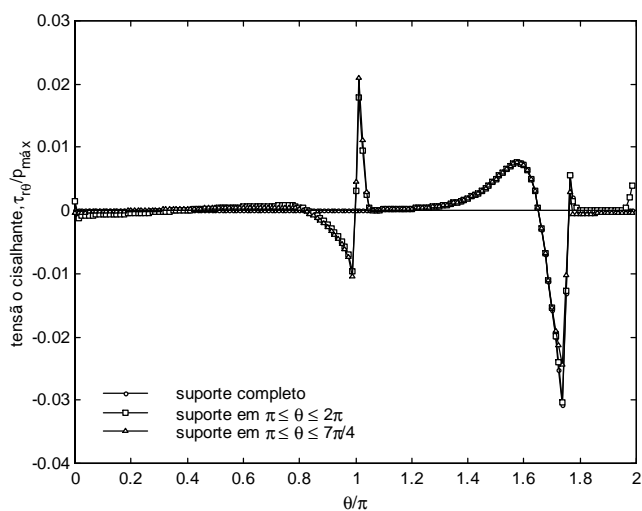


Figura 3. Influência da ausência de suporte fornecida pelo alojamento sobre as tensões cisalhantes na interface revestimento/encosto.

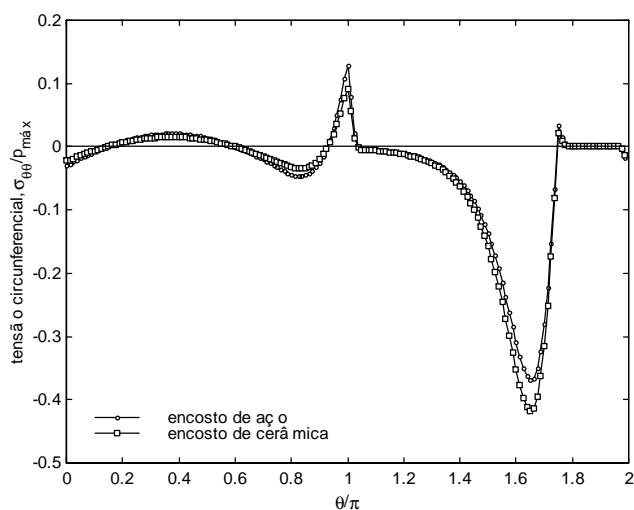


Figura 4. Influência da ausência de suporte fornecido pelo alojamento sobre as tensões circunferenciais na superfície do mancal para diferentes materiais de encosto (suporte em $\pi \leq \theta \leq 2\pi$).

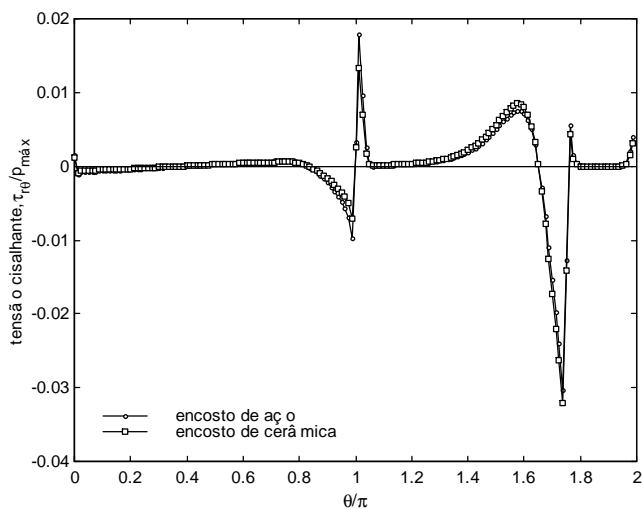


Figura 5. Influência da ausência de suporte fornecido pelo alojamento sobre as tensões cisalhantes na interface revestimento/encosto para diferentes materiais de encosto (suporte em $\pi \leq \theta \leq 2\pi$).

Outra situação de não-conformidade geométrica entre alojamento e mancal ocorre quando há presença de partículas sólidas (sujeira, rebarbas, etc.) entre o alojamento e o encosto. Estas partículas impedem o contato adequado entre a bronzina e o alojamento e dificultam o fluxo de calor. Para analisar a influência da presença destas partículas sobre o campo de tensões foi imposto ao encosto, na região correspondente ao fim do perfil de pressão hidrodinâmica, um deslocamento radial de $1\ \mu\text{m}$, no sentido do centro da bronzina. Todos os nós da circunferência externa da bronzina permaneceram nas condições de alojamento perfeitamente rígido, ou seja, com os deslocamentos impedidos na direção radial. Esta situação corresponderia à presença de um conjunto de partículas perfeitamente rígidas, com diâmetro de $1\ \mu\text{m}$, alinhadas no sentido do comprimento do mancal, incrustadas no encosto, entre o mancal e o alojamento; este último, também perfeitamente rígido. A influência da presença desta partícula sobre a distribuição das tensões circunferenciais na superfície do mancal e sobre as tensões cisalhantes na interface entre o revestimento e o encosto é mostrada nas Figuras 6 e 7, respectivamente.

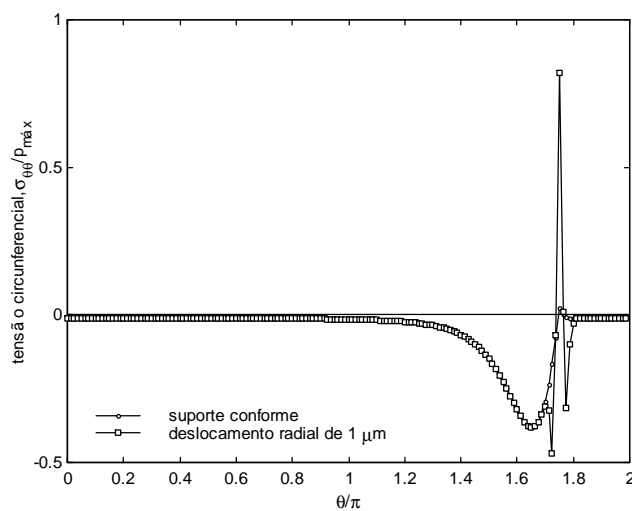


Figura 6. Influência da presença de partícula sólida entre o mancal e o alojamento sobre as tensões circunferenciais na superfície do mancal.

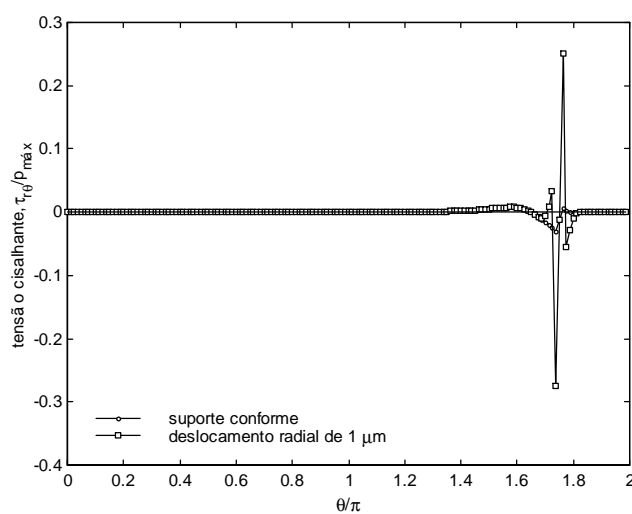


Figura 7. Influência da presença de partícula sólida entre o mancal e o alojamento sobre as tensões cisalhantes na interface revestimento/encosto.

Nota-se que, tanto as tensões circunferenciais de tração na superfície, quanto as tensões cisalhantes na interface entre o encosto e o revestimento, sofrem significativo aumento na região afetada pela presença das partículas.

A presença de partículas sólidas entre o alojamento e o mancal, causam distorções de flexão na superfície do revestimento. O efeito torna-se ainda maior quando somado à flexão devida aos elevados gradientes de pressão ao fim da região de pressão.

Analisando-se os resultados, pode-se dizer que a conformidade geométrica entre mancal e alojamento possui significativa influência na magnitude das tensões circunferenciais de tração na superfície do revestimento e das tensões cisalhantes na interface entre encosto e revestimento, devendo ser evitada a fim de aumentar a vida à fadiga do mancal.

4. CONCLUSÕES

Mancais radiais de filme fluido sob carregamento estático foram analisados através do Método dos Elementos Finitos com o objetivo de se verificar a influência da falta, ou da não-conformidade do suporte fornecido pelo alojamento ao mancal sobre o campo de tensões em bronzinas.

Dentro do escopo deste trabalho pode-se concluir que:

- i) A ausência de conformidade entre mancal e alojamento na região sob pressão induz tensões circunferenciais de tração na superfície do mancal. As tensões cisalhantes na interface entre o revestimento e o encosto também sofrem forte influência, tendo seus valores aumentados na região onde há perda de suporte;
- ii) Mancais com encosto de cerâmica apresentam-se menos sensíveis à ausência de suporte quando comparados a mancais com encosto de aço. As magnitudes das tensões circunferenciais de tração na superfície e das tensões cisalhantes na interface revestimento/encosto, na região onde ocorre perda de suporte, são menores quando comparadas aos mancais com encosto de aço;
- iii) A presença de partículas estranhas entre o alojamento e o encosto induzem deformações de flexão na superfície do mancal, originando tensões circunferenciais de tração nesta região. As tensões cisalhantes na interface têm suas magnitudes aumentadas quando há presença destas partículas.

A condição de alojamento perfeitamente rígido é uma consideração bastante simplificadora. Na realidade, não existe estrutura perfeitamente rígida. Particularmente, em mancais radiais de filme fluido, submetidos a carregamentos variáveis, uma baixa rigidez do alojamento implica uma diminuição da vida à fadiga do mancal, devido ao aumento da magnitude das tensões (Hacifazlioglu e Karadeniz, 1996; Thomazi, *et al*, 1999).

Sugerem-se investigações no intuito de verificar a viabilidade da utilização de material cerâmico na confecção de encostos de bronzinas. Apesar das dificuldades, inicialmente relacionadas com a obtenção de boa conformabilidade entre alojamento e mancal, devido à maior rigidez do material cerâmico, Hamrock e Anderson (1983) citam que, naquela ocasião, mancais de rolamentos com elementos cerâmicos estavam sendo utilizados ainda em caráter experimental. Hoje, mancais de rolamento de material cerâmico são amplamente comercializados e apresentam, em determinadas aplicações, grandes vantagens sobre os rolamentos convencionais.

A análise apresentada neste trabalho restringe-se aos efeitos da não-conformidade geométrica entre mancal e alojamento. Vários fatores relevantes que afetam a distribuição das tensões em mancais de filme fluido não foram considerados no presente trabalho. Entre eles, podem ser citados a influência da deformação do mancal e do alojamento, promovido pelo carregamento hidrodinâmico e térmico sobre a distribuição de pressão hidrodinâmica (efeito elasto-hidrodinâmico); o esmagamento das bordas da bronzina devido à operação de

montagem e, as tensões residuais devidas ao processo de fabricação. Este fatores, entre outros, são objetos de uma investigação mais ampla que encontra-se em andamento.

5. AGRADECIMENTOS

À Sra. Silvana Rizzioli, coordenadora da Área de Educação e Cultura, e ao Sr. Mário Lúcio de Oliveira, responsável pelo Setor de Gestão do Conhecimento - Mecânica, ambos da FIAT Automóveis S.A, pelo apoio ao desenvolvimento deste trabalho.

À CAPES pelo suporte financeiro e à FAPEMIG, por fornecer parte dos recursos computacionais que vêm permitindo a realização desta pesquisa.

6. REFERÊNCIAS

- American Society for Metals, 1985, "Metals Handbook", 9 ed., Vol. 3, pp 802-822.
- Hacifazlioglu, S. e Karadeniz, S., 1996 "A parametric study of stress sources in journal bearings", Int. J. Mech. Sci., Vol. 38, Nos. 8-9, pp.1001-1015.
- Hamrock, B. J. e Anderson W. J., 1983, "Rolling-Element Bearings", NASA Reference Publication 1105.
- Ibrahim, S. M. e McCallion, H., 1970, "Stresses in oil lubricated bearings", Proc. Inst. Mech. Engrs., **184**, Pt. 1, pp.69-78.
- Lang, O. R., 1977, "Surface fatigue of plain bearings", Wear, **43**, pp.25-30.
- McCallion, H. e Lofti, M., 1992, "Tensile surface stresses and fatigue in plain journal bearings", Tribology International, Vol.25, no.4, pp.247-257, Butterworth-Heinemann.
- Neale, M. J., 1973, "Tribology Handbook", Newnes-Butterworths, Londres.
- Norton, R. L., 1996, "Machine Design An Integrated Approach", Prentice-Hall Inc.
- Richerson, D. W., 1993, "Modern Ceramic Engineering - Properties, Processing, and Use in Design", segunda ed., Marcel Dekker, Nova Iorque.
- Schwartz, M. M., 1992, "Handbook of Structural Ceramics", McGraw-Hill, USA.
- Shigley, J. E., Mischke, C. R., 1989, "Mechanical Engineering Design", quinta ed., McGraw-Hill International Editions, Nova Iorque
- Swanson Analysis Systems, Inc., 1995a, "ANSYS Analysis Guide", Houston, PA.
- Swanson Analysis Systems, Inc., 1995b, "ANSYS Elements Manual", Houston, PA.
- Thomazi, C., Pérez, M., Oliveira, S., 1999, "Análise numérica de tensões em um mancal radial hidrodinâmico", Anais do VI Congresso Iberoamericano de Ingenieria Mecanica, 2v., n.p., Santiago, Chile.
- Xu, H., 1996, "Effects of EHD contacts upon the bearing and housing behavior", SAE Technical Paper Series, Paper no.960987, SAE Int. Cong. & Exp., Detroit, Michigan.
- Wilcock, D. F. e Booser, E. R., 1957, "Bearing design and application", McGraw-Hill Book Company, Inc., Londres.

ASPECTOS DA MODELAGEM COMPUTACIONAL TRIDIMENSIONAL DE CABOS DE FIBRAS ÓPTICAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Carlos A. Vasconcellos^{*}, Mildred B. Hecke^{*} e Roberto D. Machado^{*}

^{*} Centro de Estudos de Engenharia Civil Professor Inaldo Ayres Vieira
Universidade Federal do Paraná
Caixa Postal 19011 – CEP 81531-990 – Curitiba, PR, Brasil
e-mail: cesec@cesec.ufpr.br, página web: <http://www.cesec.ufpr.br>

Resumo.

Este trabalho visa discutir alguns aspectos da modelagem computacional tridimensional de um cabo de fibras ópticas pelo Método dos Elementos Finitos. O cabo óptico estudado no presente trabalho é do tipo “*loose tube*”, com 6 fibras em cada tubo de proteção (total de 36 fibras ópticas monomodo), onde tais tubos são reunidos ao longo de uma helicóide em torno do elemento estrutural central. Foi utilizado o programa ANSYS, versão 5.3, para discretizar a estrutura do cabo pelo Método dos Elementos Finitos. Um modelo preliminar foi desenvolvido considerando-se o cabo como um problema de estado plano de deformações. Em seguida, utilizando-se alguns resultados da análise plana, foi criado um modelo sólido tridimensional. Aspectos a respeito desta modelagem serão discutidos no presente trabalho, visando fornecer subsídios para uma modelagem mais completa no futuro.

Palavras chave: Cabos Ópticos, Análise Numérica, MEF.

1. INTRODUÇÃO

Cabos ópticos (Keiser, 1991) são dispositivos utilizados em sistemas de comunicações de dados e devem possuir características mecânico-estruturais que os permitam transmitir informações com baixa perda de sinal. Os componentes do cabo óptico estudado neste trabalho serão apresentados no item 2.

Quando submetido a carregamentos externos, seja compressão diametral, flexão, variação de temperatura etc., os cabos podem sofrer deformações excessivas que serão transmitidas às fibras ópticas. Tal comportamento degrada e compromete a transmissão dos sinais através das fibras. Deste modo, é de fundamental importância o controle e a limitação das deformações dos componentes estruturais que compõem o cabo óptico.

Este trabalho procura discutir aspectos da modelagem computacional tridimensional de um cabo de fibra óptica, submetido a esforços de compressão diametral, pelo Método dos Elementos Finitos. Um estudo desta natureza se faz necessário por algumas razões principais: primeiro, o comportamento mecânico-estrutural do cabo tem influência em sua capacidade de transmissão de dados; segundo, tem-se um emprego crescente de cabos ópticos nas empresas de telecomunicações. Estes fatos fazem com que a otimização no projeto dos cabos ópticos seja de fundamental importância para as indústrias que os produzem.

2. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DE UM CABO ÓPTICO

A fibra óptica é um meio através do qual informações luminosas são transmitidas. Consiste em material dielétrico, essencialmente sílica pura (SiO_2), dopada com pequena quantidade de outros materiais. Possui uma estrutura cilíndrica formada por uma região central, núcleo (*core*), por onde a informação luminosa transita, envolta por uma camada, denominada casca, composta de material de menor índice de refração, onde tal sinal é refletido.

As fibras apresentam baixa resistência mecânica. Curvaturas acentuadas fazem com que o sinal luminoso perca intensidade, fenômeno conhecido como atenuação. Por este motivo, elas precisam ter proteção mecânica. No cabo óptico em estudo, esta proteção é oferecida por tubos do tipo “*loose*”, caracterizados por terem as fibras ópticas soltas em seu interior. A figura 1 mostra fibras ópticas e o tubo de proteção tipo “*loose*”.

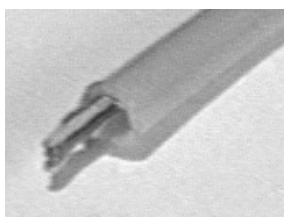


Figura 1. Fibras ópticas e tubo “*loose*” de proteção

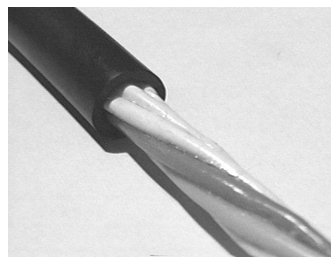


Figura 2. Tubos “*loose*” de proteção reunidos em torno do elemento estrutural central

Cada um dos tubos de proteção “*loose tube*” que compõem o cabo óptico em estudo abrigam fibras ópticas embebidas em um fluido gelatinoso impedindo penetração de umidade. Os tubos, por sua vez, são reunidos em torno de um elemento estrutural central, como pode ser visto na figura 2.

Este conjunto, elemento central e tubos de proteção (núcleo óptico), é envolvido, no modelo de cabo em estudo, uma malha de material fibroso resistente à tração (elemento de tração) e uma capa de material plástico, como ilustrado na figura 3

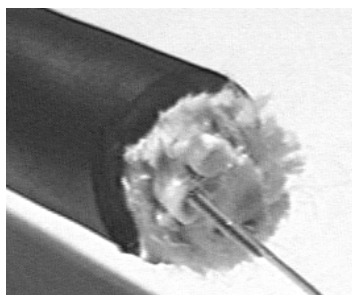


Figura 3. Núcleo óptico, elemento de tração e capa

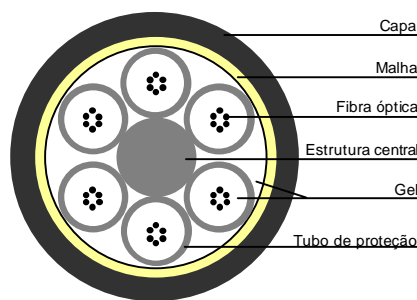


Figura 4. Representação da estrutura do cabo tipo *loose* em estudo

Existem diversos modelos estruturais de cabos ópticos (configuração tipo *tight*, *loose* ou *ribbon*) que dão proteção mecânica às fibras ópticas e tais estruturas são projetadas de acordo com o uso que o cabo terá. O presente trabalho estuda as estruturas de cabos de configuração *loose*, cuja geometria é representada esquematicamente na figura 4.

3. ASPECTOS DO MODELO COMPUTACIONAL ADOTADO

O cabo óptico foi discretizado pelo Método dos Elementos Finitos, utilizando-se o programa ANSYS, versão 5.3, onde, devido à complexidade do cabo, vários tipos de elementos foram considerados. Conforme explicado a seguir, dois tipos de análises foram realizadas – uma plana (estado plano de deformações) e outra tridimensional. Os componentes estruturais do cabo foram modelados por elementos finitos PLANE42, nos modelos em estado plano de deformações e por elementos SOLID45 nos modelo tridimensionais. Elementos de contato (Johnson, 1987) foram empregados para representar a interação entre os diversos tubos do cabo, o elemento estrutural central e a capa do cabo.

O principal desafio nesta etapa do trabalho é simular a interação entre os componentes estruturais do cabo óptico através dos elementos de contato. A escolha correta das constantes características destes elementos é uma fase crucial na análise.

Com este objetivo e visando algumas simplificações no modelo computacional, o estudo do cabo seguiu as seguintes etapas: Primeiro, o cabo óptico foi modelado no estado plano de deformações, desprezando-se o efeito da helicóide. Segundo, para considerar o efeito da reunião dos tubos de proteção em forma de hélice em torno do elemento central, foi criado um modelo tridimensional para o cabo óptico.

3.1. Análise do cabo óptico em estado plano de deformações

Em uma primeira etapa da análise, um modelo computacional do cabo óptico foi criado, considerando-o em estado plano de deformações.

Esta hipótese simplificadora negligencia o efeito da reunião dos tubos de proteção se dar de maneira helicoidal em torno do elemento central, ou seja, considera que a seção transversal do cabo e suas deformações são as mesmas em todo seu comprimento.

As propriedades de material e geometria do modelo são aqueles característicos do cabo, à exceção da rigidez equivalente dos tubos de proteção. Estes são agora representados por cilindros maciços com rigidez equivalente.

Os componentes estruturais do cabo foram modelados por elementos finitos PLANE42 e os contatos entre tubo de proteção/capa, tubo de proteção/tubo de proteção e tubo de proteção/elemento central foram modelados por elementos CONTAC48.

Este elemento de contato funciona com um algoritmo que procura, de maneira incremental, a posição de equilíbrio entre duas superfícies, superfície de contato e superfície alvo, que podem vir a entrar em contato. O elemento apresenta grande sensibilidade às suas constantes características (rigidez normal e tangencial) bem como às propriedades dos materiais que podem entrar em contato e às cargas atuantes no sistema. A figura 6 ilustra um elemento plano de contato, seus nós (i, j e k), seu sistema de coordenadas e as superfícies envolvidas no problema, contato e alvo.

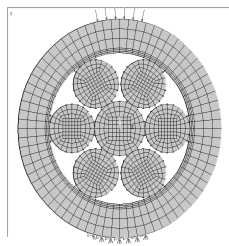


Figura 5. Modelo computacional plano do cabo óptico

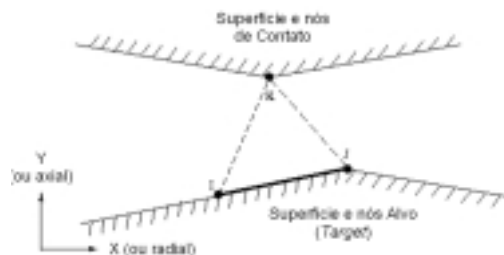


Figura 6. Elemento plano de contato (CONTAC48)

Na base do cabo, os apoios restringiram as translações nas direções x e y . No topo do cabo, foi aplicada uma carga diametral de pressão de modo a simular um ensaio de compressão diametral.

Tal modelo é afetado pela não linearidade do elemento de contato, havendo um grande custo computacional para sua solução. Além disto, os parâmetros necessários para caracterizar os elementos de contato, isto é, a rigidez normal e tangencial, podem variar em uma larga faixa de valores. Dependendo destes valores, chega-se à convergência correta (solução do problema), convergência incorreta (resultados incorretos) ou divergência (solução não encontrada).

Esta etapa da análise requer grande esforço computacional, uma vez que a escolha das constantes não segue parâmetros rígidos. O software Ansys sugere uma grande faixa de valores admissíveis para as constantes. O modelo plano do cabo convergiu corretamente com a rigidez normal de contato assumindo valores na ordem de grandeza da rigidez média dos componentes estruturais do mesmo. Ainda no modelo plano, a rigidez tangencial do contato deve assumir valores da ordem de um centésimo da rigidez normal.

Pode-se observar um resultado qualitativamente correto no modelo computacional plano do cabo óptico, onde os esforços aplicados no topo do cabo foram transmitidos através da capa, para os tubos de proteção. Estes sofreram um rearranjo e a simetria é verificada. Uma maior aplicação de carga leva a uma maior deformação dos tubos de proteção. A figura 7 ilustra a deformação do modelo plano do cabo óptico.

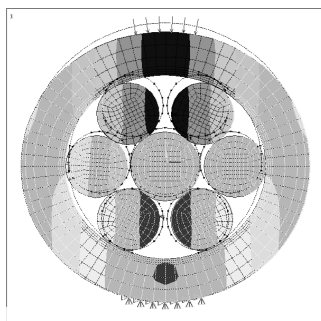


Figura 7. Convergência correta do modelo computacional plano

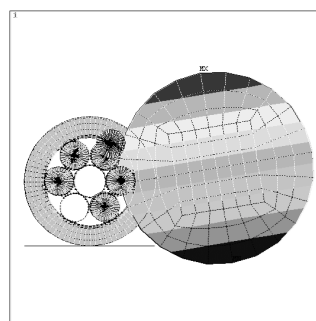


Figura 8. Convergência incorreta do modelo computacional plano

A figura 8 representa uma convergência incorreta do modelo, obtida com a mudança nas constantes características do elemento de contato. O resultado encontrado nem sequer pode ser interpretado fisicamente.

O modelo em estudo pode representar melhor o cabo óptico quando incorporar o tubo de proteção real (incluindo os elementos finitos que modelam o gel e as fibras ópticas).

Em seguida, com a finalidade de considerar a reunião helicoidal dos tubos de proteção em torno do elemento central, criou-se um modelo sólido tridimensional. Nesta etapa, com vistas a reduzir o custo computacional, foram utilizados alguns conceitos desenvolvidos na análise no estado plano de deformações (tubo equivalente).

3.2. Análise tridimensional do cabo óptico

A partir da seção transversal do cabo analisada no item 3.1, o cabo foi modelado geometricamente para um passo da helicóide (Huang, 1994) de 100 mm. Cada incremento na direção longitudinal (dz no sistema cilíndrico de coordenadas) do cabo foi gerado de tal modo que os incrementos na rotação ($d\theta$) perfizessem um passo completo ao final dos 100 mm. As

demais dimensões de cada componente foram usadas de acordo com dados de projeto do cabo. A figura 9 representa o sistema cilíndrico de coordenadas e a figura 10, um incremento longitudinal dz da modelagem espacial do cabo óptico.

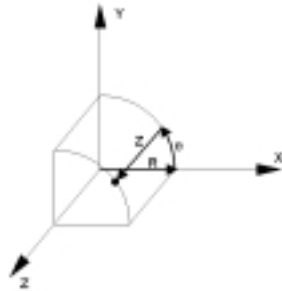


Figura 9. Sistema cilíndrico de coordenadas empregado na modelagem espacial do cabo

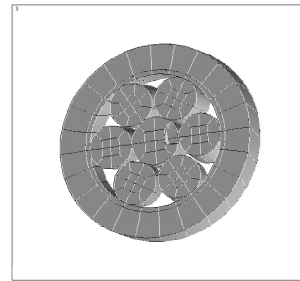


Figura 10. Incremento longitudinal (dz) na seção transversal do cabo óptico

Na etapa de implementação da geometria do problema tridimensional já se verifica uma necessidade de se trabalhar com equipamentos de grande poder computacional. A versão 5.3 do Ansys gera um arquivo de 276 MB para representar o modelo geométrico do cabo. Tal modelo encontra-se na figura 11.

Para obtenção de resultados (deformação do cabo óptico), este modelo é muito caro computacionalmente. Nesta etapa, optou-se por uma malha de elementos finitos menos refinada (figura 13), com elementos estruturais lineares tridimensionais SOLID45 (paralelepípedo de 8 nós, com 3 graus de liberdade em cada nó – translação nas direções x, y e z) em um quarto do passo da hélice de reunião.

A solução do problema tridimensional depende, assim como no estado plano de deformações, das constantes de rigidez normal e tangencial do elemento de contato, no caso, CONTAC49 (figura 12) . É oportuno salientar que estas constantes são diferentes daquelas utilizadas no modelo em estado plano.

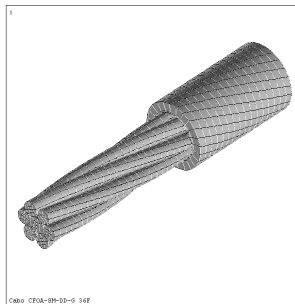


Figura 11. Modelo tridimensional do cabo óptico

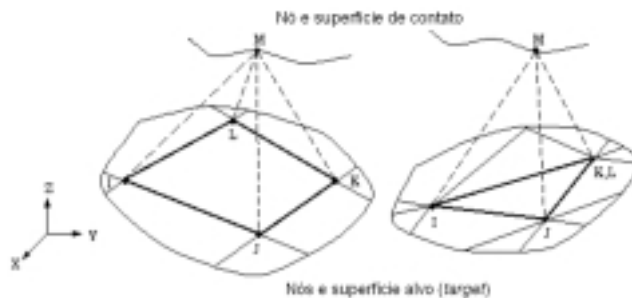


Figura 12. Elemento de contato tridimensional (CONTAC49)

Assim como no modelo plano, o algoritmo do elemento de contato tridimensional procura a posição de equilíbrio entre duas superfícies, mas o custo computacional é maior. Isto porque o elemento finito CONTAC49 requer que os elementos estruturais que modelam as superfícies, de contato e alvo, sejam lineares. Estes elementos, por sua vez, exigem uma malha de elementos finitos estruturais refinada o suficiente para garantir a precisão da solução

do problema, o que aumenta consideravelmente o tamanho dos sistemas de equações e arquivos de dados manipulados.

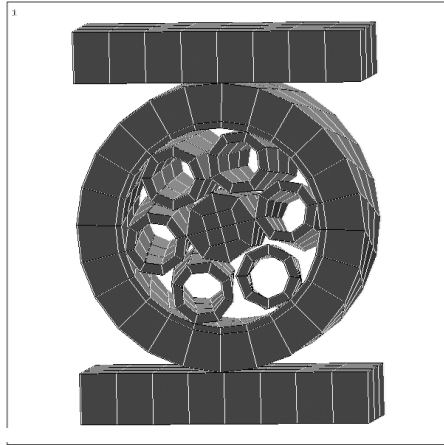


Figura 13
Modelo tridimensional
da estrutura do cabo óptico

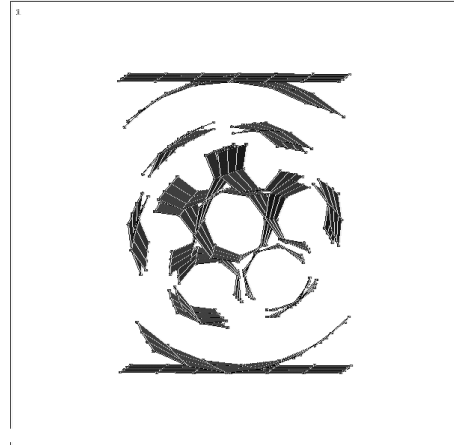


Figura 14
Elementos de contato
empregados no modelo

A tabela 1 relaciona os valores adotados nos modelos computacionais para módulos de elasticidade e coeficiente de Poisson para os materiais que entram em contato

Tabela 1. Caracterização dos materiais empregada no modelo tridimensional

Elemento estrutural	Módulo de elasticidade ($E=N/mm^2$)	Coefficiente de Poisson (ν)
Capa	681	0.3
Aramida	50	0.1
Tubo de proteção	758	0.3
Elemento central	53.700	0.3

4. RESULTADOS

Os resultados (deformação do cabo óptico) obtidos com o modelo tridimensional podem ser considerados satisfatórios, uma vez que representam qualitativamente bem o comportamento do cabo óptico. Além disto, o modelo computacional criado serve como parâmetro de comparação entre o comportamento do cabo atualmente construído e novos projetos de cabos (com variações na geometria e nos materiais).

Melhores resultados quantitativos dependem, entretanto, de alguns fatores: a geração de uma malha mais refinada no interior do cabo (na modelagem dos tubos de proteção e do elemento estrutural central); a consideração da ortotropia do componente estrutural de tração; a incorporação do gel e das fibras óticas no interior do tubo de proteção e a consideração das não-linearidades geométricas e de materiais.

No momento, novos estudos estão sendo realizados com outros elementos de contato da versão 5.5 do software Ansys®, que admitem elementos estruturais quadráticos na modelagem das superfícies de contato.

O modelo ilustrado na figura 13 foi submetido a diversas cargas de compressão diametral e suas respectivas deformações foram comparadas com ensaios realizados no cabo óptico. A figura 15 representa a situação deformada do cabo óptico após a aplicação de uma carga de

500 N. Observar que alguns tubos de proteção sofrem um esmagamento maior do que outros e que a camada de aramida é mais deformável, já que ela não tem rigidez na direção radial.

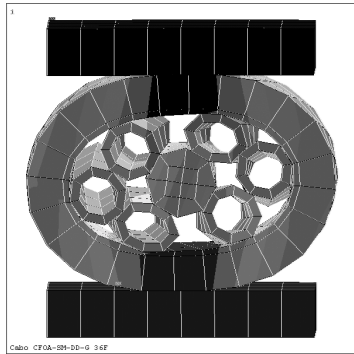


Figura 15.

Estrutura do cabo óptico deformada

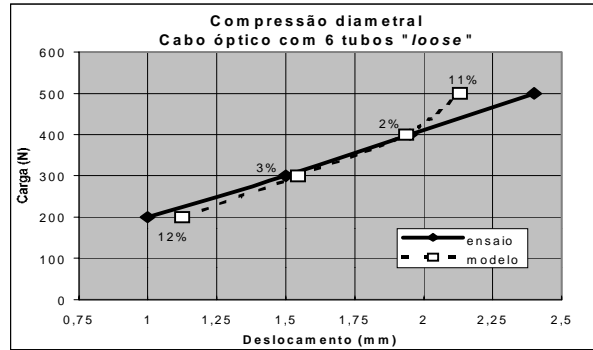


Figura 16.

Gráfico comparativo dos deslocamentos verticais máximos sofridos pelo cabo óptico

A tabela 1 e o gráfico da figura 16 comparam os valores de deslocamento radial máximo sofrido pela estrutura do cabo óptico. Tal deslocamento é sofrido pelo nó superior da capa do cabo, na posição onde sofre a aplicação do carregamento de compressão diametral.

Os valores numéricos obtidos com o modelo computacional estão no entorno dos valores obtidos nos ensaios de laboratório. O erro percentual encontra-se aceitável (na ordem de 3%) nas cargas de trabalho às quais o cabo óptico é submetido. Entretanto, observa-se o ganho de rigidez do modelo computacional (em relação ao ensaio) com o aumento da carga aplicada. Para amenizar este efeito, deve-se incorporar as sofisticções ao modelo computacional (tais como não-linearidade geométrica e de material, ortotropia do componente estrutural de tração, refino da malha de elementos finitos no interior do cabo e inclusão do gel e fibras ópticas no interior dos tubos de proteção).

Tabela 2. Deslocamentos verticais do cabo óptico

Carga (N)	Deslocamento (mm)				
	1dz	2dz	3dz	4dz	5dz
200	1,191	1,163	1,124	1,066	1,029
300	1,672	1,595	1,544		1,405
400		1,909	1,935		
500			2,130		

Os valores empregados no gráfico da figura 16 são referentes ao modelo computacional com 3 incrementos longitudinais dz.

5. CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

O Método dos Elementos Finitos empregado em problemas de contato mostrou-se bastante apropriado para modelar a estrutura do cabo óptico proposto neste trabalho. Tem-se exatamente a situação de restrição à penetração de um componente estrutural no outro, mas com a liberdade de escorregar quando em contato.

Tendo em vista a complexidade da estrutura do cabo óptico, tanto geométrica quanto dos materiais que a compõem, a maior dificuldade em um trabalho desta natureza é a determinação das constantes características do problema de contato.

Os resultados obtidos representam qualitativamente bem o comportamento do cabo óptico. Uma melhor representação quantitativa deverá ser obtida com a elaboração de modelos mais completos. O elemento estrutural de tração (material fibroso aderente à capa do cabo óptico) deverá ser considerada como material ortotrópico, com suas diferentes rijezas (direção radial e direção longitudinal) sendo caracterizadas corretamente. Os materiais que compõem a capa do cabo óptico e o tubo de proteção das fibras ópticas devem ser caracterizados considerando o fato de que eles não têm um comportamento linear, a partir de curvas tensão x deformação que os caracterizem.

Além do aperfeiçoamento do modelo estrutural, os componentes do interior do tubo de proteção, gel e fibras ópticas (Tormena, 1999), devem ser incluídos. Este último aperfeiçoamento do modelo computacional permitirá a avaliação dos efeitos do carregamento externo aplicado ao cabo óptico sobre a fibra óptica.

Uma vez aprimorado o modelo computacional do cabo óptico, uma etapa seguinte do trabalho, prevê a aplicação de um carregamento de variação de temperatura ao mesmo, que é um problema que também afeta a sua capacidade de transmissão de dados.

6. AGRADECIMENTOS

À Furukawa Industrial S.A. Produtos Elétricos pela colaboração técnico-financeira no desenvolvimento do trabalho.

7. REFERÊNCIAS

- Ansys User's Manual for Revision 5.4, 1997, Swanson Analysis System.
- Björklund, S. e Sören, A., 1994, "A Numerical Method for Elastic Contacts Subjects to Normal and Tangencial Loading", *Wear*, 179, 117-122.
- Johnson, K.L., 1987, "Contact Mechanics". Cambridge : Cambridge University Press..
- Gupta , P. K e Walowit, J. A., 1974, "Contact Stresses between an Elastic Cylinder and a Layered Elastic Solid" , *ASME Journal of Lubrification Tecnology*, 250-257.
- Horska, J., 1994, "Design of Loose Tube Fiber Optic Cable with Adjusted Contraction and Strain Windows". *International Wire & Cable Symposium*, 50-58.
- Huang, X. and Vinogradov, O., 1994, "Analysys of Dry Friction Hysteresis in a Cable under Uniform Bending", *Structural Engineering and Mechanics*, 63-80.
- Keiser, G., 1991, "Optical Fiber Communications", McGraw-Hill.
- Tormena, F. V. et ali., 1999, "Modelagem Computacional Bidimensional de Cabos Ópticos Utilizando o Método dos Elementos Finitos.", *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR., Brasil, 90p.*
- Vasconcellos, C. A. M. et ali, 1999, "Modelagem Computacional Tridimensional da Estrutura de um Cabo de Fibras Ópticas Utilizando o Método dos Elementos Finitos". *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR., Brasil, 58p.*

ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL DE EIXOS DE BOMBAS DE PISTÕES AXIAIS TIPO SWASHPLATE – COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DE SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Mauro Hugo Mathias

Fernando de Azevedo Silva

Universidade Estadual Paulista – UNESP, Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Departamento de Mecânica, CP 205, 12.500-000, Guaratinguetá, SP. E-mail: mathias@feg.unesp.br e fazevedo@feg.unesp.br.

Resumo

Neste trabalho a análise modal de um eixo rotativo, desenvolvida com um modelo paramétrico de identificação baseado em dados experimentais, é comparada com os resultados de simulação numérica obtidos através do método dos elementos finitos. A análise por elementos finitos foi implementada utilizando o *software* comercial ANSYS, de modo a validar o procedimento de identificação dos parâmetros modais.

Palavras-chave: Análise modal experimental, identificação, parâmetros modais, elementos finitos.

1. INTRODUÇÃO

Afim de prever precisamente o desempenho dinâmico de estruturas e máquinas flexíveis torna-se necessário obterem-se modelos analíticos com um alto grau de precisão. Devido à própria complexidade destas estruturas, uma técnica comum de modelagem é obtida usando o método dos elementos finitos. Contudo, é fato conhecido que essa metodologia é passível de erros (Cook, 1974).

Por outro lado, a utilização efetiva de métodos numéricos para análise de problemas físicos reais sem solução analítica conhecida, implica na validação dos resultados computacionais através, por exemplo, da comparação com resultados de medições experimentais. A utilização de análise experimental permite também obter informações complementares do sistema estudado, de modo a melhorar o modelo teórico, como por exemplo, inferir sobre valores de amortecimento estrutural.

Desta forma, a proposta deste trabalho é comparar os resultados da análise modal de um eixo rotativo, que faz parte de uma bomba de pistões axiais tipo *swasplate* para fluido óleo-hidráulico. A análise foi desenvolvida através de duas diferentes metodologias: experimental e simulação numérica, de forma a validar o procedimento de identificação dos parâmetros modais.

Inicialmente, foi utilizado o *software* comercial de elementos finitos, ANSYS, para realizar as simulações numéricas do comportamento do eixo à vibração. Em seguida, foram utilizadas técnicas experimentais, onde o eixo foi ensaiado e os respectivos parâmetros modais foram determinados por análise modal no domínio do tempo. Nesta etapa foram utilizados diferentes mecanismos de excitação: martelo de impacto instrumentado e excitador de vibrações. A coleta e tratamento dos dados no procedimento experimental foi desenvolvida com auxílio dos *softwares* SISDIN e AQDADOS da LYNX.

2. ANÁLISE MODAL TEÓRICA

Análise modal é fundamentada no fato de que o comportamento dinâmico de um sistema linear pode ser descrito como uma composição de movimentos independentes, que possuem, cada um, uma forma de deformação única. Estes movimentos independentes são definidos como modos de vibração. Os modos de vibração são caracterizados pelos parâmetros modais: frequência natural, amortecimento modal e forma modal.

Assim, a análise modal determina as propriedades dinâmicas de uma estrutura mecânica através da identificação de seus modos de vibração. As propriedades inferidas através da análise modal, podem ser utilizadas para prever ou controlar a performance dinâmica da estrutura (Ewins, 1992 & Meirovitch, 1986).

O procedimento de análise modal elaborado via elementos finitos, abrange as seguintes etapas gerais: construção do modelo geométrico, geração do modelo discreto, aplicação das condições de contorno (cargas e restrições), expansão dos modos, obtenção da solução e revisão dos resultados.

Como um dos interesses desta análise foi o de visualizar as configurações deformadas do eixo, foi construído um modelo tridimensional da estrutura inteira sem a utilização de planos de simetria, no cálculo da resposta estrutural.

O material utilizado para a confecção do eixo é o aço SAE 4140, sendo este um aço de média temperabilidade e com boas propriedades mecânicas.

Para a geração da malha de elementos finitos foi utilizado o elemento SOLID 72. Este elemento é definido por 4 nós, possuindo 6 graus de liberdade em cada um dos nós: rotações em torno das direções X, Y, Z, e translações nas direções X, Y e Z.

A figura 1 apresenta o modelo global do eixo com a malha de elementos finitos, sendo constituída por 12.681 elementos e 2.771 nós.

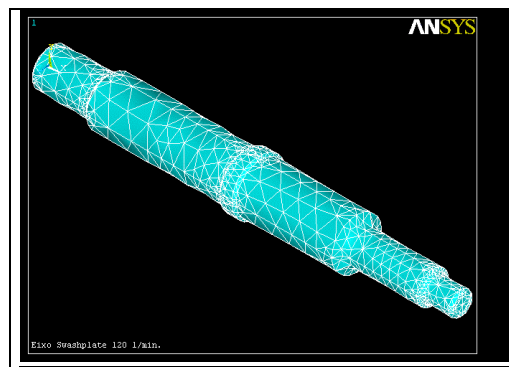


Figura 1. Malha de elementos finitos do eixo rotativo.

2.1. Resultados de Simulação Numérica por Elementos Finitos

As quatro primeiras frequências naturais obtidas são apresentadas na tabela 1. Na figura 2 são ilustradas as formas modais correspondentes ao 2º modos de vibração e 3º modo de vibração respectivamente. Ressalta-se que em vista da maior complexidade do modelo podem aparecer frequências que não são verificadas no procedimento experimental.

Tabela 1. Valores das 4 primeiras frequências estimadas do modelo de elementos finitos.

Modo	Frequência (Hz)
1 ^o	1.822,3
2 ^o	1.826,7
3 ^o	3.808,9
4 ^o	3.891,6

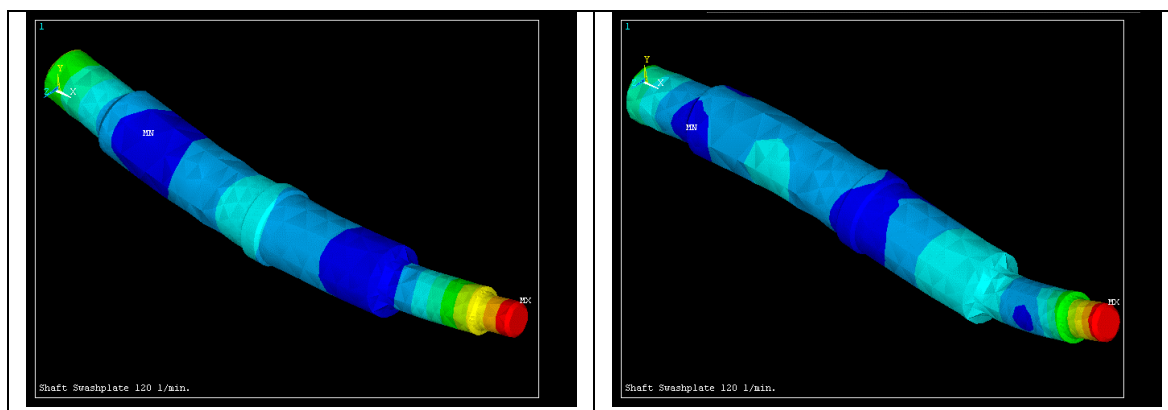


Figura 2. 2^a e 3^a formas modais do eixo.

3. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

No desenvolvimento do procedimento experimental, um eixo de uma bomba axial tipo *swashplate* foi confeccionado com o objetivo de realizar um ensaio de análise modal. Com os dados do ensaio a identificação dos parâmetros modais do sistema foi realizada através de um modelo paramétrico do domínio do tempo. Da identificação as frequências naturais estimadas do modelo de elementos finitos foram validadas e os fatores de amortecimento da estrutura foram também estimados. O ensaio foi desenvolvido com a estrutura presa por elementos elásticos conforme ilustra a figura 3-(a). O procedimento experimental consistiu em aplicar impactos em diferentes pontos da estrutura e coletar os sinais de aceleração em um dado ponto de referência. Este procedimento foi baseado em uma análise univariada (modelo SISO). Os sinais foram medidos ao longo de uma única direção. A componente de excitação foi aplicada ao sistema através de um martelo de análise modal, imprimindo-se impactos em oito pontos dispostos de forma equidistantes ao longo do eixo. O aparato instrumental indicado na figura 3-(b) consistiu de um martelo, acelerômetro, condicionadores de sinais, filtros analógicos e sistema de aquisição de dados. O sistema de aquisição de dados resume-se a uma placa analógica digital, um *software* de aquisição e um microcomputador.

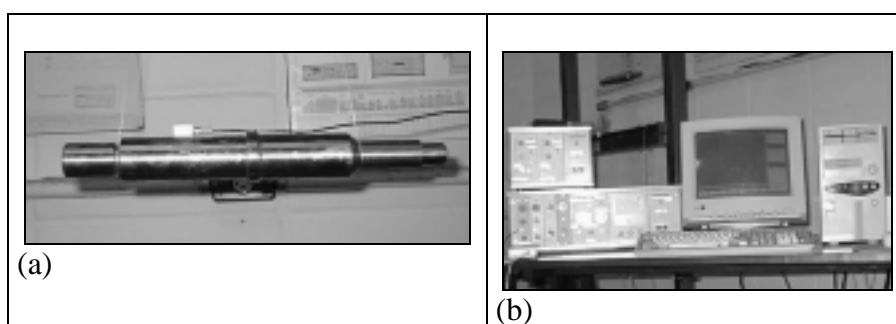


Figura 3. (a) Eixo ensaiado; (b) Aparato experimental.

A aquisição dos sinais foi efetuada na frequência de amostragem de 10.000 Hz de modo estabelecer a faixa de análise de 0 a 5.000 Hz. As saídas dos sinais dos condicionadores foram filtrados com filtros analógicos do tipo passa-baixa ajustado na frequência de 5.000 Hz. A análise dos sinais foi processada com programas desenvolvidos no ambiente do Matlab, tomando-se os dados de entrada e saída referentes as oitos estações de medida. Na figura 4 é ilustrado uma função de transferência do sistema correspondente a resposta no ponto de referência 3 a um impacto aplicado no ponto 2.

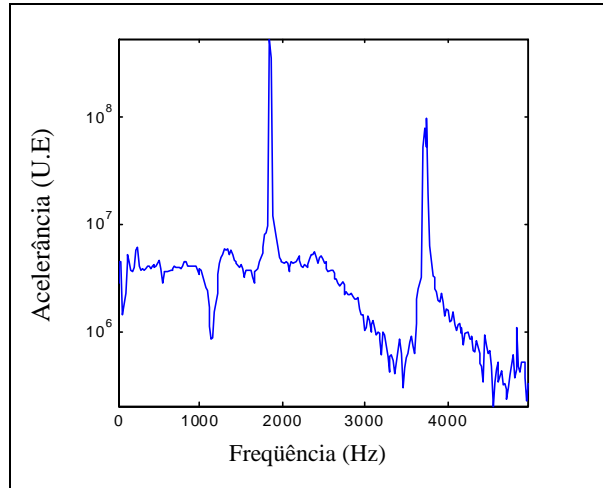


Figura 4. Função de transferência H32.

4. PROCEDIMENTO DE IDENTIFICAÇÃO

A identificação experimental foi implementada com um modelo paramétrico do domínio do tempo. De início foi adotado o modelo autoregressivo de médias móveis com entrada exógena (ARMAX), no entanto como os resultados obtidos com o modelo autoregressivo com entrada exógena (ARX) foram equivalentes, optou-se pelo último. A justificativa da escolha do modelo ARX foi motivada pela sua simplicidade de implementação com relação aos aspectos numéricos e estimação da ordem do modelo. Os modelos ARX com diferentes ordens foram ajustados a partir dos dados de força e aceleração obtidos nos diferentes pontos de medida no eixo. Os dados experimentais foram ajustados pela seguinte equação de diferenças que descreve um processo ARX:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{p-2n} \alpha_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{r-2n-1} \gamma_i f(k-i) + e(k) \quad (1)$$

onde p e r correspondem a ordem dos processos autoregressivo (AR) e exógeno, os escalares α_i ($i = 1 \dots p$) representam os coeficientes AR que ponderam a influência de valores prévios de uma série temporal discreta $\{y(k)\}$ no valor presente $y(k)$, γ_i ($i = 1 \dots r$) são coeficientes associados a uma componente determinística de excitação e $e(k)$ componente relacionado com o erros de ajuste (Skullestad, 1996). Dos coeficientes AR um polinômio de grau da mesma ordem do processo AR é construído. As raízes do polinômio guardam informações relativas aos parâmetros modais, frequência e fator de amortecimento, bem como informações de modos computacionais que aparecem em decorrência da ordem do modelo ser mais elevada do que a ordem verdadeira do processo em questão. O recurso do ajuste de ordens mais elevadas justifica-se em razão dos efeitos de ruídos presentes nos sinais e de aspectos relacionados a precisão dos estimadores numéricos. Assim o aspecto fundamental no processo de estimação é a busca de critérios de ajuste de ordem de modelo que estabeleça estimação de

parâmetros precisa, bem como critérios que possibilitem distinguir os parâmetros que guardam a informação da dinâmica do sistema daqueles relacionados com os modos computacionais (Hollkamp *et al.*, 1992). Reforçando o conceito enfatiza-se que a idéia básica na determinação da ordem é estabelecer a ordem que forneça parâmetros mais precisos ao invés de identificar a verdadeira ordem do modelo. Na literatura são propostos diferentes critérios de ajuste da ordem de modelos, tais como os critérios FPE, AIC, MDL, etc. (Ljung, 1987 & Young, 1976). Estes critérios baseiam-se essencialmente na minimização de um funcional descrito a partir do erro quadrático de ajuste. Os aspectos importantes na busca da identificação satisfatória é levar em consideração que a identificação apropriada do modelo depende da relação associada entre o tipo de excitação a estrutura do modelo de ajuste e a relação de transformação dos parâmetros discretos da equação de diferenças com os pólos relacionadas ao domínio contínuo no tempo da transformada de Laplace (Broersen, 1988 & Fassois *et al.*, 1990). No presente trabalho optou-se pelo critério MDL (*Maximum Description Length*) para o ajuste da ordem do modelo ARX.

Considerando todos os relevantes aspectos acima o procedimento de identificação adotado neste trabalho resume-se nos seguintes passos:

1. Leitura dos dados de entrada e saída do sistema;
2. Ajuste do modelo ARX de diferentes ordens e definição da ordem com o critério MDL;
3. Avaliação de modelos concorrentes de modo a avaliar a precisão dos parâmetros;
4. Obtenção do polinômio característico com base nos coeficientes AR;
5. Obtenção dos pólos do modelo e separação dos modos computacionais e modos físicos;
6. Estimação das frequências e fatores de amortecimento do sistema.

4.1. Resultados

Os resultados foram avaliados para cada conjunto de dados de entrada e saída nas oito estações de medidas definidas no eixo. Na faixa de frequência estudada foi identificado três modos. O que se observou é que em todos os pontos a convergência dos parâmetros modais relativa ao primeiro modo foi bastante satisfatória. Já para o segundo e terceiro modos a convergência dos parâmetros relativa ao conjunto de dados ficou prejudicada nos extremos do eixo. Mas com os dados obtidos nos outros pontos pode-se validar o modelo, bem como utilizá-los como referência para a busca de modelos concorrentes que estabeleçam resultados mais precisos. Este procedimento é justificado em razão dos critérios de ordem não estabelecer efetivamente a ordem ideal. Visto que determinada base de dados pode até não ser caracterizada pelo modelo escolhido, requerendo assim modelos mais robustos. No caso em estudo não foi necessário este recurso, no entanto o que se adotou foi um refinamento da ordem do modelo. O critério utilizado para definir os parâmetros físicos do sistema foi através da análise do módulo do fator de amortecimento e pela repetibilidade das componentes (Mathias, 1998). Na tabela 2 são apresentados alguns resultados referentes a identificação de parâmetros com três conjuntos de dados, relacionados a estação de referência 3 e aos pontos de impactos 1, 3 e 4. As frequências estimadas através do modelo ARX são destacadas em negrito na tabela.

Tabela 2. Resultados preliminares da identificação.

H31		H33		H34	
f(Hz)	ζ	f(Hz)	ζ	f(Hz)	ζ
1,0	100,0	2,2	100,0	4,4	100,0
341,7	71,4	222,50	48,5	230,1	41,3
999,1	4,4	666,90	23,2	658,1	24,3
1.536,6	25,8	1.002,6	2,0	1.004,1	11,0
		1.416,2	5,2	1.448,3	7,9
1.836,0	$1,3 \times 10^{-2}$	1.836,0	$1,3 \times 10^{-2}$	1.836,0	$1,2 \times 10^{-2}$
2.451,8	4,9	2.181,1	6,2	2.236,2	5,6
2.965,4	4,9	2.549,7	6,9	2.516,4	75,3
		2.774,8	6,8	2.634,3	6,0
		3.181,0	3,0	3.033,7	7,1
				3.091,4	9,1
3.703,8	$7,1 \times 10^{-2}$	3.706,6	$2,1 \times 10^{-1}$	3.708,5	$1,9 \times 10^{-1}$
3.744,7	$7,3 \times 10^{-2}$	3.745,1	$6,7 \times 10^{-2}$	3.745,0	$7,0 \times 10^{-2}$
4.493,8	3,0	4.287,6	2,3	4.314,7	2,2
		4.635,1	2,5	4.677,1	3,2

Observa-se dos dados relativo a função de transferência H31 que certa discrepância aparece no fator de amortecimento do modo de frequência 3.703, 8 Hz. Embora em menor grau este problema foi também verificado no terceiro modo na análise de outros conjuntos de dados. A validação dos parâmetros foi efetuada utilizando quatro amostras de sinais para cada ponto de medida. Problema semelhante foi observado no outro extremo da barra (ponto 8). Os demais pontos apresentaram resultados satisfatórios não requerendo maior demanda de recursos numéricos para a análise. Outro aspecto que ficou evidente da análise é que a ordem do processo AR para os dados sempre apresentou valores elevados (acima de 20) e do processo exógeno foi baixa, aspecto que é característico de sinais determinísticos. Na tabela 3 são compilados os resultados da estimação dos parâmetros, frequência e fator de amortecimento, obtidos com os sinais medidos no ponto 3 quando excitado nos pontos 2 e 4, respectivamente. Os resultados correspondem a média da identificação de um conjunto de quatro amostras para cada estação de medida.

Tabela 3. Parâmetros modais identificados.

H32		H34	
f(Hz)	ζ	f(Hz)	ζ
1.835,9	$1,3 \times 10^{-2}$	1.836,2	$1,2 \times 10^{-2}$
3.706,8	$1,9 \times 10^{-1}$	3.707,6	$2,1 \times 10^{-1}$
3.744,8	$7,0 \times 10^{-2}$	3.745,2	$6,9 \times 10^{-2}$

Pela comparação percentual das frequências estimadas na tabela 3 com as do modelo de elementos finitos, conclui-se que na primeira frequência o erro foi da ordem de 1,0%, na segunda o erro foi da ordem de 2,7% e na terceira o erro foi de 3,0%.

5. CONCLUSÕES

Um método de identificação paramétrico aliado a um modelo de elementos finitos foi aplicado para estimar os parâmetros modais de um eixo de uma bomba *swashplate*. O método de identificação explorou a relação entre o modelo paramétrico discreto e o modelo contínuo no tempo derivado da formulação de Laplace.

É importante salientar que o objetivo principal deste trabalho foi de estabelecer subsídios ao projeto de uma bomba tipo *swashplate* que se encontra em desenvolvimento no Departamento de Mecânica da FEG – UNESP. O trabalho continua sendo complementado com a identificação dos modos de vibrar através da análise dos resíduos da função de transferência identificada.

6. REFERÊNCIAS

- Broersen, P. M. T., 1988, “A Comparison of Criteria for Autoregressive Order Selection. In: IFAC – Identification and System Parameter Estimation”, Beijing, pp. 27-31.
- Cook, R. D., 1974, “Concepts and Applications for Finite Element Analysis”, John Wiley & Sons.
- Ewins, D. J., 1992, “Modal Testing: Theory and Practice”, John Wiley & Sons Inc.
- Fassois, S. D., Eman, K. F., Wu, S. M., 1990, “Sensitivity Analysis of The Discrete-To-Continuous Dynamic System Transformation”, ASME- Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, v. 112, pp. 1-9.
- Hollkamp, J. J., Batil, S. M., 1992, “Structural Identification Using Order Overspecified Time-Series Models”, ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, v. 114, n.1, pp. 27-33.
- Ljung, L., 1987, “System Identification: Theory for The User”, New Jersey: Prentice-Hall Englewood Cliffs.
- Mathias, M. H., 1998, “Aplicação da Técnica Paramétrica ARMA de Processamento de Sinais na Caracterização de Estruturas Mecânicas”, Universidade Estadual de Campinas, Tese de Doutorado.
- Meirovitch, L., 1986, “Elements of Vibration Analysis”, Mc Graw-Hill Book Company.
- Skullestad, A., 1996, “Identification of Vibration Modes. In: A Spacecraft Using Nonparametric and Parametric Methods”, Modeling, Identification and Control, v. 17, n. 4, pp. 231-259.
- Young, P., 1976, “Some Observations on Instrumental Variable Methods of Time Series Analysis”, International Journal of Control, v. 23, pp. 593-612.

GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS PARA UM PROBLEMA DE PERTURBAÇÃO SINGULAR COM CAMADA LIMITE

Carlos Augusto de Souza¹

Dominique Leguillon²

Évariste Sanchez-Palencia²

¹Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, 70910-900 Brasília, DF, Brasil. E-mail: carlos@lion.enm.unb.br

²Laboratoire de Modélisation en Mécanique, Université Paris VI, 8, rue de Capitaine Scott, 75015, Paris, France.

Resumo

Este trabalho apresenta um problema elíptico bidimensional de perturbação singular, resolvido através do método de elementos finitos (MEF). A solução deste problemas apresenta as mesmas dificuldades encontradas no cálculo de problemas de equilíbrio de cascas elásticas delgadas. O objetivo é desenvolver ferramentas apropriadas para contornar as dificuldades associadas a camadas limite e interna que aparecem quando a espessura da casca tende a zero. O problema em estudo é uma função de um parâmetro $\varepsilon \geq 0$ que, quando lhe são atribuídos pequenos valores, provoca também o aparecimento destas camadas. Para que se consigam resultados satisfatórios para a solução do problema nas camadas, via MEF, necessita-se de uma malha refinada anisotrópica, que é obtida, neste trabalho, através de um processo adaptativo.

Palavras-chave: malha anisotrópica, perturbação singular, adaptatividade.

1. INTRODUÇÃO

Uma casca é simplesmente um corpo elástico cuja forma no seu estado natural não deformado é de pequena espessura $2e$ em relação à sua superfície S . Pode-se mesmo dizer que uma casca é uma superfície material de espessura $2e$. Exemplos familiares de aplicações de cascas são: painéis solares de satélites e outras estruturas espaciais, cascos de navios, revestimentos de aviões, torres de centrais nucleares, reservatórios, etc.

A estática e a dinâmica das cascas elásticas delgadas são atualmente relativamente mal conhecidas e apresentam problemas inesperados a um usuário desinformado. Existem algumas teorias (Goldenveizer (1962) e Niordson (1985)) que fornecem resultados relativamente satisfatórios para cascas de uma certa espessura, mas se tornam pouco confiáveis no caso de espessuras muito pequenas. Algumas catástrofes aconteceram nos últimos anos na construção de torres de resfriamento de centrais nucleares, como o caso de Ferry-Bridge no Reino Unido (Sanchez-Palencia (1995)), o que leva a crer que os métodos de cálculo ainda não são adequados.

Os problemas do cálculo de cascas elásticas delgadas foram expostos por Sanchez-Palencia (1995), que afirma que, para certos tipos de cascas com certas solicitações específicas, as teorias apontadas acima apresentam bons resultados. Mas, segundo o mesmo autor, na maioria dos casos aparecem fenômenos surpreendentes e inesperados no cálculo de estruturas feitas a partir de cascas delgadas.

De fato, as equações da teoria clássica de cascas contém dois termos correspondentes à energia de deformação: de membrana e de flexão. Os coeficientes correspondentes a estes

dois termos têm uma razão entre si de e^{-2} . Conseqüentemente, pode-se estudar o comportamento assintótico de uma casca delgada quando a espessura tende a zero (Sanchez-Palencia (1989)). Esta característica do problema tem se acentuado devido à tendência de otimização de todo tipo de estruturas, implicando na construção de estruturas cada vez mais delgadas, cujo cálculo necessita de códigos confiáveis mesmo em condições limites quando a relação entre a espessura e as outras dimensões da casca tende a zero.

Dois problemas são frequentemente encontrados ao se fazer o cálculo numérico de soluções de cascas elásticas delgadas. O primeiro é o travamento (*locking*) de membrana causado por uma certa incompatibilidade entre o subespaço dos deslocamentos inextensionais e o subespaço dos elementos finitos utilizados. Segundo Choi(1999), o travamento de membrana é uma deterioração da aproximação por elementos finitos quando a espessura tende a zero.

O segundo problema consiste no surgimento de fenômenos de falta de regularidade das soluções, que se manifestam através de camadas limites, camadas internas, propagação de singularidades e outras instabilidades, sendo conhecido por *sensibilidade*. A razão principal do surgimento destes fenômenos é que as equações de cascas têm como limite, quando a espessura tende a zero, equações que não são necessariamente elípticas, de modo que as soluções não apresentam propriedades de regularidade habituais aos problemas de elasticidade, que são do tipo elíptico. Uma descrição correta deste tipo de singularidade pode ser feita através de refinamentos da malha nas zonas onde elas aparecem. Desta forma, para se conseguir cálculos numéricos com precisão satisfatória torna-se necessário refinar a malha uniformemente, o que conduz, quando a espessura é muito pequena, a um número de graus de liberdade extremamente grande; ou a ter-se um conhecimento preciso do tipo de singularidade e de seu posicionamento em cada caso particular, o que é inviável nas aplicações práticas de cascas delgadas.

Segundo Sanchez-Palencia (1995) e Choi *et al.*(1998) é extremamente complicado o desenvolvimento e a implementação de um elemento finito para cascas que contorne estes dois problemas. Dentro deste contexto, numa primeira etapa é conveniente considerar-se o estudo de um problema similar com um grau de dificuldade reconhecidamente menor para que se possam desenvolver ferramentas que serão utilizadas posteriormente na implementação de um elemento finito para cascas delgadas dentro de um código clássico que possa gerar malhas adaptativas anisotrópicas.

Desta forma, o objeto de estudo deste trabalho é um problema elíptico bidimensional de perturbação singular que depende de um pequeno parâmetro $\varepsilon \geq 0$. São utilizadas forças (segundo membro) singulares (que não pertencem ao espaço dual de energia) colocando-se em evidência fenômenos de camada limite e camada interna de grande intensidade. Este problema é similar ao de soluções de cascas, cuja equação possui também um pequeno parâmetro que é a espessura da casca. Quando esta tende a zero surgem problemas análogos àqueles encontrados para o problema em estudo.

Um cálculo numérico confiável para valores pequenos de ε só é possível através de uma malha bastante fina nas camadas. Para se construir estas malhas é necessário utilizar-se um gerador de malhas adaptativas bidimensional. Devido à complexidade de construção de um código deste tipo, optou-se por utilizar o programa *BL2D* desenvolvido por Borouchaki e Laug (1995) que permite a construção de malhas bidimensionais isotrópicas ou anisotrópicas, com ou sem adaptação.

2. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Sejam $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ um domínio bidimensional, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de interesse, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ um campo de forças e $\mathbf{x} := (x, y)$ um ponto representativo qualquer

em Ω . O problema de perturbação singular em estudo é da forma:

$$\varepsilon^2 \Delta^2 u - c \Delta u = f, \quad \text{com } \varepsilon \geq 0, \quad (1)$$

$$f = -\delta'_{(x=1)} F(y), \quad (2)$$

onde Δu é o laplaciano de u , $\delta'_{(x=1)}$ é a derivada da distribuição de Dirac δ no ponto $x = 1$ e $F(y)$ é uma função qualquer que depende unicamente de y .

As condições de contorno são:

$$u = 0 \text{ em } x = 0, \quad u = 0 \text{ em } x = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ em } x = 0 \quad e \quad x = 1. \quad (3)$$

Levando-se em conta as condições de contorno utilizadas, a formulação variacional do problema é da forma:

$$a^\varepsilon(u, v) = b(v), \quad u \in V \quad e \quad \forall v \in V, \quad (4)$$

com:

$$a^\varepsilon(u, v) := \varepsilon^2 \int_{\Omega} \Delta u \Delta v d\mathbf{x} + c \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} \quad e \quad b(v) := \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}. \quad (5)$$

Esta forma de escrever é mais adequada à realidade física do problema: a forma bilinear $a^\varepsilon(u, v)$ representa o trabalho virtual das forças internas (associado à variação da energia de deformação do sistema) e a forma linear $b(v)$ representa o trabalho das forças exteriores para o deslocamento virtual v aplicado ao meio.

Os espaços apropriados V e V_a são definidos como:

$$V = \{v \in H^2(\Omega)\}, \quad \text{para } \varepsilon > 0 \quad e \quad V_a = \{v \in H^1(\Omega)\}, \quad \text{para } \varepsilon = 0. \quad (6)$$

Como forma linear $b(v)$ são aplicadas *forças* que estão no espaço dual de V , mas que não estão no espaço dual de V_a , isto é, $f \in V'$, mas $f \notin V'_a$.

Desta forma, observa-se que no problema limite, no qual $\varepsilon = 0$, há uma inconsistência devida à f . A consequência é que, para ε pequeno, aparecem fenômenos de camada limite e camada interna de grande intensidade. Problemas deste tipo foram considerados em dimensão 1 por Leguillon *et al.*(1999). Neste trabalho faz-se o estudo do mesmo problema considerando-se o caso bidimensional.

No cálculo das integrais utiliza-se o método da quadratura de Gauss. O elemento finito implementado é triangular com 3 graus de liberdade por nó (u e as derivadas parciais u_x e u_y). Este elemento é chamado de *triângulo de Hermite do tipo 3* (Kardestuncer (1987)).

Deseja-se fazer uma expansão cúbica de u . Disto surge uma dificuldade, pois para se fazer a expansão desejada utiliza-se um polinômio completo de terceiro grau contendo dez termos e tem-se apenas nove graus de liberdade. Para se resolver este problema foram utilizadas as funções de base encontradas em Zienkiewicz (1991), propostas por Specht (1988) que permitem escrever:

$$\begin{aligned} u = \mathbf{N}\boldsymbol{\alpha} = & [L_1, L_2, L_3, L_1L_2, L_2L_3, L_3L_1, \\ & L_1^2L_2 + 1/2L_1L_2L_3 \{3(1 - \mu_3)L_1 - (1 + 3\mu_3)L_2 + (1 + 3\mu_3)L_3\}, \\ & L_2^2L_3 + 1/2L_1L_2L_3 \{3(1 - \mu_1)L_2 - (1 + 3\mu_1)L_3 + (1 + 3\mu_1)L_1\}, \\ & L_3^2L_1 + 1/2L_1L_2L_3 \{3(1 - \mu_2)L_3 - (1 + 3\mu_2)L_1 + (1 + 3\mu_2)L_2\}] \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (7)$$

onde:

$$\mu_1 = \frac{l_3^2 - l_2^2}{l_1^2} \quad \mu_2 = \frac{l_1^2 - l_3^2}{l_2^2} \quad \mu_3 = \frac{l_2^2 - l_1^2}{l_3^2}, \quad (8)$$

e l_1, l_2, l_3 são os comprimentos das arestas do triângulo.

A forma linear $b(v)$ é da forma:

$$b(v) := \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}. \quad (9)$$

A função f utilizada é da forma:

$$f = -\delta'_{(x=1)} F(y), \quad (10)$$

onde $\delta'_{(x=1)}$ é a derivada da distribuição de Dirac δ no ponto $x = 1$ e $F(y)$ é uma função qualquer que depende unicamente de y .

Com este tipo de força $F(y)$, utiliza-se a antisimetria do problema em torno de $x = 1$ e acrescenta-se a independência da solução em relação a y para comparar-se a solução deste problema com a solução unidimensional apresentada por Leguillon *et al.* (1999).

Com este segundo membro a camada limite encontra-se próxima da reta $x = 1$ para valores pequenos de ε . Para ser utilizado nos códigos clássicos de elementos finitos este tipo de segundo membro *não padrão* necessita de uma reprogramação.

O elemento finito implementado foi acrescentado ao *Module f*, uma biblioteca de programas destinada à resolução de problemas quaisquer através do método dos elementos finitos, desenvolvida na França pela equipe do *INRIA - Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique*.

3. RESULTADOS PRELIMINARES

O problema teste é definido em um domínio bidimensional com $x \in [0; 1]$ e $y \in [0; 1]$, segundo a Figura 1.

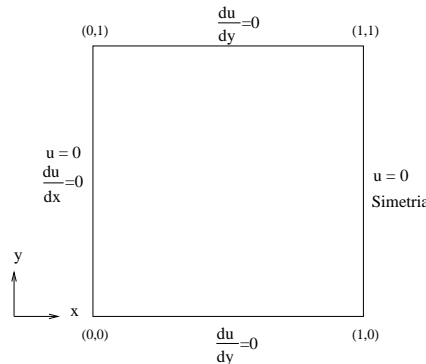


Figura 1. Problema teste com condições de contorno

O segundo membro é uma função do tipo $f = -\delta'_{(x=1)} F(y)$ com $F(y) = -0.5$. Com a escolha desta função, a solução do problema é independente de y e pode ser comparada com a solução do problema unidimensional. Afim de comparar os resultados, utiliza-se o código *delta2* (que foi desenvolvido por Dominique Leguillon), o qual resolve o mesmo problema na sua forma 1D. A malha unidimensional usada nos teste é sempre regular, ou seja, todos os elementos possuem o mesmo tamanho.

Todos os cálculos da validação foram feitos em um computador pessoal com sistema operacional Linux Red Hat 6.0, equipado com processador Pentium II de 300 Mhz e 64Mb

de memória RAM. Para os dois testes preliminares o valor da constante c é igual a 1, e varia-se o valor de ε . No primeiro teste tem-se $\varepsilon = 0.1$ e no segundo teste $\varepsilon = 0.01$.

Para a construção das malhas utiliza-se a rotina **apnoxx** do *Modulef*. Para cada tipo de malha são feitos vários refinamentos, através de divisões sucessivas das arestas do domínio. A variável M é o número de nós sobre cada aresta do domínio. Para fazer-se a comparação entre os casos unidimensional e bidimensional o domínio Ω é cortado por uma reta de equação $y = 0.5$ e é mostrada, a curva de u em função de x para esta reta.

Para o primeiro teste, com $\varepsilon = 0.1$, a Figura 2 apresenta a malha mais refinada (com $M = 45$) e o gráfico de convergência para o valor máximo da função u (u_{max}), normalizado em relação ao valor máximo obtido para o problema unidimensional, sobre a reta $y = 0.5$.

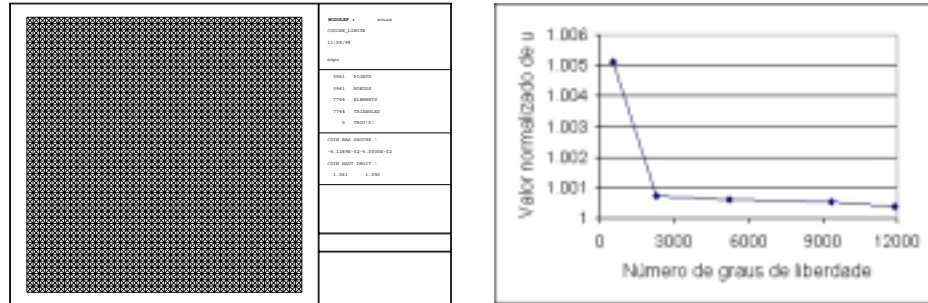


Figura 2. a) Malha regular com $M = 45$ b) Convergência de u_{max} em $y = 0.5$

A Figura 3 mostra a curva de $u(x)$ em $y = 0.5$ para o modelo unidimensional e para o modelo bidimensional. Destas duas figuras observa-se que a convergência é muito boa. Para este valor de ε não há uma camada limite definida, e a curva de u é suave.

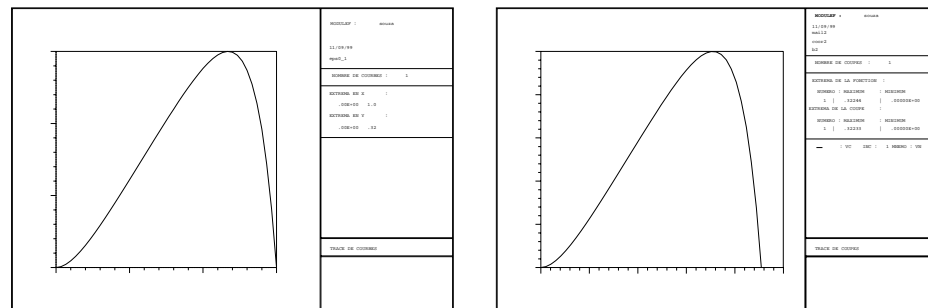


Figura 3. Teste 1 - a) Resultado unidimensional b) Resultado bidimensional

Apresentam-se agora os resultados do teste com $\varepsilon = 0.01$. A Figura 4 mostra o gráfico de convergência para o valor máximo de $u(x)$ e os isovalores de u .

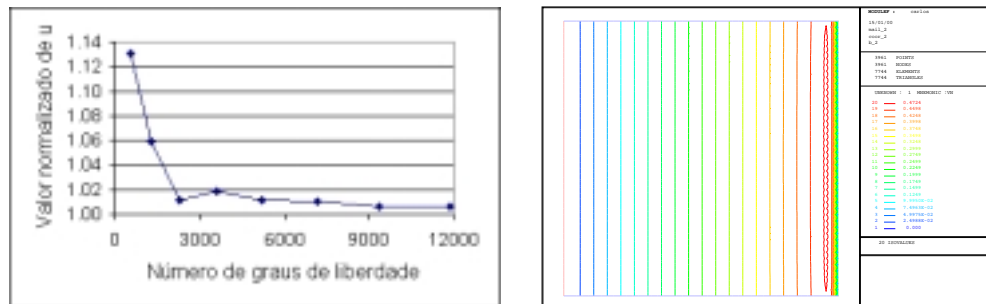


Figura 4. a) Convergência de u_{max} em $y = 0.5$ b) Isovalores de u com $\varepsilon = 0.01$

Observa-se que, apesar de ter-se uma boa convergência para u_{max} , o gráfico de isovalores apresenta oscilações na extremidade direita. Esta é a região de camada limite, que esperava-se aparecer para pequenos valores de ε . A Figura 5 mostra a curva de $u(x)$ em $y = 0.5$ e comprova a grande variação do gradiente de u nesta região.

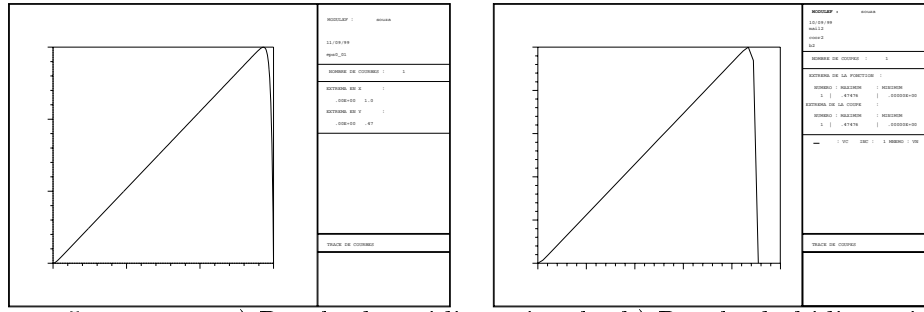


Figura 5. Teste 2 - a) Resultado unidimensional b) Resultado bidimensional

Constrói-se uma nova malha, refinada na região da camada limite. A Figura 6 apresenta esta malha e os isovalores de u obtidos com ela.

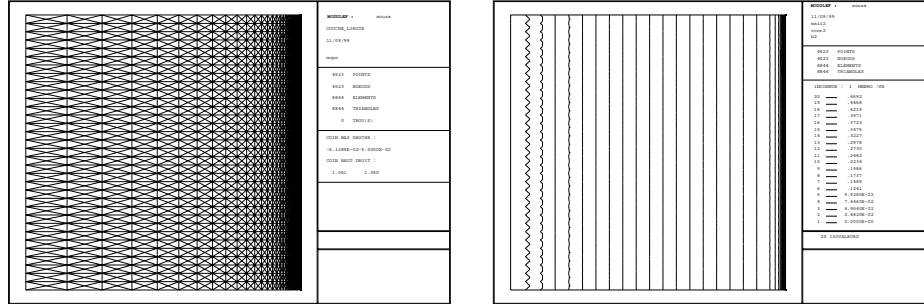


Figura 6. Teste 2 - a) Malha refinada à direita b) Isovalores de u

Observa-se que, com esta malha refinada à direita, resolve-se o problema de oscilações nesta região. Entretanto, observa-se que na parte esquerda do domínio aparecem novas oscilações. A partir destas constatações, procura-se implementar um procedimento de geração automática de malhas para este problema, de modo a refinar a malha nos locais onde há grande variação no gradiente da função u .

O programa escolhido para se gerar as malhas automaticamente é o *BL2D*, um gerador de malhas adaptativas bidimensional, desenvolvido por Borouchaki e Laug (1995). O processo adaptativo consiste em:

- construir uma malha inicial com o *BL2D*
- calcular a solução correspondente com o *Module f*
- utilizar um estimador de erro
- decidir pela adequação ou não da malha atual:
 - se a malha atual é estável e fornece bons resultados, fim;
 - senão, traduzir os resultados do estimador de erro em uma *carta de especificações* ou *carta de métricas* que permitirá a construção de uma nova malha adaptada e depois iterar o processo.

4. RESULTADOS COM GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS

Para que se possa comparar melhor os resultados, dois pontos P e Q , cujas coordenadas são $P := (0.955, 0.5)$ e $Q := (0.05, 0.5)$, são fixados na malha. Os valores de u nestes pontos são calculados em todas as iterações e o gráfico da Figura 7 apresenta a convergência do valor de u . Os valores são normalizados em relação à solução do problema unidimensional.

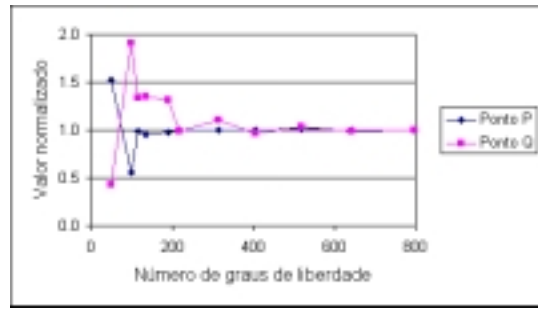


Figura 7. Convergência do processo iterativo

Da Figura 7 observa-se que a convergência é muito boa e tem-se para o ponto P bons resultados para malhas com apenas 300 graus de liberdade (100 nós), enquanto que, para as malhas regulares do teste anterior são necessários 4523 nós com a malha refinada à direita. Para o ponto Q , a convergência é um pouco mais lenta, com bons resultados apenas para malhas com mais de 400 graus de liberdade. A Figura 8 apresenta as malhas para as iterações 0, 5 e 10 e os isovalores de u de cada uma delas.

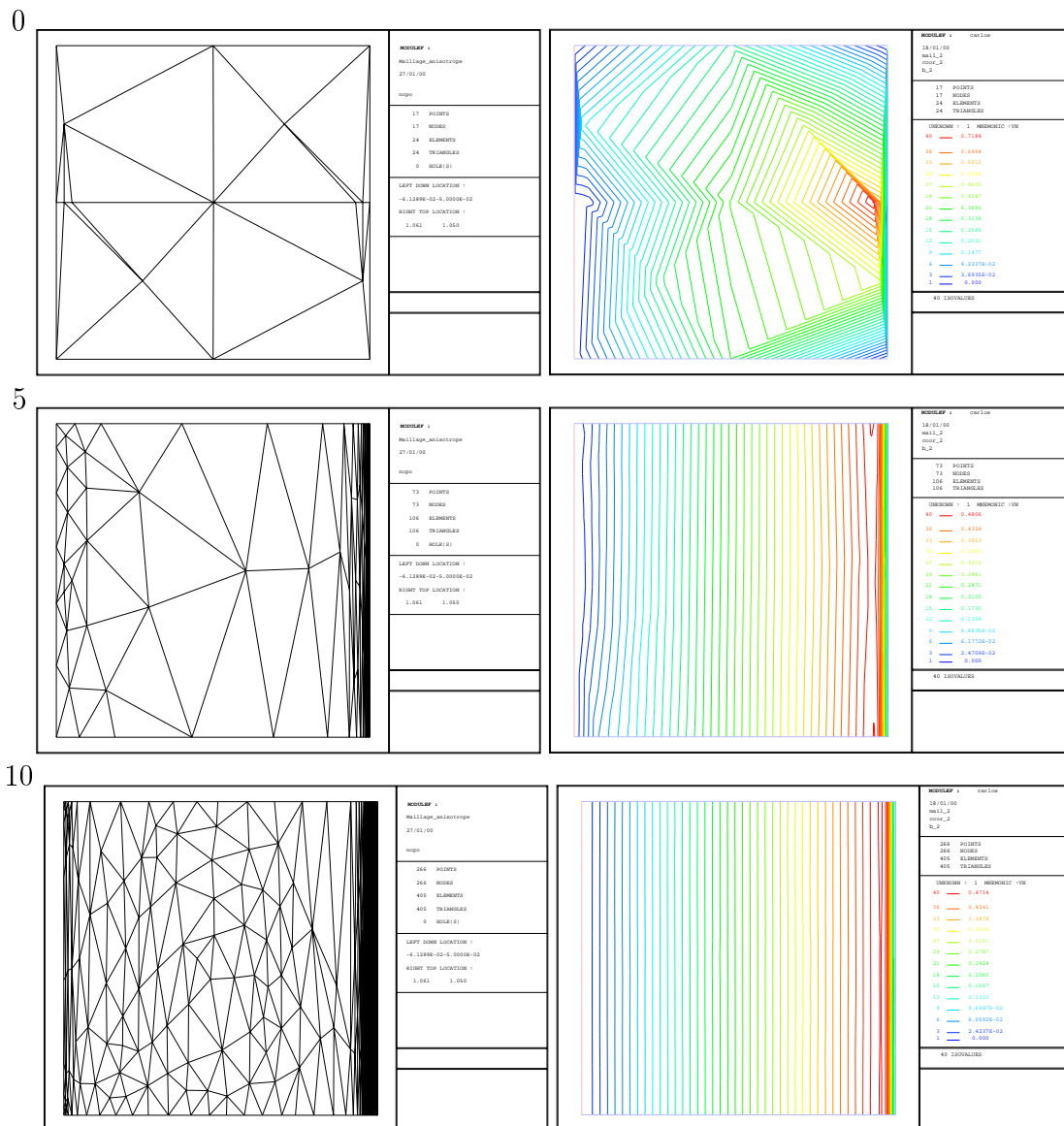


Figura 8. Malhas e isovalores para iterações 0, 5 e 10 com $\epsilon = 0.01$

Observa-se que tem-se grande densidade de elementos na região da camada limite para a malha da iteração 10. Os elementos desta região são altamente anisotrópicos, pois a variação do gradiente de u na direção x é muito maior do que na direção y . Assim, o processo adaptativo cria elementos que são estirados na direção paralela à camada limite.

No lado esquerdo do domínio tem-se uma densidade menor de elementos, pois, nesta região a variação do gradiente de u na direção x é bem menor. Na parte central do domínio, como não há variação significativa do gradiente de u em nenhuma direção os elementos são quase isotrópicos.

5. CONCLUSÃO

O processo de geração de malhas adaptativas anisotrópicas implementado mostrou-se eficiente na criação de uma malha adaptada ao problema em questão. A menor quantidade de graus de liberdade possibilita o cálculo de soluções melhores com menor tempo de processamento. Isto é conseguido através do adensamento de elementos nas regiões de maior gradiente e com a utilização de elementos altamente anisotrópicos.

Os procedimentos utilizados na solução deste problema simples de perturbação singular podem ser empregados num problema de equilíbrio de cascas delgadas que envolve dificuldades semelhantes àquelas que surgiram neste trabalho.

Referências Bibliográficas

- BOROUCAKI, H. e LAUG, P. (1995): “Le mailleur adaptatif bidimensionnel BL2D: manuel d’utilisation et documentation”, *INRIA, Rapp. Tech.n. 0185*, Rocquencourt.
- BOROUCAKI, H.; GEORGE, P. L.; HECHT, F.; LAUG, P. e SALTEL E. (1995): “Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques. Partie I: Algorithmes”, *INRIA, Rapp. Tech. n. 2741*, Rocquencourt.
- CHOÏ, D., PALMA, F. J., SANCHEZ-PALENCIA, É. e VILARINO, M. A. (1998): “Membrane locking in the finite element computation of very thin elastic shells”, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **32**, pp. 131–152.
- CHOÏ, D. (1999): “Computations of thin non-inhibited hyperbolic elastic shells. Benchmarks for membrane locking”, *Math. Meth.in the Applied Sciences*, **22**, pp. 1293–1321.
- GOLDENVEIZER, A. L. (1962): *Theory of elastic thin shells*, Pergamon, New York.
- KARDESTUNCER, H. e NORRIE, D. H. (1987): *Finite element handbook*, McGraw-Hill.
- LEGUILLON, D.; SANCHEZ-HUBERT, J. e SANCHEZ-PALENCIA, É. (1999): “Model problem of singular perturbation without limit in the space of finit energy and its computation”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **327**, série II b, pp. 485-492.
- NIORDSON, F. (1985): *Shell Theory*, North-Holland, Amsterdam.
- SANCHEZ-PALENCIA, É. (1989): “Statique et dynamique des coques minces. I: Cas de flexion pure non inhibée”, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, série I, **309**, pp. 411–417.
- SANCHEZ-PALENCIA, É. (1995): Surfaces et coques élastiques minces: problèmes et défis, *La Vie des Sciences*, **12**, num. 3, pp. 239–258.
- SPECHT, B. (1988): “Modified shape functions for the three node plate bending element passing the patch test”, *Int. Jour. for Num. Meth. in Engin.*, **26**, pp. 705–715.
- ZIENKIEWICZ, O. C. (1991): *The finite element method. Volume 2 - Solid and fluid mechanichs. Dynamics and non-linearity*, McGraw-Hill, Londres.

WAVE PROPAGATION IN DISCONTINUOUS DAMAGED FIELDS

Saulo Guimarães Machado

Felipe Bastos de Freitas Rachid

Universidade Federal Fluminense, Laboratory of Theoretical and Applied Mechanics, Department of Mechanical Engineering, Rua Passo da Pátria, 156, 24210-240 - Niterói, RJ, Brazil. E-mail: saulo@mec.uff.br & rachid@mec.uff.br

Abstract

This paper presents a theoretical investigation, based on numerical simulations, of the wave propagation phenomenon in damageable elasto-viscoplastic one-dimensional medium. The degradation of the medium induced by inelastic deformations is described by a local continuum damage model in a context of internal variable theory. To solve the hyperbolic governing equations, the Glimm's scheme along with a splitting technique were used. Numerical simulations with discontinuous damage initial conditions are presented so that the influence of the damage on the wave propagation phenomenon is highlighted.

Keywords: Wave Propagation, Continuum Damage Mechanics, Elasto-viscoplasticity, Glimm's Scheme.

1. INTRODUCTION

Metallic materials, specially those used in high temperature environments, are known to be susceptible to inelastic deformations when exposed to moderately amplitude impact loading and/or transient complex loading histories. Structural components used in nuclear and thermohydraulics power plants are typical examples of particular interest.

Because of its importance in engineering applications, the analysis of dynamical problems involving the wave propagation in inelastic solids has been the subject of several researches in the past years (Belytshko, et al. 1987, Loret and Prevost, 1990 and Sluys et al., 1993). Even though several important features have been definitively addressed and significant progress has been achieved, a few works (Freitas Rachid et al., 1996 and Freitas Rachid et al., 1997) have been dedicated to the study of the degradation phenomenon (damage induced by inelastic strains) influence on the dynamical response of structures.

This paper reports a theoretical and numerical investigation of longitudinal wave propagation phenomenon in damageable elasto-viscoplastic bars under isothermal and small deformations. The material inelastic response is described by an internal constitutive theory with strong thermodynamics basis and the degradation phenomenon by means of local continuum damage theory.

The constitutive model used in this work exhibits strain-softening phenomenon yet gives rise to a unique solution to the wave propagation initial-boundary-value problem. The primary effect of the damage on the wave propagation analysis is that it affects the tensile wave speed. As a result, dispersive effects appear in the solution whenever the magnitude of inelastic strains is capable to cause damage evolution. To solve the non-linear hyperbolic equations

describing the wave propagation phenomenon, a suitable numerical technique based on Glimm's method is proposed.

With this model is possible to analyse cases in which there exists discontinuous damage initial conditions. This is a case of interest when a structure, composed by several members with different loading histories, is exposed to an impact loading. Another relevant case occurs in practice when damaged stretches of a structure are replaced by pieces of virgin material.

2. CONSTITUTIVE EQUATIONS

The constitutive equations used in this work are derived in a context of an internal variable theory (Lemaitre & Chaboche, 1990). Due to the limited space, only its main features will be focused on. For further details, refer to the work of Freitas Rachid & Costa Mattos (1995).

For the isothermal evolution of an elasto-viscoplastic damageable solid, the local state is supposed to be characterized by the total strain tensor $\underline{\underline{\epsilon}}$, the anelastic strain $\underline{\underline{\epsilon}}^p$, by an internal variable D related with the damage and by two other internal variables $\underline{\underline{c}}$ and p related to the kinematical and isotropic hardening, respectively. The variable $\underline{\underline{c}}$ is a second-order tensor whereas p is of scalar nature. The variable $D \in [0,1]$ is a macroscopic quantity which can be interpreted as a local measure of the degradation of the material induced by deformation. If $D=0$, the material is virgin and if $D=1$ the material loses locally its mechanical strength.

The Helmholtz free energy ψ is assumed to be a differentiable scalar function of the state variables with the following form:

$$\rho\psi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\epsilon}}^p, D, \underline{\underline{c}}, p) = (1-D) \left\{ \psi_e(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p) + \psi_p(p) + \psi_c(\underline{\underline{c}}) \right\} \quad (1)$$

$$\psi_e(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p) \right) \cdot (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p), \quad \psi_p(p) = b \left(p + \frac{1}{d} \exp(-dp) \right) + \sigma^y p, \quad \psi_c(\underline{\underline{c}}) = \frac{1}{2} a \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{c}} \quad (2.1-2-3)$$

The term ψ_e is the elastic strain energy density and the terms ψ_p and ψ_c are the inelastic strain energy densities related to the internal variables $\underline{\underline{c}}$ and p . $\underline{\underline{C}}$ is the classical symmetric fourth-order positive definite tensor of elasticity. In the above relations, a , b and d are material parameters. The so-called thermodynamical forces $(\underline{\underline{\sigma}}, B^D, \underline{\underline{B}}^c, B^p)$ related to the internal variables $(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\epsilon}}^p, D, \underline{\underline{c}}, p)$ are defined from the free energy potential by taking its partial derivatives. The relations between the state variables and the thermodynamical forces are the so-called state laws:

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}^p} = (1-D) \underline{\underline{C}}(\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^p) \quad (3.1)$$

$$B^D = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = \psi_e + \psi_p + \psi_c \quad (3.2)$$

$$\underline{\underline{B}}^c = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{c}}} = -(1-D) a \underline{\underline{c}} \quad (3.3)$$

$$B^p = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial p} = -(1-D)(+b(1-\exp(-dp)) + \sigma^y) \quad (3.4)$$

To complete the constitutive equations, evolution laws are required for the internal variables. These are obtained by introducing a differentiable scalar function $\Phi = \Phi(\underline{\underline{\sigma}}, B^D, B^p, \underline{\underline{B}}^c, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p, D, p, \underline{\underline{c}})$ of the thermodynamical forces and the internal variables, named dissipation potential. For this particular material Φ has the following form:

$$\Phi = \frac{k}{n+1} \left\langle \frac{F}{k} \right\rangle^{n+1} \quad (4)$$

where $\langle x \rangle = \max(0, x)$ and F is the yield function $F(\underline{\underline{\sigma}}, B^D, B^p, \underline{\underline{B}}^c, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p, D, p, \underline{\underline{c}})$:

$$F = f + \frac{\phi}{2a} (\underline{\underline{B}}^c \cdot \underline{\underline{B}}^c - (1-D)^2 a^2 \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{c}}) + \frac{1}{2S_0} \left((B^D)^2 - (\psi_e + \psi_p + \psi_c)^2 \right)$$

$$f = f(\underline{\underline{\sigma}}, B^p, \underline{\underline{B}}^c) = J(\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}}^c) + B^p \text{ and } J(\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}}^c) = \left(\frac{3}{2} (\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}}^c)_{\text{dev}} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}}^c)_{\text{dev}} \right)^{1/2}$$

In the above relations, ϕ and S_0 are material parameters. $(\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}}^c)_{\text{dev}}$ is the deviatoric part of $(\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}}^c)$. When Φ is differentiated with respect to the arguments $\underline{\underline{\sigma}}$, B^D , B^p and $\underline{\underline{B}}^c$, the evolution laws are obtained:

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2} \left\langle \frac{F}{k} \right\rangle^n \frac{(\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}}^c)_{\text{dev}}}{J} \quad (5.1)$$

$$\dot{p} = \frac{\partial \Phi}{\partial B^p} = \left(\frac{2}{3} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p \cdot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p \right)^{1/2} = \left\langle \frac{F}{k} \right\rangle^n \quad (5.2)$$

$$\underline{\underline{\dot{c}}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{B}}^c} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p + \frac{\phi}{a} \underline{\underline{B}}^c \dot{p} \quad (5.3)$$

$$\dot{D} = \frac{\partial \Phi}{\partial B^D} = -\frac{B^D}{S_0} \dot{p} \quad (5.4)$$

Using equations (3), it is easy to verify that $F(\underline{\underline{\sigma}}, B^D, B^p, \underline{\underline{B}}^c, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p, D, p, \underline{\underline{c}}) < 0$ if and only if $f(\underline{\underline{\sigma}}, B^p, \underline{\underline{B}}^c) < 0$. If $f < 0$ then $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = 0$, $\dot{p} = 0$, $\underline{\underline{\dot{c}}} = 0$, $\dot{D} = 0$, and consequently, the material will behave elastically. When $B^p = -\sigma^y$ and $\underline{\underline{B}}^c = 0$, the condition $f \leq 0$ is nothing else than the classical Von-Mises criterion. If $B^p = -\sigma^y$ and $\underline{\underline{B}}^c = 0$ at the time $t=0$, the evolution of the elastic domain (the set of the stress $\underline{\underline{\sigma}}$ such that $f(\underline{\underline{\sigma}}, B^p, \underline{\underline{B}}^c) < 0$) will be characterized by an homothetical expansion or contraction (due to $B^p(t)$) and by a translation (due to $\underline{\underline{B}}^c(t)$) of the initial elastic domain (defined by the Von-Mises criterion). Equation (5.1) implies that $\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^p) = 0$. This means that the inelastic deformation preserve the volume of the body. If the internal variable $\underline{\underline{c}}$ is zero at time $t=0$ then, from (3.3), (5.1) and (5.3), it is also easy to verify

that $\text{tr}(\underline{\underline{c}}) = \text{tr}(\underline{\underline{B}}^c) = 0$. The variable $\underline{\underline{\epsilon}}^p$ is usually called the plastic strain and the internal variable p is called the cumulated plastic strain.

Equations (3) and (5) describe adequately the mechanical phenomena of damage, elasticity, plasticity (cyclic plasticity, strain-hardening and strain-softening), creep and relaxation observed in many metallic materials at high temperature. Experimental procedures to identify the material parameters a , b , d , σ^y , k , n , φ and S_0 can be found in (Lemaitre & Chaboche, 1990).

3. BALANCE EQUATIONS

The balance of linear momentum, along with the strain-displacement relationship, that governs the motion of a continuum solid body under the assumption of small displacements and deformations are (Salençon, 1990):

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{g}, \quad \underline{\underline{\epsilon}} = 1/2(\text{grad} \underline{u} + \text{grad} \underline{u}^T) \quad (6.1-2)$$

In the above expressions \underline{v} , \underline{u} , $\underline{\underline{\sigma}}$ and $\underline{\underline{\epsilon}}$ represent, respectively, the velocity vector field, the displacement vector field, the stress tensor field and the strain tensor field, which are all functions of the space coordinate x in the reference configuration and of the time t . The external body force per unit of mass \underline{g} is assumed to be zero and the body supposed to be homogeneous, so that the mass density ρ is constant. Once the body geometry and the initial/boundary conditions have been specified, the balance (6) and constitutive (3) and (5) equations describe the problem of wave propagation in damageable elasto-viscoplastic medium.

4. PROBLEM FORMULATION

As a first step towards the analysis of the wave propagation phenomenon, we restrict the complexity of the problem by dealing with the one-dimensional situation. Let us consider a bar of length L of an isotropic damageable elasto-viscoplastic material whose axis coincides with the coordinate x . The origin of the coordinate system is the left end of the bar so that $x \in [0, L]$ Fig.1.

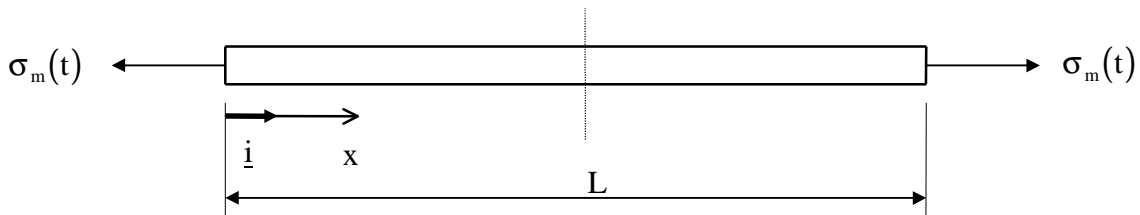


Fig.1 - One-dimensional bar of length L with stress prescribed at both ends

It is further assumed that the velocity and the stress tensor have only one non-vanishing component in the x direction, $\underline{v} = v \underline{i}$ and $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{i} \otimes \underline{i}$, in which \underline{i} is the unit length vector of the positive x direction and \otimes stands for the usual tensorial product. As a consequence, there will

exist only one independent component of the tensors $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ and $\underline{\underline{c}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \varepsilon^p \underline{\underline{i}} \otimes \underline{\underline{i}} - \frac{\varepsilon^p}{2} \underline{\underline{j}} \otimes \underline{\underline{j}} - \frac{\varepsilon^p}{2} \underline{\underline{k}} \otimes \underline{\underline{k}}$ and $\underline{\underline{c}} = c \underline{\underline{i}} \otimes \underline{\underline{i}} - \frac{c}{2} \underline{\underline{j}} \otimes \underline{\underline{j}} - \frac{c}{2} \underline{\underline{k}} \otimes \underline{\underline{k}}$.

Based on the considerations presented so far, equations (3), (5) and (6) can be reduced to the following system of partial differential equations:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \rho \lambda^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\sigma}{(1-D)} \frac{\partial D}{\partial t} + (1-D)E \frac{\partial \varepsilon^p}{\partial t} = 0 \quad (7.1-2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon^p}{\partial t} = f(\sigma, c, p, D), \quad \frac{\partial c}{\partial t} = g(\sigma, c, p, D), \quad \frac{\partial p}{\partial t} = h(\sigma, c, p, D), \quad \frac{\partial D}{\partial t} = l(\sigma, c, p, D) \quad (7.3-4-5-6)$$

where the functions f , g , h and l of the arguments (σ, c, p, D) are obtained from (5) and $\lambda = \lambda(D)$, the wave speed with which disturbances propagate in the bar, is given by $\lambda = \sqrt{(1-D)E/\rho}$.

It is initially assumed that the bar is at rest and free of stress. As boundary conditions, we consider the bar is submitted to a prescribed stress at its edges. These conditions can be stated as follows:

$$v(x, t=0) = \sigma(x, t=0) = \varepsilon^p(x, t=0) = p(x, t=0) = c(x, t=0) = 0 \quad (8)$$

$$\sigma(x=0, t) = \sigma(x=L, t) = \sigma_m(t) \quad (9)$$

$$D(x \leq L/2, t=0) = D_0^L; \quad D(x > L/2, t=0) = D_0^R \quad (10)$$

It can be shown that the system of equations (7) is merely hyperbolic in time for $D \in [0,1)$ since its eigenvalues are all real (although not distinct) and the associated eigenvectors form a complete set of linear independent vectors (Jeffrey, 1976). The hyperbolicity of (7) ensures the well-posedness of the initial-boundary-value problem (7)+(8)+(9).

5. NUMERICAL METHOD

In order to construct the numerical approximation for the solution $(\sigma, v, \varepsilon^p, D, c, p)$ of (7) from time t^n to time $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ the following splitting algorithm is adopted:

i. First, an initial approximation $(\bar{\sigma}, \bar{v})$ is obtained by advancing Δt in time through:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \rho \lambda^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

via Glimm's method. As Cauchy data for the Glimm's scheme, the values of (σ, v, D) at time t^n are used.

ii. Once $(\bar{\sigma}, \bar{v})$ has been evaluated, the numerical approximation for the solution at time t^{n+1} is finally obtained by advancing in time with the same time-step Δt through:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\sigma}{(1-D)} 1 - (1-D)Ef, \quad \frac{\partial \varepsilon^p}{\partial t} = f, \quad \frac{\partial c}{\partial t} = g, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = h, \quad \frac{\partial D}{\partial t} = 1 \quad (12)$$

To do this, the Euler's scheme is employed by taking as initial conditions (ε^p, D, c, p) at time t^n and $(\bar{\sigma}, \bar{v})$.

This procedure may be repeated throughout until a desired time of simulation has been reached. Before using Glimm's method for solving equations (11), one must know the solution of the associated Riemann problem.

5.1 Riemann Problem

The Riemann problem associated to (11) is an initial-value problem of the form (Smoller, 1983),

$$(\sigma(x, t = 0); v(x, t = 0)) = \begin{cases} (\sigma_l, v_l); & \text{for } x < 0 \\ (\sigma_r, v_r); & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

with discontinuous coefficient λ such that:

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_l = \lambda(D_l) = \text{constant}; & \text{if } x < 0 \\ \lambda_r = \lambda(D_r) = \text{constant}; & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

where σ_l, v_l, D_l and σ_r, v_r, D_r are constants.

The generalized solution of this particular problem depends only on the ratio $\xi = x/t$ and is constructed by connecting the left state (σ_l, v_l) and the right state (σ_r, v_r) to the intermediate states (σ^*_1, v^*_1) and (σ^*_r, v^*_r) , which must be determined, by shock waves (discontinuous solutions). The shock speeds s must satisfy the Rankine-Hugoniot jump condition. In this case this relationship is:

$$\left. \begin{array}{l} s\rho[v] = [\sigma] \\ s[\sigma] = \rho\lambda_1^2[v] \end{array} \right\} \text{if, } x < 0 \quad \text{or} \quad \left. \begin{array}{l} s\rho[v] = [\sigma] \\ s[\sigma] = \rho\lambda_r^2[v] \end{array} \right\} \text{if, } x > 0 \quad (13)$$

where $[\zeta]$ denotes the jump of ζ across adjacent states.

From equations (13) it is easy to see that shocks propagate with speeds $s = -\lambda_l$ if $x < 0$ or $s = \lambda_r$ if $x > 0$. Thus, the solution is constructed by connecting the left state (σ_l, v_l) to the intermediate state (σ^*_1, v^*_1) with shock speed $s = -\lambda_l$. Similarly, the right state (σ_r, v_r) is connected to the intermediate state (σ^*_r, v^*_r) by a shock with speed $s = \lambda_r$. To complete the solution, however, it remains to connect the state (σ^*_1, v^*_1) and (σ^*_r, v^*_r) . This is done by imposing a stationary shock (a shock with speed $s = 0$) at $x = 0$ as illustrated in Fig. 2. It should be mentioned that such kinds of shock appearing in the solution of this problem are actually the so-called contact discontinuities (Smoller, 1983).

The generalized solution of this problem is unique and is summarized in Fig. 2 which displays the regions in the x - t plane where the solutions is defined.

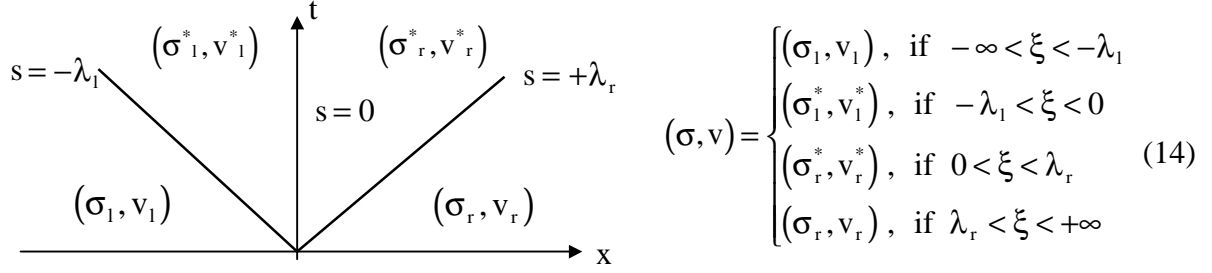


Fig. 2 - Solution of Riemann Problem in the x-t plane.

In the above relations, σ_1^* , v_1^* and σ_r^* , v_r^* are given by the following expressions:

$$\sigma_r^* = \sigma_1^* = \frac{(\lambda_r \sigma_r + \lambda_1 \sigma_1 + \rho(\lambda_1^2 v_1 - \lambda_r^2 v_r))}{(\lambda_r + \lambda_1)}$$

$$v_1^* = \frac{\lambda_r}{\lambda_1(\lambda_r + \lambda_1)} \left(\lambda_1 v_1 + \lambda_r v_r + \frac{(\sigma_1 - \sigma_r)}{\rho} \right), \quad v_r^* = \frac{\lambda_1}{\lambda_r(\lambda_r + \lambda_1)} \left(\lambda_1 v_1 + \lambda_r v_r + \frac{(\sigma_1 - \sigma_r)}{\rho} \right)$$

5.2 Glimm's Method

Glimm's method is a numerical scheme which employs the solution of the associated Riemann problem to generate approximate solutions of the hyperbolic equations, when they are subjected to arbitrary initial data. The main idea behind the method is to appropriately gather the solution of as many Riemann problems as desired to successively march from time t^n to time $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. To do this it is first necessary to approximate the data at the time t^n by piecewise constant functions.

Consider a uniform partition $0 = x_1 < \dots < x_i < \dots < x_{i+1} < \dots < x_{N+1} = L$ of the interval $[0, L]$ such that $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. Let us also assume that at time t^n there already exists a piecewise constant approximation of (σ, v, D) such as :

$$\sigma(x, t^n) = \sigma_i = \sigma(x_i, t^n), \quad v(x, t^n) = v_i = v(x_i, t^n), \quad D(x, t^n) = D_i = D(x_i, t^n)$$

for $x \in (x_i - \Delta x / 2, x_i + \Delta x / 2)$ and $1 \leq i \leq N + 1$.

For each two consecutive states (σ_i, v_i, D_i) and $(\sigma_{i+1}, v_{i+1}, D_{i+1})$, $1 \leq i \leq N$, there is defined and solved a Riemann problem centered at $\bar{x} = x_i - \Delta x / 2$, according to the preceding section. Now, with solution of these N Riemann problems and by introducing a random sequence of numbers $\{\theta_n\}$, $\theta_n \in (0, 1)$, it is finally obtained a piecewise constant approximate solution of (11) at time t^{n+1} as follows:

$$(\bar{\sigma}, \bar{v})(x, t^{n+1}) = (\bar{\sigma}_j(\xi_i), \bar{v}_j(\xi_i)), \quad \text{where} \quad \xi_i = \frac{(x_i + \theta_n \Delta x - \bar{x})}{\Delta t} \quad (15)$$

for $x \in (x_i - \Delta x / 2, x_i + \Delta x / 2)$ and $1 \leq i \leq N + 1$ with j defined as $j = i$, if $\theta_n \leq 1/2$ or $j = i + 1$, if $\theta_n > 1/2$.

In these expressions $(\bar{\sigma}_j, \bar{v}_j)$ stands for the j -th Riemann problem with initial data (σ_i, v_i, D_i) and $(\sigma_{i+1}, v_{i+1}, D_{i+1})$ whose solution is given by equation (14).

In order that nearby shocks of adjacent Riemann problem do not interact with each other, the time-step Δt is chosen to satisfy the Courant-Friedrichs-Lewy condition:

$$\Delta t = t^{n+1} - t^n \leq \frac{\Delta x}{2|\lambda|_{\max}}$$

where $|\lambda|_{\max}$ is the maximum absolute value of the shock speeds, taking into account the N Riemann problems at time t^n .

With reference to the algorithm described at the beginning of this section, the aforementioned approximation $(\bar{\sigma}, \bar{v})$ is the one provided by equation (15).

6. NUMERICAL EXAMPLES

Aiming to better understand the phenomenon of wave propagation in a damageable elasto-viscoplastic medium, the physical problem, described in section 4 is numerically simulated here. To characterize severe impact loading, we consider as boundary conditions triangular-shape stress pulses, having a rise time of 0.5 ms and duration of 1 ms, so that:

$$\sigma(x=0, t) = \sigma(x=L, t) = \begin{cases} \sigma_m t, & \text{if } 0 \leq t \leq 0.5 \text{ms} \\ -\sigma_m t + 2\sigma_m, & \text{if } 0.5 \text{ms} \leq t \leq 1 \text{ms} \\ 0, & \text{if } t \geq 1 \text{ms} \end{cases}$$

where σ_m represents the stress pulse amplitude

The bar, which is 16m long, is made an AISI 316L stainless steel and is submitted to a temperature of 600°C. At this temperature the material parameters are (Lemaitre and Chaboche, 1990): $E=130$ GPa, $\nu=0,27$, $\sigma^y=6$ MPa, $k=150$ MPas, $b=80$ MPa, $d=10$, $n=12$, $a=17$ GPa, $\phi=300$ and $S_0=2$ kPa.

After time $t=0$, the impulsive stress pulses generated at both extremities will propagate towards the midpoint of the bar. Afterward these pulses will interact with each other and will be reflected at the bar's ends until the steady state has been reached or rupture has occurred. The wave speed in the virgin material is $\lambda(D=0)=4082$ m/s.

Evidences of the influence of the degradation on the bar response can be found at (Freitas Rachid et al., 1997). Here we are concerned about the response of the bar when we have discontinuous damage initial conditions. We consider as damage initial condition $D_0^L = 0$ and $D_0^R = 0.9$, as shown in equation (10).

In what follows, the dynamical response of the bar will be analyzed for an input stress pulse $\sigma_m = 190$ MPa. Spatial dimensionless stress distributions along the bar are displayed in fig. 3 for different instants. The evolution of the wave propagation is depicted in an horizontal sequence.

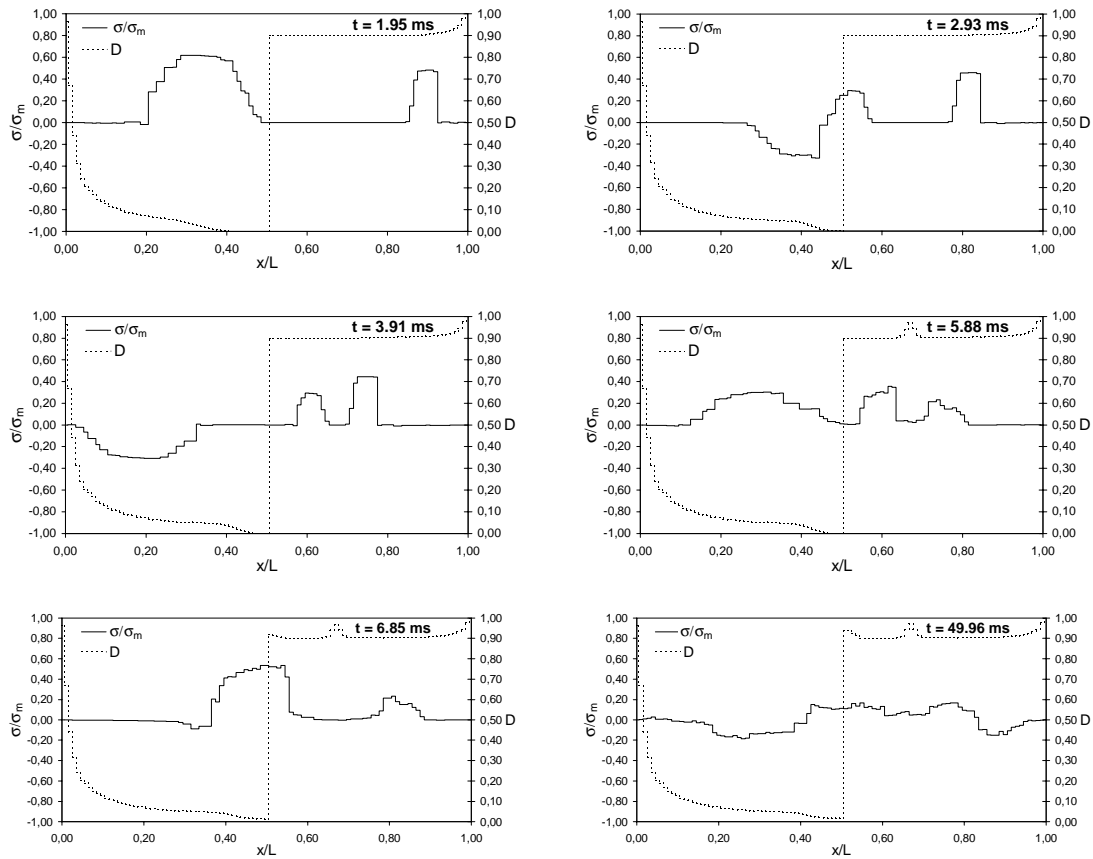


Fig. 3 - Dimensionless stress and damage fields at several time instants for $\sigma_m = 190$ MPa

At time $t = 1.95$ ms both stress pulses are propagating towards the midpoint of the bar. The right pulse is smaller than the left one because damage is an additional dissipative mechanism. In addition, at time $t = 2.93$ ms, the right stress pulse reaches the midpoint before the other. The pulses propagate with different speeds due to the reduction of the local wave speed induced by damage. So, in the left side of the bar the wave speed is greater than in the right one. At the same instant, $t = 2.93$ ms, when the left pulse reaches the midpoint, we can see the reflection of the part of the pulse. Notice that it occurs before the first superposition of the stress pulses. So, at $t = 3.91$ ms, we can see clearly three stress pulses propagating in the rod. $t = 5.88$ ms is the instant after the first superposition and we can see the damage evolution around the point $x/L = 0.66$. When the right pulse reaches the midpoint, at $t = 6.85$ ms, it occurs another superposition. The reflected pulse reaches the midpoint at the same time.

The last picture, at $t = 49.96$ ms, shows the final stress and damage fields. The most critical regions susceptible to damage evolution are not only those close to the extremities and to the center of the bar. There exist another region susceptible to damage evolution whose localization and dimension depends on damage initial conditions.

7. FINAL REMARKS

The influence of the degradation on the wave propagation phenomenon in an elasto-viscoplastic medium has been characterized by means of numerical simulations in a bar submitted to impact stress pulses at both ends. Besides of attenuating the stress waves and introducing significant delay in the signals, the discontinuous damage initial condition may

cause the reflection of the part of the stress pulse where the damage discontinuity is sufficiently great.

ACKNOWLEDGMENTS

The partial financial support provided by CAPES and the concession of a scholarship granted to Saulo Guimarães Machado is gratefully acknowledged.

REFERENCES

- Belytshko, T., Wang, X. J., Bazant, Z. P. & Hyun, Y., Transient Solutions for One-Dimensional Problems With Strain-Softening, *J. Appl. Mech.*, vol. 54, pp. 513-517, 1987.
- Freitas Rachid, F. B. & Costa Mattos, H. S., Integrity of Liquid Transmission Lines Taking into Account the Fluid-Structure Interaction, *Proc. of the 1996 ASME Pressure Vessel & Piping Conf.*, Montreal, PVP-Vol. 337 pp. 61-69, 1996.
- Freitas Rachid, F. B. & Costa Mattos, H. S., Pressure Transients in Damageable Elastoplastic Pipes, *Proc. of the 1995 ASME/JSME Pressure Vessels & Piping Conf.*, Hawaii, PVP-Vol. 301, pp. 31-40, 1995.
- Freitas Rachid, F. B. and Machado, S. G., Wave Propagation in Damageable Elasto-Viscoplastic Bars, *Proceedings in CD-Rom of the 14th Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, Vol. X, Bauru – SP, Brazil, 1997.
- Jeffrey, A., *Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves*, Pitman Publishing, London, 1976.
- Lemaitre, J. & Chaboche, J.L., *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, 1990.
- Loret, B. & Prevost, J. H., Dynamic Strain Localization in Elasto-(visco)-plastic Solids, Part1. General Formulation and One-Dimensional Examples, *Comp. Meth. Appl. Mech.*, vol. 83, pp. 247-273, 1990.
- Salençon, J., *Mécanique des Milieux Continus*, Tome II, Ellipses, Paris, 1988.
- Slugs, L. J., De Borst, R. & Muhlhaus, H.-B., Wave Propagation, Localization and Dispersion in Gradient-Dependent Medium, *Int. J. Solids*, vol. 30, n° 9, pp. 1153-1171, 1993.
- Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

A ONE-DIMENSIONAL CONSTITUTIVE MODEL FOR SHAPE MEMORY ALLOYS

Alberto Paiva

Marcelo A. Savi

Instituto Militar de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais

22.290.270 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

E-Mail: savi@epq.ime.eb.br

Pedro Manuel C.L. Pacheco

CEFET/RJ, Departamento de Engenharia Mecânica

20.271.110 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

E-Mail: calas@cefet-rj.br

Abstract

Shape memory and pseudoelastic effects may be modeled either by microscopic or macroscopic point of view. Phenomenological aspects of SMA behavior are considered by constitutive models which are formulated to describe these phenomena. The present contribution considers a new one-dimensional constitutive model with internal constraint to describe SMA behavior. The proposed theory contemplates four phases: three variants of martensite and an austenitic phase. Two different elastic moduli for austenitic and martensitic phases and new constraints are also conceived for a correct description of phenomena related to SMA. A numerical procedure is developed and numerical results show that the proposed model is capable to describe shape memory and pseudoelastic effects.

Key-words: Shape Memory Alloys, Constitutive Equations.

1. INTRODUCTION

Shape memory alloys (SMAs) are a family of metals with the ability of changing shape depending on their temperature. SMAs undergo thermoelastic martensitic transformations which may be induced either by temperature or stress. When a specimen of SMA is stressed at a constant higher temperature, inelastic deformation is observed above a critical stress. This inelastic deformation, however, fully recovers during the subsequent unloading. The stress-strain curve, which is the macroscopic manifestation of the deformation mechanism of the martensite, forms a hysteresis loop. At a lower temperature, some amount of strain remains after complete unloading. This residual strain may be recovered by heating the specimen. The first case is the pseudoelastic effect, while the last is the shape memory effect (SME) or one way SME. These effects are inter-related in the sense that, if the hysteresis cycle in the pseudoelastic case is not completed when the applied stress is removed, then reversion of the residual martensite must be induced upon heating, by employing the SME (Sun & Hwang, 1993). In the process of returning

to their remembered shape, these alloys can generate large forces which may be useful for actuation (Rogers, 1995). Because of such remarkable properties, SMAs have found a number of applications in engineering.

Metallurgical studies have revealed the microstructural aspects of the behavior of SMAs. Basically, there are two possible phases on SMAs: austenite and martensite. In martensitic phase, there are plates which may be internally twin-related. Hence, different deformation orientations of crystallographic plates constitute what is known by martensitic variants. On SMAs there are 24 possible martensitic variants which are arranged in 6 plates groups with 4 plate variants per group (Zhang *et al.*, 1991). Schroeder & Wayman (1977) have shown that when a specimen is deformed below a temperature where only martensitic phase is stable, with increasing stress, only one of the 4 variants in a given plate group will begin to grow. This variant is the one that has the largest partial shear stress. On the other hand, because the crystal structure of martensite is less symmetric than the austenite, only a single variant is created on the reverse transformation (Zhang *et al.*, 1991). For one-dimensional cases, it is possible to consider only three variants of martensite on SMAs: the twinned martensite (M), which appears with no stress field, and two other martensitic phases ($M+$, $M-$), which are induced by positive and negative stress fields, respectively.

Shape memory alloys may be modeled either by microscopic or macroscopic point of view. Phenomenological aspects of SMA behavior are contemplated by constitutive models which are formulated to describe these phenomena (Birman, 1997). The following classification may be considered to the phenomenological theories: Polynomial models, models based on plasticity, models with internal constraints and model with assumed phase transformation kinetics.

Polynomial model was proposed by Falk (1980) and is based on the Devonshire theory for temperature-induced first order phase transition combined with hysteresis. This is a one-dimensional model that defines a polynomial free energy which describes pseudoelasticity and shape memory in a very simple way.

Models based in plasticity exploit the well-established principles of the theory of plasticity. Bertram (1982) proposes a three-dimensional model using the concepts of kinematics and isotropic hardening. Mamiya and co-workers (Silva, 1995; Souza *et al.*, 1998; Motta *et al.*, 1999) also presents models which are capable to describe shape memory and pseudoelastic effects. Auricchio and co-workers also introduces models using these ideas. First, Auricchio & Lubliner (1997) and Auricchio & Sacco (1997) present a one-dimensional model and then, it is extrapolated to include the analysis in the set of three-dimensional media (Auricchio *et al.*, 1997).

Models with assumed transformation kinetics consider that the phase transformation is governed by a known function which is determined through the current values of stress and temperature. The first model based in this formulation was proposed by Tanaka & Nagaki (1982) which originates other models proposed by Liang & Rogers (1990), Brinson (1993), Boyd & Lagoudas (1994), Ivshin & Pence (1994). Perhaps, these are the most popular models to describe SMA behavior.

Models with internal constraints consider internal variables to describe the volumetric fractions of the material phase and constraints, which establishes the form how the phases may coexist. Fremond (1987) develops a three-dimensional model which considers three phases: two variants of martensite and an austenitic phase. Limitations of this theory are discussed in Savi & Braga (1993a). Abeyaratne *et al.* (1994) describes phase transformation kinetics with the aid of some constraints based on thermodynamic admissibility rules. The model of Auricchio and co-workers also may be included in this classification.

The present contribution considers a new one-dimensional constitutive model with internal constraint to describe SMA behavior. The proposed theory is based on Fremond's model and includes four phases in the formulation: three variants of martensite and an austenitic phase. The inclusion of twinned martensite allows one to describe a stable phase when the specimen is at a lower temperature and free of stress. This is an improvement of the proposed model when compared to the original Fremond's model. Furthermore, two different elastic moduli for austenitic and martensitic phases and new constraints are conceived in the formulation. A numerical procedure is developed and numerical results show that the proposed model is capable to describe shape memory and pseudoelastic effects.

2. CONSTITUTIVE MODEL

Fremond (1987) has proposed a three-dimensional model for the thermomechanical response of SMA where martensitic transformations are described with the aid of two internal variables. These variables represent volumetric fractions of two variants of martensite ($M+$ and $M-$), and must satisfy constraints regarding the coexistence of three distinct phases, the third being the parent austenitic phase (A). It has been noted (Savi & Braga, 1993a) that Fremond's original model can not present good results in three-dimensional problems, however, one-dimensional results are qualitatively good. Here, an alternative one-dimensional model is considered introducing a fourth variant of martensitic phase: twinned martensite.

SMA behavior can be characterized by the Helmholtz free energy, ψ , and the potential of dissipation, ϕ . The thermodynamic state is completely defined by a finite number of state variables: deformation, ε , temperature, T , the volumetric fractions of martensitic variants, β_1 and β_2 , which are associated with detwinned martensites ($M+$ and $M-$) and austenite (A), β_3 . The fourth phase is associated with twinned martensite (M) and its volumetric fraction is β_4 . Each phase have a free energy function as follows,

$$M+ : \rho\psi_1(\varepsilon, T) = \frac{1}{2} E_M \varepsilon^2 - \alpha \varepsilon \quad (1)$$

$$M- : \rho\psi_2(\varepsilon, T) = \frac{1}{2} E_M \varepsilon^2 + \alpha \varepsilon \quad (2)$$

$$A : \rho\psi_3(\varepsilon, T) = \frac{1}{2} E_A \varepsilon^2 - \frac{L_A}{T_M} (T - T_M) \quad (3)$$

$$M : \rho\psi_4(\varepsilon, T) = \frac{1}{2} E_M \varepsilon^2 + \frac{L_M}{T_M} (T - T_M) \quad (4)$$

where α , $L_M=L_M(T)$ and $L_A=L_A(T)$ are material parameters that describe the martensitic transformation, E_M and E_A represents the elastic moduli for the martensitic and austenitic phases, respectively; T_M is a temperature below which the martensitic phase becomes stable in the absence of stress; ρ is the density. A free energy for the mixture can be written as follows,

$$\rho\hat{\psi}(\varepsilon, T, \beta_i) = \rho \sum_{i=1}^4 \beta_i \psi_i(\varepsilon, T) + \hat{\mathbf{J}}(\beta_i) \quad (5)$$

where the volumetric fraction of the phases must satisfy constraints regarding the coexistence of four distinct phases:

$$\beta_i \geq 0 \quad (i=1,2,3,4); \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1 \quad (6)$$

In the absence of strain, the detwinned martensites, M^+ and M^- , do not exist. In order to include this physical aspect, an additional constraint must be written,

$$\beta_1 = \beta_2 = 0 \quad \text{if } \varepsilon = 0 \quad (7)$$

With these considerations, $\hat{\mathbf{J}}$ is the indicator function of the convex τ (Rockafellar, 1970):

$$\tau = \left\{ \beta_i \in \mathfrak{R} \mid 0 \leq \beta_i \leq 1 (i=1, 2, 3, 4); \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1; \beta_1 = \beta_2 = 0 \text{ if } \varepsilon = 0 \right\} \quad (8)$$

Using constraints (6), β_4 can be eliminated and the free energy can be rewritten as:

$$\rho\psi(\varepsilon, T, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \rho\tilde{\psi}(\varepsilon, T, \beta_1, \beta_2, \beta_3) + \mathbf{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \quad (9)$$

where,

$$\begin{aligned} \rho\tilde{\psi}(\varepsilon, T, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = & \beta_1 \left[-\alpha\varepsilon - \frac{L_M}{T_M}(T - T_M) \right] + \beta_2 \left[\alpha\varepsilon - \frac{L_M}{T_M}(T - T_M) \right] + \\ & + \beta_3 \left[\frac{1}{2}(E_A - E_M)\varepsilon^2 - \frac{L_M + L_A}{T_M}(T - T_M) \right] + \frac{1}{2}E_M\varepsilon^2 + \frac{L_M}{T_M}(T - T_M) \end{aligned} \quad (10)$$

Now, \mathbf{J} represents the indicator function of the tetrahedron π of the set (Figure 1),

$$\pi = \left\{ \beta_i \in \mathfrak{R} \mid 0 \leq \beta_i \leq 1 (i=1, 2, 3); \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \leq 1; \beta_1 = \beta_2 = 0 \text{ if } \varepsilon = 0 \right\} \quad (11)$$

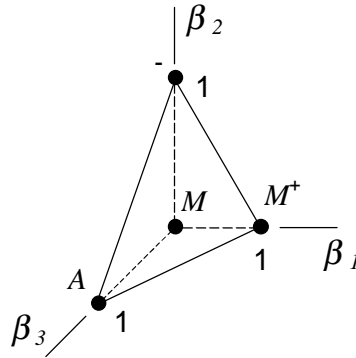


Figure 1 - Tetrahedron of the constraints π .

State equations can be obtained from the Helmholtz free energy as follows:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varepsilon} = [E_M - \beta_3(E_M - E_A)]\varepsilon + \alpha(\beta_2 - \beta_1) \quad (12)$$

$$B_1 \in -\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta_1} - \partial_1 J = \alpha\varepsilon + \frac{L}{T_A}(T - T_A) - \partial_1 J \quad (13)$$

$$B_2 \in -\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta_2} - \partial_2 J = -\alpha\varepsilon + \frac{L_M}{T_M}(T - T_M) - \partial_2 J \quad (14)$$

$$B_3 \in -\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \beta_3} - \partial_3 J = -\frac{1}{2}(E_M - E_A)\varepsilon^2 + \frac{L_M + L_A}{T_M}(T - T_M) - \partial_3 J \quad (15)$$

where B_i are thermodynamic forces and σ represents the uniaxial stress; ∂_i is the *sub-differential* with respect to β_i (Rockafellar, 1970). Lagrange multipliers offer a good alternative to represent sub-differentials of the indicator function (Savi & Braga, 1993b). Considering a pseudo-potential of dissipation of the following type,

$$\phi(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\eta}{2}(\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2) \quad (16)$$

where η is a parameter associated with the internal dissipation of the material, it is possible to write the following complementary equations:

$$B_i = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\beta}_i} = \eta \dot{\beta}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17)$$

These equations form a complete set of constitutive equations. Since the pseudo-potential of dissipation is convex, positive and vanishes at the origin, the Clausius-Duhem inequality (Eringen, 1967), is automatically satisfied if the entropy is defined as $s = -\partial \psi / \partial T$.

Further, it is important to consider the definition of the parameters $L_M = L_M(T)$ and $L_A = L_A(T)$, which is obtained assuming $\dot{\beta}_1 = 0$ and $\varepsilon = \varepsilon_R = \alpha / E_M$ in a critical temperature, T_C , below which there is no residual strain. Hence, using these conditions in Equation (14), one obtains the following expressions,

$$L_M(T) = \begin{cases} L_M = L, & \text{if } T \geq T_C \\ L_M = L \frac{(T_C - T_M)}{(T - T_M)}, & \text{if } T < T_C \end{cases} \quad (18)$$

$$L_A(T) = \begin{cases} L_A = L, & \text{if } T \geq T_C \\ L_A = 2L - \left[L \frac{(T_C - T_M)}{(T - T_M)} \right], & \text{if } T < T_C \end{cases} \quad (19)$$

In order to solve the governing equations, an algorithm based on the operator split technique (Ortiz *et al.*, 1983) are conceived. The procedure isolates the sub-differentials and uses

the implicit *Euler's method* combined with an *orthogonal projection* (Savi & Braga, 1993b) to evaluate evolution equations. Orthogonal projections guarantee that volumetric fractions of the martensitic variants will obey the imposed constraints. In order to satisfy constraints expressed in (6), values of volumetric fractions must stay inside or on the boundary of π , the tetrahedron shown in Figure 1. For instance, if the values of a volumetric fraction calculated by (17) fall outside the region π , the projection are prescribed in such a way that the result will be pulled to the nearest point on the boundary of the tetrahedron.

3. NUMERICAL SIMULATIONS

In order to evaluate the response predicted by the proposed model, a SMA specimen which properties are presented in Table 1, is subjected to a thermomechanical loading.

Table 1 - Mechanical properties.

E_A (GPa)	E_M (GPa)	α (GPa)	L (MPa/°C)	T_M (°C)
67.0	26.3	0.228	61.6	18.4

At first, the pseudoelastic effect is contemplated regarding a SMA specimen subjected to a mechanical loading with a constant temperature ($T = 60^\circ\text{C}$). The stress-strain curve for stress and strain driving cases and different values of the parameter η , are presented in Figure 2. Notice that the strain driving case predicts a softening behavior. Further, it should be pointed out that there are two different elastic moduli for the austenitic and martensitic phase.

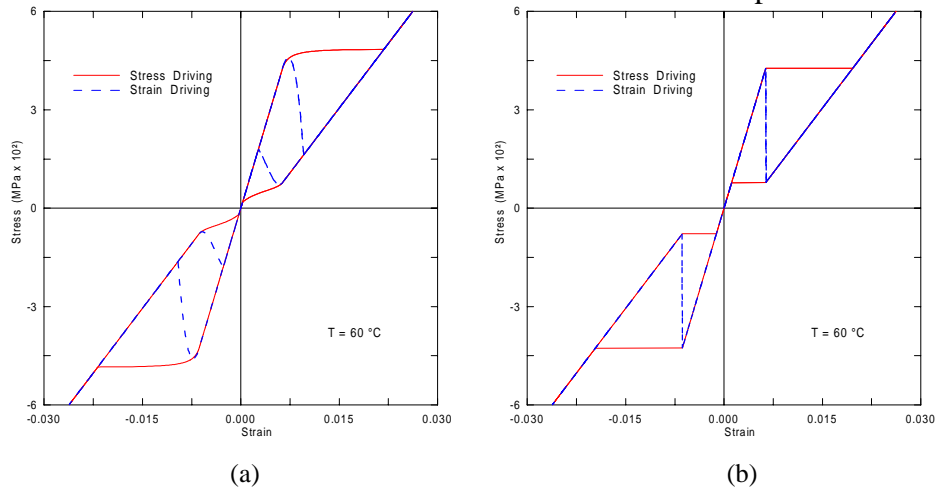


Figure 2 - Pseudoelastic effect ($T = 60^\circ\text{C} > T_A$). (a) $\eta = 7 \times 10^4$ MPa.s; (b) $\eta = 7 \times 10^{-4}$ MPa.s

The shape memory effect is now contemplated regarding a thermomechanical loading depicted in Figure 3a. Firstly, one conceives a constant temperature $T = 40^\circ\text{C}$, where the martensitic phase is stable. The dissipation parameter is $\eta = 7 \times 10^4$ MPa.s. After mechanical loading-unloading process (Figure 3a), the specimen presents a residual strain that can be eliminated by a subsequent thermal loading (Figure 3a). Notice that the stress-strain-temperature curve (Figure 3b) represents the shape memory effect. Further, it is important to observe that there is a stable phase, associated with the twinned martensite, when the specimen is free of stress.

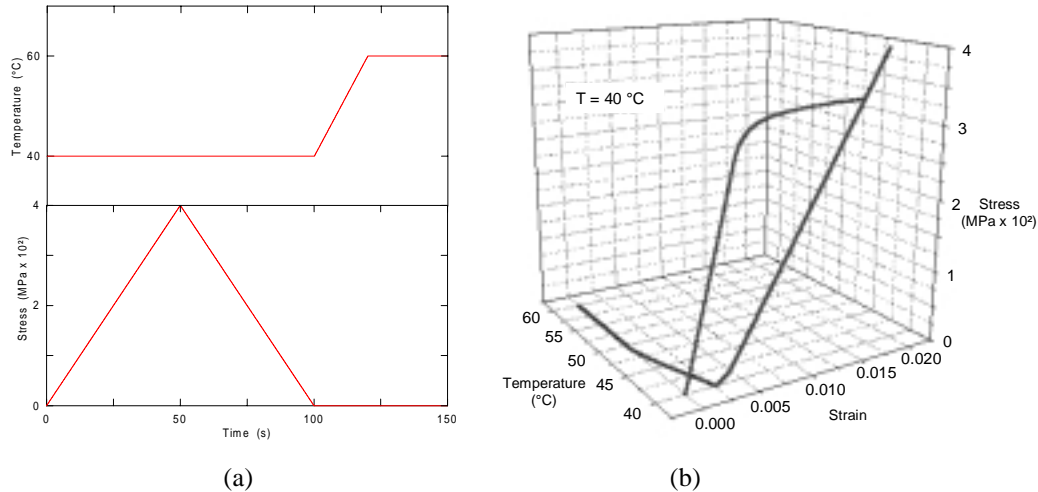


Figure 3 - Shape Memory effect.

4. CONCLUSIONS

The present contribution proposes a new one-dimensional constitutive model with internal constraint to describe SMA behavior. The proposed theory considers the twinned martensite in the formulation and, as a consequence, there is a stable phase when the material is free of stress at low temperatures. The consideration of different elastic moduli for austenite and martensite is another improvement of the theory. The inclusion of the constraint which establishes that the detwinned martensites does not exist in the absence of strain, permits to describe thermoelasticity behavior. A numerical procedure is developed and numerical results show that the proposed model are capable to describe shape memory and pseudoelastic effects. Some features are still needed to be contemplated in the proposed model and one could mention the elimination of the softening behavior for strain driving case and also the internal loops observed during cyclic loads associated with incomplete phase transformations.

5. REFERENCES

- Abeyaratne, R., Kim, S.J. & Knowles, J.K., 1994, “A One-Dimensional Continuum Model for Shape Memory Alloys”, *Int. J. Solids and Structures*, v.31, pp.2229-2249
- Auricchio, F. & Lubliner, J., 1997, “A Uniaxial Model for Shape Memory Alloys”, *Int. J. of Solids and Structures*, v.34, n.27, pp. 3601-3618.
- Auricchio, F. & Sacco E., 1997, “A One-Dimensional Model for Superelastic Shape Memory Alloys with Different Elastic properties Between Austenite and Martensite”, *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, v. 32, n.6, pp.1101-1114
- Auricchio, F., Taylor, R.L. & Lubliner, J., 1997, “Shape-Memory Alloys: Macromodeling and Numerical Simulations of the Superelastic Behavior”, *Comp. Methods in Applied Mech. and Eng.*, v.146, pp. 281-312.
- Bertran, A., 1982, “Thermo-Mechanical Constitutive Equations for the Description of Shape Memory Effects in Alloys”, *Nuclear Eng. and Design*, v.74, pp. 173-182.
- Birman, V., 1997, “Review of Mechanics of Shape Memory Alloy Structures”, *Applied Mechanics Review*, v. 50, pp.629-645.

- Boyd, J.G. & Lagoudas, D.C., 1994, “Constitutive Model for Simultaneous Transformation and Reorientation in Shape Memory Alloys”, *Mech. of Phase Transf. and Shape Memory Alloys*, L.C. Brinson and B. Moran (eds), ASME New York, pp. 159-177.
- Brinson, L.C., 1993, “One Dimensional Constitutive Behavior of Shape Memory Alloys: Thermomechanical Derivation with Non-Constant Material Functions and Redefined Martensite Internal Variable”, *J. Intelligent Material Systems and Structures*, n.4, pp.229-242.
- Eringen, A.C., 1967, “*Mechanics of Continua*”, John Wiley & Sons.
- Falk, F., 1980, “Model Free-Energy, Mechanics and Thermodynamics of Shape Memory Alloys”, *ACTA Metallurgica*, v.28, pp.1773-1780.
- Fremond, M., 1987, “Matériaux à Mémoire de Forme”, *C.R. Acad. Sc. Paris*, Tome 34, s.II, n.7, pp. 239-244.
- Ivshin, Y. & Pence, T.J., 1994, “A Constitutive Model for Hysteretic Phase Transition Behavior”, *Int. J. Eng. Sci.*, n.32, pp. 681-704.
- Liang, C. & Rogers, C.A., 1990, “One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials”, *J. Intelligent Material Systems and Structures*, n.1, pp.207-234.
- Motta, L.B., Guillén, L.L., Mamiya, E.N. & Vianna, D.M., 1999, “A Study on the Hardening in Particular Model for Pseudoelastic Materials”, *COBEM 99 - 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering*.
- Rockafellar, R.T., 1970, “*Convex Analysis*”, Princeton Press.
- Rogers, C.A., 1995, “Intelligent Materials”, *Scientific American*, September, pp.122-127.
- Savi, M.A. & Braga, A.M.B., 1993a, “Chaotic Vibrations of an Oscillator with Shape Memory”, *J. Brazilian Society for Mechanical Sciences - RBCM*, v.XV, n.1, pp.1-20, 1993.
- Savi, M.A. & Braga, A.M.B., 1993b, “Chaotic Response of a Shape Memory Oscillator with Internal Constraints”, *COBEM 93 - 12th Brazilian Congress of Mechanical Engineering*.
- Schroeder, T.A. & Wayman, C.M., 1977, “The Formation of Martensite and the Mechanism of the Shape Memory Effect in Single Crystals of Cu-Zn Alloys”, *Acta Metallurgica*, v.25, pp.1375.
- Silva, E.P., 1995, “*Modelagem Mecânica de Transformações de Fase Induzidas por Tensões em Sólidos*”, Dissertação de Mestrado, UnB - Departamento de Engenharia Mecânica.
- Souza, A.C., Mamiya, E.N. & Zouain, N., 1998, “Three-Dimensional Model for Solids Undergoing Stress-induced Phase Transformations”, *European J. Mechanics A - Solids*, v.17, pp.789-806.
- Sun, Q.P. & Hwang, K.C., 1993, “Micromechanics Modelling for the Constitutive Behavior of Polycrystalline Shape Memory Alloys: II-Study of the Individual Phenomena”, *J. Mech.Phys. Solids*, v.41, n.1, pp.19-33.
- Tanaka, K. & Nagaki, S., 1982, “Thermomechanical Description of Materials with Internal Variables in the Process of Phase Transformation”, *Ingenieur – Archiv.*, v.51, pp.287-299.
- Ortiz, M., Pinsky, P.M. & Taylor, R.L., 1983, “Operator Split Methods for the Numerical Solution of the Elastoplastic Dynamic Problem”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v.39, pp.137-157.
- Zhang, X.D., Rogers, C.A. & Liang, C., 1991, “Modeling of Two-Way Shape Memory Effect”, *ASME - Smart Structures and Materials*, v.24, pp.79-90.

ON POLAR DECOMPOSITION AND SUM DECOMPOSITION OF NONLINEAR GEOMETRIC FIELD THEORY OF CONTINUUM MECHANICS

Wang Chong

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Departamento de Tecnologia, 98280-000, Panambi, RS, Brasil. E-mail: wang@panambi.unijui.tche.br

Abstract

This work addresses the fundamentals of nonlinear geometric field theory of continuum mechanics. Two decomposition theories: the classical *polar decomposition* ($\mathbf{F}=\mathbf{R}\mathbf{U}=\mathbf{V}\mathbf{R}$) and the *sum decomposition* ($\mathbf{F}=\mathbf{S}[\text{strain}]+\mathbf{R}[\text{rotation}]$) for the deformation gradient (\mathbf{F}) are introduced. Those two theorems both give definitions for finite strain and local rotation. However the strain defined by the classical polar decomposition in the initial configuration of an embedding co-moving coordinate reference system is non-unique due to the non-commutative property of matrix products but the one defined by the sum decomposition in the deformed configuration is unique. The conception of rotation in polar decomposition is referred to the rigid body rotation of a mass particle while the one in sum decomposition is related to the curl of the particle. The non-unique strain and rigid body rotation conception is contributed to that the classical polar decomposition theorem is set in mathematics but not in physics of deformation. Some works of successfully applying the sum decomposition theorem have been mentioned at the end of this paper. This work suggests that the sum decomposition theorem will show its especial value in bio-mechanics field where large deformation and finite rotation are generally involved.

Keywords: Non-linear continuum mechanics, Polar decomposition, Sum decomposition, Large deformation and finite rotation, Co-moving coordinate system

1. INTRODUCTION

In non-linear continuum mechanics, to separate deformation from rotation out of a given displacement field is an important study subject, as rotation would result large and unreal strain. It is well known that when a body deforms, each one of the small segments passing through a point in the body will be stretched and rotate. For a large displacement field, which is generally involved in finite rotation, the formula for small strain is not applicable, therefore, definition for large strain must be given reasonably. Until now, there remain only three definitions of finite strain which are rigorous in mathematical character, they are the finite strains (a) defined by metric tensor, the so called Green's strain, (b) defined by polar decomposition theorem (Truesdell & Noll, 1965) and (c) defined by the sum decomposition theorem (Chen, 1979).

As for Green's strain, the finite strain and finite rotation are defined separately, it is not compatible in mathematical sense. Moreover, Green's strain is not suitable for engineering measure due to the length variation of a small segment emerges in quadratic form $(ds/ds_0)^2$.

Truesdell and Noll (1965) presented a method to decompose strain and rotation from a given deformation gradient field, the so called classical polar decomposition. The presentation of the decomposition is based only on mathematics consideration i.e. the deformed configuration of a mass particle can be achieved by a pure stretch transformation proceeding to a rigid rotation transformation or vice versa. This decomposition unavoidably leads to two distinct strains respectively to strain pre-rotation or rotation pre-strain. Generally, people apply the polar decomposition without questioning its physical reality. Almost all of deformation analysis software has applied the polar decomposition to solve large deformation problems.

Chen (1979) proposed a new decomposition theorem, named sum decomposition theorem, in which strain and local rotation occur at the same time without order and the strain is determined uniquely. Moreover, local rotation is simply and analytically given, which is relative to the curl of the particle. Since then, some examples successfully applying the sum decomposition theorem have been reported sequentially.

At the beginning of this paper, the polar decomposition and the sum decomposition are introduced respectively. To show the difference between those two decompositions, four simple examples of finite deformation in plane are given. By comparison, the merits of the sum decomposition are shown. In the later part of the paper, the performance comparison between the software based on the sum decomposition and the ADINA based on the polar decomposition is given (Li & Chen, 1994). The results show that the software based on the S-R decomposition is much more efficient than the ADINA, even though no significant difference in the displacement magnitudes respectively obtained by the software and by the ADINA was found.

2. POLAR DECOMPOSITION AND SUM DECOMPOSITION

To describe any degree of large deformation and rotation of a deformable body, double coordinate systems are usually required. One is a fixed system X^i (inertial system) and the other is a co-moving system x^i (or natural system) which is embedded in the body. Let \mathbf{g}_i° be the local basis vectors of co-moving system before deformation; it changes to \mathbf{g}_i after deformation (Fig. 1). The transformation $\mathbf{g}_i^\circ \rightarrow \mathbf{g}_i$ is realized in the form:

$$\mathbf{g}_i = F_i^j \mathbf{g}_j^\circ = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \mathbf{g}_j^\circ, \quad F_i^j = \delta_i^j + u^j|_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

where F_i^j is a function of deformation gradient and $u^j|_i$ denotes the covariant derivation of displacement component u^j , which is defined in the initial co-moving system \mathbf{g}_i° , with respect to co-moving coordinate x^i .

2.1 Polar decomposition

In polar decomposition, $u^j|_i$ becomes conventional derivation of displacement component u^j i.e. u_i^j , and $x^i = X^i$ (the coordinates of the fixed system). The polar decomposition says that the deformation gradient can always be decomposed into a product of

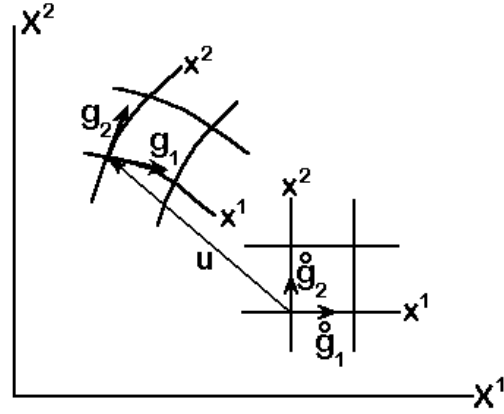


Figure 1 Transformation of the basis vectors of co-moving coordinates system before and after deformation

two matrices, a symmetric stretch matrix \mathbf{U} or \mathbf{V} and an orthogonal matrix \mathbf{R} corresponding to a rigid principal axes rotation i.e.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (2)$$

Equation (2) is interpreted in that the total deformation is obtained by first applying the stretch and then rotation (respect to the first equality) or vice versa (to the second equality). We see that this decomposition unavoidably leads two distinct stretch strains, in other words, the decomposition is non-unique. However, real deformation is that stretch and rotation occur at same time, no order is involved. Therefore Eq. (2) is only resulted from mathematical consideration instead from physics. Apart from the non-unique strain, the computation for the strain and rotation is quite complicate because no analytic formulae are found.

2.2 Sum decomposition (S-R)

The sum decomposition theorem (Chen, 1979) proved that: for a physically possible transformation induced by a deformable body point set, F_i^j can be decomposed into a summed representation of a symmetrical transformation and an orthogonal transformation i.e.

$$F_i^j = S_i^j + R_i^j \quad (3)$$

where S_i^j and R_i^j are the components of strain tensor and rotation tensor respectively, which are determined as

$$S_j^i = \frac{1}{2}(u^i|_j + u^i|_j^T) - (1 - \cos\vartheta)L_k^i L_j^k \quad (4)$$

$$R_j^i = \delta_j^i + L_j^i \sin\vartheta + (1 - \cos\vartheta)L_k^i L_j^k \quad (5)$$

$$L_j^i = \omega_j^i / \sin\vartheta, \quad \omega_j^i = \frac{1}{2}(u^i|_j - u^i|_j^T) \quad (6)$$

In the above δ_i^j is Kronecker identity tensor and L_j^i is a two order anti-symmetric tensor dual to the direction vector \boldsymbol{l} of the rotation axis of local rotation, which is defined as

$$\boldsymbol{l} = \frac{1}{2\sin\vartheta} \text{rot}\boldsymbol{u} \quad (7)$$

Equation (7) relates the local rotation angle ϑ to the curl of a mass particle, which is evaluated by

$$\begin{aligned} \vartheta &= \pm \arcsin(-\omega_j^i \omega_i^j)^{1/2} \\ &= \pm \arcsin \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{(u^1|_2 - u^1|_2^T)^2 + (u^2|_3 - u^2|_3^T)^2 + (u^3|_1 - u^3|_1^T)^2} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

The positive sign in Eq. (8) is used for counterclockwise rotation. For practical computation, the tensor components must be changed into physical components. Let $\bar{u}^j|_i$ denote the physical component of $u^j|_i$, then we have (Chen, 1988)

$$\bar{u}^j|_i = \sqrt{\frac{g_{(jj)}}{g_{(ii)}}} u^j|_i \quad (9)$$

(ii), (jj) indicate no sum over the double index, and the local rotation angle should be

$$\vartheta = \pm \arcsin \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{u}^1|_2 - \bar{u}^1|_2^T)^2 + (\bar{u}^2|_3 - \bar{u}^2|_3^T)^2 + (\bar{u}^3|_1 - \bar{u}^3|_1^T)^2} \right\} \quad (10)$$

Let the co-moving system before deformation be coincident with the fixed system, then

$$g_{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{g}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}_j = \delta_{ij} \quad (11)$$

and covariant derivation is identical to conventional derivation, i.e.

$$u^j|_i = \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \quad (12)$$

Hence

$$\bar{u}^j|_i = \frac{1}{\sqrt{g_{(ii)}}} \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \quad (13)$$

It is especially noted that ϑ is different from the rigid body rotation described by the polar decomposition theorem. When a body deforms, in general, the rotation of each line segment passing through a point differs from another line segment. So ϑ represents the mean rotation effect of all line segments passing through the point, a non-simple arithmetic mean effect. It might be said that ϑ scales the state of local rotation. As the advantages of

mathematical uniqueness and physical reality, the S-R decomposition theorem has been used widely (Qin & Chen, 1988; Chen, 1989; Shang & Chen, 1989; Chen, 1989; Wang & Chen, 1991; Li & Chen 1994; Chen & Liu, 1995).

For a plane problem the physical components of strain tensor can be written as

$$\bar{S}_1^{\bar{1}} = \frac{\partial u}{\partial s_x} + (1 - \cos \vartheta) \quad (14)$$

$$\bar{S}_2^{\bar{2}} = \frac{\partial v}{\partial s_y} + (1 - \cos \vartheta) \quad (15)$$

$$\bar{S}_2^{\bar{1}} = \bar{S}_1^{\bar{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial s_x} + \frac{\partial u}{\partial s_y} \right) \quad (16)$$

and local rotation angle is defined by

$$\vartheta = \pm \arcsin \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial s_x} - \frac{\partial u}{\partial s_y} \right) \right] \quad (17)$$

where s_x and s_y are the arc lengths respectively along co-moving coordinate lines $x^1 = x$ and $x^2 = y$.

3. EXAMPLES OF PLANE FINITE DEFORMATION

Table 1 exhibits four examples of plane finite deformation to help ones to understand, by comparison, the finite strains and local rotations defined respectively by the polar decomposition theorem and the strain-rotation decomposition theorem. It should be noted that the finite strain defined by the strain-rotation decomposition is measured in the deformed configuration but the one by the polar decomposition is measured in the undeformed configuration, which has been seen clearly in the examples of uniaxial tensile and homogeneous dilation. In the later the transformation carries a square A: 3×3 to

A': $4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$ (Fig. 2), the dimension change: $\frac{l-l_0}{l} = \frac{4\sqrt{2}-3}{4\sqrt{2}}$ shown as in the strain

defined by the strain-rotation decomposition or $\frac{l-l_0}{l_0} = \frac{4\sqrt{2}-3}{3}$ defined by the polar

decomposition. For the fourth example, we obtain two distinct strain tensors from the polar decomposition. Which one is correct? If both of them is correct, then the strain energy per unit volume is unique?

Based on the sum decomposition, Li & Chen developed the so called UC software, then, used it to evaluate the displacement of a cantilever beam respectively subjected to a concentrated force at the free end or to a uniformly distributed load. They compared the efficiency of the UC with the ADINA. The displacements obtained from the UC and the ADINA are quite close, but the total number of time increment steps required by the ADINA is sixteen times the one by the UC. The detailed comparison is shown in Table 2. From the table, one can see that the UC software has less time expense in computation than the ADINA. It would be understood that the sum decomposition is more reasonable than the polar decomposition.

Table 1 Comparison of S-R and RU-VR (polar decomposition) measurements. (\bar{x}, \bar{y}) is the transformed coordinates of a material point (x, y) in the fixed system $\{x, y\}$; $[\varepsilon'_{ij}]_U$, the strain determined by the right stretch tensor U and $[\varepsilon'_{ij}]_V$, the one by the left stretch tensor V , where U and V are defined by the polar decomposition theorem.

Example	Transformation function	Strain and rotation of S-R decomposition	Strain and rotation of polar decomposition
Uniaxial tensile	$\bar{x} = (1 + \lambda)x$ $\bar{y} = y$	$[\bar{S}_j^i] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 + \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\vartheta = 0$	$[\varepsilon'_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\theta = 0$
Pure shear	$\bar{x} = x + \text{tg}\gamma \cdot y$ $\bar{y} = \text{tg}\gamma \cdot x + y$	$[\bar{S}_j^i] = \begin{bmatrix} 0 & \sin\gamma \\ \sin\gamma & 0 \end{bmatrix}$ $\vartheta = 0$	$[\varepsilon'_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \text{tg}\gamma \\ \text{tg}\gamma & 0 \end{bmatrix}$ $\theta = 0$
Large rotation and dilation of a square	$\bar{x} = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}y$ $\bar{y} = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}y$	$[\bar{S}_j^i] = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{2}-3}{4\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{4\sqrt{2}-3}{4\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ $\vartheta = 45^\circ$	$[\varepsilon'_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{2}-3}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4\sqrt{2}-3}{3} \end{bmatrix}$ $\theta = 45^\circ$
Large rotation and distortion of a square	$\bar{x} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y$ $\bar{y} = \frac{5}{4}x + y$	$[\bar{S}_j^i] = \begin{bmatrix} 0.1541 & 0.0482 \\ 0.0482 & 0.5255 \end{bmatrix}$ $\vartheta = 61.67^\circ$	$[\varepsilon'_{ij}]_U = \begin{bmatrix} 0.3368 & 0.1596 \\ 0.1596 & 0.7965 \end{bmatrix}$ $[\varepsilon'_{ij}]_V = \begin{bmatrix} 0.5627 & -0.2793 \\ -0.2793 & 0.5627 \end{bmatrix}$ $\theta = 61.39^\circ$

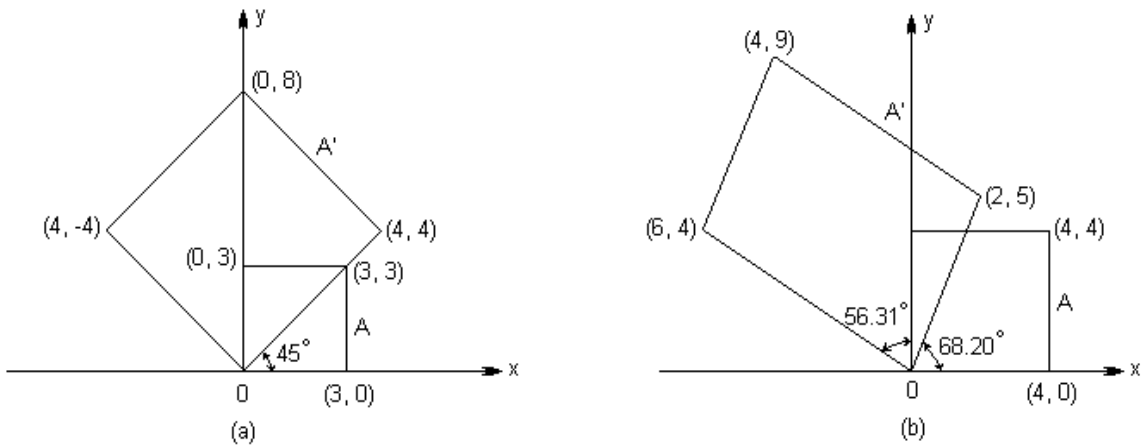


Fig. 2 (a) Large rotation and dilation of a square; (b) large rotation and distortion of a square.

Table 2 Comparison of efficiency of the UC software with the ADINA (Li & Chen, 1994); all the calculation were performed in double precision on a VAX 11/780 computer.

Cantilever beam subjected to a concentrated force at the free end				Cantilever beam under a uniformly distributed load			
Program	Load steps	No. Of iterations	CPU time (s)	Program	Load steps	No. Of iterations	CPU time (s)
UC	10	57	99	UC	10	61	99
ADINA	160	1172	900	ADINA	150	1040	673

4. DISCUSSION

As being set on mathematics consideration instead of physics, the polar decomposition only gives non-unique strains. The rigid rotation conceptually described by the polar decomposition does not exist in the process of deformation. The local rotation and stretch of a deformable particle occur always at same time without the order of stretch pre-rotation or rotation pre-stretch. Although the polar decomposition has used widely, its reasonableness in physics should be studied. Perhaps this question would be clarified when strain energy evaluation is required. Owing to its reasonableness in physics and simplicity in computation, the sum decomposition will obtain more application especially in bio-mechanics field where large deformation and rotation are generally involved.

Acknowledgements

The author would like to thank CNPq, CAPES and FAPERGS for their financial supports.

REFERENCES

- Chen, Z. D., 1979, Geometric field theory of finite deformation in continuum mechanics, Acta Mechanica Sinica, Vol.2, pp.107-117. (in Chinese)
- Chen, Z. D., 1988, Nonlinear Continuum Mechanics, China University of Mining and Technology Press, Xuzhou, China. (in Chinese)
- Chen, Z. D., 1989, Energy principle and incremental law for large deformation of bio-muscle, Proceedings of International Congress of Applied Mechanics, ed Zeng, Z. M., International Academic Publisher, Beijing, pp.1067-1072.
- Chen, Z. D., 1989, Nonlinear irreversible thermodynamics and constitutive law of finite elasto-plastic deformation, in Advances in Constitutive Laws for Engineering Materials, ed Fan, J. H. and Murakami, S., Pergamon Press, Beijing.
- Chen, Z. D. & Liu, X. C., 1995, Nonlinear geometric field theory and viscoplasticity of large deformation, Proceedings of the ASME Materials Division, Vol. 69, pp.429-440.
- Li, P. & Chen, Z. D., 1994, The updated co-moving coordinate formulation of continuum mechanics based on the S-R decomposition theorem, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 114, pp. 21-34.
- Qin, Z. & Chen, Z. D., 1988, Large deformation analysis of shells with finite element method based on the S-R decomposition theorem, Computer & Structures, Vol.30, pp.957-961.
- Shang, Y. & Chen, Z. D., 1989, On the objective stress rate in co-moving system, J. of Applied Mathematics and Mechanics, Vol.10, pp.103-112.

- Shang, Y. & Chen, Z. D., 1989, On large deformation unilateral contact problem with friction (I) — Incremental variational equations, *J. of Applied Mathematics and Mechanics*. Vol. 10, pp.1107-1117.
- Truesdell, C. & Noll, W., 1965, The nonlinear field theories of mechanics, in *Handbuch de Physik*, Band III/3, edited by Flugge, S., Springer-Verlag, Berlin.
- Wang, C & Chen, Z. D., 1991, Microrotation effects in material fracture and damage, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 38, pp.147-155.
- Wang, C. & Chen, Z. D., 1991, Microrotation analysis applied to material cracking and toughness, *Int. J. Fracture*, Vol. 54, pp.359-369.

ANÁLISE DA DELAMINAÇÃO EM PLACAS COMPÓSITAS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Iran S. Aragão Filho

Marcelo A. Savi

Instituto Militar de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais

22.290.270 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

E-Mail: savi@epq.ime.eb.br

Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre a delaminação em placas compósitas utilizando-se o método de elementos finitos para simular numericamente o comportamento de uma placa de Kirchhoff-Love. As simulações são realizadas considerando um elemento finito retangular, com um nó em cada vértice, possuindo 6 graus de liberdade por nó. As tensões interlaminares são calculadas a partir de um pós-processamento que considera as equações de equilíbrio tridimensionais. Uma análise de falha é desenvolvida considerando a delaminação, o escoamento do material e o rompimento das fibras e da matriz. Esta análise é feita utilizando os critérios de Tsai-Hill, de Hashin e o da Delaminação Quadrática. A inclusão das tensões interlaminares nos critérios de Tsai-Hill e de Hashin definem outros dois critérios de falha. Os resultados mostram que o aumento do grau de anisotropia torna a análise da delaminação mais importante.

Palavras-chave: Compósitos, Delaminação, Elementos Finitos.

1. INTRODUÇÃO

O elemento básico de um material compósito é a *lâmina* que, usualmente, é acoplada a outras lâminas para formar o que se chama de *laminado*. Cada lâmina é reforçada por fibras que podem ter uma orientação genérica. Um material compósito é anisotrópico no sentido de que suas propriedades dependem da orientação dos eixos coordenados. Tipicamente, existem propriedades diferentes nas direções longitudinal e transversal às direções das fibras, o que define um comportamento ortotrópico de uma lâmina, neste sistema de eixos.

A degradação de um laminado pode ser dividida em dois tipos: delaminação e dano intralaminar. A delaminação é caracterizada pela perda de adesão entre duas lâminas adjacentes. A evolução deste dano pode causar o descolamento das lâminas e uma conseqüente perda de rigidez e de resistência no laminado. O dano intralaminar consiste numa trinca na matriz, um descolamento entre fibra e matriz ou uma ruptura da fibra.

A delaminação é usualmente causada pelo crescimento de tensões interlaminares nas bordas livres, próximas de falhas e trincas ou nas descontinuidades do material. Outros tipos de delaminação incluem as causadas pela flambagem na lâmina ou pela micro-flambagem na fibra, ou ainda como uma conseqüência de impactos que produzem uma delaminação local. A maioria dos trabalhos sobre delaminação é tratada no contexto da Mecânica da Fratura, considerando os

modos de falhas do material. Outra linha de análise considera modelos constitutivos que utilizam variáveis de estado para descrever o comportamento da interface interlaminar. De uma maneira geral, despreza-se a espessura desta interface, considerando-a como uma superfície, e avaliando-se a adesão do contato de duas lâminas adjacentes. A perda de adesão, e a conseqüente perda de contato em pontos das lâminas, caracteriza o descolamento ou a delaminação destes pontos (Point & Sacco, 1996). Vieira Carneiro & Savi (1999) propõem um modelo para descrever o fenômeno onde as tensões interlaminares são determinadas a partir de uma modificação da teoria de laminados proposta por Bai *et al.* (1997), que utiliza uma interface de espessura finita. Uma outra linha para determinar as tensões interlaminares utiliza o método dos elementos finitos. Reddy (1997) apresenta uma revisão sobre o tema, apresentando inúmeras referências.

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre a delaminação em placas compósitas utilizando-se o método de elementos finitos para simular numericamente o comportamento de uma placa de Kirchhoff-Love. As simulações são feitas considerando um elemento finito retangular, com um nó em cada vértice, possuindo 6 graus de liberdade por nó. As tensões interlaminares são calculadas a partir de um pós-processamento que considera as equações de equilíbrio tridimensionais. Este procedimento permite avaliar as tensões fora do plano a partir de uma teoria plana. A matriz de rigidez elementar, assim como os cálculos do pós-processamento, são obtidos através da manipulação simbólica das equações de governo. Uma análise de falha é desenvolvida considerando a delaminação, o escoamento do material e o rompimento das fibras e da matriz. Esta análise é feita utilizando os critérios de Tsai-Hill, de Hashin e o da Delaminação Quadrática. A inclusão das tensões interlaminares nos critérios de Hashin e de Tsai-Hill definem outros dois critérios de falha (Aragão Filho, 2000). Os resultados mostram algumas comparações entre estes critérios para diferentes situações físicas.

2. LÂMINA ORTOTRÓPICA

Considere uma placa plana, reforçada por fibras, que possui espessura desprezível na presença das outras dimensões. Admite-se que as fibras estão dispostas na matriz de maneira homogênea, e que inexistem quaisquer efeitos de concentração de tensões (Figura 1).

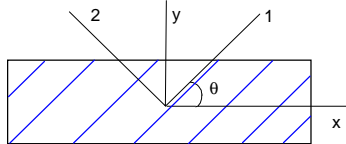


Figura 1. Placa plana reforçada com fibras.

No sistema principal, eixos 1-2, a relação entre tensões e deformações pode ser simplificada a partir da lei de Hooke generalizada para o caso ortotrópico, de tal forma que,

$$\hat{\sigma}_I = \hat{C}_{IJ} \hat{\epsilon}_J \quad (1)$$

onde $I, J = 1, 2, 3$; \hat{C}_{IJ} são constantes elásticas que podem ser relacionadas com as constantes de engenharia (Gibson, 1994); $\hat{\sigma}_I$ e $\hat{\epsilon}_I$ são vetores construídos a partir das componentes dos tensores de tensão e deformação, respectivamente, no plano xy . A convenção soma é adotada (Eringen, 1967). A ortotropia da lâmina estabelece simetrias que definem a forma de \hat{C}_{IJ} (Gibson, 1994).

A relação entre as componentes de tensão e deformação, segundo eixos quaisquer x - y , são encontradas através da rotação do sistema de referência.

$$\hat{\sigma}_I = T_{IK} \sigma_K ; \quad \hat{\varepsilon}_I = T_{IK} \varepsilon_K \quad (2)$$

onde T_{IK} é a matriz de rotação (Gibson, 1994). Desta forma, tem-se a relação constitutiva nos eixos x - y ,

$$\sigma_I = C_{IJ} \varepsilon_J \quad (3)$$

sendo $C_{IJ} = T_{IM}^{-1} \hat{C}_{MK} T_{KJ}$. Considerando γ_I como as componentes do vetor ε_J onde a deformação cisalhante $\varepsilon_3 = \varepsilon_{xy}$ é substituída pela deformação de engenharia $\gamma_3 = \gamma_{xy}$, a equação constitutiva deve ser reescrita, substituindo C_{IJ} por Q_{IJ} , que leva em conta esta alteração.

3. PLACA LAMINADA

Considere agora uma placa constituída de lâminas de material compósito submetida a esforços normais e de flexão. Admite-se a hipótese cinemática de Kirchhoff e que as lâminas são de material ortotrópico que se curvam de forma conjunta e uniforme, sem descolamento. Desta forma, a equação (3) estabelece a relação constitutiva para cada lâmina. A hipótese cinemática implica que,

$$\gamma_I = \gamma_I^0 + z \kappa_I \quad (4)$$

onde γ_I^0 é a deformação da superfície neutra e as curvaturas κ_I são definidas a seguir,

$$\kappa_1 = -w_{,xx} ; \quad \kappa_2 = -w_{,yy} ; \quad \kappa_3 = -2w_{,xy} \quad (5)$$

As resultantes de tensões são dadas por,

$$N_I = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_I^k dz = \sum_{k=0}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_I^k dz \right) \quad (6)$$

$$M_I = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_I^k z dz = \sum_{k=0}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_I^k z dz \right) \quad (7)$$

Usando a hipótese cinemática de Kirchhoff (4) e a equação constitutiva (3), a seguinte equação é obtida,

$$N_I = A_{IJ} \gamma_J^0 + B_{IJ} \kappa_J \quad (8)$$

$$M_I = B_{IJ} \gamma_J^0 + D_{IJ} \kappa_J \quad (9)$$

onde

$$A_{IJ} = \sum_{k=0}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{IJ}^k dz \right) = \sum_{k=0}^n Q_{IJ}^k (z_k - z_{k-1}) \quad (10)$$

$$B_{IJ} = \sum_{k=0}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{IJ}^k z dz \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n Q_{IJ}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (11)$$

$$D_{IJ} = \sum_{k=0}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{IJ}^k z^2 dz \right) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n Q_{IJ}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (12)$$

A matriz A_{IJ} relaciona os esforços normais com as deformações na superfície média; D_{IJ} , por outro lado, relaciona os momentos com as curvaturas; B_{IJ} descreve o acoplamento entre os esforços normais e as curvaturas, assim como dos momentos com as deformações na superfície média.

4. TENSÕES INTERLAMINARES

O estudo das tensões interlaminares é de grande importância na análise da delaminação de materiais compósitos e a sua determinação requer uma análise tridimensional de tensões (Gibson, 1994). Em uma lâmina, para regiões suficientemente distantes das descontinuidades geométricas, como por exemplo as bordas livres, pode-se considerar que existe o estado plano de tensões. Pipes e Pagano (1970) mostram que mesmo em um laminado carregado uniaxialmente, há uma região de contorno ao longo das bordas livres onde as tensões existem no estado tridimensional. Esta região é aproximadamente igual a espessura do laminado. O comportamento das tensões interlaminares próximo das bordas pode ser avaliada a partir das equações de equilíbrio tridimensionais, da seguinte forma:

$$\tau_{xz}^k(z) = - \int_{z_k}^z (\sigma_{1,1}^k + \sigma_{3,2}^k) dz + C_1^k(x, y) \quad (13)$$

$$\tau_{yz}^k(z) = - \int_{z_k}^z (\sigma_{3,1}^k + \sigma_{2,2}^k) dz + C_2^k(x, y) \quad (14)$$

$$\sigma_z^k(z) = - \int_{-t/2}^z \tau_{yz,2} dz \quad (15)$$

Estudos mostram que diversos fatores influenciam as tensões interlaminares e, conseqüentemente, a delaminação dos compósitos (Pipes & Pagano, 1974; Pipes & Pagano, 1970; Bhat & Lagace, 1994; Herakovich, 1981).

5. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método de elementos finitos aproxima uma quantidade desconhecida em um domínio através de aproximações em subdomínios. As funções de aproximação são polinômios escritos em termos de seus valores nodais (Reddy & Ochoa, 1992). Neste trabalho, utiliza-se um elemento retangular de dimensões $2a$ e $2b$, nas direções x e y , respectivamente. Cada elemento possui um nó em cada vértice e dois sistemas de coordenadas: um local x_e-y_e e um sistema de

coordenadas naturais $\xi-\eta$, onde $\xi = x_e/a$ e $\eta = y_e/b$. Os sistemas possuem eixos paralelos e as origens são coincidentes no centro do elemento. Assim, os deslocamentos (u , v , w) são determinados por interpolações do tipo:

$$u = \sum_{j=1}^n U_j \psi_j(x, y), \quad v = \sum_{j=1}^n V_j \psi_j(x, y), \quad w = \sum_{j=1}^m W_j \phi_j(x, y) \quad (16)$$

onde (U_j , V_j) correspondem aos valores nodais de (u , v) e W_j corresponde aos valores nodais de w , que possui 4 valores associados: w , $w_{,x}$, $w_{,y}$ e $w_{,xy}$. A derivada mista $w_{,xy}$ é incluída na interpolação visando garantir a continuidade entre os elementos com relação a inclinação dos deslocamentos transversais. Todo o conjunto de deslocamentos e rotações são chamados deslocamentos nodais generalizados e estão associados com o elemento Ω^e . Os deslocamentos no plano (u , v) são aproximados a partir da interpolação linear de Lagrange, ψ_i , e portanto, $n = 4$. No caso do deslocamento transversal w , utiliza-se a interpolação cúbica de Hermite, ϕ_i , tomando-se $m = 16$ (Reddy, 1997). Após fazer as substituições adequadas a partir das equações de equilíbrio para o caso estático, obtém-se o seguinte modelo de elementos finitos:

$$0 = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_3 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} N_n \psi_i ds \quad (17)$$

$$0 = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_3 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_2 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} N_n \psi_i ds \quad (18)$$

$$0 = - \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} M_1 + 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} M_3 + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} M_2 + \phi_i q \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} \left(\phi_i V_n + \frac{\partial \phi_i}{\partial n} M_n \right) ds \quad (19)$$

onde N_n , V_n e M_n estão associados às condições de contorno. Estas equações também podem ser expressas na forma:

$$\sum_{\beta=1}^3 \sum_{j=1}^{n(\beta)} K_{ij}^{\alpha\beta} U_j^\beta - F_i^\alpha = 0, \quad i=1, 2, \dots, n(\alpha); \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (20)$$

Os coeficientes de rigidez $K_{ij}^{\alpha\beta}$ estão definidos em Reddy (1997).

Esta formulação é utilizada na implementação de um código computacional. As integrações e derivações são feitas a partir do manipulador simbólico do *Mathematica* e então, transportadas para o programa. Desta forma, a matriz de rigidez, o vetor força, as deformações, tensões no plano e tensões interlaminares são calculadas a partir de expressões obtidas nesse manipulador simbólico. Após calcular os valores nodais, efetua-se um pós-processamento onde são calculadas as tensões e as deformações no centro de cada elemento. A seguir, calculam-se as tensões interlaminares a partir das equações de equilíbrio. O próximo passo da análise é implementar os critérios de falha.

A análise de falha é desenvolvida considerando a delaminação, o escoamento do material e o rompimento das fibras e da matriz. Utilizam-se os critérios de Tsai-Hill, de Hashin e o da Delaminação Quadrática. A inclusão das tensões interlaminares nos critério de Hashin e de Tsai-

Hill definem outros dois critérios de falha. Desta forma, apresentam-se seis fatores de falha: dois referentes à delaminação, dois referentes ao escoamento do material e dois referentes a falha da matriz e das fibras (Aragão Filho, 2000). Para isso, consideram-se as tensões nas direções principais, avaliando os fatores de falha em cada elemento. A análise se inicia na superfície inferior do laminado, prosseguindo por todas as superfícies e interfaces, avaliando-se qual elemento possui o maior valor do fator de falha para cada critério.

6. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção, consideram-se algumas simulações realizadas com a formulação apresentada. Admita, então, uma placa quadrada de 0,4m de lado, com duas camadas $[45^\circ/\theta]$ de espessura constante igual a 0,002 m. O material é o T300/5208 cujas propriedades são apresentadas nas Tabelas 1-2. A placa está apoiada nos quatro lados e submetida a uma carga distribuída $q = 16\text{kN/m}^2$. Neste caso, se $\theta \neq 45^\circ$, a placa é assimétrica o que acarreta o fenômeno do acoplamento extensão-flexão. Este fenômeno pode ser verificado através da assimetria dos deslocamentos transversais, mostrado na Figura 2 para a placa $[45^\circ/70^\circ]$.

Tabela 1. Propriedades mecânicas dos materiais.

Material	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
T300/5208	131,0	13,0	6,4	0,38
E-Glass/470-36	24,4	6,9	2,9	0,32

Tabela 2. Resistências mecânicas dos materiais.

Material	S_L^+ (GPa)	S_L^- (GPa)	S_T^+ (GPa)	S_T^- (GPa)	S_{LT} (GPa)
T300/5208	1,4000	1,1380	0,0809	0,1890	0,0690
E-GLASS/470-36	0,5840	0,8030	0,0430	0,1870	0,0640

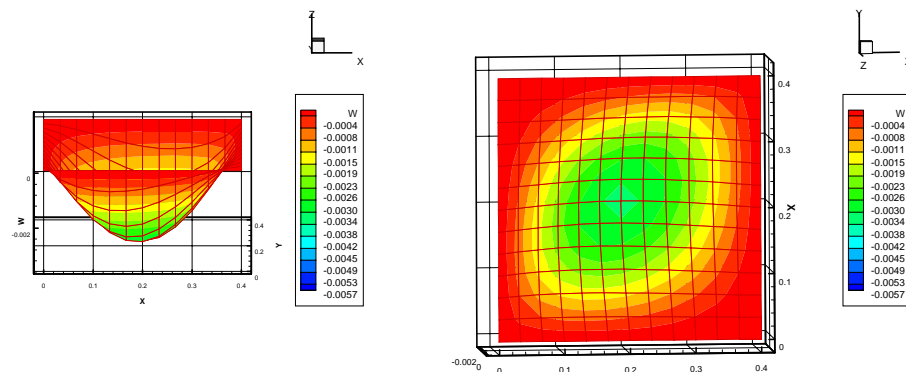


Figura 2 - Influência do acoplamento no deslocamento da placa de duas camadas de mesmo material $[45^\circ/70^\circ]$ e apoiada.

Visando avaliar diferentes configurações de placas, varia-se o ângulo θ desde zero até 90° . A Figura 3 mostra a variação dos fatores de falha, associados aos diferentes critérios, e do deslocamento máximo da placa. Os critérios de Tsai-Hill e de Hashin tridimensionais, que incluem as tensões interlaminares na análise, mostram-se mais conservativos do que os critérios

de delaminação. Em torno 20° , tem-se um crescimento das tensões interlaminares o que faz com que os fatores associados à delaminação cresçam. Uma vez que $\theta = 45^\circ$ significa um laminado com duas camadas com a mesma orientação, esta configuração representa um mínimo dos fatores de falha associados aos critérios de delaminação. Com relação ao deslocamento transversal máximo, tem-se um máximo em torno de 15° .

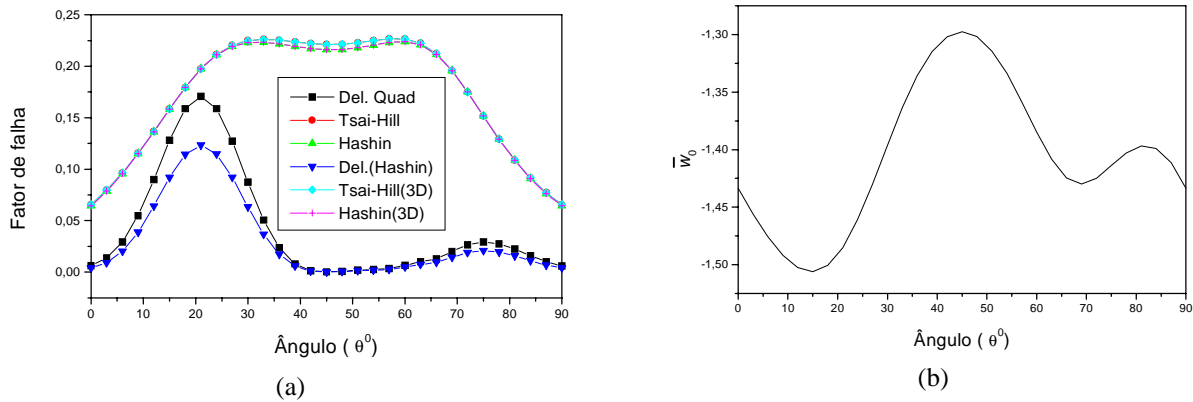


Figura 3 - Placa $[45^\circ/\theta]$, T300/5208 graphite/epoxy. Influência do ângulo das fibras na análise de falha (a), e nos deslocamentos transversais do centro (b).

Admita agora uma mudança no material da lâmina superior para o E-Glass/470-36 (Tabelas 1-2) o que faz com que o fenômeno da delaminação se torne mais importante. A placa está submetida a uma carga distribuída $q = 6\text{kN/m}^2$. A Figura 4 mostra a variação dos fatores de falha, associados aos diferentes critérios, e do deslocamento máximo da placa variando o ângulo θ desde 0° até 90° . Nesta nova placa, ocorre um aumento do grau de anisotropia o que acarreta uma tendência de aumento das tensões interlaminares. Isto é confirmado pelo aumento dos fatores de falha associados aos critérios de delaminação. O critério de Delaminação de Hashin é o mais conservativo para os ângulos entre 15° e 75° . Com relação aos deslocamentos, o comportamento é similar ao da placa anterior de um ponto de vista qualitativo. Quantitativamente, no entanto, a placa apresenta deslocamentos maiores.

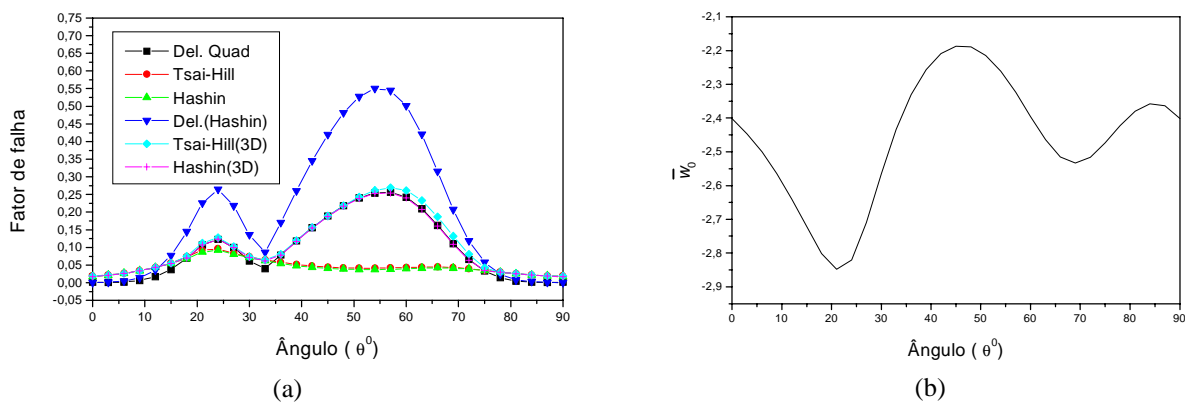


Figura 4 - Placa $[45^\circ/\theta]$, T300/5208 graphite/epoxy e E-glass/470-36. Influência do ângulo das fibras na análise de falha (a), e nos deslocamentos transversais do centro (b).

7. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta um estudo sobre a delaminação em placas compósitas utilizando-se o método de elementos finitos para simular numericamente o comportamento de uma placa de Kirchhoff-Love. As tensões interlaminares são calculadas a partir de um pós-processamento que considera as equações de equilíbrio tridimensionais. Uma análise de falha considera diferentes critérios para avaliar a importância na delaminação no projeto de uma placa compósita. O procedimento desenvolvido mostrou-se eficiente para analisar a delaminação em placas compósitas. Os resultados mostram que o aumento do grau de anisotropia, através da consideração de diferentes materiais nas lâminas e/ou diferentes configurações, faz com que a delaminação se torne preponderante em uma análise de falha.

8. REFERÊNCIAS

- Aragão Filho, I.S., 2000, “*Análise da Delaminação em Placas Compósitas Através do Método dos Elementos Finitos*”, Dissertação de Mestrado, IME - Dept. Eng. Mecânica e de Materiais.
- Bai, Q.S., Murakami, S. & Kanagawa, Y., 1997, “A Lamination Theory Incorporating the Effect of Interlaminar Deformation”, *Journal of Composite Materials*, v.31, No.20, pp.2052-2073.
- Bhat, N.V. & Lagace, P.A., 1994, “An Analytical Method for the Evaluation of Interlaminar Stress Due to Material Discontinuities”, *Journal of Composite Materials*, v.28 (3), pp.190 - 209.
- Herakovich, C.T., 1981, “On the Relationship Between Engineering Properties and Delamination of Composite Materials”, *Journal of Composite Materials*, v.15, pp.336-348.
- Eringen, A.C., 1967, “*Mechanics of Continua*”, John Wiley & Sons.
- Gibson, R.F., 1994, “*Principles of Composite Materials Mechanics*”, McGraw Hill.
- Pipes, R.B. & Pagano, N.J., 1970, “Interlaminar Stresses in Composite Laminates Under Uniform Axial Extension”, *Journal of Composite Materials*, v.4, pp.538-548.
- Pipes, R. B. & Pagano, N. J., 1974, “Interlaminar Stress in Composite Laminates – An Approximate Elasticity Solution”, *Journal of Applied Mechanics*, v.41, Series E (3), pp.668 – 672.
- Point, N. & Sacco, E., 1996, “A Delamination Model for Laminated Composites”, *Journal of Solids and Structures*, v.33, No.4, pp.483-509.
- Reddy, J.N., 1997, “*Mechanics of Laminated Composite Plates - Theory and Analysis*”, CRC Press.
- Ochoa, O.O. & Reddy, J.N., 1992, “*Finite Element Analysis of Composite Laminated*”, Kluwer, Netherlands.
- Vieira Carneiro, C.A. & Savi, M.A., 1999, “Modeling and Simulation of Delamination in Composite Tubes”, *COBEM 99 - XV Congresso Brasileiro de Eng. Mecânica*.

O USO DO DISCO CIRCULAR SÓLIDO PRÉ-TRINCADO COMO EFETIVO CORPO DE PROVA PARA DETERMINAÇÃO DE K_{IC} EM MATERIAIS FRÁGEIS

Eduardo A. de Carvalho

Universidade Estadual do Norte Fluminense, Laboratório de Materiais Avançados, CCT
Av. Alberto Lamego, 2000 – Campos dos Goytacazes – RJ - CEP 28015 – 620

Christian P. Burger

Ravinder Chona

Texas A&M University, Department of Mechanical Engineering
College Station, TX 77843-3123, USA

Resumo

A determinação por meio de ensaios mecânicos tradicionais de propriedades mecânicas em materiais frágeis apresenta dificuldades inerentes ao comportamento do material, a grande quantidade de microtrincas e defeitos de fabricação, bem como características dos meios usados nos métodos tradicionais para testes em metais tais como desalinhamento de barras de tração e garras que fraturam o corpo de provas. Para contornar algumas destas limitações um novo método de trabalho é proposto. Este não se utiliza de contatos mecânicos para aplicação de carregamento, mas de tensões de origem térmica induzidas pela aplicação de radiação de uma emissão laser que incide sobre um disco sólido circular contendo um entalhe que funciona como uma pré-trinca. Resultados experimentais obtidos para nitreto de silício evidenciam o potencial do teste proposto.

Palavras-Chave: Tenacidade à fratura, Materiais frágeis, Tensões térmicas, Laser de CO_2

1. INTRODUÇÃO

Para que exista uma efetiva utilização de materiais frágeis em situações onde tensões de origem mecânica e térmica estejam presentes é necessário que exista um conhecimento das suas propriedades físicas, em particular limites de ruptura à tração e compressão bem como tenacidade à fratura. Porém, os métodos tradicionais tais como ensaio de tração e de fadiga, esbarram na fragilidade intrínseca do material. Para testes onde é necessário que haja alguma forma de acoplamento do corpo de prova à garras ou mecanismos de fixação, ocorre a fratura pela ação de contato das garras sobre as extremidades do mesmo, inutilizando o teste antes mesmo que qualquer carga seja aplicada ao corpo de prova. Caso as garras sejam revestidas de materiais macios como ligas de cobre, não é possível afirmar que não houve escorregamento do corpo de prova durante o teste (De Carvalho, 1997). Um segundo fator a impedir o uso de técnicas tradicionais de ensaio na determinação de propriedades mecânicas de materiais cerâmicos é a presença de desalinhamento entre as barras de tração das máquinas de ensaio, gerando momentos no plano de carregamento do corpo de prova ou na direção transversal a este.

Em caso de materiais metálicos este efeito geralmente é desprezível, mas em materiais frágeis este estado de tensões pode destruir o corpo de prova antes que o nível de tensões atinja o valor de teste.

Outros métodos aplicáveis na determinação de K_{IC} são testes de dureza Knoop, que apresenta resultados questionáveis já que parte da energia gasta na formação da indentação é desviada para a formação de superfícies (trincas) no plano paralelo ao do carregamento, acarretando profundidades de indentações menores que as esperadas (De Carvalho, 1997).

2. MÉTODO PROPOSTO

O novo método aqui proposto se utiliza de tensões térmicas induzidas por um laser de CO_2 num corpo de prova circular, removendo assim a transferência de carga de teste por vias mecânicas (De Carvalho *et al.*, 1998). A presença de um feixe de laser aquecendo o centro do disco, gera uma região central de temperaturas mais altas, progressivamente reduzidas até atingir as bordas do disco, fazendo surgir uma região compressiva no centro do disco e trativa nas regiões mais afastadas deste mesmo centro. A presença desta tensão trativa pode ser portanto explorada para fins de avaliação de propriedades mecânicas. O método tem como vantagem sobre outros propostos (Schneider e Petzow, 1991, Akyama e Amada, 1993) a utilização apenas do canhão laser, sem necessitar nenhum arranjo de elementos óticos sofisticados e porque prevê resultados confiáveis com o aquecimento de apenas um lado do corpo de prova, caso o material frágil estudado apresente alta condutividade térmica. Outras vantagens não desprezíveis são a possibilidade de se controlar o diâmetro da emissão laser, a potência aplicada e a duração dos pulsos e intervalos, permitindo que se manipule a magnitude das tensões de origem térmica induzidas, além da emissão em comprimento de onda bem conhecido (10.6 μm no caso do laser de CO_2 Rofin-Sinar 810), o que permite um estudo também dos efeitos da radiação emitida sobre as propriedades óticas e de absorção do material estudado. Uma vez que resultados experimentais determinem o período de tempo máximo de validade do modelo, basta determinar o tempo exato da fratura para que a distribuição de tensões naquele instante possam ser conhecida.

2.1 Espessura máxima do disco analisado

Tensões térmicas são produzidas em um corpo como resultado de distribuições de temperaturas que não permitem a livre expansão dos elementos individuais de acordo com a temperatura local. Existem certas distribuições de temperatura que produzem expansões livres tais que os elementos adjacentes se acomodam sem interferência e portanto sem o desenvolvimento de tensões (Burgreen, 1971).

Distribuições de temperaturas que satisfaçam as equações abaixo geram determinações compatíveis e não produzem tensões térmicas em corpo livre de restrições a expansão ou contração:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

Uma distribuição linear de temperaturas em um corpo livre de restrições, que pode ser representado em coordenadas retangulares da forma:

$$T = T_0 + T_1x + T_2y + T_3z \quad (4)$$

ou

$$T = (T_0 \cos\theta + T_1 \cos\theta) r \quad (5)$$

Não produzirá tensões. Isto é prontamente percebido ao se observar que esta variação linear de temperaturas satisfaz Eqs. (1) a (3), que são as condições requeridas para que não existam tensões térmicas em um corpo sem restrições. Distribuições de temperatura lineares, como as apresentadas nas Eqs. (4) e (5), produzirão deformações livres de tensões nos corpos onde estão presentes. Deve se observar que para estas condições serem válidas, a distribuição linear de temperaturas deve ser contínua por toda a extensão do corpo (Burgreen, 1971).

A importância da descrição acima é basicamente mostrar que se a análise numérica aponta para existência de variações de temperatura ao longo da espessura, sendo esta linear, tensões ao longo do eixo z podem ser ignoradas.

2.2 – Distribuição de energia num feixe de laser

A distribuição de energia na seção transversal do feixe de laser tem grande influência na distribuição de temperaturas. Para um laser de CO₂ calibrado e alinhado, a distribuição é do tipo TEM₀₀ ou gaussiano. O método numérico será tão eficiente quanto este valor previsto esteja próximo da situação real. A expressão abaixo representa uma distribuição de energias como o previsto no caso descrito:

$$I_{inc} = I_0 e^{\left(\frac{-2r^2}{R_0^2}\right)} \quad (6)$$

onde:

$$I_0 = \frac{2P}{\pi R_0^2} \quad (7)$$

sendo:

I_{inc} é densidade de energia incidente,
 I_0 é a intensidade máxima, no centro do feixe,
 r é o raio, medido a partir do centro do feixe ($0 < r < R$),
 R_0 é o raio do feixe,
 P é a potência emitida;

2.3 Influência do diâmetro do feixe nas tensões induzidas

A magnitude das temperaturas presentes no disco ao longo do ensaio sofre influência de diversos fatores, mas a distribuição espacial relativa das isoterms pode ser manipulada variando-se o diâmetro do feixe de laser. O uso de um expansor/colimador de raios serve perfeitamente para este fim (De Carvalho, 1997) e permite um controle preciso das tensões induzidas. Estas tensões são conhecidas pelo uso de câmara filmadora operando no espectro infravermelho. Depois de se coletarem as variações nas posições e temperaturas, para um caso onde a razão diâmetro da emissão laser e o do disco é da ordem de 0.22, um polinômio

apresentando razão de segunda ordem, é utilizado para representar a distribuição de temperaturas:

$$T(r, t) = \frac{a_0(t) + a_2(t)r + a_4(t)r^2}{1 + a_1(t)r + a_3(t)r^2} \quad (8)$$

Sendo os termos a_n constantes determinadas pelo uso de um método super-determinístico de obtenção de coeficientes e r a posição radial da temperatura e t o tempo decorrido. As tensões para este caso estudado foram descrita por Boyle e Weiner (1960):

$$\sigma_r = \alpha E \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R T r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T r dr \right] \quad (9)$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R T r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T r dr - T \right] \quad (10)$$

onde:

α é o coeficiente linear de expansão térmica,
 E é o módulo de Young,
 R é o raio do disco
 r é um raio variável ($0 \leq r \leq R$);

A simetria axial do disco, aliada a espessura pequena em relação ao diâmetro, resultam em τ_{θ} igual a zero. Para as avaliações numéricas (Diferenças Finitas) basta que se represente o disco por uma região retangular bidimensional, com refinamento de malha somente na região próxima ao limite externo do feixe de laser.

2.4 Distribuição temporal dos gradientes de temperaturas

No caso de um disco circular sólido, as distribuições de tensões atingirão um máximo no início do carregamento, sendo este fenômeno um produto do comportamento dos gradientes de temperatura. Estes partem de zero, atingem um máximo e caem progressivamente, até que o corpo entre em regime permanente (Zhang e Burger, 1986), neste caso o equilíbrio entre o fluxo de calor que é absorvido pelo disco e o que é trocado com o meio via convecção – a radiação só se faz significativa em tempos mais longos, após a fratura, como detectado por De Carvalho (1997). Assim sendo a fratura do corpo de provas deverá ocorrer no início do processo. Quanto menor forem as difusividade e condutividade térmicas de um dado material, maiores serão os gradientes de temperatura. Um estudo numérico cuidadoso pode prever o tempo aproximado de duração do experimento, sendo este onde o gradiente de tensões atingirá um máximo uma vez que o material pode se romper antes deste máximo ser atingido, mas não depois. O uso de um detetor determinará o momento exato da fratura do corpo de prova.

2.5 Semi-opacidade de alguns materiais frágeis

Entre os materiais frágeis os cerâmicos apresentam uma característica que deve ser levada em conta: o comportamento semi-opaco. Sob esta condição, a distribuição de tensões

num corpo será diferente da prevista pelo modelo tradicional (Hasselmann *et al.*, 1980). Estudos complementares discutem em profundidade o assunto e apresentam desenvolvimento de formulações que analisam o caso do disco circular (De Carvalho *et al.*, 1998, De Carvalho *et al.*, 1999).

2.6 Acabamento superficial

Materiais frágeis são extremamente sensíveis a microtrincas, vazios e falhas superficiais. Em função disto o corpo de prova deve apresentar um grau de acabamento superficial que evite a iniciação da falha catastrófica em outro ponto do corpo que não o ponto na raiz do entalhe que se encontre mais próximo do centro do disco.

2.7 Absorção de potência

Em função do acabamento superficial, uma parte sensível da energia aplicada será refletida. Um medidor de potência serve como anteparo para o raio refletido, permitindo que a potência refletida seja medida em tempo real. Utilizando-se este medidor de potência para calibrar o interno do laser garante que o total de energia absorvida seja determinado com precisão. Este valor também servirá como valor de entrada no método numérico empregado.

2.8 Determinação experimental de outras constantes físicas

Como este método depende parcialmente de análise numérica para previsão do estado de tensões existentes no disco, a determinação experimental das constantes requeridas durante o processo torna-se crítica. No caso particular dos cerâmicos, a dependência de dados experimentais é mais crítica, uma vez que existe uma grande dispersão nos valores apresentados pela literatura e fabricantes para um mesmo produto. Esta avaliação deve se estender até mesmo para diferentes lotes de um mesmo fabricante. Existem diversos métodos de determinação das grandezas de interesse tais como condutividade e difusividade térmicas, densidade, coeficiente de troca de calor convectivo e coeficiente de absorção óptica.

3 . UM CASO ESTUDADO

Para verificar a viabilidade do método aqui apresentado, este trabalho apresenta um estudo experimental e numérico realizado com discos de nitreto de silício apresentando 18 mm de diâmetro e espessura de 1.6 mm. Para a previsão das distribuições de temperaturas, o método das Diferenças Finitas foi utilizado (De Carvalho, 1998). O laser utilizado foi um Rofin-Sinar 810, com capacidade máxima de 600 W em modo contínuo de 2500 W em pulsado. Para a medição da potência de fato absorvida pelo corpo foram utilizados dois medidores de potência independentes e calibrados, sendo o interno ao equipamento calibrado utilizando-se o externo. Para minimizar as perdas de calor para o dispositivo de fixação, o disco foi mantido em posição por 3 parafusos cujas pontas foram afiadas em um esmeril.

3.1 Preparação dos corpos de prova

A partir de um cilindro de nitreto de silício (Si₃N₄ CERALLOY[®] 147-5 Hot Pressed silicon nitride) com 18 mm de diâmetro e 100 mm de comprimento, cedido pela Ceradyne[®]. A primeira operação consistiu em se abrir um entalhe radial com 4 mm de profundidade e um ângulo de inclinação de cerca de 6° para garantir a existência de um ponto mais próximo do centro, onde a trinca deve se iniciar). Devido a dureza do nitreto de silício, foi utilizado um

disco de corte de diamante. Feito isto foram cortados discos com espessura de cerca 1.6 mm. Estes discos foram polidos com diversas pastas de diamante até 1 μm e 6 μm slurry. Após o término da operação de polimento das duas faces do disco estes foram inspecionados visualmente para se verificar a existência de fraturas nas bordas. A Figura 1 apresenta um detalhe da raiz do entalhe (aumento de 110X).

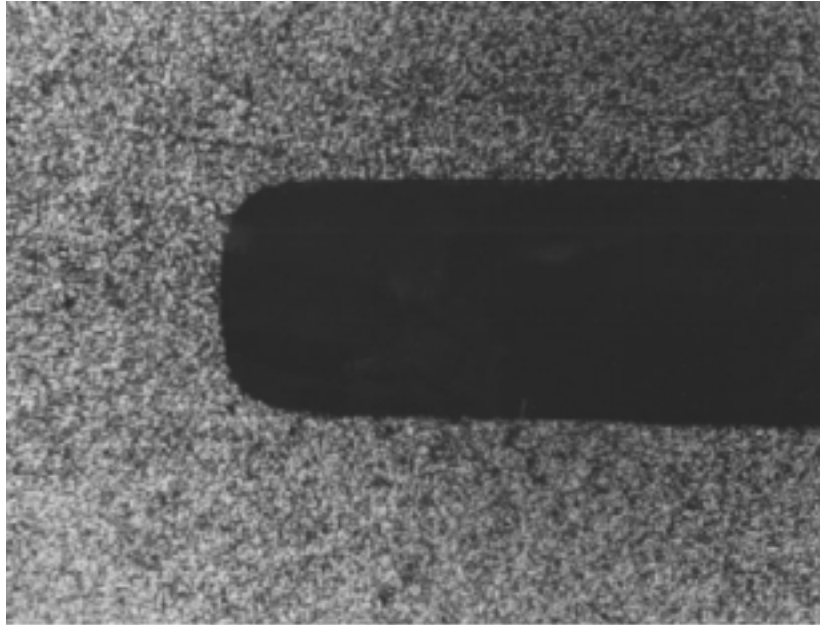


Figura 1 – Detalhe da raiz do entalhe (aumento 110X)

3.2 Temperaturas

A Figura 2 apresenta resultados experimentais comparados a previsões obtidas pelo método de Diferenças Finitas. A coleta dos valores das temperaturas durante o teste é feita com o uso de uma filmadora Hughes Probeye Thermal Video System Series 3000 (operando em comprimentos de onda na faixa do infravermelho) gravando-se todo o teste numa fita de video formato VHS onde um contador de tempo e tabelas de temperaturas são apresentados e posteriormente analisando-se o teste quadro a quadro. Para que a emissividade do disco seja bem conhecida, recobre-se sua parte posterior (oposta ao lado submetido à radiação) com um pó medicinal branco conhecido nos EUA como “Micatin”. Este valor é de $\epsilon = 1.0$. Sobre estes valores experimentais, representados por pontos isolados na figura, valores numéricos são superpostos e a figura apresenta assim a distribuição radial de temperaturas, onde pode se constatar que existe uma boa concordância entre modelo e valores experimentais até um período de cerca de 10 segundos. A distribuição de densidade de energia no feixe de radiação é gaussiana (DeCarvalho, 1997) e tem seu centro superposto ao centro do disco de nitreto de silício.

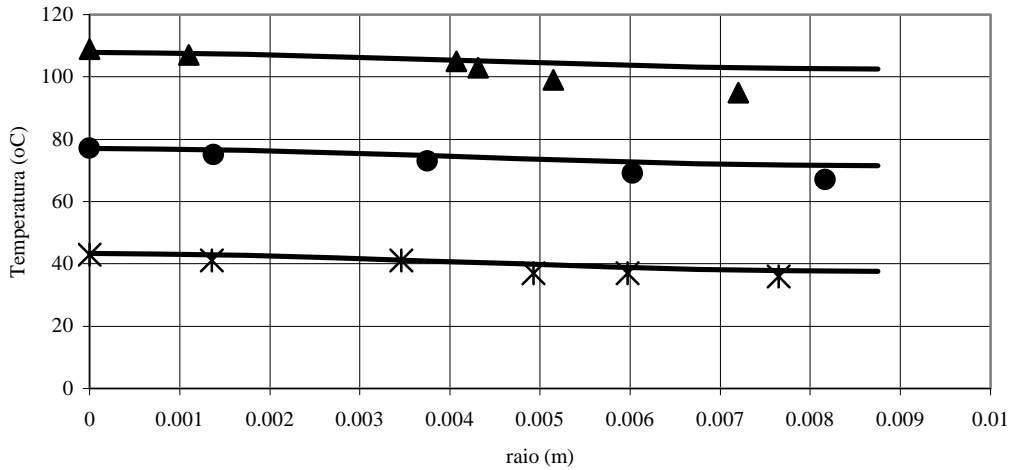


Figura 2: Valores experimentais (marcas isoladas) versus numéricos (linhas contínuas). Ao topo os valores para 17.1s, meio 10s e embaixo 3.1s.

3.3 Tensões radiais atuando nas faces da trinca

Das expressões (8) e (10), com seus coeficientes determinados pelo procedimento experimental, pode-se verificar que existe uma distribuição de tensões como prevista pela expressão (10), apresentado na Figura 3. Estas tensões passarão por um pico em $t \approx 5s$ e depois cairão para um valor constante no tempo, quando do estado regime permanente.

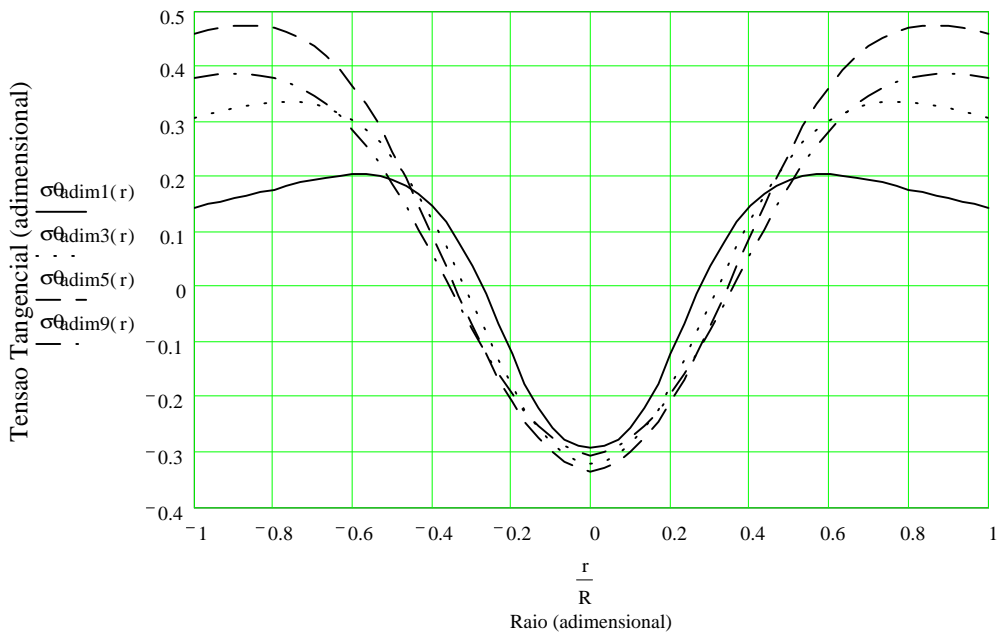


Figura 3: Variação de tensões radiais adimensionais nas faces da trinca apresentam pico nas vizinhanças de 5 segundos.

3.4 Comportamento de iniciação e propagação da trinca

Cinco corpos de prova foram rompidos e se verificou que bastaria o uso da pasta $6 \mu m$ “slurry”, uma vez que sendo que o ponto de iniciação da trinca foi sempre o ponto mais

próximo do centro, como demonstrado pela observação direta dos corpos de prova rompidos. A Figura 4 apresenta o ponto de iniciação da trinca. Na região de iniciação a trinca se propaga a 45° com relação ao plano carregamento e a seguir vai progressivamente assumindo uma trajetória radial até o centro do disco (crack arresting), conforme comportamento previsto por De Carvalho (1999). Também foi notado que em ambas as faces a trinca se iniciou no mesmo ponto, indicando que deformações fora do plano não foram significativas.



Figura 4. Ponto de iniciação da trinca – 200X (lado reverso) .

3.5 Modelagem MFLE (Mecânica da Fratura Linear Elástica)

Uma vez que se pode determinar o nível de tensões no disco ao longo do tempo, o passo seguinte é calcular como esta distribuição controlará a propagação da trinca. Existem duas formulações tradicionais, Tweed & Rooke (1973) e Rooke & Tweed (1973), que tratam de tensões constantes ou parabólicas nas faces da trinca respectivamente. DeCarvalho (1997) propôs um novo modelo a partir do aspecto geométrico da distribuição de tensões, que é na verdade uma superposição das soluções previamente citadas. Para o caso onde as tensões atuando nas faces da trinca são constantes tem-se que:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \frac{1.122 + 0.140(a/D) - 0.545(a/D)^2 + 0.405(a/D)^3}{(1 - a/D)^{1.5}} \quad (11)$$

onde:

- σ é a tensão atuante (ou de fratura no caso de K_{IC}),
- a é o comprimento da trinca,
- D é o diâmetro do disco;

Para o caso onde a tensão é parabólica, com origem no centro disco, tem-se que:

$$K_I = \sigma_{ext} \sqrt{\pi a} \frac{1.12 - 2.52(a/D) + 2.42(a/D)^2 - 0.78(a/D)^3 + 0.13(a/D)^4}{(1 - a/D)^{1.5}} \quad (12)$$

onde:

σ_{ext} é o valor da tensão no ponto mais externo do disco;

O modelo que combina as duas soluções acima soma a solução de (11) com (12) e subtrai o excesso de (12) aplicada invertida como apresentado na Figura 4.

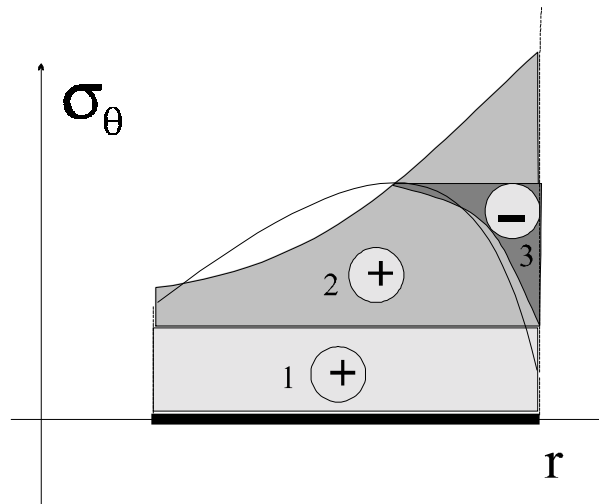


Figura 4. Um modelo alternativo gerado a partir da soma das Eqs. (11) e (12) – regiões 1 e 2 – e subtraído da Eq (12) – região 3.

O setup utilizado para a coleta de dados apresentados neste trabalho não dispunha de um microfone que determinasse o momento exato da fratura. Desta forma limita-se a apresentar os modelos propostos sendo empregados para a situação onde assumiu-se que a fratura ocorreu quando as tensões atingiram o pico. Estes valores estão apresentados na tabela 1.

Tabela 1. K_{IC} obtido pelos diversos modelos

Modelo	K_{IC} (MPa \sqrt{m})
Tweed (1973)	4.8
Este Trabalho	4.8
Ceradyne	5.0

4. CONCLUSÕES

O método proposto pode servir como instrumento de medida e avaliação de propriedades mecânicas de materiais frágeis, sendo que a simplicidade do setup óptico garante o baixo custo relativo do método. A incorporação de um microfone para a determinação o momento exato do momento da fratura complementa o método, uma vez que a fratura pode ocorrer antes das tensões atingirem o máximo previsto.

A similiaridade entre o caminho de propagação da trinca neste trabalho (monocíclico) e o de fadiga indica que certos modelos tradicionais podem ser usados também no caso de materiais frágeis.

Embora exista uma boa concordância entre todos os valores obtidos, o pequeno número de amostras estudadas e as hipóteses assumidas recomendam o aprofundamento do estudo.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq, pelo financiamento parcial deste trabalho (proc. n° 200.637-92/4), Dr. Gwo-Ping Fong e Steve Fazzini pela confecção dos corpos de prova e Dr. Todd Dickey pela operação da câmara de infra-vermelho.

REFERÊNCIAS

- Akyiama, S. & Amada, S.A., 1993, A new method to evaluate the thermal shock resistance of ceramics by laser pulse radiation, *Fusion Technology*, v. 23, pp. 426-434.
- Boley, B.A. & Weiner, J.H., 1960, *Theory of Thermal Stresses*, Krieger, Malabar, FL.
- Burgreen, D., 1971, *Elements of Thermal Stress Analysis*, 1 st. ed., C.P. Press, Jamaica, NY.
- De Carvalho, E.A., 1997, Characterization of the effect of severe environment on advanced materials, Ph.D. Dissertation, Texas A&M University, pp. 220.
- De Carvalho, E.A., Burger, C.P. and Chona, R., 1998, A proposed new method to evaluate fracture toughness in brittle materials by laser radiation, *Proceedings of the SEM Spring Conference on Experimental and Applied Mechanics*, Houston, Texas, EUA, pp. 241-244.
- De Carvalho, E.A., Burger, C.P. and Chona, R., 1999, K_I Determination for a Solid Disk Containing a Crack Submitted To a Central Laser Radiation, *SEM Spring Conference on Experimental and Applied Mechanics*, Cincinnati, Ohio, USA.
- Rooke, D.P. & Tweed, J., 1973, The stress intensity factors of an radial crack in a finite rotating disk, *Int. J. of Eng. Sciences*, v. 11, pp. 279-290.
- Schneider, G.A. & Petzow, G., 1991, Thermal shock testing of ceramics - A new testing method, *Journal of American Ceramic Society*, v. 74, p. 98-102.
- Tweed, J. & Rooke, D.P., 1973, The stress intensity factors of an edge crack in a finite elastic disk, *Int. J. of Eng. Sciences*, v. 11, pp. 65-73.
- Zhang, P. & Burger, C.P., 1986, The investigation of thermal stress-intensity factors K_I and K_{II} , *SEM Spring Conference on Experimental Mechanics*, v.1, New Orleans, USA, p 3-6.

FRACTURE TOUGHNESS DETERMINATION FOR CERAMICS VIA LASER INDUCED THERMAL STRESSES

Abstract. Difficulties associated to ceramics mechanical properties determination using traditional methods, by its very own fragility, presence of large amount of microcracks and manufacturing defects, or by crossbars misalignment at traditional methods more related to metals, took to a new working method proposition. The proposed method does not rely on mechanical contacts for load transfer, but laser emission radiation falling over a solid circular disk containing a notch which works as a pre-crack. Some experimental results are presented for silicon nitride and show the new method potential usefulness.

Key-words: Fracture toughness, brittle materials, thermal stresses, CO₂ laser

MODELLING THE CYCLIC SOFTENING BEHAVIOUR FOR THE ASTM A471 STEEL THROUGH AN ELASTO-PLASTIC CONTINUUM THEORY

Fulvio E. G. Chimento

Depto. de Materiais e Construção

FURG – Fundação Universidade Federal do Rio Grande – RS, Brasil

Gianni Caligiana

Dipartimento di Ingegneria delle Costruzioni Meccaniche, Aeronautiche e di Metallurgia

DIEM - Facoltà di Ingegneria Università di Bologna, Bologna, Italia

Heraldo Costa Mattos

Depto. de Engenharia Mecânica

UFF - Universidade Federal Fluminense, Niteroi, RJ, Brasil

***Abstract.** The present work is concerned with the modelling of the cyclic softening behaviour for the ASTM A471 steel (24CrNiMoV14-6, vacuum-treated alloy steel forgings) through an elasto-plastic continuum theory. This alloy is used in turbine generator shafts, turbine rotor disks and wheels. The experimental work has been performed by strain controlled, completely reversed push-pull low cycle fatigue tests, at room temperature, to determine the stable hysteresis loops and the cyclic curve. The tests have been performed using a servo-hydraulic INSTRON testing machine on ASTM standard specimens. The cyclic inelastic behaviour is characterised by a non-linear coupling between plasticity, isotropic softening and kinematic hardening. The aim of this paper is to present an adequate phenomenological description for such kind of coupling. The constitutive parameters that appear in the model are identified experimentally and the theoretical results are compared with experimental data, showing a very good agreement.*

***Key words:** elasto-plasticity, kinematic hardening and isotropic softening.*

1. INTRODUCTION

The use of continuum mechanics models into design and structural integrity assessment of inelastic mechanical components, is often restricted by the difficulties to find references about material parameters obtained experimentally. The determination of the stable hysteresis loop in an elasto-plastic behaviour is an important step concerning low cycle fatigue of metallic structures. The present work is concerned with the determination of material parameters that appear in an internal variables elasto-plastic theory proposed to model the inelastic behaviour of an ASTM A 471 (vacuum-treated alloy steel forgings), very often utilised for turbine generator shafts, turbine rotor disks and wheels. Low cycle fatigue is significant in the study of turboalternator shafts behaviour because they suffer very heavy local strain during transients and accidental emergencies (short circuits, out of phase synchronisation, etc.).

The experimental data are obtained by strain controlled low cycle fatigue push-pull tests to determine the stable hysteresis loops and the associated cyclic curve. The analysis of the experimental stress-strain hysteresis loops show us a cyclic isotropic softening due to the material behaviour.

A continuum elasto-plastic model with internal variables is used to describe the cyclic softening and the theoretical results are compared with experimental data to check the model accuracy. The plastic deformation, the isotropic softening and the kinematic hardening are strongly coupled for this kind of material. A first step towards a complete modelling of the material behaviour was made in Chimisso & Caligiana (1999). The present paper is mainly concerned with an adequate description of the cyclic softening observed experimentally. A method to identify the material parameters that appear in the evolution laws proposed for the isotropic softening and kinematic hardening is presented and discussed.

2. MATERIAL

The experimental data considered in this paper, according Chimisso and Caligiana (1999), have been derived from a broad study undertaken with the aim of extending knowledge about the fatigue behaviour of turboalternator shafts. The chemical composition and the typical heat treatments for A 471 are reported in Table 1. Mechanical properties are listed in Table 2.

Table 1 – Chemical composition and typical heat treatments of A 471 rotor steel

Chemical Composition (%)										
C	Si	Mn	P	S	Cr	Mo	Ni	V	Al	Cu
0.28	0.07	0.23	0.008	0.004	1.63	0.42	3.59	0.09	0.009	0.06
Heat Treatment										
Tempered			940°C x 28 hrs.;			870°C x 28 hrs.;		630°C x 28 hrs.		
Quality Tempered			845°C x 19 hrs.;			630°C x 25 hrs.;				
Stress-relieving			570°C x 21 hrs.			furnace cooled		(17.2 °C/hrs.)		
			200°C			air cooled				

Table 2 – Mechanical properties of A471 rotor steel

Mechanical Properties					
0.02 Yield Strength (MPa)	Tensile Strength (MPa)	Elongation (%)	Reduction of Area (%)	KV (J)	FATT (°C)
520-655	585-725	20	70	136-193	-12/-14

3. EXPERIMENTAL PROCEDURES

Experimental data utilised in the paper are obtained by push-pull strain controlled low cycle fatigue tests to determine the stable hysteresis loops and the cyclic curve. The tests have been performed, Caligiana (1987), with an INSTRON servo-hydraulic testing machine, series 8000, on ASTM standard 12 mm diameter specimen. A triangular strain waveform at a constant total strain rate (1%/s) was applied and a clip-gage was used for measuring the total strain at room temperature.

The interpolation of the experimental values of isotropic parameters versus accumulated plastic strain has been performed by utilising non linear regression tools of the MATHEMATICA package. The mean values of Young modulus and the elastic limit have been determined, according to normal distribution, by using the same package.

A set of 6 specimens (E1 to E6) has been cycled with standard strain-controlled low cycle fatigue test, with strain amplitudes ranging between 0.46% and 1.27%. Here, due to the limited space, only the development of hysteresis behaviour for specimen E5 is shown in Figure 1, where the continuous softening phenomenon can be observed.

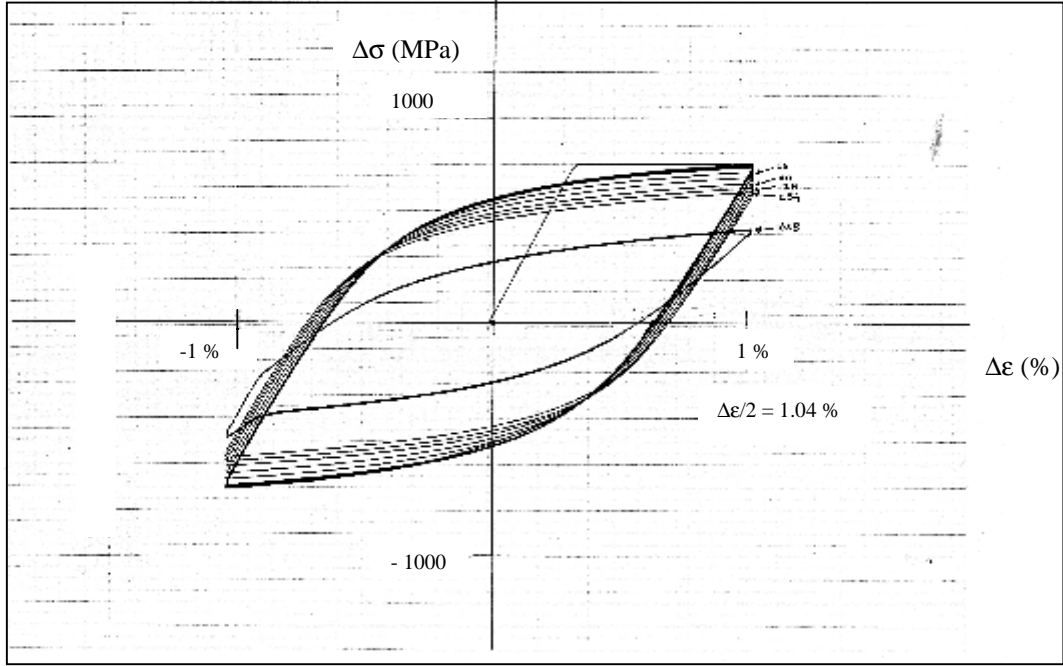


Fig.1 Strain-controlled low cycle fatigue test, specimen E5: $\Delta\epsilon/2 = 1.04\%$

The companion specimen test (CST) is used to determine the experimental cyclic curve. Usually the cyclic curve is obtained by the tips connection of the hysteresis loops at saturation (when it is found) or at the half-life of test specimens.

Considering the little sample, a Student distribution are used to certify that a normal distribution of the Young modulus and of the elastic limit obtained in the experimental tests are a good representation of those parameters. Consequently, mean values $E = 186.5 \text{ GPa}$, and elastic limit (at $\epsilon = 0.02\%$) $S_y = 545 \text{ MPa}$, are used.

4. THE ELASTO-PLASTIC CONTINUUM MODEL

The set of elasto-plastic constitutive equations with internal variables used in this work describes the mechanical behaviour of metallic materials submitted to non-monotonic loading. We use the concept of the free energy in the constitutive theory with a strong thermodynamic basis, Lemaitre (1990). The free energy is defined as a differentiable function of the state variables $\epsilon, \epsilon^p, \beta$: $\psi = \psi(\epsilon - \epsilon^p, \beta)$. ϵ^p is the plastic strain and β is a generic representation of internal variables related to other dissipative mechanisms. The elastic dominion defined by the existence of a plastic potential F such that

$$F(\sigma, B^\beta, \epsilon^p, \beta) < 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}^p = 0 \text{ e } \dot{\beta} = 0 ; \quad B^\beta = \frac{\partial \psi}{\partial \beta}$$

A complete set of constitutive equations is then given by:

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \tag{1}$$

$$x = \frac{\partial \psi}{\partial c} \tag{2}$$

$$y = \frac{\partial \psi}{\partial p} \tag{3}$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (4)$$

$$\dot{p} = -\lambda \frac{\partial F}{\partial y} \quad (5) \text{ and}$$

$$\dot{c} = -\lambda \frac{\partial F}{\partial x} \quad (6)$$

where $\lambda \geq 0$, $F \leq 0$, $\lambda F = 0$, are the complementary conditions and λ is the Lagrange multiplier related with the restriction (plasticity criterion) $F \leq 0$.

Equations (1) – (3) are called state laws and equations (4) – (6) the evolution laws. For an adequate modelling of the physical behaviour of the ASTM A471 steel, two additional variables p and c related, respectively, with the isotropic softening and kinematic hardening mechanisms are introduced and the following potentials are chosen:

$$\psi = \frac{1}{2} E (\varepsilon - \varepsilon^p)^2 + v_1 \left(p + \frac{e^{-v_2 p}}{v_2} \right) + p S_y + \frac{1}{2} a c^2 \quad (7)$$

$$F = J(\sigma - x) - y + \frac{b}{2a} x^2 - \frac{ab}{2} c^2 \quad (8)$$

where $J(\sigma - x)$ is the von Mises equivalent stress, S_y is the elastic limit, v_1, v_2 are material constants and a, b are non-linear functions of the variable p :

$$a = A_i \varepsilon^i \quad \text{and} \quad b = B \varepsilon^{-\gamma} \quad (9)$$

Hence, using (1) – (6),

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (10)$$

$$x = \frac{\partial \psi}{\partial c} = ac \quad (11)$$

$$y = \frac{\partial \psi}{\partial p} = S_y - v_1 (1 - e^{-v_2 p}) \quad (12)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \lambda \frac{(\sigma - x)}{|\sigma - x|} = \lambda S_g \quad (13)$$

$$\dot{p} = -\lambda \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda = |\dot{\varepsilon}^p| \quad (14) \text{ and}$$

$$\dot{c} = -\lambda \frac{\partial F}{\partial x} = \dot{\varepsilon}^p - \frac{b}{a} (x \lambda) \quad (15)$$

y is called the isotropic hardening variable, x is the kinematic hardening variable, p and c are internal variables associated to the isotropic and kinematic hardening respectively. The main difference between this model and the one proposed by Marquis (1978), which is discussed in Lemaitre and Chaboche (1990), is the expression for the variable y . Generally, the cyclic softening or hardening is described through the kinematic hardening, considering the variable b in equation (15) as a nonlinear function of p . For the ASTM A471 steel, such modeling is not adequate since the softening is basically isotropic.

5. MODELLING THE MATERIAL BEHAVIOUR

From the experimental curves, figure 1, a cyclic softening behaviour of the material has been observed. The material never stabilises and softens continuously until complete failure. Once a crack of significant magnitude was formed, the hysteresis loops were observed to become asymmetric and, in the most of cases, the tests were stopped. In those situations of continuously softening, it is a usual way consider the standard half-life values for a hypothetical stable hysteresis loop.

In the experimental tests, as well, a change is observed in the plastic strain amplitude with the increasing number of cycles. Therefore cyclic softening implicates a change in the anelastic dominion with a consequential change in the accumulated plastic strain, p , cycle by cycle.

Considering the continuum elasto-plastic model (where the isotropic hardening, y , related to the accumulated plastic strain, plays an important role during the life of the specimen), the life history is important since the beginning to the end-failure to model the behaviour of themselves. The strong indication of damage effect presence in the specimens observed by a local change of Young modulus (identified by the slope change in the stress-strain loop), is another important consideration. Consequently, in this case, it isn't appropriate estimate a standard stable hysteresis loop at one-half specimen's fatigue life.

Observing the development of the hysteresis loops, the difference between the accumulated plastic strain in a cycle to the consecutive is small: the plastic strain increases slowly. So, the isotropic hardening or softening is very important in the progressive behaviour cycle by cycle but for a single cycle it may be considered constant. Thereby, during a stable loop, the isotropic hardening will be taken constant and only the non-linear kinematic hardening is significant.

Taking into account the above considerations, the choice of the first hysteresis loop are be justified as an hypothetical stable cycle to build the kinematic hardening behaviour. In the elasto-plastic model represented by the set of equations above, the isotropic hardening, equation (12) was constant ($v_1 = v_2 = 0$) and equal to the elastic limit obtained in the first hysteresis loop:

$$y = S_y \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = 0 \quad (12.a)$$

Figure 2 shows the first experimental complete hysteresis loop for the E1 to E6 specimens and figure 3 shows the monotonic, cyclic at middle life and cyclic for the first cycle curves where cyclic softening can be observed.

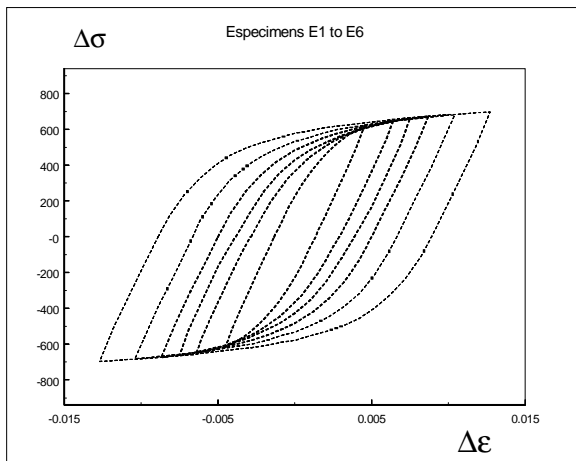


Fig.2 First cycles for the E1 to E6 tests

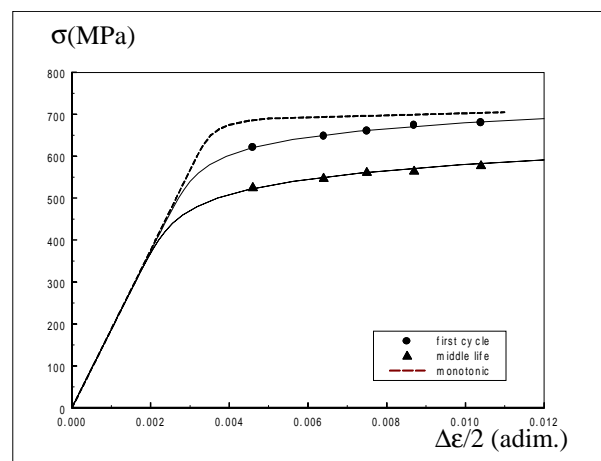


Fig.3 Monotonic vs. cyclic curves

6. PARAMETERS DETERMINATION

6.1. Kinematic Hardening

The kinematic hardening parameters, a and b , are obtained at the first complete hysteresis loop, for the tests E1 to E6, using a least-square method with sufficiently accurate convergence and determination coefficient. For a detailed discussion, see Chimisso & Caligiana (1999). So, the best representation of themselves can be obtained:

$$a = 174 - 34950\varepsilon + 2,884,840 \varepsilon^2 - 84,160,460 \varepsilon^3 \quad (16)$$

$$b = 4.4729 \varepsilon^{-0.7955} \quad (17)$$

It is interesting to observe that when the total strain amplitude tends to values greater than 1.5 % the parameters a and b tend to asymptotic values. It signifies the saturation of the kinematic hardening curve for large strain. Those behaviour are observed in the experimental tests too. Consequently, when the cyclic strain applied exceed 1.5 % ($\Delta\varepsilon/2 > \pm 1.5\%$), the asymptotic values tend to: $a = 15$ GPa and $b = 126$.

Figures 4 and 5 show, for the E4 and E5 specimens, the model prevision and experimental results for the non-linear kinematic hardening behaviour, related to plastic strain.

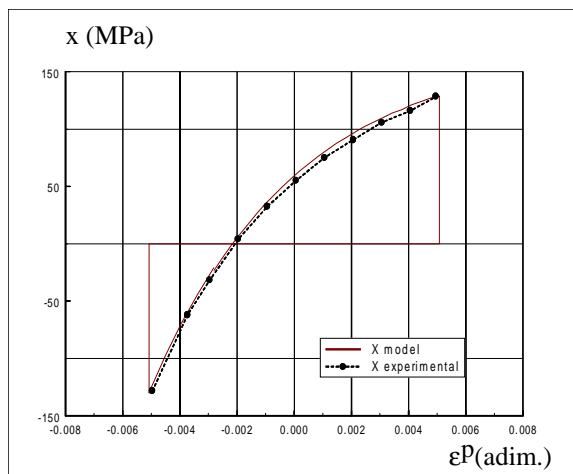


Fig.4 E4: model x test kinematic hardening

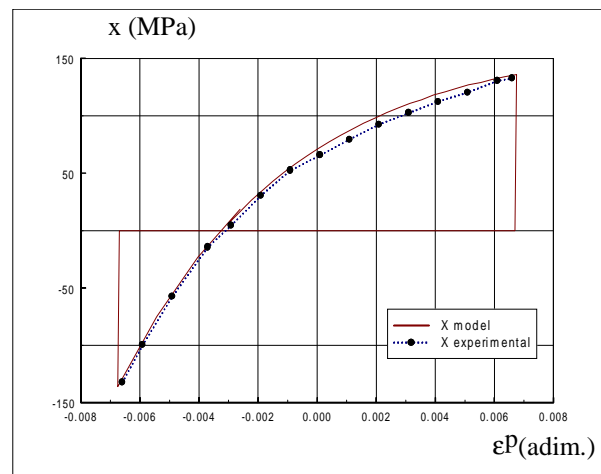


Fig.5 E5: model x test kinematic hardening

6.2. Isotropic Softening

To determine the parameters v_1 e v_2 , was considered the equation (12):

$$y = S_y - v_1(1 - e^{-v_2 p})$$

When $p \rightarrow 0$, $y \rightarrow S_y$, and when $p \rightarrow \infty$, $y \rightarrow S_y - v_1$
And its derivative related to the accumulated plastic strain, p

$$\frac{dy}{dp} = -v_1 v_2 e^{-v_2 p}$$

When $p \rightarrow 0$, $dy/dp \rightarrow -v_1 v_2$, and when $p \rightarrow \infty$, $dy/dp \rightarrow 0$ ($y = \text{constant}$)

The limit values of the variables and its derivatives above can be showed graphically.

In the experiments, the softening denote in a inelastic domain change with a modification in the accumulated plastic strain, cycle by cycle. So, the parameters v_1 e v_2 , can be determinate through the cyclic plastic strain variation, related with the accumulated plastic strain, p .

From the figure 1(E5 specimen test) where the isotropic softening is show since the first cycle, the plastic strain can be measured in the following cycles. Supposing a little linear growth of the cyclic plastic strain, the accumulated plastic strain growth, p , is estimated in the following form:

$$p_i = p_{i-1} + 2\Delta\varepsilon_i^p \quad (18)$$

Where p_i is is the accumulated plastic strain at the i cycle.

Thus, for the E5 test was obtained:

- At the first cycle, $y = 545$ MPa,
- $p_{16} = 42,9$ % and $y_{16} = 525$ MPa , at $N = 16$ cycles,
- $p_{64} = p_{\infty} = 180$ % and $y_{64} = 475$ MPa, at $N = 64$ cycles.

In this way, the isotropic softening parameters are obtained:

$$v_1 = 70 \text{ MPa and } v_2 = 0,784$$

So, equation (12) give us:

$$y = 545 - 70(1 - e^{-0,784p}) \quad (19)$$

7. RESULTS

The model and the experimental first hysteresis loop were compared. For example the following figures 6 and 7 show a good agreement of the model results, obtained from numerical simulation, to the experimental results.

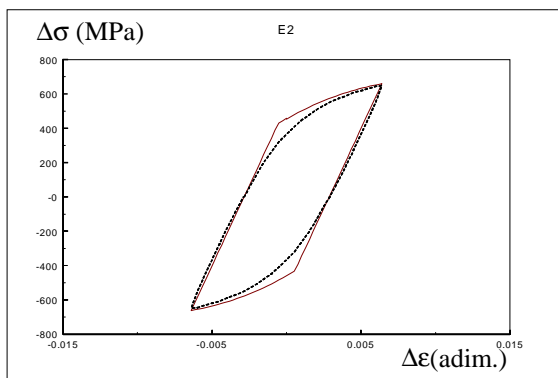


Fig.6 E2: $\Delta\sigma \times \Delta\varepsilon$ $\Delta\varepsilon/2 = 0.64\%$

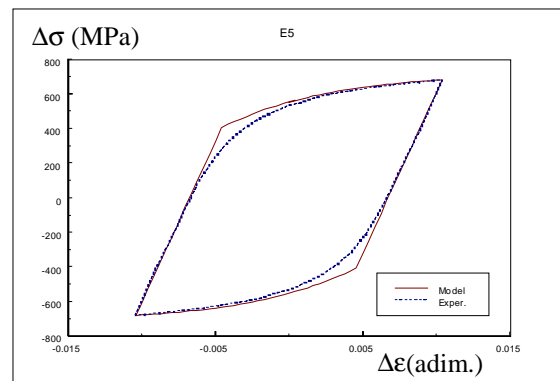


Fig.7 E5: $\Delta\sigma \times \Delta\varepsilon$ $\Delta\varepsilon/2 = 1.04\%$

As it can be seen in Chimisso & Caligiana (1999) the results between the model cyclic curve and the experimental cyclic curve taken at the first hysteresis loop are so closed.

Figure (8) show the model results, for the E5 test, obtained for the cyclic softening from the first to de 64th cycle. Figure (9) compare the E2 experimental result with the model result for the 32th cycle.

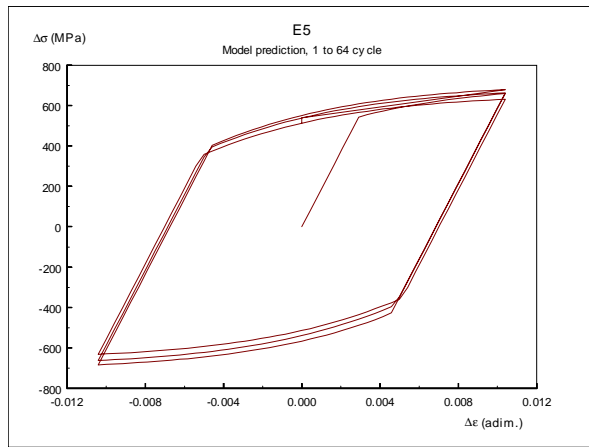


Fig. 8 E5 test: $\Delta\epsilon/2 = 1.04\%$. 1th to 64th cycle

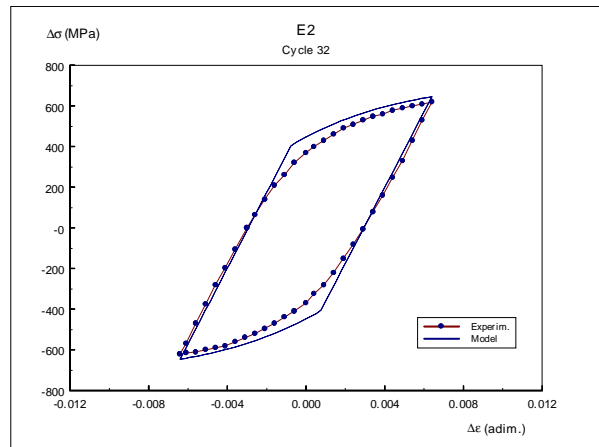


Fig. 9 E2 test: $\Delta\epsilon/2 = 0.64\%$. 32th cycle

Figures 10 and 11 compare the E5 experimental result with the model result for the 16th and 64th respectively.

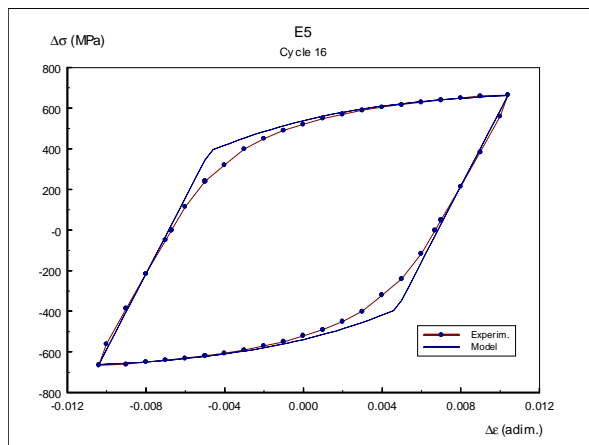


Fig. 10 E5 test: $\Delta\epsilon/2 = 1.04\%$. 16th cycle

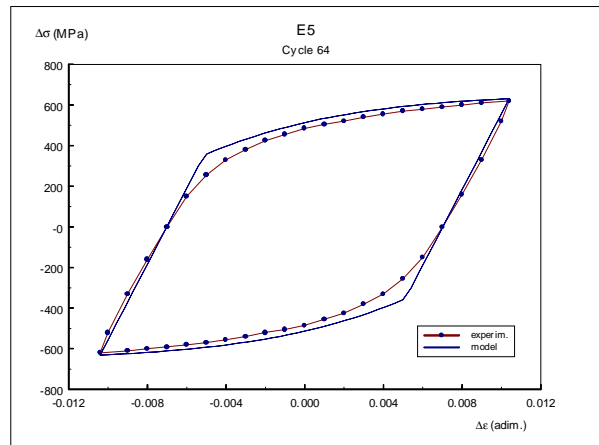


Fig. 11 E5 test: $\Delta\epsilon/2 = 1.04\%$. 64th cycle

8. CONCLUDING REMARKS

The ASTM A 471 study becomes interesting due to its continuous softening until fracture occurs. In this work the softening behaviour of this steel by a continuum elasto-plastic damage approach is considered. Assuming that the first cycle as a stable cycle, the isotropic hardening/softening influence must be neglected and a non-linear kinematic hardening law is sufficient to find the model hysteresis loop.

The isotropic behaviour is considered with an appropriate softening evolution law. The model allows a good results for the elasto-plastic hysteresis loop behaviour and for the continuously softening phenomenon and this is fundamental to extend the results into the continuum damage model.

Acknowledgement

Data and tests are obtained in the DIEM- Università degli Studi di Bologna, Italia. Our special gratitude to Professor Sergio Curioni the Dean of the Department. The first author is grateful to the **CNPq** (Brazilian Council for Scientific and Technological Development) support.

REFERENCES

- ASTM Standard Practice for Strain-Controlled Fatigue Testing, E 606-92.
- Bhambri, S.K., Prasad, C.R., Vasudevan, R., Low Cycle Fatigue Behaviour of a 1Cr-Mo-V Steel with Bainite and Ferrite Microstructure, *Int. J. Fatigue*, 9 No 3, pp. 239-246, Butterworth & Co., October 1987.
- Caligiana, G., Curioni, S. Freddi, A., Fatigue life evaluation in the motor vehicle industries, *Int. J. of Vehicle Design*, ed. M.A. Dorgham, Inderscience Ltd., U.K., 1987.
- Chimisso, F., Caligiana, G., Parameter Determination for Modelling the ASTM A471 Steel Behaviour in an Elasto-plastic Continuum Approach, *Anais XV COBEM – Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Aguas de Lindoia, SP, Brasil, novembro 1999.
- Lemaitre, J. and Chaboche, J.L., *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, Great Britain, 1990.
- Marquis, D., *Modelisation et Identification de l' Ecrouissage Anisotrope des Métaux*, Thèse de Troisième Cycle, Université de Paris 6, France, 1978.
- Moosbrugger, J. C., and McDowell, D.L., On a Class of Kinematic Hardening Rules for Nonproportional Cyclic Plasticity, *J. of Eng. Materials and Technology*, *Trans. of the ASME*, Vol. 111, pp. 87-98, January 1989.

A MECHANICAL MODEL WITH INTERNAL LOOPS FOR PSEUDOELASTIC MATERIALS

Fábio Albernaz Ferreira
Dianne Magalhães Viana
Edgar Nobuo Mamiya

Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, 70910-900 Brasília, DF, Brasil. E-mail: mamiya@unb.br

Abstract

The goal of the present paper is to propose a new macroscopic mechanical model for pseudoelastic materials. In particular, we are interested in the description of path dependent internal hysteresis loops detected in experimental observations. The model is written in the framework of one-dimensional media and considers, as state variables, the transformation strain and two hardening parameters, one associated with the austenite-to-martensite transformations and other associated with reverse transformations. Comparisons with experimental data are performed so as to assess the model.

Keywords: Pseudoelasticity, hysteresis, phase transformations.

1. INTRODUCTION

Pseudoelasticity or superelasticity accounts for the ability of certain metallic alloys to recover extremely large strains (of the order of 10%), as a result of stress induced reversible phase transformations from austenite to martensite. Due to their remarkable mechanical properties, superelastic materials have been considered for many applications such as, for instance, eyeglass frames, medical guidewires, hingeless laparoscopic surgical instruments, and damping devices.

Mechanical models describing the phenomena have been proposed by many authors since the seventies. Ericksen (1975) considered nonmonotonous stress-strain relations for the description of discontinuities in the strain field, which were associated with phase interfaces. Abeyaratne & Knowles (1988) considered kinetic laws describing the motion of phase interfaces subjected to thermodynamic admissibility rules. Alternative models have been proposed by Frémond (1987), Graesser & Cozzarelli (1994), Leclercq & LExcellent (1996), Auricchio et al. (1997), Souza et al. (1998), Govindjee & Hall (1999), amongst many others.

We propose, within the setting of one-dimensional media subjected to small strains, a new phenomenological model for the description of the mechanical behavior of pseudoelastic materials. The model is strongly influenced by classical descriptions of the elastoplastic behavior, but on the other hand it includes new features as, for instance, its ability to describe, with good accuracy, internal hysteresis loops observed experimentally when the material is subjected to complex loading conditions.

2. THE MECHANICAL MODEL

From the macroscopic point of view, martensitic phase transformations associated with pseudoelastic behavior can be characterized by the *transformation strain* ε_T , which

is defined as $\varepsilon_T := \xi_m \varepsilon_M$, where $\xi_m \in [0, 1]$ is the volume fraction of the martensite in the medium, while ε_M is the strain observed when the material undergoes a complete transformation from austenite to martensite. The stress σ is supposed to be a linear function of the elastic strain $\varepsilon - \varepsilon_T$:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_T), \quad (1)$$

where E is the Young modulus of the material and ε is the linear measure of total strain.

Transformation from austenite to martensite is associated with the following constraint:

$$f_{AM}(\sigma, \varepsilon_T, \alpha_{AM}) := |\sigma| - [\sigma_T(\varepsilon_T) + \kappa_{AM}(\alpha_{AM})] \leq 0, \quad (2)$$

where $\sigma_T(\varepsilon_T) := k|\varepsilon_T| + \sigma_{T0}$ is the so called *transformation stress*, k and σ_{T0} are material parameters, while $\kappa_{AM}(\alpha_{AM})$ is a nonlinear function of the *austenite-to-martensite hardening variable* α_{AM} : stress induced phase transformation from austenite to martensite can occur only when the stress σ is such that equality is attained in (2). Otherwise, either elastic behavior or reverse transformation takes place.

On the other hand, transformation from martensite back to austenite is related to the inequality constraint:

$$f_{MA}(\sigma, \varepsilon_T, \alpha_{MA}) := [\sigma_T(\varepsilon_T) - \kappa_{MA}(\alpha_{MA})] - |\sigma| \leq 0, \quad (3)$$

where $\kappa_{MA}(\alpha_{MA})$ is a nonlinear function of the *martensite-to-austenite hardening variable* α_{MA} : here again, phase transformation can happen only if equality is verified in (3) or otherwise either elastic behavior or direct transformation occurs.

The constraint (2) makes sense only if there is austenite to be transformed into martensite. Analogously, the constraint (3) is defined only if there is martensite present in the material.

The transformation strain ε_T and the hardening variables α_{AM} and α_{MA} define the set of internal variables of the thermodynamic system which evolves according to the following flow rules:

$$\dot{\varepsilon}_T = \dot{\gamma}_{AM} \frac{\partial f_{AM}}{\partial \sigma} + \dot{\gamma}_{MA} \frac{\partial f_{MA}}{\partial \sigma} = (\dot{\gamma}_{AM} - \dot{\gamma}_{MA}) \frac{\sigma}{|\sigma|}, \quad (4)$$

$$\dot{\alpha}_{AM} = \dot{\gamma}_{AM} \quad \text{if} \quad \dot{\gamma}_{AM} > 0, \quad (5)$$

$$\dot{\alpha}_{MA} = \dot{\gamma}_{MA} \quad \text{if} \quad \dot{\gamma}_{MA} > 0. \quad (6)$$

where $\dot{\gamma}_{AM}$ and $\dot{\gamma}_{MA}$ are subjected to the following constraints:

$$\dot{\gamma}_{AM} \geq 0, \quad \dot{\gamma}_{AM} f_{AM} = 0, \quad \dot{\gamma}_{MA} \geq 0, \quad \dot{\gamma}_{MA} f_{MA} = 0; \quad (7)$$

Further, state variables α_{AM} and α_{MA} are subjected to the rules:

$$\alpha_{AM} = 0, \quad \text{if} \quad \dot{\gamma}_{MA} > 0, \quad \text{and} \quad \alpha_{MA} = 0, \quad \text{if} \quad \dot{\gamma}_{AM} > 0, \quad (8)$$

Such resetting rules are the key point for the description of internal hysteresis loops.

Figure 1 illustrates a schematic stress-strain curve for a pseudoelastic material, as described by our model: let the specimen be loaded from a stress free configuration

(point A), and let it be subjected to a strain driven tractive load. Since there is only austenite present in the material ($\varepsilon_T = 0$) and, below point B, strict inequality is verified in (2), the complementarity condition (7) imposes $\dot{\gamma}_{AM} = 0$, i.e., the material behaves elastically along line AB. Equality in (2) is verified along line BC and, from the same constraints (7), the consistency parameter $\dot{\gamma}_{AM}$ is allowed to attain values distinct from zero. Therefore, we conclude from (4) and (5) that the state variables ε_T and α_{AM} can evolve, i.e., phase transformation from austenite to martensite takes place. Between points C and D, as the specimen is unloaded, strict inequalities are observed in both expressions (2) and (3). Thus, from (4) and (5) we conclude that both $\dot{\gamma}_{AM}$ and $\dot{\gamma}_{MA}$ are equal, i.e., the material behaves elastically. Equality of (3) is observed along line DE, meaning that we can have $\dot{\gamma}_{MA} > 0$ and hence transformation of martensite back to austenite. If, at point E, the specimen is subjected to a new increase in the prescribed strain, then the material behaves elastically between points E and F. From F to G, transformation from austenite to martensite is once more observed. It should be remarked that both direct and reverse transformations starts whenever the stress-strain curve crosses the dotted line corresponding to the transformation stress σ_T . This is justified by the fact that, from conditions (8), the hardening variables α_{AM} and α_{MA} are reset to zero whenever ($\dot{\gamma}_{MA} > 0$) and ($\dot{\gamma}_{MA} > 0$), respectively.

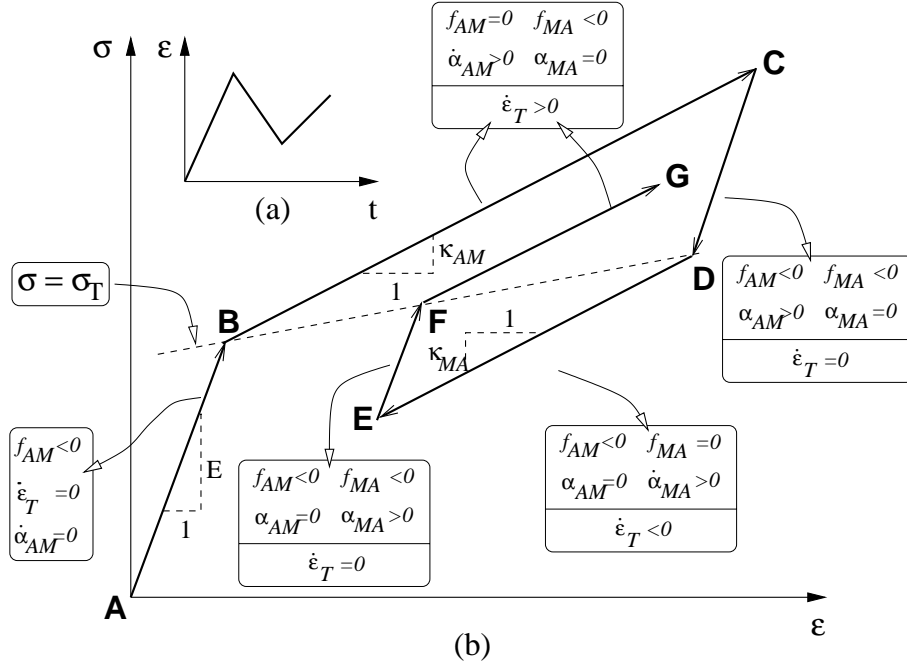


Figure 1: When subjected to the strain history in (a), the proposed constitutive model defines the stress-strain curve in (b).

3. NUMERICAL ASPECTS

The time discrete version of equations (1–8) is obtained via a *backward Euler* scheme and can be written as:

(i) *Stress-strain relation:*

$$\sigma_{n+1} := E (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{Tn+1}); \quad (9)$$

(ii) *Elastic domain:*

(ii.1) If $\varepsilon_{Tn} = 0$ (austenite):

$$f_{AMn+1} := |\sigma_{n+1}| - [\sigma_T(\varepsilon_{Tn+1}) + \kappa_{AM}(\alpha_{AMn+1})] \leq 0; \quad (10)$$

(ii.2) If $|\varepsilon_{Tn}| = \varepsilon_M$ (martensite):

$$f_{MA n+1} := [\sigma_T(\varepsilon_{Tn+1}) - \kappa_{MA}(\alpha_{MA n+1})] - |\sigma_{n+1}| \leq 0; \quad (11)$$

(ii.3) If $0 < |\varepsilon_{Tn+1}| < \varepsilon_M$ (mixture of phases):

$$f_{AMn+1} \leq 0 \quad \text{and} \quad f_{MA n+1} \leq 0; \quad (12)$$

(iii) *Flow rules:*

$$\varepsilon_{Tn+1} = \varepsilon_{Tn} + (\Delta\gamma_{AMn+1} - \Delta\gamma_{MA n+1}) \frac{\sigma_{n+1}}{|\sigma_{n+1}|}, \quad (13)$$

$$\alpha_{AMn+1} = \alpha_{AMn} + \Delta\gamma_{AMn+1} \quad \text{if} \quad \Delta\gamma_{AMn+1} \geq 0, \quad (14)$$

$$\alpha_{MA n+1} = \alpha_{MA n} + \Delta\gamma_{MA n+1} \quad \text{if} \quad \Delta\gamma_{MA n+1} \geq 0, \quad (15)$$

where $\Delta\gamma_{AMn+1} := \dot{\gamma}_{AM}(t_{n+1} - t_n)$ and $\Delta\gamma_{MA n+1} := \dot{\gamma}_{MA}(t_{n+1} - t_n)$ are subjected to constraints:

$$\Delta\gamma_{AMn+1} \geq 0, \quad \Delta\gamma_{AMn+1} f_{AMn+1} = 0, \quad (16)$$

$$\Delta\gamma_{MA n+1} \geq 0, \quad \Delta\gamma_{MA n+1} f_{MA n+1} = 0, \quad (17)$$

(iv) *Hardening resetting rules:*

$$\alpha_{AMn+1} = 0 \quad \text{if} \quad \Delta\gamma_{MA n+1} > 0, \quad (18)$$

$$\alpha_{MA n+1} = 0 \quad \text{if} \quad \Delta\gamma_{AMn+1} > 0. \quad (19)$$

The integration of the aforementioned set of equations is described by the algorithm below. Details on its derivation can be found in Ferreira et al. (2000).

ALGORITHM:

- Compute a *trial state* at time instant t_{n+1} :

$$\varepsilon_{Tn+1}^{trial} := \varepsilon_{Tn}, \quad \alpha_{AMn+1}^{trial} := \alpha_{AMn} \quad \text{and} \quad \alpha_{MA n+1}^{trial} := \alpha_{MA n}. \quad (20)$$

- Compute the corresponding *trial stress state* and the corresponding *trial yield functions*:

$$\sigma_{n+1}^{trial} := E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{Tn+1}^{trial}), \quad (21)$$

$$f_{AMn+1}^{trial} := |\sigma_{n+1}^{trial}| - [\sigma_T(\varepsilon_{Tn+1}^{trial}) + \kappa_{AM}\alpha_{AMn+1}^{trial}] \quad (22)$$

$$f_{MA n+1}^{trial} := [\sigma_T(\varepsilon_{Tn+1}^{trial}) - \kappa_{MA}\alpha_{MA n+1}^{trial}] - |\sigma_{n+1}^{trial}| \quad (23)$$

- If ($|\varepsilon_{Tn}| = 0$ and $f_{AMn+1}^{trial} \leq 0$), ($|\varepsilon_{Tn}| = \varepsilon_M$ and $f_{MA n+1}^{trial} \leq 0$) or ($0 < |\varepsilon_{Tn}| < \varepsilon_M$, $f_{AMn+1}^{trial} \leq 0$ and $f_{MA n+1}^{trial} \leq 0$), then (*elastic step*):

$$\varepsilon_{Tn+1} = \varepsilon_{Tn}, \quad \alpha_{AMn+1} = \alpha_{AMn} \quad \text{and} \quad \alpha_{MA n+1} = \alpha_{MA n}. \quad (24)$$

else:

- If $0 \leq |\varepsilon_{Tn}| < \varepsilon_M$, $f_{AMn+1}^{trial} > 0$ and $f_{MA n+1}^{trial} < 0$ (*transformation from austenite to martensite*):

- * Compute $\Delta\gamma_{AMn+1}$ from the nonlinear equation:

$$|\sigma_{n+1}^{trial}| - E \Delta\gamma_{AMn+1} \left[\sigma_T \left(\varepsilon_{Tn} + \Delta\gamma_{AMn+1} \frac{\sigma_{n+1}^{trial}}{|\sigma_{n+1}^{trial}|} \right) + \kappa_{AM}(\alpha_{AMn} + \Delta\gamma_{AMn+1}) \right] = 0, \quad (25)$$

- * Compute the new state variables:

$$\varepsilon_{Tn+1} = \varepsilon_{Tn} + \Delta\gamma_{AMn+1} \frac{\sigma_{n+1}^{trial}}{|\sigma_{n+1}^{trial}|}, \quad (26)$$

$$\alpha_{AMn+1} = \alpha_{AMn} + \Delta\gamma_{AMn+1}, \quad (27)$$

$$\alpha_{MA n+1} = 0. \quad (28)$$

- else ($0 < |\varepsilon_{Tn}| \leq \varepsilon_M$, $f_{AMn+1}^{trial} < 0$ and $f_{MA n+1}^{trial} > 0$) (*transformation from martensite to austenite*):

- * Compute $\Delta\gamma_{MA n+1}$ from the nonlinear equation:

$$\left[\sigma_T \left(\varepsilon_{Tn} - \Delta\gamma_{MA n+1} \frac{\sigma_{n+1}^{trial}}{|\sigma_{n+1}^{trial}|} \right) - \kappa_{AM}(\alpha_{AMn} + \Delta\gamma_{AMn+1}) \right] - |\sigma_{n+1}^{trial}| - E \Delta\gamma_{AMn+1} = 0, \quad (29)$$

- * Compute the new state variables:

$$\varepsilon_{Tn+1} = \varepsilon_{Tn} + \Delta\gamma_{MA n+1} \frac{\sigma_{n+1}^{trial}}{|\sigma_{n+1}^{trial}|}, \quad (30)$$

$$\alpha_{MA n+1} = \alpha_{MA n} + \Delta\gamma_{MA n+1}, \quad (31)$$

$$\alpha_{AMn+1} = 0. \quad (32)$$

4. ASSESMENT OF THE MODEL

Next, we compare our model with experimental data reported by Sittner et al. (1995), who performed studies on the mechanical behavior of Cu 80% - Al 10% - Zn 5% - Mn 5% industrial polycrystalline shape memory alloy at temperature $A_f + 25^\circ K (285^\circ K)$. Figures 2 to 4 present stress-strain curves for tensile tests where the specimens were subjected to

three distinct loading-unloading histories. We considered, for these numerical simulations, the following expressions for the nonlinear functions $\kappa_{AM}(\alpha_{AM})$ and $\kappa_{MA}(\alpha_{MA})$:

$$\kappa_{AM}(\alpha_{AM}) := a_{AM}\alpha_{AM} + b_{AM} [1 - \exp(-c_{AM}\alpha_{AM})], \quad (33)$$

$$\kappa_{MA}(\alpha_{MA}) := a_{MA}\alpha_{MA} + b_{MA} [1 - \exp(-c_{MA}\alpha_{MA})], \quad (34)$$

respectively, where a_{AM} , b_{AM} , c_{AM} , a_{MA} , b_{MA} and c_{MA} are material parameters. The following values of material properties were considered: $E = 30.7 \text{ GPa}$, $\sigma_{T0} = 120 \text{ MPa}$, $k = 18 \text{ GPa}$, $a_{AM} = 10 \text{ GPa}$, $b_{AM} = 45 \text{ MPa}$, $c_{AM} = 1600$, $a_{MA} = 10 \text{ GPa}$, $b_{MA} = 38 \text{ MPa}$, $c_{MA} = 1600$.

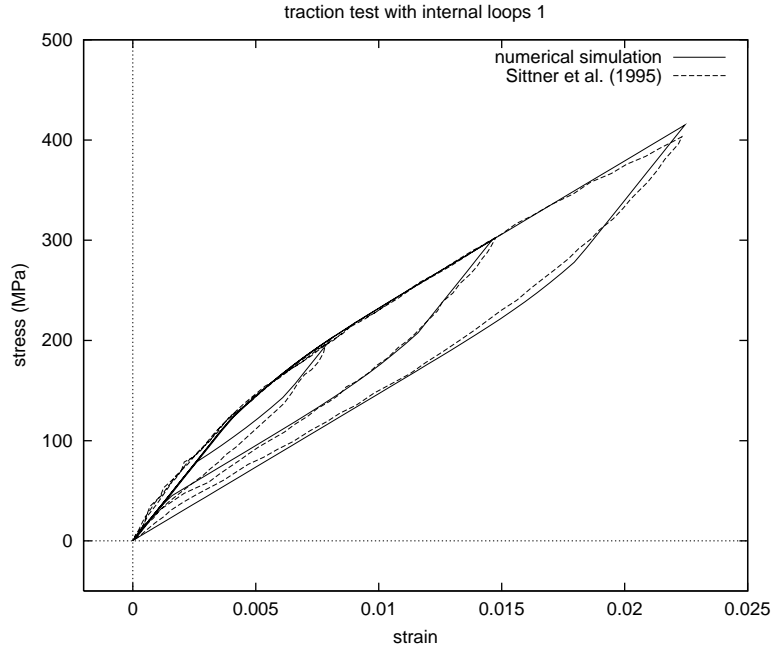


Figure 2: Traction test on Cu-Zn-Al-Mn polycrystalline specimen with distinct values of maximum strain on each cycle. Numerical simulation based on our model and experimental results from Sittner et al. (1995).

Numerical results are consistently in good agreement with experimental data. For the three cases of loading-unloading histories, the internal hysteresis loops could be replicated, both qualitatively and quantitatively.

5. CONCLUDING REMARKS

A macroscopic model capable to describe the mechanical behavior of pseudoelastic materials is presented in this paper. Most of its ingredients are inherited, from the formal point of view, from classical plasticity. Due to the resetting rules considered in the model, complex hysteresis patterns can be replicated by the model with good accuracy.

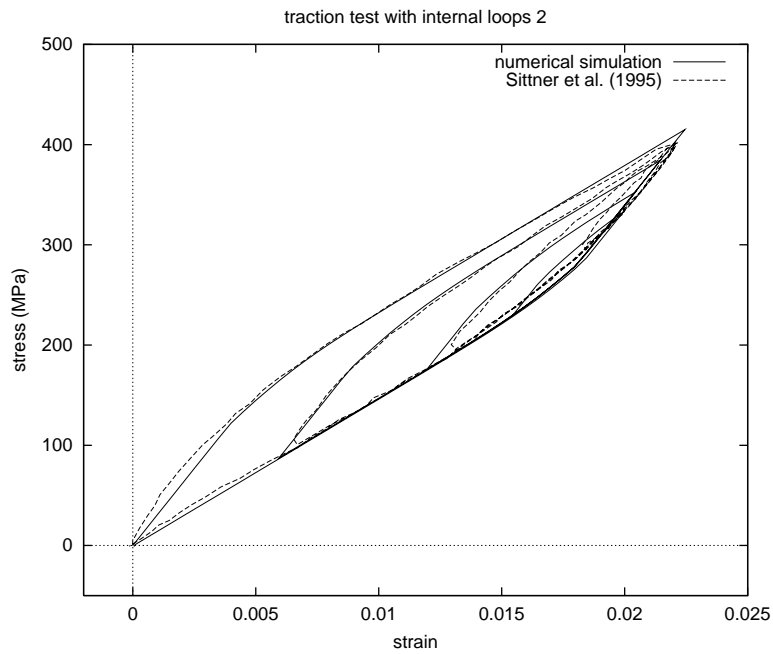


Figure 3: Traction test on Cu-Zn-Al-Mn polycrystalline specimen with distinct values of minimum strain on each cycle. Numerical simulation based on our model and experimental results from Sittner et al. (1995).

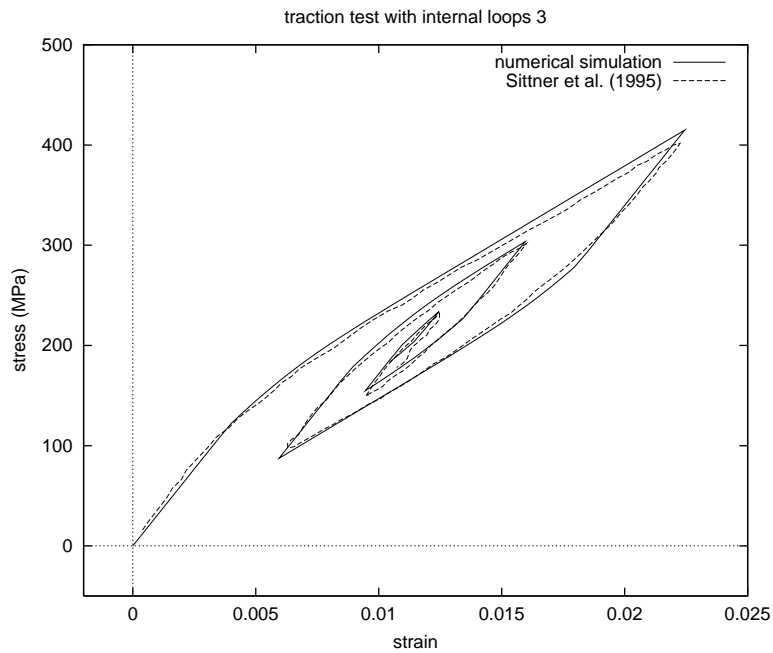


Figure 4: Traction test on Cu-Zn-Al-Mn polycrystalline specimen with decreasing values of maximum strain and increasing values of minimum strain prescribed along the loading-unloading cycles. Numerical simulation based on our model and experimental results from Sittner et al. (1995).

REFERENCES

- Abeyaratne, R. & Knowles, J. K. (1988), “On the dissipative response due to discontinuous strains in bars of unstable elastic material”, *Int. J. Solids Struct.* **24**, 1021–1044.
- Auricchio, F., Taylor, R. L. & Lubliner, J., 1997, “Shape memory alloys: macro-modelling and numerical simulation of the superelastic behavior”, *Comp. Methods Appl. Engrg.*, 146, 281–312.
- Ericksen, J. L., 1975, “Equilibrium of bars”, *J. Elasticity*, 5, 191–201.
- Ferreira, F. A., Viana, D. M. & Mamiya, E. N., 2000, “Pseudoelastic hysteresis loops in one-dimensional media: phenomenological description inherited from classical plasticity”, Pre-print (submitted to the *Int. J. Solids Struct.*).
- Frémond, M., 1987, “Matériaux à mémoire de forme”, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 304, II, 239–244.
- Govindjee, S. & Hall, G. J., 1999, “A computational model for shape memory alloys”, *Int. J. Solids Struct.*, 37, 735–760.
- Graesser, E. J. & Cozzarelli, F. A., 1994, “A proposed three-dimensional constitutive model for shape memory alloys”, *J. Int. Mat. Systems and Struct.*, 5, 78–89.
- Leclercq, S. & Lexcellent, C., 1996, “A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys”, *J. Mech. Phys. Solids*, 44, 953–980.
- Sittner, P., Hara, Y. & Tokuda, M. (1995), “Experimental study on the thermoelastic martensitic transformation in shape memory alloy polycrystal induced by combined external forces”. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 26A, 2923–2935.
- Souza, A. C., Mamiya, E. N. & Zouain, N., 1998, “Three-dimensional model for solids undergoing stress-induced phase transformations”, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 17, 789–806.

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE COROAS DENTÁRIAS SUBMETIDAS A CARGAS TÉRMICAS E DE MASTIGAÇÃO

Jesiel Cunha

Faculdade de Engenharia Civil

Raquel Santini Leandro Rade

Faculdade de Matemática e Física

Henner Alberto Gomide

Faculdade de Engenharia Mecânica

Universidade Federal de Uberlândia

Resumo

Este trabalho se insere no contexto da Biomecânica, buscando estudar o problema da distribuição das tensões responsáveis pela falha de coroas protéticas. Além das falhas que ocorrem devido ao procedimento de cimentação e dos materiais empregados, outros fatores que contribuem para a diminuição da resistência à retenção das coroas estão relacionados com os esforços mecânicos provocados por variações térmicas e pela mastigação, a que as coroas estão submetidas diariamente. O presente estudo analisa, do ponto de vista do comportamento mecânico, as tensões geradas por choques térmicos e cargas de compressão na coroa, através do Método dos Elementos Finitos. Os altos níveis de tensões encontrados em determinadas regiões podem provocar fissuras que agravam o fenômeno da infiltração marginal, principal responsável pelo descolamento da coroa. As análises feitas mostraram a importância da consideração das tensões geradas, em particular nas regiões onde a infiltração marginal pode ocorrer.

Palavras-chave: Biomecânica, Coroas dentárias, Infiltração marginal, Método dos Elementos Finitos, Comportamento mecânico.

1. INTRODUÇÃO

A perda de elementos dentários compromete a mastigação, a fonética e a estética. A odontologia restauradora atual se baseia em parâmetros de conservação da estrutura dental e na obtenção de resultados estéticos, pela utilização de materiais que conseguem, através da adesão, restaurar o elemento dental de forma satisfatória. Porém, nem sempre é possível restaurar conservadoramente um elemento dental com grande destruição coronária, sendo pois, necessária a utilização de coroas protéticas. Uma coroa consiste de um envoltório metálico, geralmente feito de ligas de ferro-cromo ou níquel-cromo, preso por um cimento à dentina, conforme mostra a Figura 1. As coroas dentárias falham, na maioria dos casos, por processos ligados ao

comportamento mecânico do material cimentante. Estas falhas podem resultar em infiltração marginal e, em casos extremos, no descolamento da peça protética. A falta de uma eficiente ligação da coroa protética ao dente gera micro-fendas na região de cimentação, constituindo meios de entrada de bactérias e fluidos bucais que podem causar desde o aumento da sensibilidade pós-operatória, até a necrose pulpar e a perda definitiva do dente (Graver *et al.*, 1990; Tjan, 1987; Tjan & Sarkassian, 1986; Radke, 1988).

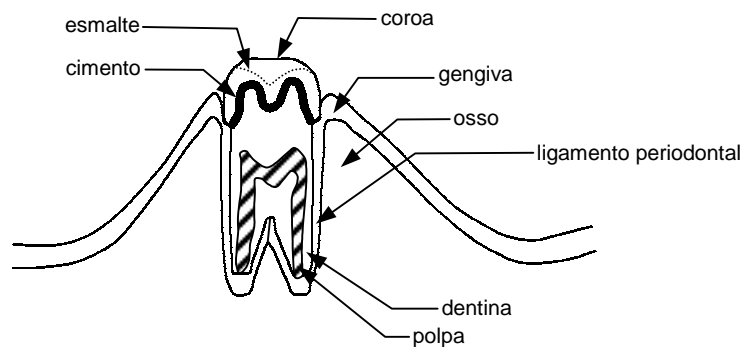


Figura 1- Esquema representativo de uma coroa fixa.

Além dos esforços advindos da mastigação, em sua alimentação diária o homem provoca choques térmicos na estrutura dentária ao consumir, por exemplo, uma xícara de café ou um copo de água gelada. Alguns estudos sugeriram a importância das variações de temperatura na aderência marginal de materiais de restauração dentária. Esta variação de temperatura provocaria o surgimento de fissuras nos materiais componentes de uma coroa. Experimentos realizados em restaurações sujeitas a variações de temperatura mostraram que o descolamento coroa/cimento/dentina pode ser causado pela diferença entre os coeficientes de dilatação térmica dos tecidos dentários e dos materiais de restauração, além da influência da expansão de fluidos localizados entre o dente e a restauração (Murphy & Gomide, 1997). Além destes, outros efeitos da variação de temperatura estão sendo analisados em ensaios de transferência de corpos de prova entre soluções frias e quentes, ensaio conhecido como termociclagem (Muradas & Gomide, 1998).

O objetivo principal deste trabalho foi de analisar, através de simulações numéricas, o comportamento mecânico de coroas protéticas, sob ação de efeitos térmicos e de mastigação. Buscou-se analisar, de forma qualitativa, a influência das tensões no processo de falha das coroas, em particular nas interfaces cimento/estrutura dentária e cimento/coróa, onde a infiltração marginal pode ocorrer, levando ao descolamento da coroa.

2. SIMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

Para proceder às simulações numéricas foi utilizado o Método dos Elementos Finitos. A análise de problemas na Biomecânica utilizando o Método dos Elementos Finitos já constitui um procedimento comum em várias aplicações, tais como projeto de próteses e implantes e análise de problemas médicos e odontológicos de alguma maneira ligados a esforços mecânicos.

As simulações computacionais feitas permitiram as análises do ponto de vista do comportamento mecânico, em regime elástico. Como foi dito, os pontos explorados foram a verificação do impacto das variações térmicas e a simulação da mastigação, com o objetivo de verificar os esforços advindos dessas solicitações.

O Método dos Elementos Finitos permite uma grande variação das propriedades dos materiais, da geometria dos componentes, dos esforços aplicados e das condições de contorno (Imbert, 1995). A partir de uma base de dados experimentais pode-se simular diversas situações práticas correntes ou mesmo extremas, às vezes difíceis de serem realizadas experimentalmente. Para efetuar as simulações, foi confeccionado um modelo de elementos finitos que se aproxime da situação real. A geometria do dente foi traçada com base na observação de várias amostras, tomando-se um formato anatômico médio, de tal forma que o estudo não ficasse limitado a um caso particular, tratando assim o problema de uma forma mais genérica.

Foi utilizado o programa comercial ANSYS® (1995). O elemento escolhido foi o *SOLID45*, para análise de campos de tensão e deformação tridimensionais. Este elemento possui 8 nós, sendo 3 graus de liberdade por nó. Para a modelagem do ligamento periodontal foi utilizado o elemento *COMBIN39*, que simula o comportamento de uma mola. O modelo resultante (Figura 2) é composto de 5268 nós, 4591 elementos, correspondendo a aproximadamente 15.000 graus de liberdade. O grau de refinamento da malha foi definido em função da precisão requerida para os resultados. Um aspecto interessante da modelagem é que as malhas das partes componentes do conjunto (coroa, cimento e dentina) foram concebidas separadamente, conforme mostra a Figura 2, de forma a permitir análises independentes em cada componente. É importante salientar que este modelo, embora aproximado, é significativo na representação da estrutura real, pois considera os efeitos mecânicos de forma tridimensional, o que não é comum na maioria dos estudos referentes ao assunto. Na literatura, encontra-se modelos em estado plano de deformação, estado plano de tensões ou modelos axissimétricos (Albuquerque *et al.*, 1999).

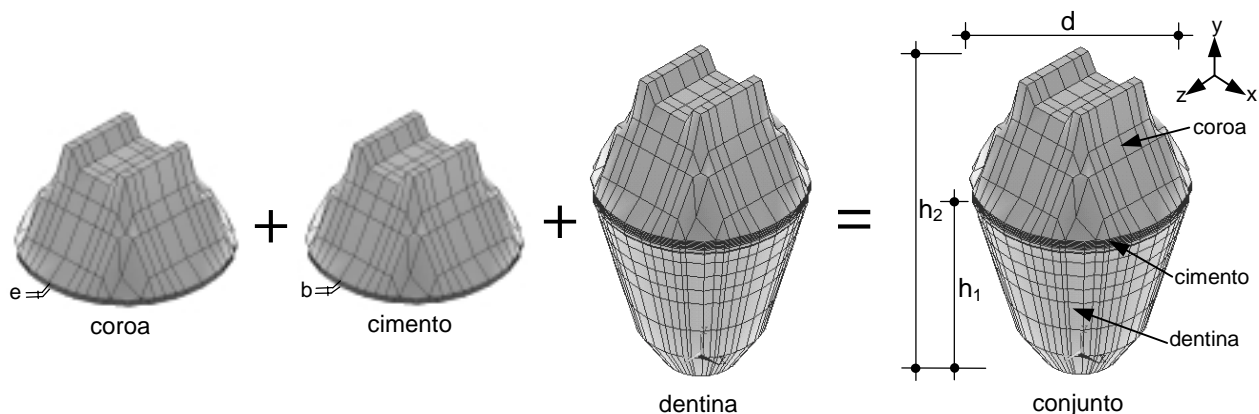


Figura 2 – Composição e dimensões do modelo de elementos finitos.

2.1. Parâmetros da simulação

2.1.1. Propriedades dos materiais

As propriedades físicas e mecânicas dos materiais envolvidos foram extraídas da bibliografia (Vieira, 1976; Phyllips, 1976; O'Bryen & Ryge, 1981; Selna, L.G. *et al.*, 1975). Estas propriedades, bem como as dimensões básicas (mostradas na Figura 2) são dadas na seqüência. Dentina: $E=1.73 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ (módulo de elasticidade); $\nu=0.3$ (coeficiente de Poisson); $\alpha=11.4 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ (coeficiente de expansão térmica); cimento (fosfato de zinco): $E=22.4 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $\nu=0.35$; $\alpha=10 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; coroa (níquel-cromo): $E=1.79 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$; $\nu=0.32$; $\alpha=17.3 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Dados da geometria: $h_1=0.012 \text{ m}$ (altura da base); $h_2=0.019 \text{ m}$ (altura total); $d=0.012 \text{ m}$ (diâmetro da coroa); $e=0.0005 \text{ m}$ (espessura da coroa); $b=0.0001 \text{ m}$ (espessura do cimento).

Em relação às propriedades referentes ao corpo humano, é importante observar que os valores utilizados são aproximados, pois são de difícil identificação experimental. Algumas propriedades podem variar em função da localização anatômica e de características biológicas individuais. Além disso, os materiais são geralmente heterogêneos e anisotrópicos, o que pode levar a valores de propriedades que variam de ponto a ponto (Noritomi & Sollero, 1999).

2.1.2. Condições térmicas impostas

A simulação numérica do efeito das variações de temperatura consistiu de choques térmicos aplicados ao modelo. Estes choques térmicos são advindos do fato de que o homem ingere alimentos em diferentes temperaturas. Desta forma, a temperatura do modelo passa por variações discretas, de 37°C para 55 °C no caso de aquecimento e de 37°C para 5 °C no caso de resfriamento. Deve-se observar que a simulação numérica efetuada não é uma termociclagem efetiva, onde os choques térmicos são sucessivos, resultando em fadiga térmica dos materiais.

2.1.3. Condições da mastigação

Os esforços advindos do processo de mastigação de alimentos pode ser outro fator que contribui, do ponto de vista do comportamento mecânico, ao processo de descolamento dos materiais na interface. Segundo Carvalho & Matson (1990), o esforço de mastigação corresponde a uma carga concentrada de compressão, de módulo aproximadamente igual a 50 kgf. Essa carga foi aplicada de forma assimétrica em uma região distante do centro geométrico da seção transversal do modelo (Figura 3), afim de que seu efeito seja o mais crítico possível.

2.1.4. Condições de contorno

Em relação às condições de contorno, ou seja, as restrições cinemáticas impostas ao modelo, estas consistem da imposição da rigidez do ligamento periodontal, que é uma membrana que liga o dente e a arcada dentária, conforme mostrou a Figura 1. O ligamento periodontal tem uma estrutura complexa formada por material fluido e fibroso, tornando a identificação de suas propriedades bastante difícil. Segundo Selna *et al.* (1975), o ligamento pode ser modelado por um conjunto de molas com rigidez conhecida, conforme está representado esquematicamente na Figura 3.

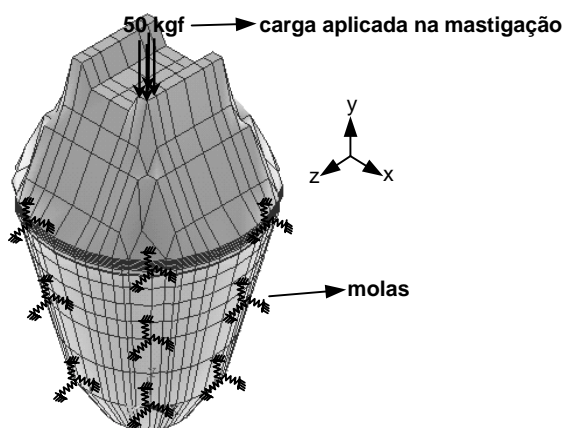


Figura 3 – Representação da modelagem do ligamento periodontal por meio de sistemas de molas, e do carregamento referente à mastigação.

Com este tipo de modelagem, todos os nós pertencentes à interface dentina/osso estão conectados por sistemas de molas. Os valores utilizados para as constantes das molas nas direções x , y e z foram: $K_x=210449$ N/m; $K_y=34243$ N/m; $K_z=210449$ N/m.

3. RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados das simulações numéricas foram analisados no que se refere à distribuição das tensões no conjunto e nos componentes individualmente (cimento, coroa e dentina), conforme mostrou a modelagem da Figura 2. Serão mostradas as figuras referentes às duas situações analisadas: choques térmicos e aplicação da carga de mastigação. Estas duas situações foram simuladas de forma independente.

Foi obtida uma grande quantidade de resultados. Apenas alguns destes resultados serão mostrados, sendo o suficiente para as análises efetuadas, que são de caráter mais qualitativo. Como valores de referência, serão fornecidas as distribuições das tensões principais σ_I e das tensões normais σ_{yy} , no conjunto e nos componentes, para situações de resfriamento e aquecimento. As tensões principais σ_I constituem um possível critério de resistência (falha) dos materiais. Já as tensões σ_{yy} , de tração em particular, atuam diretamente no sentido do descolamento na interface. Os valores das tensões estarão sempre em N/m^2 .

As tensões resultantes do choque térmico de aquecimento ($\Delta T=18^\circ C \rightarrow 37-55^\circ C$) são mostradas nas Figuras de 4 a 7. A distribuição das tensões σ_I na prótese para o resfriamento ($\Delta T=32^\circ C \rightarrow 37-5^\circ C$) é dada pela Figura 8. A Figura 9 mostra a distribuição das tensões σ_{yy} no conjunto, quando da aplicação da carga excêntrica de 50 kgf, conforme Figura 3. A Figura 10 mostra a distribuição da tensão de Von Mises para a situação de aquecimento.

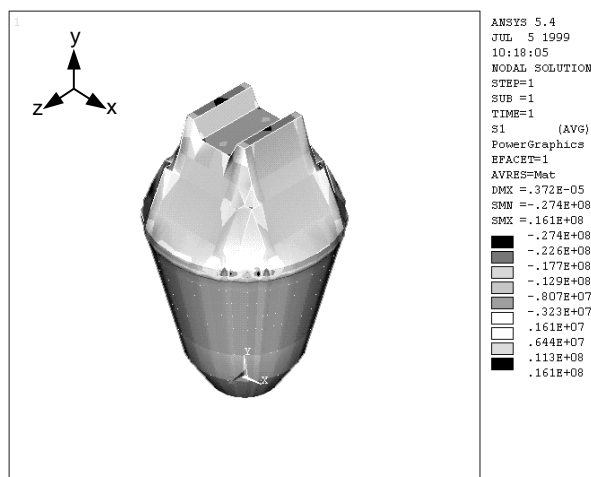


Figura 4 - Distribuição das tensões σ_I no conjunto após o aquecimento.

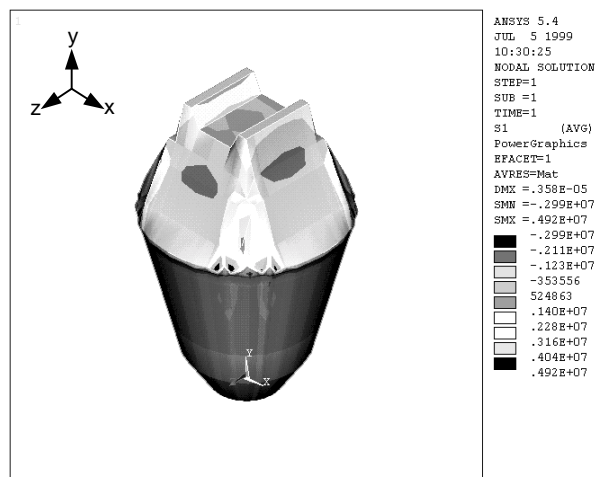


Figura 5 - Distribuição das tensões σ_I na dentina após o aquecimento.

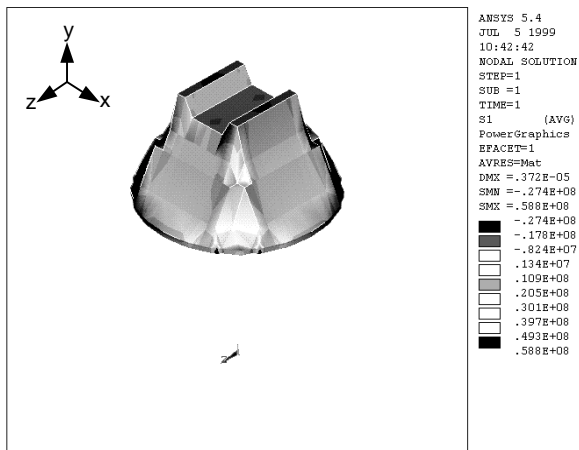


Figura 6 - Distribuição das tensões σ_I na coroa após o aquecimento.

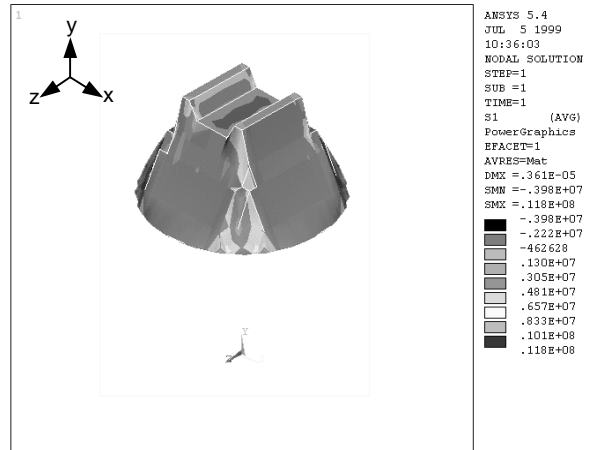


Figura 7 - Distribuição das tensões σ_I no cimento após o aquecimento.

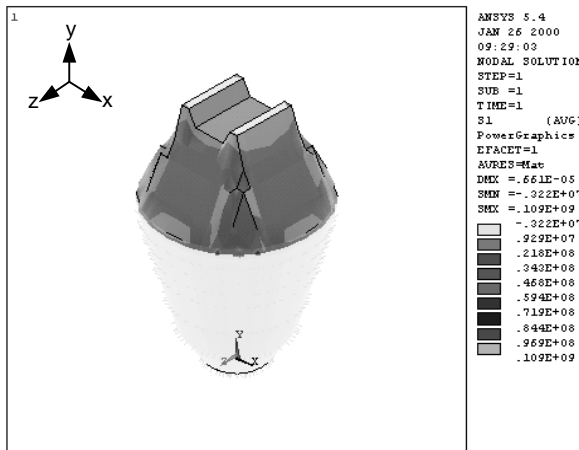


Figura 8 - Distribuição das tensões σ_I no conjunto após o resfriamento.

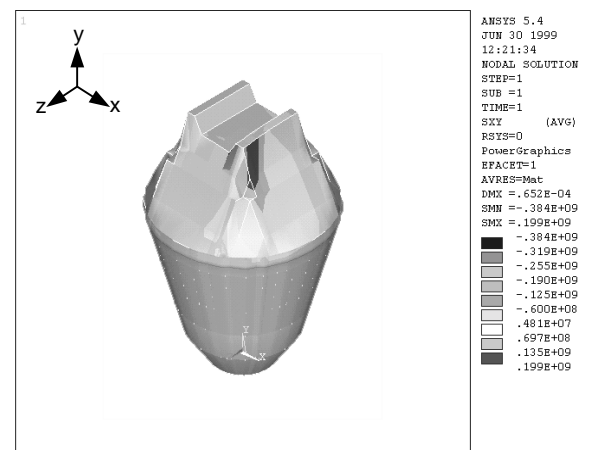


Figura 9 - Distribuição das tensões σ_{yy} no conjunto para a mastigação.

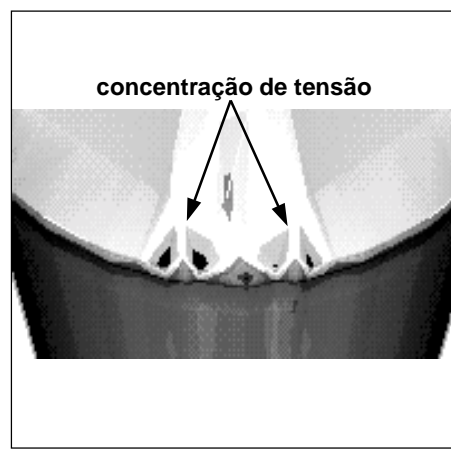
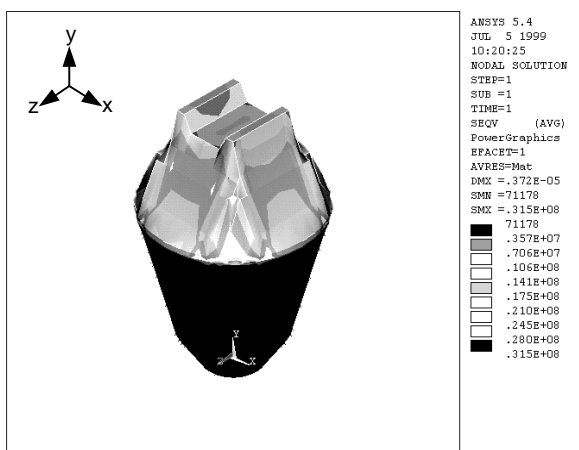


Figura 10 - Distribuição da tensão de Von Mises no conjunto e na interface dentina/cimento após o aquecimento.

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Uma primeira observação é de que o choque térmico provocou níveis de tensão bastante elevados, ainda que relativamente distantes dos limites de ruptura dos materiais. A tensão de Von Mises para o caso de aquecimento foi de no máximo $0.315 \times 10^8 \text{ N/m}^2$. No entanto, se for considerada uma situação em que os choques térmicos sejam sucessivos e em um número elevado, haveria grande possibilidade de fadiga térmica, com o surgimento de trincas e, conseqüentemente, do descolamento na interface.

Com relação à diferença da distribuição e dos valores das tensões na coroa, cimento e dentina, isto se deve à geometria, às propriedades elásticas e ao coeficiente de dilatação térmica de cada componente.

Embora nenhum critério de resistência (falha) tenha sido estabelecido neste trabalho, pode-se notar um resultado interessante que consiste na concentração de tensões de tração nas “quinas” do conjunto, conforme indicado na Figura 10. A concentração ocorre justamente nas interfaces coroa/cimento/dentina, podendo assim, ser este um fator que indique uma região crítica para ocorrência da infiltração marginal e do descolamento.

As cargas de compressão que surgem durante a mastigação causam uma distribuição assimétrica e concentrada das tensões no ponto de aplicação, com considerável intensidade. Para este caso, não foi observada uma concentração na interface coroa/cimento/dentina, que pudesse agravar de forma significativa o descolamento.

5. CONCLUSÃO

As análises feitas foram de caráter mais qualitativo do que quantitativo. Os níveis de tensões obtidos demonstraram a importância da consideração dos esforços termomecânicos e de mastigação no estudo de falhas de coroas protéticas. É importante observar no entanto, que os resultados obtidos neste trabalho são preliminares. Novas análises serão efetuadas a partir do levantamento experimental das propriedades dos materiais e da comparação com ensaios de termociclagem (Muradas & Gomide, 1998), atualmente em curso de realização. A partir daí poderão ser feitos estudos mais precisos para esclarecer pontos específicos, visando dar informações mais detalhadas e conclusivas a respeito do processo de descolamento de coroas, segundo o comportamento mecânico da estrutura.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPEMIG – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais pelo suporte financeiro, através do Projeto de Pesquisa TEC-2205/97.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBUQUERQUE, R. C., POLLETO, L. T. A., FONTANA, R. H. B. T. S., SODRÉ, G. S. F. & CIMINI JR., C. A., 1999, “Análise de tensões em um incisivo central superior reconstruído com diferentes pinos intrarradiculares”, Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, CD-ROM, Águas de Lindóia-SP.

- “ANSYS - Engineering analysis system”, 1995, Swanson Analysis Systems Inc.
- CARVALHO, R. C. R. & MATSON, E., 1990, “Contribuição para o estudo das tensões que ocorrem em dentes restaurados, utilizando ligas de ouro e de cobre-alumínio, sob ação de força distribuída. Método dos Elementos Finitos”, Revista de Odontologia da USP.
- GRAVER, H. et al., 1990, “Microleakage of casting cemented with glass-ionomer cements”, Oper. Dent., 15: 2-9.
- IMBERT, J. F., 1995, “Analyse des structures par éléments finis”, Cépaduès Editions, 3^o édition.
- MURPHY, M. J. & GOMIDE, H. A., 1997, “Sistema de controle de aparelho para termociclagem”, Relatório Técnico, Projeto CNPq- Processo 521524195 (NV), Uberlândia.
- NORITOMI, P. Y. & SOLLERO, P., 1999, “Revisão dos métodos de análise mais comumente utilizados para verificação de propriedades de interesse em ossos”, Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, CD-ROM, Águas de Lindóia-SP.
- O’BRYEN, W. J. & RYGE, G., 1981, “Materiais dentários”, 1^a Edição, Rio de Janeiro, Ed. Interamericana.
- PHYLLIPS, R. W., 1976, “La ciencia de los materiales dentales de Skinner”, 7^a Edição, Cidade do México, Ed. Interamericana.
- MURADAS, D. Q., GOMIDE, H. A., OLIVEIRA, S. A. G. & SOARES C. J., 1998, “Construção e utilização de um aparelho de termociclagem para provocar choques térmicos em próteses dentárias”, Anais do V CREEM/ABCM-Congresso de Estudantes de Engenharia Mecânica, Vitória-ES.
- RADKE, R. A., 1988, “Retention of cast endodontic posts: comparison of cementing agents”, The Journal of Prosthetic Dentistry, 59(3):318-320.
- SELNA, G. L., SHILLING-BURG, H. T. & KERR, P. A., 1975, “Finite element analysis of dental structures-axisymmetric and plane stress idealizations”, J. Biomed. Mater. Res., V. 9, 237-252.
- TJAN, A. H. L., 1987, “Effects of various cementation methods on the retention of prefabricated posts”, The Journal of Prosthetic Dentistry, 58(3):309-313.
- TJAN, A. H. L. & SARKISSIAN, R., 1986, “Effects of preparation finish on retention an fit of complete crowns”, The Journal of Dentistry, 56(3):183-188.
- VIEIRA, D. F., 1976, “Cimentação: incrustões, coroa e próteses dentárias”, 1^a Edição, São Paulo, Sarvier Editora de Livros Médicos.

FINITE ELEMENT SIMULATION OF SHAPE MEMORY COUPLINGS

Leonardo Boselli da Motta

Dianne Magalhães Viana

Edgar Nobuo Mamiya

Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, 70910-900 Brasília, DF, Brasil. E-mail: boselli@lion.enm.unb.br

Abstract

Hydraulic tube couplings for jet fighters can be fabricated from NiTi alloys. The use of NiTi alloys is an alternative of the difficult task of brazing hydraulic lines. In this case, the NiTi sleeve is mechanically expanded at low temperature, then placed around the tubes to be joined. In the sequence, it is warmed up to room temperature, when it recovers its original shape, gripping firmly the tubes. The goal of this paper is to present a qualitative finite element analysis of such pipe coupling.

Keywords: shape memory, pipe coupling, finite element.

1. INTRODUCTION

Shape memory alloys (SMAs) are materials which, after being subjected to a severe inelastic deformation, can recover its original shape whenever it undergoes an appropriate increase of temperature. Such unique mechanical behavior is associated with stress-induced phase transformations from twinned martensite to detwinned martensite (during inelastic deformation) and from detwinned martensite to austenite (during shape recovery). Representative materials exhibiting shape memory include NiTi, CuZnAl, CuAlNi, AuCd alloys. Since the early sixties this class of materials has been considered for the design of pipe couplings, fasteners, clamps, “smart” structures, advanced composites, force actuators and heat engines. Shape memory alloys have been successfully employed to couple hydraulic-fluid lines in jet fighters as an alternative to the difficult task of brazing lines that lie close to the aluminum skin: a NiTi sleeve is expanded in the martensitic condition at liquid nitrogen temperature, then placed around the tubes to be joined; during warming to room temperature, the sleeve recovers its original shape, producing a tight seal. The use of such fittings avoids metallurgical degradation which can result from welding or brazing, and avoids damage to the aircraft skin. Over 300,000 such high performance connectors have been used in US Navy aircrafts with no reports of failures (Wayman, C. M. (1980)).

Many models have been proposed for the description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys, including those reported by Graesser & Cozarelli (1994), Leclercq & Lexcellant (1996), Auricchio & Taylor (1997) and Souza et al. (1998), amongst many others. One interesting feature of the model proposed by Souza et al. is the fact that it showed a satisfactory qualitative agreement with experimental data (Sittner et al. (1995)) when nonproportional load histories were applied to the material. This feature is welcome in the setting of a finite element code, where very general load histories are expected.

The goal of this paper is to present some numerical results related to the development

of a finite element capable to describe the thermomechanical behavior of shape memory alloys, as described by Souza et al.. In particular, we present a simulation of the assembling process of a jet pipe coupling.

2. THE MECHANICAL MODEL

If ε denotes the classical *linear strain* tensor, then the corresponding *deviatoric strain* tensor is defined as $\mathbf{e} := \varepsilon - \frac{1}{3}(\text{tr } \varepsilon) \mathbf{I}$, where \mathbf{I} is the identity tensor in \mathbf{R}^3 . If \mathbf{T} denotes the Cauchy stress tensor, then the *deviatoric stress* tensor \mathbf{S} , work-conjugate to \mathbf{e} , is given by $\mathbf{S} := \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{T}) \mathbf{I}$. A symmetric and deviatoric *transformation strain* \mathbf{e}_T describes the average detwinning (and hence the phase transformation) in the material. When $\mathbf{e}_T = \mathbf{0}$, we say that the material is in its parent phase (austenite or twinned martensite), when $\|\mathbf{e}_T\| = \xi_s$, the material is in its product phase (detwinned martensite), and when $0 < \|\mathbf{e}_T\| < \xi_s$ a mixture of both parent and product phases can be observed in the material.

Souza et al. proposed two potentials from which the constitutive relations and the evolution law for the transformation strain \mathbf{e}_T are derived. The first potential is the *Helmholtz free energy*:

$$\psi(\text{tr } \varepsilon, \mathbf{e}, \mathbf{e}_T, \theta) := \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{3} \right) (\text{tr } \varepsilon)^2 + \mu \|\mathbf{e} - \mathbf{e}_T\|^2 + \tau_M(\theta) \|\mathbf{e}_T\| \quad (1)$$

where λ and μ are the Lamé constants of the material and $\tau_M(\theta)$, a positive and monotonically increasing function of the temperature θ , is the so called Maxwell stress (see Gurtin (1983), for instance). Differentiation of the potential Ψ with respect to state variables gives the following constitutive relations:

$$T_m := \frac{\partial \psi}{\partial (\text{tr } \varepsilon)} (\text{tr } \varepsilon, \mathbf{e}, \mathbf{e}_T, \theta) = \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) \text{tr } \varepsilon, \quad (2)$$

$$\mathbf{S} := \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}} (\text{tr } \varepsilon, \mathbf{e}, \mathbf{e}_T, \theta) = 2\mu (\mathbf{e} - \mathbf{e}_T), \quad (3)$$

$$\mathbf{X} \in -\partial_{\mathbf{e}_T} \psi (\text{tr } \varepsilon, \mathbf{e}, \mathbf{e}_T, \theta) = \mathbf{S} - \tau_M(\theta) \partial \|\mathbf{e}_T\|, \quad (4)$$

$$\eta \in -\partial_\theta \psi (\text{tr } \varepsilon, \mathbf{e}, \mathbf{e}_T, \theta) = -\partial \tau_M(\theta) \|\mathbf{e}_T\|. \quad (5)$$

Equation (2) describes the mean stress corresponding to changes in the volume of the material while equation (3) is the deviatoric stress-strain relation. The *transformation stress* \mathbf{X} , work-conjugate to the transformation strain \mathbf{e}_T , is the driving force for phase transformation processes. The term $\tau_M(\theta) \partial \|\mathbf{e}_T\|$ describes the “origin” of the elastic domain. Finally, η is the density of entropy.

The second potential considered in the model is the *complementary potential of dissipation* ϕ^c , defined as:

$$\phi^c(\mathbf{X}) = I_R(\mathbf{X}) := \begin{cases} 0 & \text{if } \|\mathbf{X}\| \leq R, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6)$$

Differentiation of (6) with respect to \mathbf{X} leads to the following *flow rule*:

$$\dot{\mathbf{e}}_T \in \partial \phi^c(\mathbf{X}) = \partial I_R(\mathbf{X}). \quad (7)$$

An Implicit Euler scheme, together with a classical Return Mapping Algorithm, was considered for the integration of the aforementioned flow rule. Further details can be found in Souza et al. (1998).

3. FINITE ELEMENT SIMULATION OF HYDRAULIC COUPLINGS

In this section we present a numerical simulation of the assembling process of a Nitinol hydraulic coupling. In this setting, let us consider a pair of aluminum tubes with inner and outer diameters $\phi_i = 6 \text{ mm}$ and $\phi_o = 12 \text{ mm}$, respectively. A shape memory sleeve with inner and outer diameters $\Phi_i = 11.52 \text{ mm}$ and $\Phi_o = 18 \text{ mm}$, respectively, is machined at room temperature, so that the inner diameter of the sleeve is about 4% less than the outer diameter of the tubes (Fig. 1.a). The sleeve is then cooled up to -120°C and mechanically expanded to have an inner diameter 4% larger than the tube's outer diameter (Fig.1.b). Still at low temperature, the set is assembled (Fig. 1.c). When the couple is warmed up to room temperature, it shrinks to form a tight seal (Fig. 1.d).

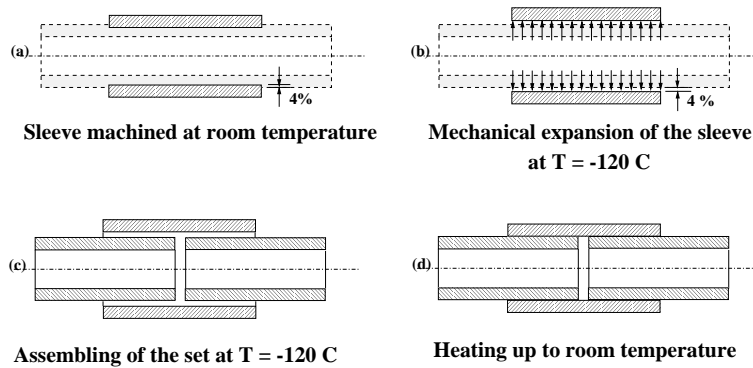


Figure 1: Schematic assembling process of the SMA coupling.

In order to simulate the aforementioned coupling process, two finite element discretizations were considered. The first one is illustrated in Figure 2 and considers that the problem is invariant along the longitudinal direction. As a consequence, the discretization is restricted to the radial direction. The aluminum tubes are discretized in four elastic four-noded axisymmetric elements, while the sleeve is discretized in four shape memory four-noded \bar{B} axisymmetric elements. \bar{B} elements were chosen in order to avoid the locking associated with the evolution of the transformation strain, which is a deviatoric tensor. Two simple “gap” elements are considered in order to describe the contact condition between the sleeve and the tubes.

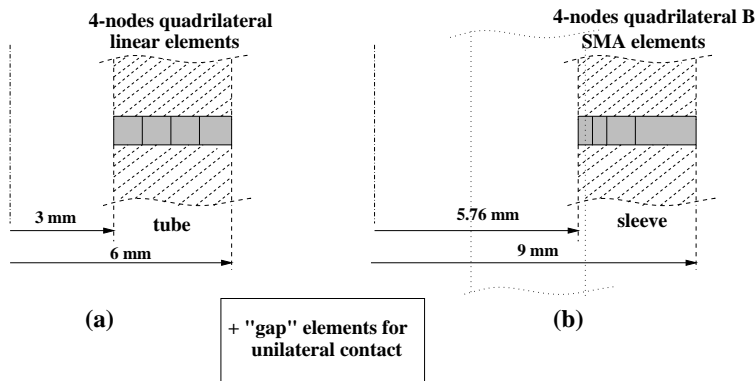


Figure 2: Discretization of the coupling along the radial direction: (a) tubes, (b) sleeve.

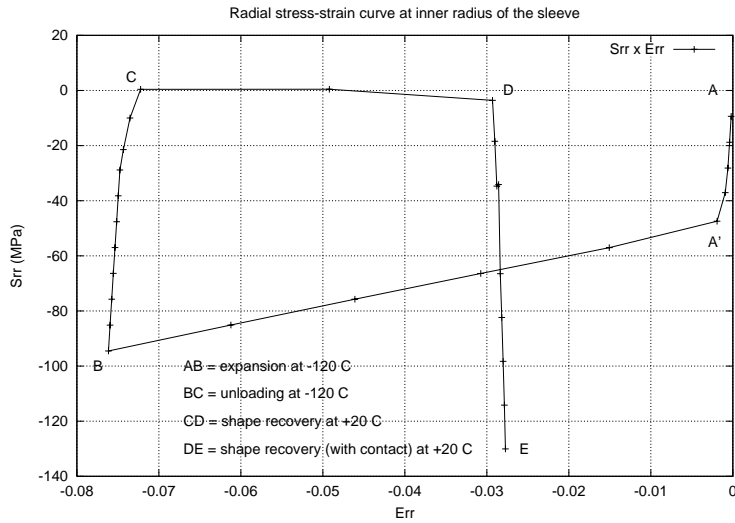


Figure 3: Radial stress-strain curve at inner radius of the sleeve.

Figure 3 describes the history of radial stress versus radial strain, at the inner radius of the sleeve, obtained from the numerical simulation of the assembling process. Starting from a stress-free configuration (at temperature -120°C), elastic behavior is observed from point A to point A', during mechanical expansion of the sleeve. Still during mechanical expansion, inelastic behavior associated with stress induced phase transformation is observed along line A'B. Line BC describes the stress-strain curve during unloading, always at cryogenic temperature. Next, line CDE is associated with elevation of the temperature up to 20°C . Contact between the sleeve and the tubes starts at point D, as a consequence of the shape recovery of the sleeve.

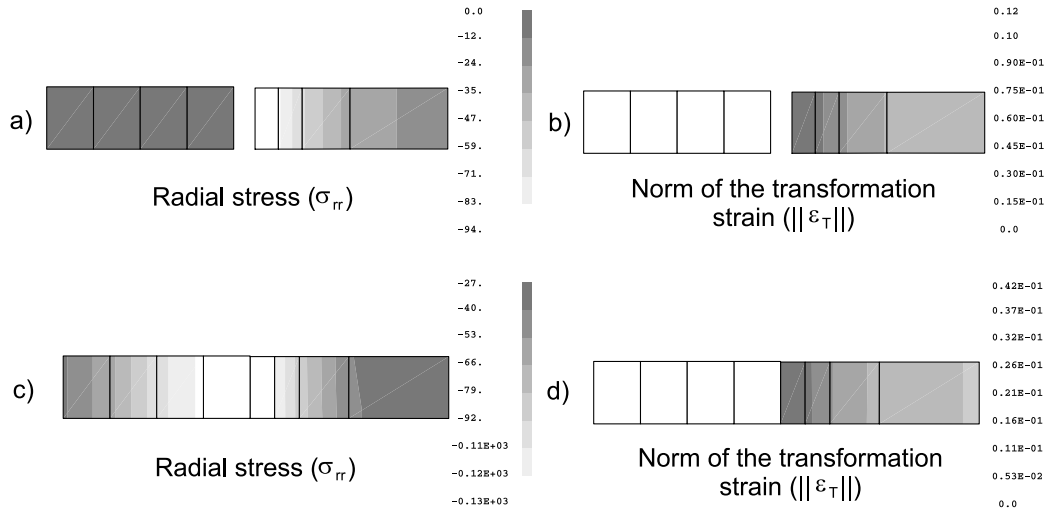


Figure 4: (a) Distribution of radial stress when maximum radial expansion of the sleeve is attained; (b) Distribution of $\|\mathbf{e}_T\|$ when maximum radial expansion of the sleeve is attained; (c) Distribution of radial stress after shape recovery of the sleeve; (d) Distribution of $\|\mathbf{e}_T\|$ after shape recovery of the sleeve.

Figure 4 describes the distributions of radial stress and of norm $\|\mathbf{e}_T\|$ of the transformation strain on the coupling at two distinct stages: when maximum radial expansion of the sleeve is attained (Figures 4.a and 4.b) and after shape recovery of the sleeve (Figures 4.c and 4.d). It is interesting to observe from Figure 4.d that, after shape recovery, the martensitic phase is still present in the coupling ($\|\mathbf{e}_T\| > 0$). As a consequence, the sleeve can undergo a further shape recovery even if small variations of the outer diameter of the tubes are observed.

The second discretization is illustrated in Figure 5 and consists of partitions of the tubes in 40 elastic four-noded axisymmetric elements each, and of the sleeve in 81 shape memory four-noded \bar{B} axisymmetric elements. 28 “gap” elements were considered for unilateral contact between tubes and sleeve.

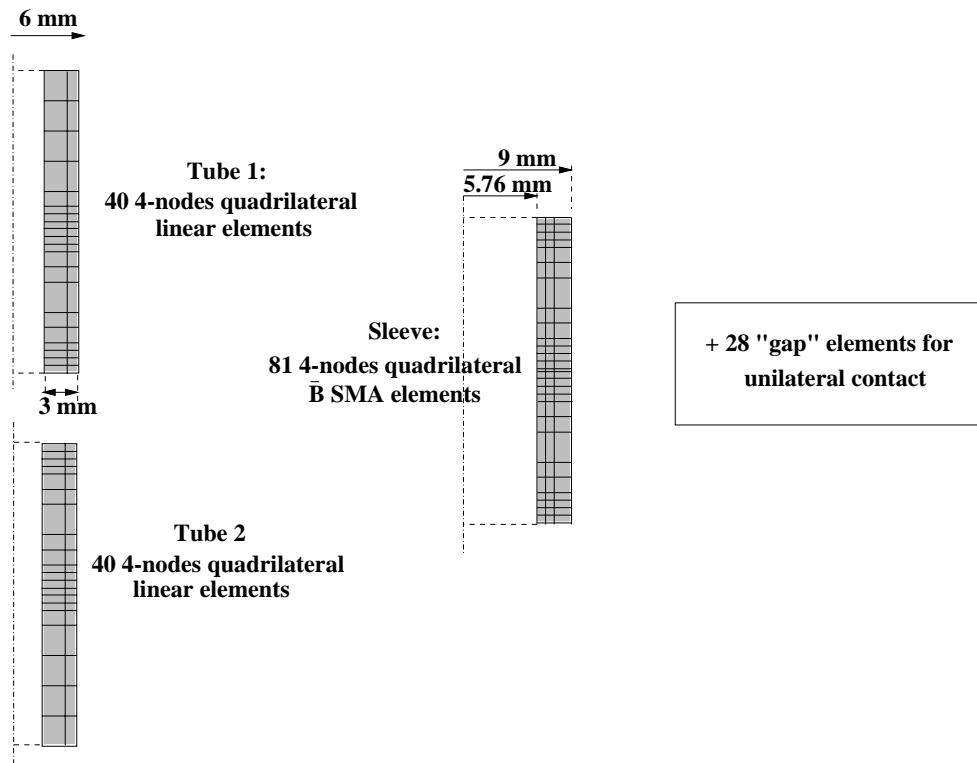


Figure 5: Second discretization of the coupling: partition of each tube in 40 elements and of the sleeve in 81 elements.

Figure 6 shows the corresponding distributions of the radial stress and of the norm $\|\mathbf{e}_T\|$ of the transformation strain on the coupling at two distinct stages: when maximum radial expansion of the sleeve is attained (Figures 6.a and 6.b) and after shape recovery of the sleeve (Figures 6.c and 6.d). Small differences of the results are observed when compared with those from the first discretization.

4. CONCLUDING REMARKS

The finite element discretization of the quasi-static evolution problem of a shape memory pipe coupling resulted in a set of nonlinear equations. Although a finite difference scheme was considered for the evaluation of the constitutive tangent moduli, quadratic convergence was observed during each isothermic step. The reasons for lower convergence rates associated with conditions of change in the temperature are under investigation.

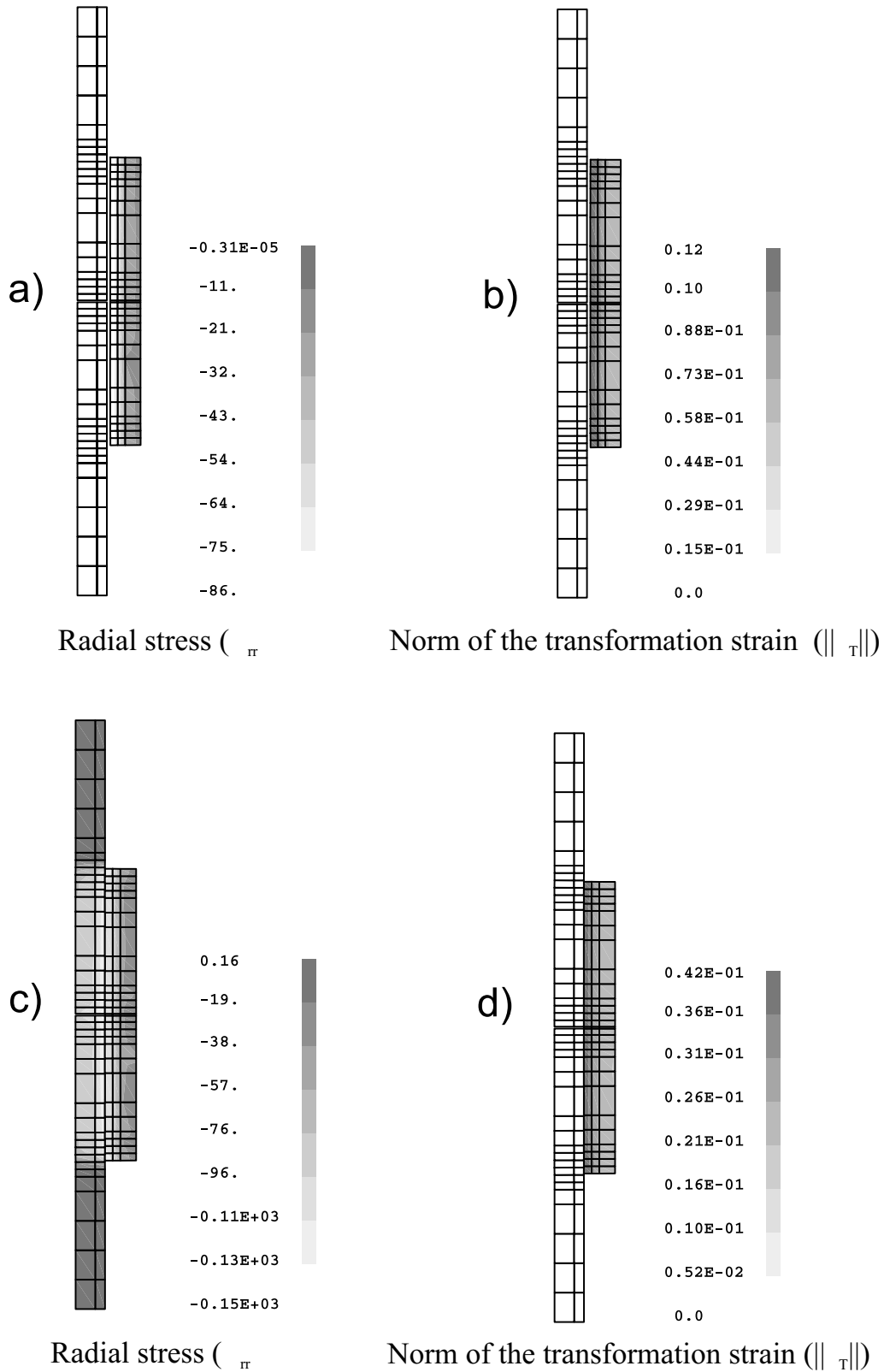


Figure 6: (a) Distribution of radial stress when maximum radial expansion of the sleeve is attained; (b) Distribution of $\|e_T\|$ when maximum radial expansion of the sleeve is attained; (c) Distribution of radial stress after shape recovery of the sleeve; (d) Distribution of $\|e_T\|$ after shape recovery of the sleeve.

REFERENCES

- Auricchio F., Taylor R. L., 1997, "Shape-memory alloys: modelling and numerical simulation of the finite-strain superelastic behavior", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 143:175–194.
- Graesser E. J., Cozzarelli F. A., 1994, "A proposed three-dimensional constitutive model for shape memory alloys", *J. Int. Mat. Systems and Structures*, 5:78–89.
- Gurtin M. E., 1983, "Two-phase deformations of elastic solids", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 84:1–29.
- Leclercq S., Lexcellent C., 1996, "A general macroscopic description of the thermo-mechanical behavior of shape memory alloys", *J. Mech. Phys. Solids*, 44:953–980.
- Sittner P., Hara Y., Tokuda M., 1995, "Experimental study on the thermoelastic martensitic transformation in shape memory alloy polycrystal induced by combined external forces", *Metall. Mater. Trans. A*, 26A:2923–2935.
- Souza, A. C., Mamiya, E. N., Zouain, N., 1998, "Three-dimensional model for solids undergoing stress-induced phase transformations", *European Journal of Mechanics A/Solids*, 17:789-806.
- Wayman, C. M., 1980, "Some applications of shape memory alloys", *Journal of Metals*, 32:129–137.

INFLUÊNCIA DA MÁQUINA DE ENSAIO NA FADIGA TERMOMECÂNICA DE FIOS COM EFEITO MEMÓRIA DE FORMA

Carlos José de Araújo

Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Engenharia Mecânica

Caixa Postal: 10069

Campina Grande – PB BRASIL

e-mail: carlos@dem.ufpb.br

Marie J. Bignon, Michel Morin, Gérard Guénin

INSA de Lyon, Laboratoire GEMPPM, Bat. 502, 1^{er} étage

20, Av. Albert Einstein – 69621 Villeurbanne FRANÇA

Resumo:

A capacidade que os elementos fabricados à base de ligas com efeito memória de forma possuem de produzir um deslocamento mesmo quando submetidos a um carregamento mecânico considerável é responsável pelo crescente interesse nestes materiais ativos. A utilização repetida do elemento à memória de forma pode levar a um fenômeno de fadiga termomecânica não convencional. Neste trabalho, a fadiga até a ruptura de fios que apresentam o efeito memória de forma é estudada utilizando duas máquinas de ensaio diferentes e especialmente concebidas para testar estes materiais. Na primeira delas, denominada MF1, a carga é aplicada e mantida constante por um sistema pneumático original, enquanto na segunda, denominada MF2, o carregamento é assegurado por intermédio de pesos. Nos dois casos, o aquecimento do material é realizado essencialmente por efeito Joule. Os resultados obtidos mostram que, mesmo que o efeito memória de forma sob carga seja praticamente o mesmo nas duas máquinas, a vida em fadiga dos fios é bastante reduzida quando se utiliza a máquina MF1. Estes resultados são discutidos em função das especificidades de cada máquina no que se refere as condições de ensaio.

Palavras chave: Fios, efeito memória de forma, fadiga, atuadores.

1. INTRODUÇÃO

O efeito memória de forma (EMF) corresponde a habilidade que alguns materiais possuem de recuperar uma deformação plástica, ou “aparentemente plástica”, por intermédio de um aquecimento simples. Esta recuperação da forma, podendo ser acompanhada de um trabalho mecânico, permite que tais materiais possam ser intrinsecamente considerados como atuadores termomecânicos. Esta propriedade, associada a sensibilidade a temperatura que eles demonstram, resultou na introdução recente destes

materiais em uma nova área de pesquisa e desenvolvimento, denominada estruturas e materiais adaptáveis (*smart structures and materials*) (Culshaw, 1996).

Atualmente, as aplicações que vem encontrando maior sucesso são aquelas que utilizam as ligas metálicas com EMF como atuadores termomecânicos no domínio da robótica, das estruturas inteligentes e no campo médico-odontológico (Melton, 1998). Vale ressaltar que quando estes materiais são usados como atuadores a operação que eles realizam sob carga é geralmente repetitiva. A figura 1 ilustra esquematicamente a operação de um fio atuador com EMF desenvolvendo um efeito memória reversível sob carga, que neste trabalho será denominado Efeito Memória de Duplo Sentido Assistido (EMDSA). O ponto B corresponde a posição baixa temperatura (PBT) sob carga, enquanto que o ponto C corresponde a posição alta temperatura (PAT). Estas posições podem variar em função do número de ciclos térmicos e a repetição da operação em EMDSA torna estes materiais susceptíveis a um fenômeno de fadiga que, antes da falha completa do atuador, pode ser responsável por uma degradação do EMDSA (De Araújo *et al.*, 1997; De Araújo, 1999). O problema da fadiga das ligas com EMF têm limitado algumas aplicações específicas no domínio da robótica (Mackenzie *et al.*, 1996).

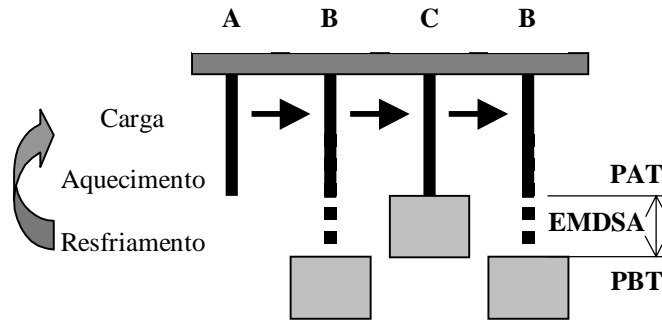


Figura 1 – Esquema simplificado do EMDSA desenvolvido por um fio trabalhando em tração uniaxial.

Infelizmente não existem normas técnicas que regulem os testes de fadiga destes materiais submetidos a ciclagem térmica sob carregamento mecânico, numa configuração semelhante aquela da figura 1. Isto faz com que as diferenças de vida em fadiga encontradas na literatura, para materiais semelhantes, sejam algumas vezes enormes e incompreensíveis. A realização deste trabalho foi motivada exatamente por essa constatação. Assim sendo, visando analisar os aspectos macromecânicos da fadiga de fios atuadores com memória de forma, duas máquinas (denominadas MF1 e MF2) foram especialmente projetadas e construídas. A primeira, MF1, possui um sistema de aplicação e controle de carga que se aproxima mais das máquinas clássicas, enquanto a segunda, MF2, foi totalmente inspirada na figura 1, sendo portanto a aplicação da carga realizada diretamente através de pesos. Os resultados obtidos permitem elucidar boa parte das divergências encontradas na literatura e são discutidos em função das especificidades de cada máquina.

2. CONDIÇÕES EXPERIMENTAIS

2.1. As máquinas de ensaio MF1 e MF2

As duas máquinas de ensaio, MF1 e MF2, especialmente projetadas e construídas para o estudo das propriedades termomecânicas das ligas com EMF são mostradas na figura 2.

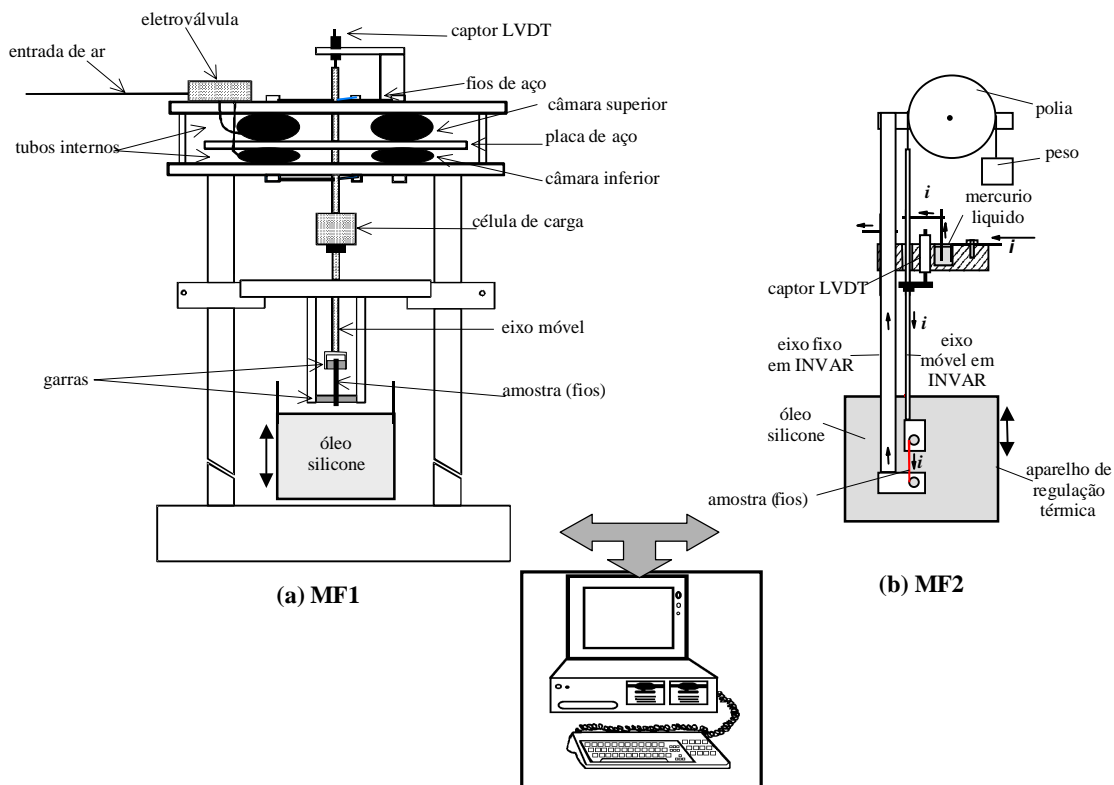


Figura 2 – Esquema das máquinas de ensaio especificamente concebidas para o estudo das propriedades termomecânicas de fios com EMF. (a) Máquina MF1. (b) Máquina MF2.

Na máquina MF1 (fig.2a), o sistema motor localizado na parte superior é pneumático. O carregamento mecânico é produzido através de duas câmaras de ar separadas por uma placa de aço solidária ao eixo móvel. Quando a câmara inferior é inflada enquanto a superior se esvazia, o eixo móvel sobe. A operação inversa produz o movimento de descida do eixo móvel. A distribuição de ar comprimido entre as duas câmaras pode ser controlada por uma eletroválvula. Para evitar qualquer problema de atrito, o eixo móvel da máquina pode ser elasticamente guiado usando dois conjuntos de fios de aço corda de piano. A máquina é equipada com uma célula de carga de 500N e um captor de deslocamento LVDT (Linear Variable Differential Transducer) capaz de medir um deslocamento de 5mm com uma resolução da ordem de $2\mu\text{m}$. É possível trabalhar em regime de tensão controlada ou em controle de deformação. A região da máquina que prende a amostra pode ser imersa em um banho de óleo silicone termicamente regulado para obter uma temperatura homogênea e estável. O aquecimento da amostra para produzir o EMDSA pode também ser realizado por corrente elétrica (efeito Joule). Neste caso a célula de carga da máquina é protegida por um isolante elétrico. A máquina é pilotada por

um sistema de controle e aquisição de dados instalado em um computador. Para a operação em EMDSA segundo a figura 1, o sistema mantém a carga constante, comanda o aquecimento da amostra através do controle da passagem de corrente elétrica e faz a aquisição da carga medida pela célula de carga, do deslocamento medido pelo captor LVDT e da temperatura do banho de óleo medida por uma sonda de platina.

Na máquina MF2 (fig.2b), o carregamento da amostra de fio com EMF é assegurado por intermédio de pesos, seguindo totalmente o esquema da figura 1. Esta configuração limita a carga máxima sobre a amostra em 10kg. Existe um contato elétrico móvel efetuado com mercúrio líquido que permite fazer a corrente elétrica (i) passar pela amostra sem produzir nenhum carregamento adicional sobre a mesma. A instrumentação e o sistema de controle e aquisição é semelhante aquele utilizado na máquina MF1.

As diferenças no projeto dessas duas máquinas impõem necessariamente condições de aquecimento elétrico diferentes as amostras testadas. Para a máquina MF1, o aquecimento da amostra por corrente elétrica deve ser lento e gradual para que o sistema eletrônico que pilota a máquina tenha tempo suficiente para controlá-la mantendo sobretudo a carga constante (esquema do EMDSA ilustrado na figura 1). Este problema não existe na máquina MF-2 pois o carregamento mantido constante pelos pesos permite que o aquecimento elétrico seja feito muito rapidamente, através de pulsos de corrente elétrica de curta duração. A figura 3 mostra um esquema dos modos de aquecimento elétrico usados nas duas máquinas. Observa-se que um ciclo de aquecimento – resfriamento dura aproximadamente 80s na máquina MF1, enquanto que com a máquina MF2 este ciclo pode ser realizado em apenas 6s. Estes tempos são válidos para fios de ligas Ti-Ni com EMF tendo aproximadamente 0.5mm de diâmetro. A corrente máxima ($i_{máx}$) é obtida experimentalmente, para cada valor da carga externa, aumentando-se gradativamente a corrente até obter-se a saturação do EMDSA (ponto C na figura 1).

Em ambas as máquinas o deslocamento do fio atuador é medido em termos da sua deformação (ϵ) através da equação:

$$\epsilon = \left(\frac{l - l_0}{l_0} \right) \times 100(\%) \quad (1)$$

onde l é o comprimento instantâneo do fio e l_0 é o comprimento inicial medido na temperatura ambiente.

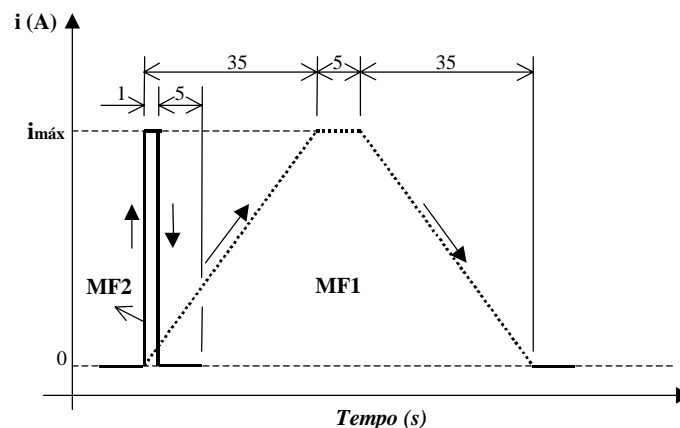


Figura 3 – Esquema dos modos de aquecimento elétrico utilizado nas máquinas MF1 e MF2. A temperatura do óleo silicone é mantida constante.

2.2. Material e condições de ensaio

Foram utilizados fios de uma liga Ti-Ni-Cu com EMF fornecidos pela empresa belga *Advanced Materials Technologies Inc.* Todas as amostras apresentam a composição nominal Ti-45.0Ni-5.0Cu (at%), diâmetros de 0.5 mm e foram obtidas por trefilação à frio com redução total de área de 35% durante a fabricação. Os fios foram recozidos à 425°C durante 1h e posteriormente resfriados ao ar ambiente.

Todas as amostras testadas tiveram comprimentos entre 27 e 32mm. O aquecimento e resfriamento das amostras foi realizado segundo o esquema da figura 3, mantendo a temperatura do banho de óleo silicone constante em aproximadamente 10°C.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A figura 4 mostra a evolução do EMDSA e das posições PBT e PAT em função do número de ciclos térmicos (N) utilizando a máquina MF2. Os resultados obtidos para dois níveis de carregamento externo, 175MPa e 225MPa, podem ser comparados nas figuras 4(a) e 4(b).

Observa-se nas figuras 4(a) e 4(b) que as posições PBT e PAT evoluem mais rapidamente no período inicial de ciclagem. Este comportamento, que depende da intensidade do carregamento externo, traduz um efeito de fluência da amostra, responsável por um alongamento permanente da mesma que resulta em uma degradação do EMDSA antes da ruptura abrupta. Qualitativamente, o comportamento obtido com a máquina MF1 é bastante semelhante. Quantitativamente, para um carregamento mecânico idêntico, as deformações correspondentes as posições PBT e PAT evoluem mais intensa e rapidamente quando se trabalha com a máquina MF1, porém o EMDSA obtido em geral é da mesma ordem de grandeza daquele verificado durante os ensaios com a máquina MF2. Esta evolução mais intensa das deformações PBT e PAT na máquina MF1 reduz bastante a vida útil dos fios com EMF. A figura 5 mostra as curvas de Wöhler dos fios testados até a falha completa nas máquinas MF1 e MF2. A flecha na figura 5(b) indica que, para um carregamento mínimo equivalente a 75MPa (~1.5kg), não houve ruptura dos fios testados com a máquina MF2 após 200000 ciclos. Para esse mesmo nível de carga e utilizando a máquina MF1, a vida em fadiga dos fios é bastante reduzida, podendo chegar a valores situados em torno de apenas 10000 ciclos, conforme indica a figura 5(a).

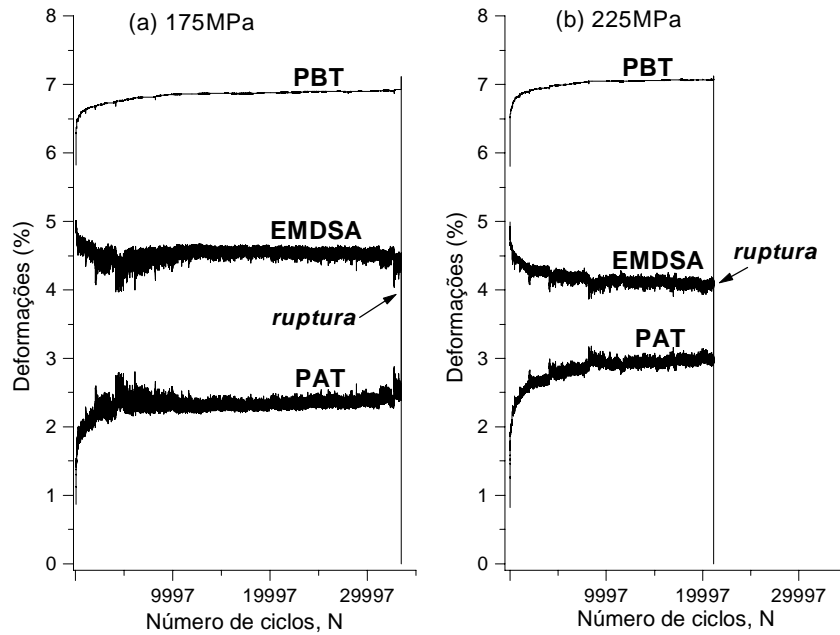


Figura 4 – Comportamento dos fios com EMF durante a ciclagem térmica por efeito Joule utilizando a máquina MF2. (a) 175MPa. (b) 225MPa.

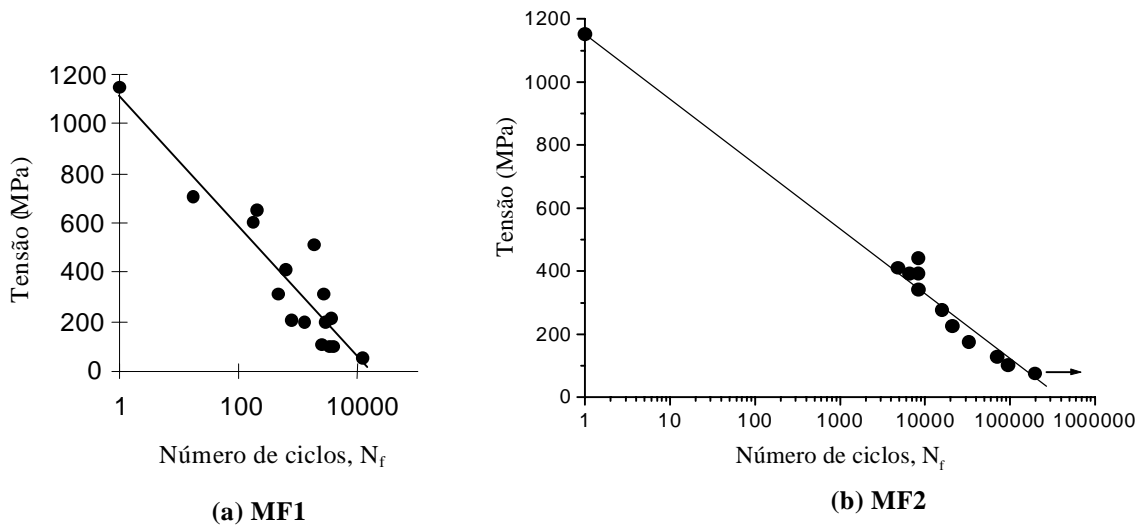


Figura 5 – Curvas de Wöhler para os fios testados. (a) Número de ciclos até a ruptura com a máquina MF1. (b) Número de ciclos até a ruptura com a máquina MF2.

Comparando as figuras 5(a) e 5(b) para a faixa de tensão situada entre 100 e 450MPa, verifica-se que existe um fator multiplicativo de aproximadamente 10 entre as vidas em fadiga dos fios avaliadas através das duas máquinas, isto é, os resultados obtidos com a máquina MF2 são dez vezes maiores. Com relação a literatura, não existem muitos

estudos específicos sobre a fadiga do EMDSA. Tautzenberg *et al.* (1992) encontraram valores de vida em fadiga intermediários aqueles mostrados nas figuras 5(a) e 5(b) para a faixa de tensão situada entre 50 e 200MPa, porém estes autores não detalham o equipamento utilizado. Em um outro estudo, Filip e Mazanec (1994) encontraram valores de vida em fadiga algumas vezes melhores que aqueles da figura 5(b) e utilizando um equipamento de configuração bastante semelhante a máquina MF2, mas os tratamentos termomecânicos aplicados aos fios diferem do nosso. Na realidade, não encontram-se registros de fios de materiais idênticos testados em equipamentos de concepção diferenciada como nesse trabalho.

As diferenças de vida útil evidenciadas na figura 5 podem ser explicadas pelas diferenças no modo de ciclagem utilizado em cada máquina. Verifica-se na figura 3 que os fios passam muito mais tempo sendo aquecidos sob carga quando se utiliza a máquina MF1. Além disso, nesta máquina a amostra permanece aproximadamente 5s submetida a corrente máxima ($i_{máx}$). Este tempo é excessivo, mas necessário para que o sistema eletrônico possa controlar adequadamente a máquina mantendo sobretudo a carga constante. Estas condições impostas a amostra faz com que as deformações correspondentes as posições PBT e PAT evoluam muito mais intensamente na máquina MF1, causando uma ruptura precoce. Além disso, para os carregamentos mais intensos, a partir de 300MPa, tais condições podem causar o aparecimento do fenômeno de stricção na região da ruptura dos fios. Assim sendo, a vida em fadiga depende não apenas da carga aplicada, mas também do tempo de aquecimento. Para confirmar essa hipótese, pulsos de corrente de duração entre 1 e 5s foram aplicados as amostras utilizando a máquina MF2. A figura 6 mostra a vida em fadiga até a ruptura dos fios em função do tempo de aquecimento para um nível de carga específico (275MPa), assim como os dois tipos de ruptura observados.

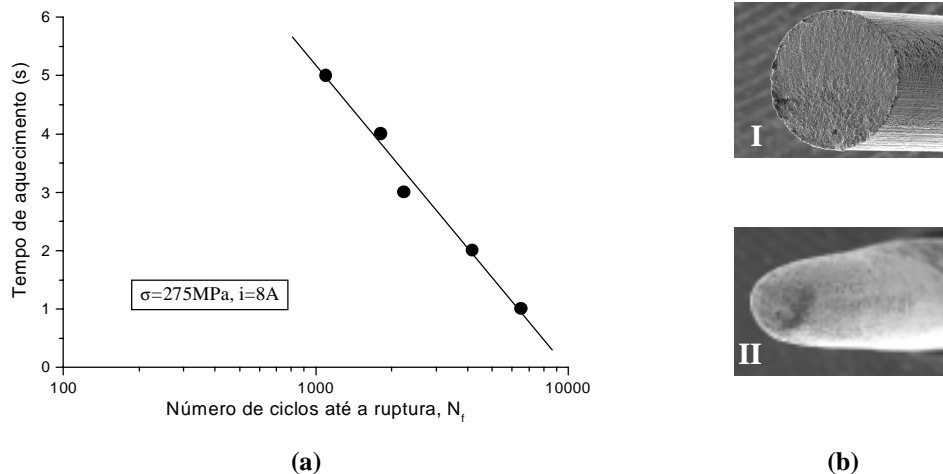


Figura 6 – (a) Vida em fadiga dos fios em função do tempo de aquecimento para uma carga de 275MPa utilizando a máquina MF2. (b) Tipos de ruptura.

Verifica-se na figura 6(a) que a utilização de tempos de aquecimento superiores a 1s reduz bastante a vida em fadiga quando se utiliza um mesmo equipamento de ensaio. Este resultado ajuda a explicar as diferenças de vida útil dos fios evidenciadas na figura 5, quando se compara as máquinas MF1 e MF2. Durante os ensaios que resultaram na figura

6(a), isto é, para uma carga correspondente a 275MPa e tempos de aquecimento entre 1 e 5s, nenhum fenômeno de stricção foi observado e as rupturas foram todas do tipo I, conforme mostra a figura 6(b). Na realidade, rupturas do tipo II mostrada na figura 6(b) foram observadas apenas para carregamentos iguais ou superiores a 300MPa na máquina MF1 e para carregamentos idênticos a esses quando se ultrapassa um tempo limite de 2s na máquina MF2. Assim sendo, para carregamentos entre 75MPa e 450MPa, o fenômeno de stricção não aparece nos fios testados na máquina MF2 quando se utiliza pulsos de corrente de curta duração, menores ou iguais a 1s.

Estas constatações traduzidas pelas figuras 5 e 6 são bastante importantes na medida em que verifica-se na literatura que o acionamento de elementos do tipo fios à memória de forma, para aplicações no domínio da robótica, é geralmente efetuado através de pulsos de corrente de curta duração (Furuya e Shimada, 1990). Mesmo que alguns autores (Furuya e Shimada, 1990) sejam induzidos a não considerarem a fadiga dos elementos Ti-Ni como um problema técnico muito importante, os resultados das figuras 5 e 6, associados aos baixos valores de vida em fadiga encontrados durante algumas tentativas de aplicações específicas no domínio da robótica (MacKenzie *et al.*, 1996), revelam que o comportamento em fadiga depende das condições de aplicação do carregamento termomecânico.

Vale salientar também que os baixos valores de vida em fadiga encontrados utilizando a máquina MF1 desaconselham o emprego de máquinas de ensaio clássicas (MTS ou INSTRON por exemplo) para o estudo deste tipo específico de fadiga, já que elas limitariam as condições de aquecimento das amostras, por razões semelhantes aquelas apresentadas para a máquina MF1.

4. CONCLUSÕES

A construção de duas máquinas de ensaio especificamente concebidas para o estudo das propriedades termomecânicas de fios atuadores com EMF, sob carregamento trativo uniaxial, permitiu demonstrar experimentalmente que as enormes discrepâncias entre os valores de vida em fadiga publicados na literatura podem estar muitas vezes associados as condições impostas pelo equipamento utilizado em detrimento dos aspectos mecano-metalúrgicos relativos as amostras testadas. Foi demonstrado que o aumento do tempo de aquecimento dos fios com EMF mantidos sob carga é responsável por um aumento da potência dissipada sobre os mesmos, reduzindo significativamente seus desempenhos. Levando em consideração os resultados obtidos com a máquina MF1 e a inexistência de normas que regulem os testes de fadiga de atuadores à memória de forma, não é recomendado o emprego de máquinas de ensaio clássicas para a caracterização do comportamento em fadiga destes elementos. Como a grande maioria das aplicações cíclicas no domínio da robótica utilizam pulsos de corrente de curta duração ($t < 1s$), este trabalho revela que uma eventual análise da vida em fadiga de fios com EMF deve ser preferencialmente realizada em um equipamento semelhante a máquina MF2 apresentada nesse estudo.

Agradecimentos

C. J. De Araújo agradece o apoio da Capes durante seu doutoramento no INSA de Lyon – França (Proc. n° 0073/95-13).

REFERÊNCIAS

- Culshaw., B., 1996, Smart Structures and Materials. Artech House Publishers, 201p.
- De Araújo, C. J., Morin, M. and Guénin, G., 1997, Fatigue behavior of Ti-Ni-Cu thin wires SME, Journal de Physique IV, Colloque C5, pp. C5-501 – C5-505.
- De Araújo, C. J., 1999, Comportement cyclique de fils en alliage à mémoire de forme Ti-Ni-Cu: analyse electro-thermomécanique, dégradation et fatigue par cyclage thermique sous contrainte, Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, France, 177p.
- Filip, P. & Mazanec, K., 1994, Influence of cycling on the reverse martensitic transformation and shape memory phenomena in Ti-Ni alloys, Scripta Metallurgica e Materialia, vol. 30, pp. 67-72.
- Furuya, Y. & Shimada, H., 1990, Shape memory actuators for robotic applications. In Engineering Aspects of Shape Memory Alloys. Edited by T. W. Duerig. Butterworth-Heinemann, London, pp. 338-354.
- MacKenzie, M., An, N., Giere, M., Stori, J. and Wright, P., 1996, Experiences with shape memory alloy: robot grippers for sub-millimeter hard disc drive components. In Proceedings SPIE Vol. 2906, Microrobotics: Components and Applications, Edited by A. Sulzmann, pp. 25-36.
- Melton, K. N., 1998, General applications of SMA's and smart materials. In Shape Memory Materials, Edited by K. Otsuka and C. M. Wayman, Cambridge University Press, pp. 220-239.
- Tautzenberg, P., Kehrer, H-P., Nußkern, H. and Kocher, H. H., 1992, Stability of the shape memory effect and mechanical fatigue of Ni-Ti-Cu and Ni-Ti elements. In Proceedings of the International Conference on the Martensitic Transformation, Monterey, California, pp. 1295-1300.

NUMERICAL STUDY OF STEEL PIPES REPAIRED WITH ANGLE PLY LAMINATES

Flamínio Levy Neto

Vinícius Bernardes Soares

Wagner Rodrigues de Lisboa

Universidade de Brasília – Faculdade de Tecnologia – Departamento de Engenharia Mecânica
UnB–FT–ENM, Asa Norte, 70.910-900, Brasília – DF, Brasil. E-mail: levy@enm.unb.br

Abstract

The aim of this work is to present some numerical results concerned with the mechanical behavior of steel pipes 6 m long (length over diameter, $L/D = 12$; diameter over thickness, $D/t = 100$), subjected to internal uniform static pressure. These pipes were endowed with a thickness discontinuity (reduction of 60% in t) at the center section ($L/2$), covering a length of 1% of L , to simulate a defect in the form of a ring, and repaired with unidirectional Fiber Reinforced Plastic (FRP) angle ply laminates at the damaged area. The simulations were carried out using an in-house finite element code (COMPSHELL), and the results obtained so far indicate that it is possible to restore both the stiffness and the strength of the pipes using E-glass/epoxy composites.

Key - words: Composite repairs, Steel pipes, Numerical simulation.

1. INTRODUCTION

The search for new materials to repair metallic pipes is very important, mainly when they are located in remote areas where there is no welding equipment available. With the advent of the aerospace industry there was a necessity for new materials combining high strength and stiffness with low weight. Such materials, in particular the polymeric matrix composites, also have the advantage of good corrosion resistance in the presence of water (Levy Neto, 1991). Presently, in many other industries (e.g. chemical, oil, marine, car and building) carbon and E-glass Fiber Reinforced Plastics (FRP) are now replacing metallic materials in some applications (Hull and Clyne, 1996), and, in particular situations (e.g. ducts located in remote places), being used just to repair steel pipes (Soares and Lisboa, 1999).

Another aspect which is relevant to the pipe industry is the fact that thin FRP shell structures usually tend to present linear elastic behavior up to failure (Levy Neto, 1991), even when subjected to low velocity (less than 10 m/s) impact loads (Levy Neto, 1983). So, if a catastrophic failure does not take place and only localized damage occurs, due to the normal absence of plastic deformations such structures return to their initial shapes after the loads are removed. In practical terms, this means that FRP pipes and pressure vessels, for instance, would keep their original geometry even after they were loaded slightly beyond their limiting critical loads (i.e. material failure or local buckling). However, if a major accident takes place, their capacity to absorb energy is limited. In addition, FRP pipes are much more expensive and brittle, in comparison with steel pipes, and, due to the fact that they use a

thermoset polymer as matrix they can not be recycled. In this context, there are some theoretical and experimental studies concerned with the repair of FRP structures (Baker, 1990; Mistry and Levy Neto, 1992), but the problems of high costs and low toughness still remain. Another possibility, which is the focus of this study, is to use FRP laminates, in the form of localized patches, only to repair steel pipes.

An additional practical aspect, which is relevant to the repair of pipe structures, is the fact that the epoxy resin is a good adhesive and the repair process does not involve any kind of welding. In such case, if the repair needs to be carried out in the field, this is a major advantage. A general repair procedure using FRP laminates includes: (i) preparation and cleaning of the metallic surface; (ii) patch application; (iii) vacuum bag and cure of the resin; (iv) surface finishing; and (v) inspection (Baker, 1990). The main objective of this theoretical investigation was to simulate the mechanical behavior of: (i) intact steel pipes subjected to static internal pressure; (ii) steel pipes with a localized decrease in the wall thickness resulting from corrosion, erosion, penetration, or lightning strike; and (iii) steel pipes with an axisymmetric discontinuity of the thickness, as described in item (ii), and repaired with carbon/epoxy and/or E-glass/epoxy angle ply laminates. The finite element code COMPSHELL (Levy Neto, 1991) was utilized to determine the theoretical failure pressures.

2. DESCRIPTION OF THE MODELS

The main geometric characteristics of the steel pipes simulated in this study are: total length (L) equal to 6000 mm; nominal diameter (D) equal to 500 mm; and thickness (t) equal to 5 mm, as shown in Figure 1. The material normally used in such structures is a mild carbon steel presenting elasticity modulus $E = 205000 \text{ GPa}$; Poisson ratio $\nu = 0.3$; shear modulus $G = 78846 \text{ GPa}$; and yield stress $\sigma_y = 400 \text{ MPa}$ (Jastrzebski, 1990).

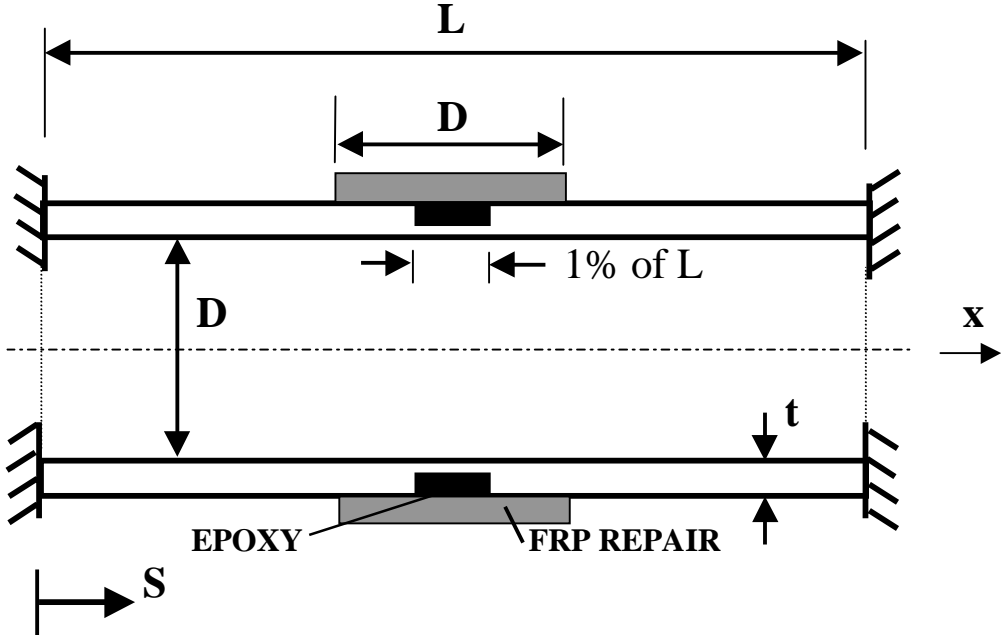


Figure 1- General view of a repaired pipe

In the numerical model, based on the finite element method, it was assumed that the pipe is a perfect cylinder (i.e. an axisymmetric shell) clamped at both ends. Steel pipes can

not be manufactured longer than about 6 m (Silva Telles, 1997). So, in a pipeline, many cylindrical segments need to be connected by flanges or welded. The flanges naturally contribute with a significant increase on the bending stiffness at the ends of the pipes; and, at the welded joints, there is an overlapping of the walls of the adjacent pipes, increasing the thickness at the joint by a factor of 2, which also increases the stiffness locally. So, the assumption of the clamped ends at the model seems to be a fair one.

The coordinates which are important for the in plane stress analysis of the pipes are the longitudinal, or meridian, direction x (see Figure 1), the shell circumferential direction y , and the directions 1 and 2, as shown in Figure 2, related to the orientations of the fibers in the FRP laminate. The angle θ refers to the orientation of the fibers relatively to x .

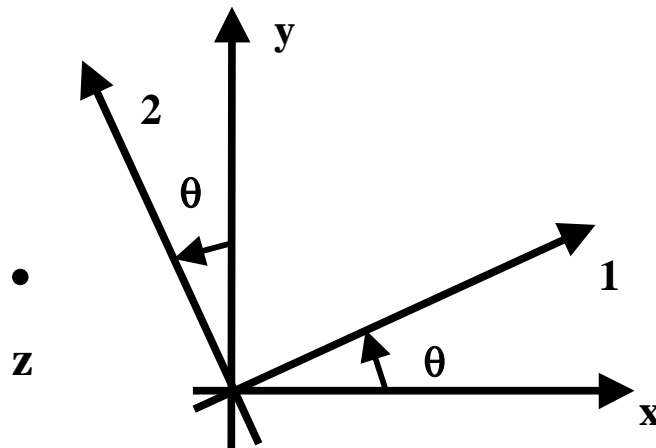


Figure 2 – Systems of Coordinates (x,y) , and $(1,2)$.

The shell element adopted in the finite element code COMPSHELL was a two-node axisymmetric ring with 4 degrees of freedom (displacements u , v , w ; and the meridian rotation β) per node, and the shell equations are those based on the theory of Novozhilov for thin shells. The displacement u is longitudinal (i.e. along direction x shown in Figure 1), v corresponds to the circumferential direction y of the shell, and w , along z shown in Figure 2 is normal to the shell surface. The program is able to calculate the stress resultants and the bending moments along x and y , as well as in plane stresses and strains in the coordinate systems (x,y) and $(1,2)$, and has 7 special failure criteria to estimate the threshold of failure of FRP laminae subjected to in plane stresses (σ_1 , σ_2 , and τ_{12}), where 1 and 2 refer to the directions parallel and perpendicular to the fibers of a FRP unidirectional lamina, respectively (Levy Neto, 1991). So, σ_1 and σ_2 are normal stresses along and perpendicular to the fibers, respectively, and τ_{12} a shear stress in the plane of the lamina. The theory adopted in the present investigation is the failure criterion of Tsai-Hill (Gibson, 1994), which is based on a quadratic equation as shown below:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \leq 1 \quad (1)$$

where:

X : is the tensile (X_{1T}) or the compressive strength (X_{1C}) of the FRP in direction 1, depending on the sign of σ_1 ;

Y : is the tensile (X_{2T}) or the compressive strength (X_{2C}) of the FRP in direction 2, depending on the sign of σ_2 ; and

S_{12} : is the shear strength of the FRP in the plane (1, 2).

For the static failure analysis of the damaged steel pipe repaired with FRP a laminate, which is a brittle material, the criterion of Tsai-Hill is very convenient. First because it presents good correlation with experimental results when FRP laminates are tested to failure (Gibson, 1994); and second because it turns itself into the yield theory of von Mises, for ductile materials, when the values of X, Y, and S_{12} are substituted by σ_y in equation (1). So, it is able to predict the onset of yield in the steel and the threshold of failure in FRP layers.

Two kinds of unidirectional composites, E-glass/epoxy and Carbon/epoxy, were used as the FRP repair in the numerical simulations. Their mechanical properties together with those of the epoxy resin are shown in Table 1 (Soares and Lisboa, 1999). The FRP layers have two different elasticity moduli, E_1 and E_2 , and Poisson ratios, ν_{12} and ν_{21} , depending if the FRP is stretched along or perpendicular to the fibers, respectively (Gibson, 1994).

Table 1 – Mechanical properties, in MPa, of the materials used in the repair

Mech. Properties	E – glass/epoxy	Carbon/epoxy	Epoxy
E_1	38600	138000	3100
E_2	8270	8960	3100
ν_{12}	0.28	0.31	0.39
ν_{21}	0.06	0.02	0.39
G_{12}	4140	7100	1115
X_{1T}	1062	1447	75
X_{1C}	610	1447	120
X_{2T}	31	52	75
X_{2C}	118	206	120
S_{12}	72	93	90

The FRP repairs consisted of symmetric angle-ply laminates with four layers and stacking sequences: $[\theta / -\theta / -\theta / \theta]$, or $[\theta / -\theta]_s$, in which $20^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, where the subscript s means symmetric about the middle surface of the laminate.

3. MAIN RESULTS

The simulations carried out so far, in order to predict the onset of failure of the models (i.e. yield of the steel, or material failure of the FRP) subjected to uniform pressure (p), included 4 situations, as illustrated in Figure 3: (i) perfect steel pipes (i.e. $t = 5$ mm all over); (ii) steel pipes with a local thickness reduction at the central region, simulating a defect, or damage, in the form ring; (iii) same as situation (ii), in which the “ring” is filled with epoxy

resin and the central region is repaired with one laminate having 4 plies of FRP with fiber orientations $[\theta / -\theta]_s$; and (iv) same as (iii) but repaired with two laminates of 4 plies each. The thickness reduction was 60% (3 mm), over a distance equal to 1% of L, the total thickness of each repair laminate was 5 mm (1.25 mm per ply), and the extension of the repair was equal to the diameter (D) of the pipe, as shown in Figure 3 (situations iii and iv).

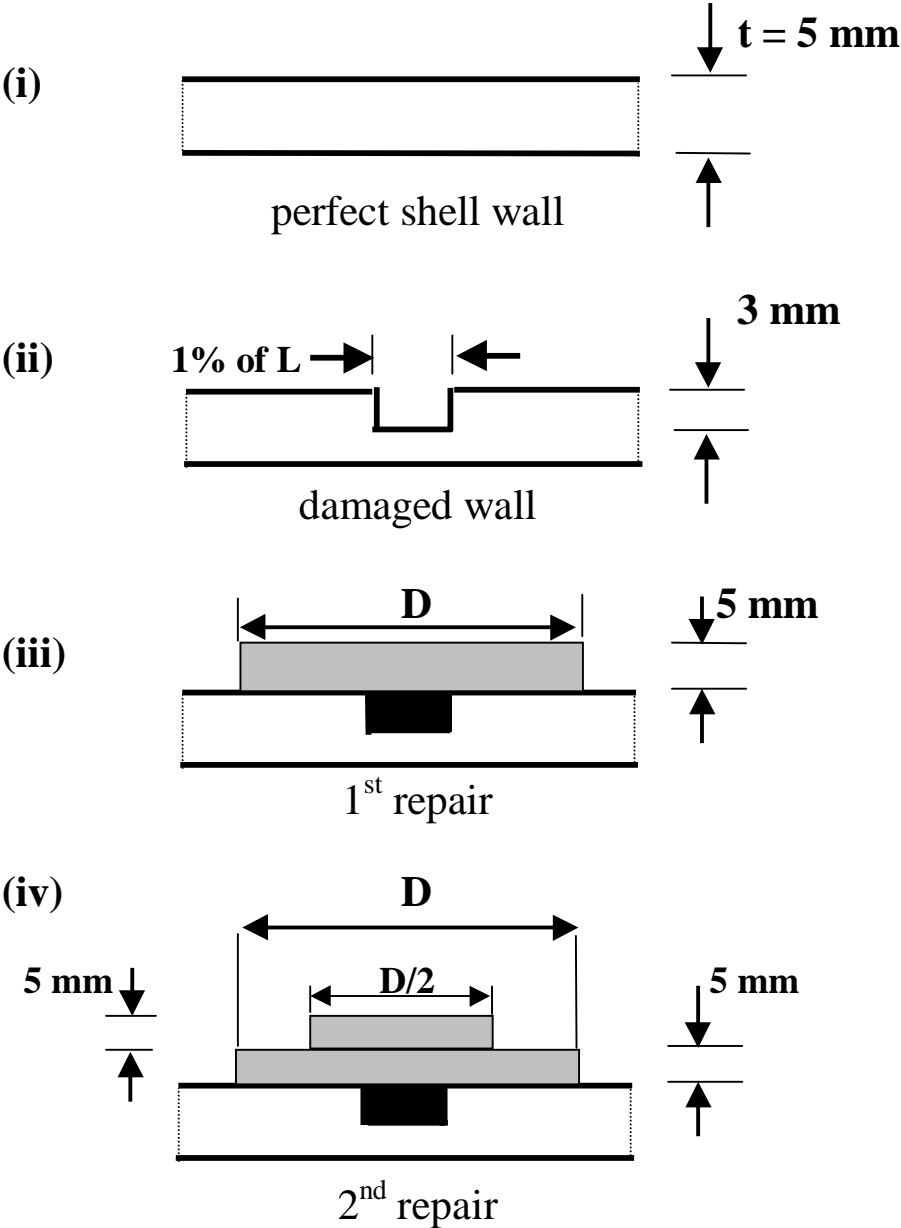


Figure 3 - Four situations for the shell wall at central region of the pipes

According to a survey carried out by Soares and Lisboa (1999) involving PETROBRAS / CENPES, in Rio de Janeiro, steel ducts with $D = 500 \text{ mm}$ and $t = 5 \text{ mm}$ should resist to at least $p = 5 \text{ MPa}$ of internal hydrostatic pressure (p). So, one of the purposes of this work was to find out if the damaged and the repaired pipes were able to resist to $p \geq 5 \text{ MPa}$.

Using the program COMPSHELL, and the model with the shell wall of situation (i), corresponding to the perfect steel pipe in Figure 3, after the finite element mesh was refined the results converged to $p_{\max} = 6.3 \text{ MPa}$. In this simulation, p_{\max} corresponds to the onset of yield, which occurred at the clamped edge ($S = 0$, in Figure 1). Under $p = 6.3 \text{ MPa}$, the radius of the pipe increased uniformly all over, except at the clamped edges where $w = 0$, by the value $w_{\max} = w_{\text{unif}} = 0.26 \text{ mm}$ (radial displacement). The failure mechanism, according the distribution of stresses obtained in the simulations, was controlled by the peaks of bending moments occurring at the clamped edges ($S = 0$, and $S = L$). Away from the clamped edges the bending moments vanish. Krauss (1967) using analytical solutions based on the hypergeometric functions also obtained similar results for an equivalent problem.

The threshold of failure of the steel pipe with the “ring” defect, corresponding to situation (ii) in Figure 3, was $p_{\max} = 3.8 \text{ MPa}$ (drop of 39%), and the position of the onset of yield now migrated to $S = L/2$ (i.e. $S = 3 \text{ m}$). Close to $S = L/2$ the bending moments were very high, and there was a local increase in the radial displacement $w_{\max} = 0.45 \text{ mm}$. Away from this region $w = w_{\text{unif}} = 0.26 \text{ mm}$, which is the same value as in situation (i). When the “ring” was only filled with epoxy resin, without any FRP repair, the obtained values of p_{\max} , w_{\max} , and w_{unif} were practically as those obtained in situation (ii).

When a repair consisting of 4 plies of E-glass/epoxy, $[90^\circ]_4$, i.e. one laminate with 5 mm of thickness, was applied, as shown in Figure 3, situation (iii), the onset of failure remained at $S = L/2$ but increased to $p_{\max} = 4.9 \text{ MPa}$, w_{\max} was reduced to 0.42 mm close to $S = L/2$, and $w = w_{\text{unif}} = 0.28 \text{ mm}$ along the pipe. Since p_{\max} was lower than 6.3 MPa, the strength of the perfect pipe, two laminates of E-glass/epoxy, of 5 mm each, were used as repair, as illustrated in Figure 3, situation (iv). This time the onset of failure shifted to the clamped edge $S = 0$ and the pressure increased to $p_{\max} = 6.2 \text{ MPa}$, $w_{\text{unif}} = 0.28 \text{ mm}$, and $w_{\max} = 0.284 \text{ mm}$.

Using the repair configuration of situation (iv), shown in Figure 3, with two laminates of $[\theta / -\theta]_s$, and varying the orientation of the fibers from 20° to 90° , at intervals of 5° , the values of p_{\max} obtained in the simulations, as shown in Table 2, remained practically unchanged. Only the location of the failure, S , changed from 0 to $L/2$, and back to 0.

Table 2 – Effect of the variation in the fibers orientations, θ in the results.

θ	S [mm]	Failed Ply	Z [mm]	p_{\max} [MPa]
$20^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$	0	1	-2.5	6.182
35°	3000	1	-7.5	6.155
40°	3000	1	-7.5	6.115
45°	3000	1	-7.5	6.125
$50^\circ \leq \theta \leq 55^\circ$	0	1	-2.5	6.185
$60^\circ \leq \theta \leq 70^\circ$	0	1	-2.5	6.192
$75^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$	0	1	-2.5	6.200

The results presented in Table 2 indicate the sensitivity of p_{\max} with the orientation of the fibers in the FRP repair is very reduced. In fact, for $20^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$, and $50^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ the failure occurs at the clamped edge, away from the FRP repair. For $35^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ the failure

occurs at the repair region but the influence of θ on p_{\max} was reduced. It is also important to mention that all the values of p_{\max} in Table 2 are very close to the onset of yield of the perfect pipe, $p_{\max} = 6.3$ MPa.

Finally, some simulations were also carried out using an unidirectional carbon/epoxy laminate of 2.5 mm, $[90^\circ]_s$, according to situation (iii) shown in Figure 3, as the FPR repair. The value of p_{\max} obtained was 6.3 MPa, which is the same of the perfect pipe. However, the values of w in the repair region were smaller than w_{unif} by about 82% ($w_{\text{min}} = 0.21$ mm), indicating that the FRP repair was so stiff that it subjected the damaged region in compression, relatively to the rest of the pipe. On the other hand, the thickness of the carbon/epoxy can laminate be reduced in order to solve this problem easily.

4. COMMENTS AND CONCLUSIONS

The results obtained in this study indicate that, using E-glass/epoxy laminates, it is possible to restore both the strength and the stiffness of steel pipes subjected to a severe thickness discontinuity (only 40% of the original thickness remained) at the middle section. After the repair with two $[\theta / -\theta]_s$ laminates of 5 mm each (situation (iv) in Figure 3) the failure pressure (p), and the maximum radial displacement (w) of the damaged pipe, were practically restored to those values presented by the perfect steel pipe.

Although different fiber orientations can be adopted for the repair, the laminate $[90^\circ]_4$ (i.e. all fibers in the hoop direction), is the easiest to apply and figures among the most efficient, as shown in Table 2. According to the data presented in Table 2, the onset of failure always occurred at the innermost ply (layer 1), so, not visible at the external surface of the pipes.

Carbon fibers are known to be lighter, stiffer (at least 3 times), more brittle, and stronger than E-glass, but they are about 10 times more expensive (Hull and Clyne, 1996). According to the simulations carried out so far both kinds of fibers can be used for the repair of pipes. If the final cost in one of the design priorities the best choice is an E-glass fiber. But, if the repaired pipe needs to be as light as possible, then the choice must change to the carbon fibers instead.

Due to the discontinuity of thickness and stiffness close to the damaged area, the state of stresses at the repair region is very complex, and the initial results obtained so far should be confirmed by experimental data as well as by additional simulations using other finite element codes, based on different formulations. In the present study, the shape functions for u and v were linear, for β quadratic, and for w cubic. It is the intent of the authors to compare the simulations carried out so far with those based on alternative interpolation polynomials like a non Hermitian, for instance.

REFERENCES

- Baker, A. A., 1990, Repair Techniques for Composite Structures, in Composite Materials in Aircraft Structures, edited by D. H. Middleton, Longman Scientific and Technical, London.
- Gibson, R. F., 1994, Principles of Composite Material Mechanics, McGraw-Hill, New York.

Hull, D. and Clyne, T. W., 1996, *An Introduction to Composite Materials*, Cambridge University Press, Cambridge.

Jastrzebski, Z. D., 1987, *The Nature and Properties of Engineering Materials*, John Wiley & Sons, New York.

Krauss, H., 1967, *Thin Elastic Shells*, John Wiley & Sons, New York.

Levy Neto, F., 1983, *Estudo da Falha ao Impacto de uma Estrutura de Material Conjugado Usada em Aeronaves*, Tese de Mestrado, ITA, São José dos Campos (in Portuguese).

Levy Neto, F., 1991, *The Behaviour of Externally Pressurised Composite Domes*, Ph.D. Dissertation Thesis, University of Liverpool, U.K..

Mistry, J. and Levy Neto, F., 1992, *The Behaviour of Repaired Composite Domes Subjected to External Pressure*, *Composites*, vol. 23, number 4, July, pp. 271 – 277.

Silva Telles, P. C., 1997, *Tubulações Industriais: Materiais, Projeto e Montagem*, Editora LTC, Rio de Janeiro (in Portuguese).

Soares, V. B. e Lisboa, W. R., 1999, *Simulação Numérica Simplificada do Reparo Estrutural em Dutos Utilizando-se Materiais Compósitos Tipo Fibra / resina*, Projeto Final de Graduação, UnB, Dept. de Engenharia Mecânica, Brasília (in Portuguese).

Nota-se que os dados experimentais referentes a este nível de tensão, tanto para os CPs sem solda quanto para os com solda, se “misturam”, com dispersão elevada. No entanto para os níveis de tensão mais altos ($0,70.S_u$ e $0,80.S_u$) vê-se que os pontos apresentam-se “separados”, sendo que os resultados com solda têm vida N menor que os resultados sem solda.

Na figura 7.b têm-se os resultados para os 33 espécimes do SAE 1030 testados, através de um gráfico S-N. Os espécimes usados para levantar a resistência à fadiga sem micro-pontos de solda estão representados por círculos azuis. Já os resultados para os espécimes com micro-pontos de solda estão representados por losangos vermelhos.

Têm-se no gráfico S-N que as duas retas que melhor ajustam estes dois grupos de dados estão bem próximas. Nota-se que os resultados experimentais para os três níveis de tensão utilizados ($0,60.S_u$, $0,65.S_u$ e $0,70.S_u$) apresentam-se “misturados” e bastante dispersos.

4 - CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo avaliar e determinar a influência da soldagem de micro-pontos, por descarga capacitiva, na resistência à fadiga de corpos de prova, aços de baixo teor de carbono. A partir dos resultados obtidos com espécimes ensaiados sob flexão rotativa, pôde-se concluir que os micro-pontos de solda não influenciaram de maneira significativa na iniciação de trincas de fadiga nos materiais estudados.

5 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASTM / E 468-90 - "Standard Practice for Presentation of Constant Amplitude Fatigue Test for Metallic Materials", 1990.

ASTM / E 739-91 - "Standard Practice for Statistical Analysis of Linear or Linearized Stress-Life (S-N) and Strain-Life (ϵ -N)", 1991.

FREIRE, J. L. F. , Arêas, C. A. C. , "Fatigue Strength of Spot Welded Strain Gage Specimens", Rio de Janeiro, 1995.

IMIG, L. A. , "Effect of Strain-Gage Attachment by Spotwelding and Bonding on Fatigue behavior of Ti-6Al-4V, René 41 and Inconel X", National Aeronautics and Space Administration - Technical Note, Nasa TN D-5973, 1970.

LIPSON, C. & SHETH, N. J. , "Statistical Design and Analysis of Engineering Experiments", Mac-Graw-Hill Book Company, 1973.

MACHADO, R. R. , *Influência de Micro-Pontos de Solda na Resistência à Fadiga de Aços de Baixo Carbono*, Dissertação de Mestrado, PUC-RJ, 1997;

METALS HANDBOOK - "Properties and Selection: Irons and Steels", vol. 1, 9th edition, ASM International, 1978.

6 - AGRADECIMENTOS

Agradecemos o apoio e colaboração dos funcionários da Oficina do Departamento de Engenharia Mecânica da UnB, em especial aos técnicos Arthur Alves Rocha e Edson Luca de Almeida.

- para o aço SAE 1020 a hipótese das vidas médias serem iguais é aceita para os níveis de tensão de $0,80 S_u$ e $0,70 S_u$, $t_{amostra} > t_{crítico}$. Entretanto, para o nível de tensão de $0,80 S_u$, a hipótese das vidas serem diferentes é aceita, o que indicaria a existência da influência do processo de soldagem.
- para o SAE 1030 a comparação dos resultados indica que, para os três níveis de tensão, a hipótese das médias serem iguais é admitida, indicando que não há influência do micro-ponto de solda na resistência a fadiga do material.

3.3 - Análise da Curva S-N

Na figura 7 são apresentadas as curvas S-N para os aços SAE 1020 e 1030, com e sem micro-pontos de solda.

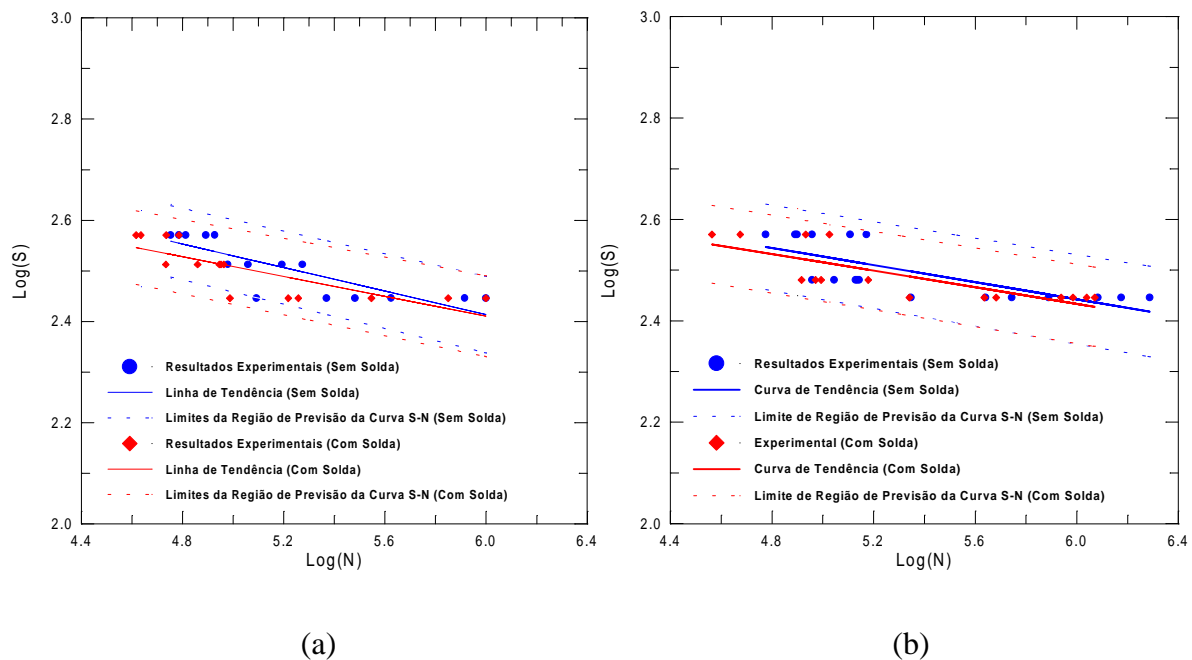


Figura 7 - Curva S-N para materiais ensaiados - (a) SAE 1020 (b) SAE 1030

Considerando que a curva S-N pode ser descrita por uma lei de potências do tipo, os parâmetros a e b poderão ser obtidos através da linearização de tal função.

$$S = A \cdot N^b \quad (1)$$

Assim, linearizando (1) resultará na equação linear (2).

$$\text{Log}(S) = \text{Log}(A) + b \cdot \text{Log}(N) \quad (2)$$

onde : $\text{Log}(S)$ é logaritmo da tensão aplicada, $\text{Log}(A)$ é a constante da reta, $\text{Log}(N)$ é o logaritmo do número de ciclos até a ruptura, e b é a inclinação da reta, ou expoente da equação (1).

Desta forma, a aplicação da técnica de mínimo quadrados aos resultados experimentais permitirá a determinação das curvas de tendência e das curvas de dispersão. Tais curvas são apresentadas na figura 7.

A figura 7.a mostra os resultados encontrados para os 30 espécimes do SAE 1020 através de um gráfico do tipo S-N. Dois conjuntos de dados são realçados. Os espécimes usados para levantar a resistência à fadiga com o número de ciclos para os espécimes sem micro-pontos de solda estão representados por círculos. Os resultados para os espécimes com micro-pontos de solda estão apresentados por losangos. Pode-se notar através do gráfico que as duas retas que melhor ajustam estes dois grupos de dados concorrem, para o nível de tensão menor ($0,60.S_u$).

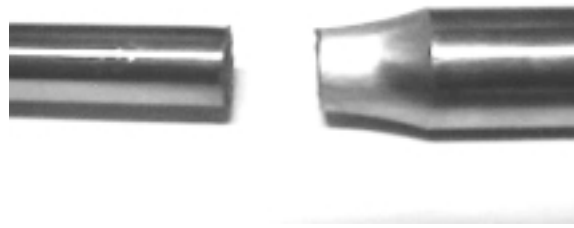


Figura 6 - Corpo de prova de SAE 1030 com falha na região do "ombro"

Os ensaios de fadiga para os dois aços foram realizados em três níveis de carregamento, tanto para os espécimes com micro-ponto de solda quanto para os sem. Os resultados foram examinados fazendo-se uma análise qualitativa dos corpos de prova do SAE 1030, e análises utilizando teste t e comparações das curvas S-N, para CPs com e sem pontos de solda, plotadas a partir dos resultados obtidos.

3.1 - Análise Qualitativa das Falhas nos Corpos de Prova SAE 1030

A análise qualitativa dos espécimes do SAE 1030 foi feita classificando-se os mesmos através da comparação dos resultados de falha que ocorreram na região próxima ao ponto de solda com aqueles que, mesmo estando com um micro-ponto de solda em um "ombro", falhou no "ombro" o qual estava sem o ponto de solda. Por esta análise, pôde-se observar que a introdução do micro-ponto de solda em um "ombro" do corpo de prova influenciou na localização da falha, sendo que, dos 21 CPs ensaiados com micro-ponto de solda em um dos "ombros", apenas 5 falharam naquele que não havia o ponto de solda, ou seja, 76% dos CPs ensaiados "com solda" romperam na solda. No entanto, esta influência não foi significativa, como comprovado pelos resultados do teste t , e analisando-se a curva S-N.

3.2 - Análise Estatística dos Resultados

Uma forma bastante eficiente de avaliar a influência da presença dos micro-pontos de solda sobre a resistência a fadiga dos materiais pode ser realizada utilizando-se testes de hipóteses para verificar se as vidas médias dos corpos de prova soldados e não soldados é a mesma. Neste trabalho utilizou-se o teste t com duas amostras presumindo variâncias diferentes [Lipson e Sheth, 1973]. Através dos resultados obtidos destes testes, considerando os 6 níveis de tensão utilizados, foram obtidos os resultados apresentados na tabela 4.

Tabela 4 - Resumo dos resultados obtidos através do teste de média

Material	Nível de Tensão	Média (Log(N))		Desvio Padrão (Log(N))		Graus de Liberdade	$t_{amostra}$	$t_{crítico}$
		S/ Solda	C/ Solda	S/ Solda	C/ Solda			
SAE 1020	0,80 S_u	4,83	4,69	0,073	0,081	6	2,71	1,94
	0,70 S_u	5,13	4,89	0,132	0,097	5	2,98	2,01
	0,60 S_u	5,58	5,48	0,342	0,393	10	0,489	1,81
SAE 1030	0,70 S_u	4,97	4,79	0,148	0,216	5	1,36	2,01
	0,65 S_u	5,08	5,01	0,797	0,114	5	1,00	2,01
	0,60 S_u	5,88	5,81	0,330	0,269	12	0,422	2,01

Considerando os resultados apresentados na tabela 4, verifica-se :

2º) Preparar o aparelho para soldagem capacitiva por pontos de acordo com a seguinte seqüência:

- a) Ligar o aparelho;
- b) Selecionar a energia a ser utilizada;
- c) Selecionar o tempo de descarregamento da carga pela máquina;

3º) Posicionar o corpo de prova entre as pontas soldadoras da máquina e pressionar o pedal com o pé para que haja contato entre o CP e as pontas;

4º) Aplicar a descarga sobre o corpo de prova.

Devido ao fato da máquina de soldagem disponível destinar-se a soldas de chapas, a quantidade de energia e o tempo selecionados no processo de soldagem foram de 30 J e 0,1 s, resultando numa descarga de 300 W, ou seja, um valor muito superior ao necessário para a soldagem dos extensômetros. Na figura 4 são apresentadas micrografias dos corpos de prova fabricados de aço SAE 1030 com e sem o ponto de solda.

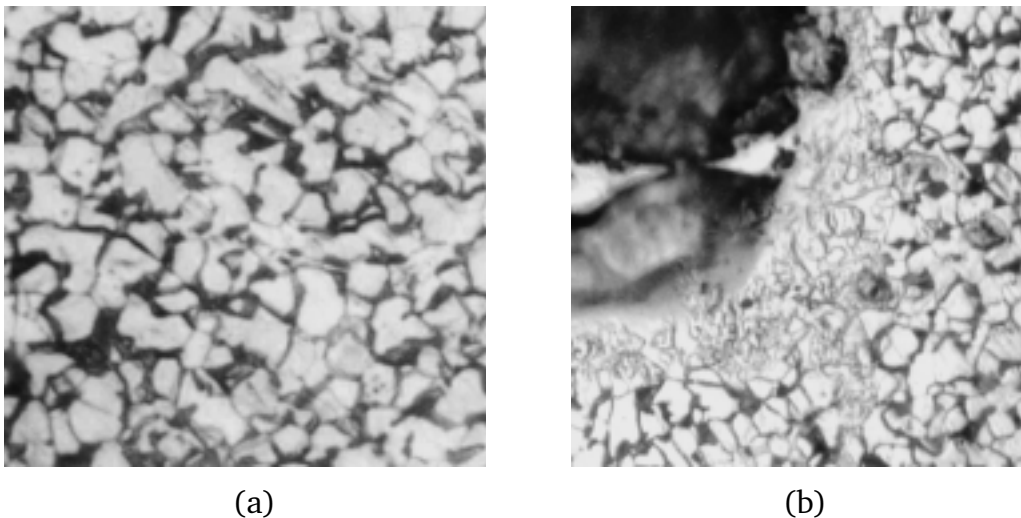


Figura 4 - Micrografia dos corpos de prova fabricados em SAE 1030 - 300 x (Ataque nital 3%) (a) material virgem (b) material soldado

3 - RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nos ensaios para o SAE 1020 constatou-se que as seções onde as trincas se iniciaram e propagaram até a fratura, localizaram-se na extremidade da seção menor dos corpos de prova, conforme ilustrado na figura 5. Isto ocorreu para os 30 CPs ensaiados, com e sem pontos de solda.



Figura 5. Corpo de prova de SAE 1020 com falha na extremidade da seção menor.

Para os ensaios com o SAE 1030 constatou-se que, em todos os 33 espécimes testados, as trincas se iniciaram e propagaram até a fratura na região dos “ombros” dos CPs, conforme ilustrado na figura 6. Dos 21 espécimes ensaiados com micro-pontos de solda 5 não tiveram a iniciação da trinca no “ombro” onde estava a solda, ou seja, falharam no “ombro” sem ponto de solda.

apresentados nas figuras 1 e 2.

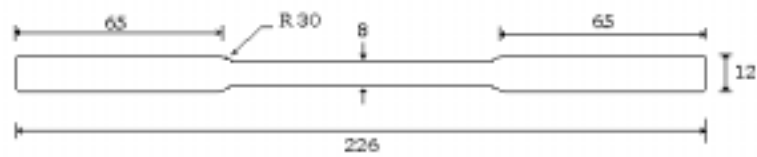


Figura 1 - Croqui dos corpos de prova utilizados para ensaios do SAE 1030 - Dimensões mm

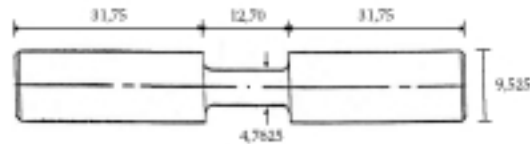


Figura 2 - Croqui dos corpos de prova utilizados para ensaios do SAE 1020 - Dimensões mm

Os ensaios foram realizados sob condições idênticas de carregamento em CPs sem e com micro-pontos de solda aplicados em uma das regiões de mudança de seção dos CPs, conforme ilustrado na figura 3.



Figura 3 - Corpo de prova com micro-ponto de solda no raio de variação da seção.

Para o levantamento da curva S-N procurou-se inicialmente utilizar três diferentes níveis de tensão : $0,80.S_u$, $0,70.S_u$ e $0,60.S_u$ [Lipson e Shets, 1973]. Entretanto, para os ensaios realizados na máquina de fadiga "UBM", aço 1030, por não se conseguir impor velocidade em níveis de tensão maiores que $0,70.S_u$, para o específico material, foram utilizados os seguintes níveis de tensão : $0,60.S_u$, $0,65.S_u$ e $0,70.S_u$.

Conforme recomenda a norma ASTM E - 739/91 [1991], o número mínimo necessário de espécimes para se montar uma curva padrão S-N depende do tipo de ensaio que será realizado. Neste estudo trabalhou-se no intervalo de 12 a 24 CPs para cada material, que segundo a Norma, corresponde ao tipo de teste para se obter "dados admissíveis para projeto" ou "dados para análise de confiabilidade". O número total mínimo de CPs torna-se, então, 12×1 (material) $\times 1$ (tipo de ensaio) $\times 2$ (tipos de CPs) = 24. Assim, foram ensaiados sob flexão rotativa 27 CPs com superfícies como usinadas, sem micro-pontos de solda. Destes, 15 CPs foram do material SAE 1020 e 12 CPs do material SAE 1030. Para os ensaios com micro-pontos de solda foram utilizados 36 CPs, sendo 15 CPs do SAE 1020 e 21 CPs do SAE 1030. O que totaliza 63 corpos de prova distintos.

2.1 - Introdução dos micro-pontos de solda no CP

A introdução de micro-pontos de solda nos CPs padronizados simulando a união dos extensômetros soldáveis seguiu-se o seguinte procedimento:

- 1º) Limpar a superfície do espécime;

quebravam na região da solda, mas na região de mudança de seção.

A metodologia adotada nesse trabalho permite alcançar uma resposta qualitativa rápida com relação ao efeito dos micro-pontos de soldagem. Isto será possível porque serão introduzidos micro-pontos de solda em uma das regiões de mudança de seção dos espécimes. Assim, se a fratura do CP inicia em um micro-ponto de solda, pode-se dizer que a resistência desta seção é menor que a das outras, e também, pode-se determinar sua vida N à fadiga. Se as trincas iniciarem indiscriminadamente nos pontos de solda ou em outras seções, pode-se dizer que ambas têm resistência equivalentes. Se por outro lado, as trincas iniciarem em seções que não contenham pontos de solda, pode-se afirmar que seu efeito é irrelevante para a resistência à fadiga do material. Deve-se notar que a metodologia usada procura dar uma resposta fenomenológica, onde o efeito do ponto de solda é medido pela perturbação que ele causa na resistência à fadiga. Esta perturbação é resultante dos efeitos mencionados anteriormente, isto é, da combinação de uma redistribuição de tensões no micro-ponto (concentração de tensões) com mudanças nas características da resposta à fadiga do aço carbono. Em fadiga, este efeito é normalmente traduzido pelo fator de concentração de tensão efetivo para a fadiga, cujo símbolo é K_f . O fator K_f é definido pela razão entre a resistência à fadiga, para vidas idênticas, entre os espécimes sem e com concentração de tensões, e já leva em consideração a sensibilidade do material à presença de um entalhe.

2 - MATERIAIS E MÉTODOS

Neste capítulo serão apresentados os materiais utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho, os procedimentos seguidos para suas caracterizações e o tipo de ensaio realizado.

Os materiais utilizados durante este trabalho foram os aços SAE 1030 e SAE 1020, sendo que o primeiro foi escolhido por ter propriedades mecânicas análogas ao aço ASTM A-36, que é utilizado em elementos estruturais, tais como, navios, plataformas marítimas de exploração de petróleo. As propriedades mecânicas e químicas desses aços são apresentadas, respectivamente nas tabela 2 e 3

Tabela 2 - Valores normalizados e obtidos em ensaios de tração das propriedades mecânicas dos aços SAE 1030 e SAE 1020.

Material	Resistência à Tração S_u (MPa)	Limite de escoamento S_e (MPa)	Dureza Brinell HB
SAE 1030 (normalizado)	551,6	344,7	179
SAE 1030 (ensaiado)	465,1	430,7	164
SAE 1020 (normalizado)	448,2	330,9	143

Tabela 3 - Valores normalizados da análise química dos aços SAE 1030 e SAE 1020 [Metals Handbook, 1978]

Componentes	C (%)	Mn (%)	P (%)	S (%)
SAE 1030	0,27 - 0,34	0,60 - 0,90	0,04 máx.	0,05 máx.
SAE 1020	0,17 - 0,23	0,30 - 0,60	0,04 máx.	0,05 máx.

Os ensaios de fadiga sob flexão rotativa foram realizados em uma máquina "UBM" VEB Werkstoffprüfmaschinen Leipzig, utilizando o SAE 1030, e uma máquina "BUDD" Modelo RFB-200, utilizando o SAE 1020. Os corpos de prova utilizados nestes ensaios são

alterações na região soldada, como por exemplo : aparecimento de macro tensões, mudanças nas suas propriedades mecânicas, e introdução de um concentrador de tensões.

A partir do exposto acima, pode-se gerar um questionamento sobre a possibilidade de trincas de fadiga serem iniciadas nos micro-pontos de soldas quando os extensômetros soldáveis forem montados, por tempos longos, em componentes que trabalham com tensões variáveis.

A resposta a este questionamento tem sido procurada através da medição e comparação direta entre as resistências à fadiga de corpos de prova padrões e de corpos de prova que contêm micro-pontos de solda [Imig, 1970, Freire e Arêas, 1995].

Imig [1970] utilizou-se de placas finas de aço inoxidável, soldadas a corpos de prova de tração-tração para verificar a influência dos micro-pontos de solda na resistência à fadiga dos corpos de prova (CPs) fabricados nos materiais : Ti-6Al-4V, René 41, Inconel X. Os testes foram feitos à temperatura ambiente e a alta temperatura (800°). Como resultados destas análises verificou-se :

- A liga Ti-6Al-4V teve sua resistência à fadiga reduzida pelo ponto de solda para menos de 1/8 do valor sem o ponto,
- A liga de René 41 teve sua resistência à fadiga reduzida para menos de 2/3 do valor sem o ponto, e
- A liga de Inconel X teve sua resistência à fadiga reduzida para menos de 1/3 do valor sem o ponto.

Em Freire e Arêas [1995], corpos de prova de flexão plana com geometria especial foram testados sob várias condições. Os resultados destes ensaios, embora não conclusivos, por serem realizados com um número pequeno de CPs, mostraram que os micro-pontos de solda não influenciaram de maneira significativa a vida à fadiga dos espécimes testados. Resultados ilustrativos destes ensaios são mostrados na tabela 1.

Tabela 1 - Resultados do ensaio à fadiga em flexão plana (aço BS4360).

Condição	Vida N (ciclos)					Média	Coef. de Variação
Sem solda	19987	29975	39708	23680	32780	33718	27%
Soldagem "seca"	13191	35277	65812	15073	35187	47122	63%
Soldagem "molhada"	20150	30832	48180	23466	24097	38265	39%

Estes ensaios apresentaram dois problemas na sua metodologia. O primeiro é que apenas uma seção do corpo de prova era crítica. Assim, apenas a diferença entre as vidas dos corpos de prova que continham ou não continham micro-pontos de solda serviram como fatores de comparação entre as suas resistências. Para atingir-se resultados conclusivos, um número razoável de espécimes, maior que o utilizado, seria necessário para se alcançar um resultado estatisticamente consistente. O segundo problema estava no controle do ensaio, que era feito através de extensômetros de resistência elétrica instalados na seção crítica. Isto fez com que trincas iniciadas nas seções críticas (ou nos próprios EREs) acarretassem desvios de zero significativos em tração dos EREs e impedissem a continuação dos ensaios.

Machado [1997], procurando solucionar os problemas acima descritos estudou o efeito dos micro pontos de solda, empregando espécimes que possuísem grandes superfícies ou volumes submetidos às mesmas tensões. Nesse estudo foram utilizados espécimes do tipo flexão rotativa, ensaiados sob controle de carga. A região escolhida por Machado [1997] para introduzir os micro-pontos de solda nos espécimes localizou-se na metade do comprimento dos mesmos, ou seja, bem distante da região de mudança de seção dos mesmos.

Através de ensaios de flexão rotativa foram estimadas as curvas S-N de corpos de prova com e sem micro-pontos de solda. Os resultados destes ensaios, embora também não conclusivos, mostraram que os micro-pontos de solda não influenciaram de maneira significativa a vida à fadiga dos espécimes testados, pois invariavelmente os espécimes não

INFLUÊNCIA DE MICRO-PONTOS DE SOLDA NA RESISTÊNCIA À FADIGA DE AÇOS DE BAIXO CARBONO

Marco Aurélio Zangrado Tonelli, Eng.

Ricardo Mendonça de Siqueira, Eng.

Jorge Luiz de Almeida Ferreira, Dr.

Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília - UnB, Campus Universitário Darcy Ribeiro, Asa Norte, Brasília, DF, Brasil

Resumo

Extensômetros soldáveis de resistência elétrica (ESs) são transdutores de deformação muito utilizados em análises de tensões de elementos estruturais. Os ESs são instalados nos componentes estruturais metálicos a partir de micro-pontos de soldas, gerados por equipamentos de soldagem capacitiva. A inclusão destes micro-pontos pode causar alterações na região soldada, como por exemplo : aparecimento de macro tensões, mudanças nas suas propriedades mecânicas, e introdução de um concentrador de tensões. Este trabalho teve como objetivo avaliar e determinar a influência da soldagem de micro-pontos, por descarga capacitiva, na resistência à fadiga de corpos de prova confeccionados com aços de baixo teor de carbono. Neste sentido foram ensaiados um total de 63 corpos de prova fabricados em aço SAE 1020 e 1030, com e sem solda. Análises qualitativas e quantitativas foram realizadas para avaliar o comportamento da vida de fadiga destes corpos de prova. A partir dos resultados obtidos com espécimes ensaiados sob flexão rotativa, pôde-se concluir que os micro-pontos de solda não influenciaram de maneira significativa na iniciação de trincas de fadiga nos materiais estudados.

Palavras-Chave : Fadiga, Comportamento de Material, Soldagem Capacitiva

1 - INTRODUÇÃO

Os extensômetros soldáveis (ESs) têm sido usados por um longo tempo. Eles representam uma boa opção na seleção de meios para medição de deformações pelas facilidades que oferecem na sua instalação, proteção e uso, quando são necessárias aplicações em estruturas em operação no campo, tais como pontes metálicas, navios, e plataformas marítimas de perfuração e exploração de petróleo. Os ESs são instalados nos componentes estruturais metálicos a partir de micro-pontos de soldas, gerados por instrumentos soldadores que trabalham através de descargas capacitivas. A inclusão destes micro-pontos pode causar

COMPARAÇÃO ENTRE PREVISÕES DE ALGUNS MODELOS DE CHOQUE

Edson Luiz Cataldo Ferreira

Universidade Federal Fluminense, Centro de Estudos Gerais, Departamento de Matemática Aplicada, 24020-140, Niterói, RJ, Brasil. E-mail: ecataldo@mec.puc-rio.br

Rubens Sampaio

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Centro Tecnológico, Departamento de Engenharia Mecânica, 20543-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: rsampaio@mec.puc-rio.br

Resumo

Ao estudar choque entre corpos rígidos nos deparamos com diversos modelos na literatura. Esses modelos fazem hipóteses simplificadoras que podem violar leis físicas ou mesmo não violando essas leis, os modelos podem prever dinâmicas diferentes. O objetivo desse trabalho é o de discutir as previsões de alguns desses modelos e compará-las, usando simulações e animações. Os modelos propostos por Newton, Kane-Levinson e Glocker-Pfeiffer adotam uma aproximação para o problema que consiste em formular as leis de comportamento a partir de velocidades e impulsos. O modelo proposto por Han-Gilmore usa o método sequencial; isto é, o problema é tratado como se fosse uma sucessão de choques. Os valores iniciais para uma etapa são os valores finais da etapa precedente. Frémond propõe um modelo que considera o sistema formado pelos dois corpos em colisão como deformável e usa a Mecânica dos Meios Contínuos para caracterizar as colisões. Discutiremos a aplicação desses modelos em dois problemas: colisões unidimensionais entre três moedas e colisões no plano de uma barra rígida contra uma barreira fixa.

Palavras-chave: Choque, Dinâmica, Simulação.

1. INTRODUÇÃO

Podemos dizer que a dinâmica de um corpo ou de um sistema com mais de uma partícula pode ser modelada propriamente se colisões são levadas em consideração. Nos trabalhos de Galileu e Descartes aparecem referências a choques (ou colisões), mas o primeiro modelo de colisões entre partículas parece ser devido a John Wallis e Christopher Wren em 1668. Alguns pesquisadores como Newton, Huygens, Coriolis, Darboux, Routh, Apple, Carnot e Poisson discutiram o problema. No começo do século o problema gerou algumas discussões, como podemos ver nos trabalhos de Painlevé (1905) e Klein (1910). Porém, até 1984, todos os trabalhos usavam a teoria desenvolvida por Newton ou Poisson e a dificuldade estava em incluir atrito na modelagem, que foi apontado por Painlevé no seu artigo *Sur les lois de frottement de glissement*.

Em 1984, Kane publicou um trabalho, num jornal de circulação limitada, onde ele apontou um paradoxo: a aplicação de teoria de Newton, universalmente aceita, num problema de colisões de um pêndulo duplo, conduziu à geração de energia nas colisões. O quê estava errado ?

Em 1986, Keller apresentou uma solução para o problema, mas esta solução não era fácil de generalizar. Este trabalho foi publicado num jornal de grande circulação e atraiu muito interesse. Nesses treze anos o interesse tem aumentado e há alguns livros totalmente dedicados ao tópico.

O problema a ser discutido quando tratamos da colisão entre corpos rígidos é: conhecida a dinâmica pré-colisão e as propriedades do corpo e da superfície de colisão queremos conhecer a dinâmica pós-colisão. Para isso vários modelos foram criados. Recentemente, um modelo que engloba alguns dos principais modelos da literatura e a discussão de uma proposta de sistematização da resolução de problemas envolvendo colisões foram tratados em (Cataldo, 1999).

Neste trabalho apresentaremos o problema de geração de energia (tal como observado por Kane) usando o problema de uma barra rígida em colisão com uma barreira fixa. Usaremos o coeficiente de restituição na direção normal dado por Newton e para a direção tangencial usaremos a lei de Coulomb modificada. Depois, usaremos o coeficiente de restituição de Poisson e não verificaremos mais o acréscimo de energia. Discutiremos, então, um caso de colisões múltiplas: colisões unidimensionais entre três moedas. Neste caso não consideraremos atrito e usaremos modelos diferentes para descrever o problema. Verificaremos que apesar de não violar leis físicas, cada modelo propõe uma dinâmica diferente.

2. EQUAÇÕES UTILIZADAS

Consideremos a posição do sistema, formado pelos corpos que irão colidir, por $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^t$. A dinâmica do sistema é dada pelas equações de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + r_i \quad (1)$$

sendo Q_i a contribuição das forças externas generalizadas, r_i a força generalizada devido à reação no contato e T a energia cinética do sistema.

Consideremos o contato entre dois corpos, digamos C_1 e C_2 e \mathbf{R} a força de reação de C_1 sobre C_2 . Escrevemos $\mathbf{R} = (R_N, R_T)^t$. Temos n parâmetros de posição desconhecidos e duas reações no contato R_N e R_T também desconhecidas. Considerando \mathbf{r} o vetor cujas componentes são dadas por r_i com $i = 1, \dots, n$, \mathbf{r} e \mathbf{R} estão relacionadas por $\mathbf{r} = [W]\mathbf{R}$, sendo $[W]$ uma matriz $n \times 2$. Integramos a Eq. 1 no intervalo $(t - \epsilon, t + \epsilon)$, sendo t o instante da colisão e consideramos $\epsilon \rightarrow 0$. Ao invés da força de reação \mathbf{R} usaremos o impulso causado por essa força e dado por

$$\mathbf{I} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \mathbf{R} d\tau = \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Considerando o índice A representando o momento pré-colisão e E o índice representando o momento pós-colisão e usando $T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}[M]\dot{\mathbf{q}}^t$ chegamos à equação

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_A) = [W]\mathbf{I} \quad (3)$$

Assim, nosso problema é encontrar $\dot{\mathbf{q}}_E$ e \mathbf{I} sendo dados $[M]$, $[W]$ e $\dot{\mathbf{q}}_A$. Para isso, usamos uma estratégia que consiste em definir um processo chamado de *Processo Virtual*.



Figura 1: Esquema do processo virtual.

Esse processo não tem relação com o tempo pois modelamos a colisão como instantânea. Mostramos um esquema do processo virtual na Fig. 1.

Observamos que temos n equações, dadas pelas equações de Lagrange, mas queremos encontrar $n + 2$ incógnitas. Assim, precisamos, a princípio, de duas equações a mais. Essas equações serão dadas pelas leis de restituição. A união das n equações dadas com as 2 obtidas pelas leis de restituição formam o que chamamos de um *modelo de colisão*. Vários modelos de colisão têm sido criados desde a época de Newton até os dias de hoje. Cada modelo tem vantagens e desvantagens que têm sido discutidas em (Cataldo, E. & Sampaio, R., 1998).

Ao invés de usar o vetor de coordenadas generalizadas \mathbf{q} podemos usar o vetor \mathbf{D} que representa a distância entre os pontos de contato (P_1 e P_2) dos corpos (C_1 e C_2) que irão colidir como mostra esquematicamente a Fig. 2.

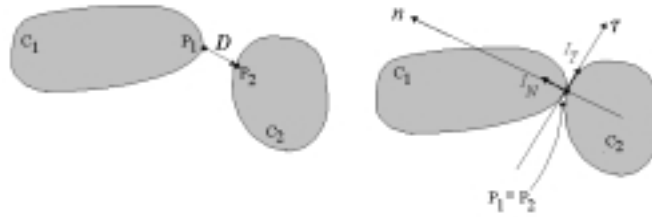


Figura 2: Colisão de dois corpos.

Podemos escrever

$$\dot{\mathbf{D}}_E - \dot{\mathbf{D}}_A = [\mathbf{W}]^T [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{W}] \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{I} = [\mathbf{M}_L] (\dot{\mathbf{D}}_E - \dot{\mathbf{D}}_A) \quad (4)$$

sendo $[\mathbf{M}_L]$ chamada de matriz de massa local.

3. FASE DE COMPRESSÃO E FASE DE EXPANSÃO

A colisão entre dois corpos é modelada como um processo instantâneo. As velocidades são descontínuas e as posições são contínuas. Para descrever alguns dos modelos de colisão pensamos, formalmente, que a mudança de velocidade do momento pré-colisão para o pós-colisão é realizado em duas fases: a fase de compressão e a fase de expansão. O processo virtual será composto por essas duas fases e está mostrado esquematicamente na Fig. 3.

Usando o índice A para representar o momento pré-colisão, o índice C para representar o fim da fase de compressão e o índice E para representar o fim da fase de expansão podemos escrever as equações

$$[\mathbf{M}] (\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) = [\mathbf{W}] \mathbf{I}_C \quad \text{e} \quad [\mathbf{M}] (\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C) = [\mathbf{W}] \mathbf{I}_E. \quad (5)$$



Figura 3: Fase de compressão e fase de expansão.

Considerando a velocidade relativa entre os pontos de contato, $\dot{\mathbf{D}}$, escrevemos

$$\dot{\mathbf{D}}_C - \dot{\mathbf{D}}_A = [W]^t(\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{D}}_E - \dot{\mathbf{D}}_C = [W]^t(\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C). \quad (6)$$

4. MODELOS DE COLISÃO

4.1 Modelos usados no caso da colisão de uma barra

Como dissemos, um modelo de colisão é formado pelas equações da dinâmica dadas pelas equações de Lagrange e equações a mais dadas pelas leis de restituição. Nesse trabalho queremos comparar alguns desses modelos. Começaremos discutindo dois modelos que chamamos de modelo de Kane-Levinson e modelo de Glocker-Pfeiffer (sem considerar as porções reversíveis do impulso tangencial). Aplicaremos esses dois modelos ao caso de uma barra rígida colidindo com uma superfície fixa como ilustra a Fig. 4.

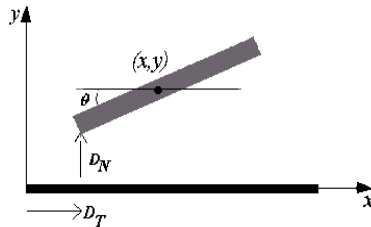


Figura 4: Barra rígida em colisão com barreira fixa.

Uma discussão mais ampla deste problema, usando outros modelos pode ser encontrada em (Cataldo & Sampaio, 1998, 1999).

O modelo de Kane-Levinson usa as equações da dinâmica considerando apenas os momentos pré e pós-colisão; isto é, não considera a fase de compressão. A lei de restituição usada na direção normal é a lei proposta por Newton definindo um coeficiente chamado de coeficiente de restituição de Newton e dado por

$$e_n = -\frac{\dot{D}_{NE}}{\dot{D}_{NA}} \quad (7)$$

relacionando a velocidade relativa normal no momento pós-colisão \dot{D}_{NE} com a velocidade relativa normal no momento pré-colisão \dot{D}_{NA} .

Na direção tangencial é usada a lei de Coulomb modificada dada por

$$\begin{cases} |I_T| < \mu I_N \Rightarrow \dot{D}_T = 0 \\ I_T = \mu I_N \Rightarrow \dot{D}_T \leq 0 \\ I_T = -\mu I_N \Rightarrow \dot{D}_T \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

I_N e I_T são as componentes normal e tangencial do impulso e \dot{D}_T é a velocidade tangencial relativa.

O modelo de Glocker-Pfeiffer usa as equações da dinâmica considerando as fases de compressão e de expansão. A lei de restituição na direção normal é a proposta por Poisson definindo o coeficiente de restituição de Poisson dado por

$$e_{np} = \frac{I_{NE}}{I_{NC}} \quad (9)$$

relacionando os impulsos normais no fim da fase de expansão (I_{NE}) e no fim da fase de compressão (I_{NC}). Na direção tangencial é usada também a lei de Coulomb modificada em cada uma das duas fases: compressão e expansão.

4.2 Simulações

Para comparar os modelos apresentados faremos simulações considerando o caso da barra. Consideremos os seguintes valores dos parâmetros e as seguintes condições iniciais: $e_n = e_{np} = 0.9$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 2$, $y_0 = 1$, $\dot{y}_0 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta}_0 = 0$ e $\mu = 1$.

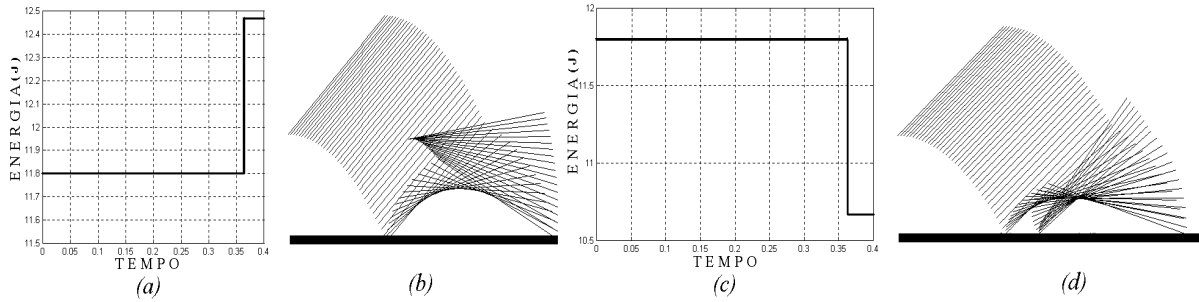


Figura 5: Barra rígida em colisão com barreira fixa. (a) e (b) Kane-Levinson; (c) e (d) Glocker-Pfeiffer.

Podemos observar que ao usarmos o modelo de Kane-Levinson obtivemos acréscimo de energia. Esse caso ilustra a situação de colisão em um único ponto e mostramos, assim, como um modelo pode falhar. No caso, contrariando uma lei física.

Porém, há casos em que consideramos modelos diferentes e mesmo não contrariando leis físicas podem apresentar previsões diferentes. Além disso, quando não há atrito, os coeficientes de restituição de Newton e de Poisson são equivalentes, quando tratamos de um único ponto de colisão (Cataldo, 1999). Quando tratamos de colisões múltiplas isso não é verdade. Discutiremos esses resultados considerando o caso da colisão entre três moedas, tratado na seção a seguir.

4.3 Modelos de colisão usados no caso de colisão entre três moedas

Consideremos a colisão entre três moedas como ilustra a Fig. 6.

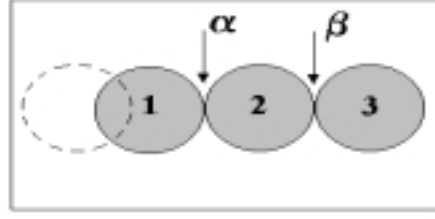


Figura 6: Colisão de moedas.

No momento da colisão dois contatos estão ativos: haverá colisão entre as moedas 1 e 2 no ponto α e as moedas 2 e 3 estão em contato no ponto β . As velocidades normais relativas iniciais são: $\dot{D}_{NA(\alpha)} < 0$ e $\dot{D}_{NA(\beta)} = 0$ e o movimento é unidimensional. Não consideramos atrito e a colisão é frontal. Consideremos x_1 , x_2 e x_3 as posições das moedas 1, 2 e 3 respectivamente. As moedas 2 e 3 têm a mesma velocidade: $\dot{x}_{2A} = \dot{x}_{3A}$. Os coeficientes de restituição associados a esses contatos são e_α e e_β . Consideraremos a mesma notação para os modelos de Newton, Glocker-Pfeiffer e Han-Gilmore.

As velocidades relativas nos pontos de contato têm por expressão: $\dot{D}_{N(\alpha)} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$ e $\dot{D}_{N(\beta)} = \dot{x}_2 - \dot{x}_3$.

Apresentaremos as equações de cada um dos três modelos e depois mostraremos uma tabela com os resultados. Uma discussão mais ampla deste problema pode ser encontrada em (Cataldo, 1999).

Usando o modelo de Newton temos

$$\begin{cases} m(\dot{x}_{1E} - \dot{x}_{1A}) = I_\alpha \\ m(\dot{x}_{2E} - \dot{x}_{2A}) = -I_\alpha + I_\beta \\ m(\dot{x}_{3E} - \dot{x}_{3A}) = -I_\beta \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{D}_{NE(\alpha)} = -e_\alpha \dot{D}_{NA(\alpha)} \\ \dot{D}_{NE(\beta)} = -e_\beta \dot{D}_{NA(\beta)} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Usando o modelo de Glocker-Pfeiffer temos, na fase de compressão

$$\begin{cases} m(\dot{x}_{1C} - \dot{x}_{1A}) = I_{NC(\alpha)} \\ m(\dot{x}_{2C} - \dot{x}_{2A}) = -I_{NC(\alpha)} + I_{NC(\beta)} \\ m(\dot{x}_{3C} - \dot{x}_{3A}) = -I_{NC(\beta)}. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{D}_{NC(\alpha)} = 0 \\ \dot{D}_{NC(\beta)} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

E na fase de expansão temos

$$\begin{cases} m(\dot{x}_{1E} - \dot{x}_{1C}) = I_{NE(\alpha)} \\ m(\dot{x}_{2E} - \dot{x}_{2C}) = -I_{NE(\alpha)} + I_{NE(\beta)} \\ m(\dot{x}_{3E} - \dot{x}_{3C}) = -I_{NE(\beta)} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} I_{NE(\alpha)} = e_\alpha I_{NC(\alpha)} \\ I_{NE(\beta)} = e_\beta I_{NC(\beta)} \end{cases} \quad (12)$$

O modelo de Han e Gilmore trata o problema como uma sucessão de colisões.

Introduzimos coeficientes para indicar as soluções de cada etapa. O expoente 1 corresponde às velocidades da primeira colisão, o expoente 2 da segunda colisão e assim sucessivamente. Por exemplo, \dot{x}_{1A}^1 é a velocidade da primeira moeda antes da primeira colisão, \dot{x}_{3E}^2 é a velocidade da terceira moeda após a segunda colisão.

Para a colisão no ponto α as equações do movimento são

$$\begin{cases} m(\dot{x}_{1E}^1 - \dot{x}_{1A}^1) = I_\alpha^1 \\ m(\dot{x}_{2E}^1 - \dot{x}_{2A}^1) = -I_\alpha^1 \\ m(\dot{x}_{3E}^1 - \dot{x}_{3A}^1) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

A lei de colisão no ponto α usada é $\dot{D}_{NE(\alpha)}^1 = -e_\alpha \dot{D}_{NA(\alpha)}^1$.

As velocidades generalizadas e relativas obtidas são dadas por

$$\begin{cases} \dot{x}_{1E}^1 = \frac{1}{2}(1 - e_\alpha)\dot{x}_{1A}^1 + \frac{1}{2}(1 + e_\alpha)\dot{x}_{2A}^1 \\ \dot{x}_{2E}^1 = \frac{1}{2}(1 + e_\alpha)\dot{x}_{1A}^1 + \frac{1}{2}(1 - e_\alpha)\dot{x}_{2A}^1 \\ \dot{x}_{3E}^1 = \dot{x}_{3A}^1. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{D}_{NE(\alpha)}^1 = -e_\alpha \dot{D}_{NA(\alpha)}^1 \\ \dot{D}_{NE(\beta)}^1 = \frac{1}{2}(e_\alpha + 1)\dot{D}_{NA(\alpha)}^1 \end{cases} \quad (14)$$

Como $\dot{D}_{NA(\alpha)}^1 < 0 \Rightarrow \dot{D}_{NE(\alpha)}^1 > 0$. Logo, $\dot{D}_{NE(\beta)}^1 = \frac{1}{2}(e_\alpha + 1)\dot{D}_{NA(\alpha)}^1 < 0$. Esse resultado é incompatível. Assim, houve colisão no ponto β .

As equações para a colisão em β são dadas por

$$\begin{cases} m(\dot{x}_{1E}^2 - \dot{x}_{1A}^2) = 0 \\ m(\dot{x}_{2E}^2 - \dot{x}_{2A}^2) = I_\beta^2 \\ m(\dot{x}_{3E}^2 - \dot{x}_{3A}^2) = -I_\beta^2 \end{cases} \quad (15)$$

com $\dot{D}_{NE(\beta)}^2 = -e_\beta \dot{D}_{NA(\beta)}^2$.

As velocidades generalizadas e relativas obtidas em β são dadas por

$$\begin{cases} \dot{x}_{1E}^2 = \dot{x}_{1A}^2 \\ \dot{x}_{2E}^2 = \frac{1}{2}(1 - e_\beta)\dot{x}_{2A}^2 + \frac{1}{2}(1 + e_\beta)\dot{x}_{3A}^2 \\ \dot{x}_{3E}^2 = \frac{1}{2}(1 + e_\beta)\dot{x}_{2A}^2 + \frac{1}{2}(1 - e_\beta)\dot{x}_{3A}^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{D}_{NE(\alpha)}^2 = \dot{D}_{NA(\alpha)}^2 + \frac{(e_\beta + 1)\dot{D}_{NA(\beta)}^2}{2} \\ \dot{D}_{NE(\beta)}^2 = -e_\beta \dot{D}_{NA(\beta)}^2 \end{cases} \quad (16)$$

Se $\dot{D}_{NE(\alpha)}^2 < 0$ então se produz um novo contato. E assim sucessivamente.

Para o modelo de Frémond (Frémond, 1995) as equações do movimento são dadas por

$$\begin{cases} m(\dot{x}_{1E} - \dot{x}_{1A}) = I_{12} + I_{13} \\ m(\dot{x}_{2E} - \dot{x}_{2A}) = -I_{12} + I_{23} \\ m(\dot{x}_{3E} - \dot{x}_{3A}) = -I_{23} - I_{13} \end{cases} \quad (17)$$

sendo I_{ij} , $1 \leq i < j \leq 3$, o impulso causado pela moeda i sobre a moeda j . Quando $I_{13} = 0$ chegamos nas equações obtidas classicamente com os impulsos agindo localmente nos pontos de contato. Escolheremos a lei de comportamento no caso mais simples: linear. Temos,

$$\begin{cases} I_{12} = k_{12}(\dot{x}_{2E} - \dot{x}_{1E} + \dot{x}_{2A} - \dot{x}_{1A}) + I_{12}^{reac} \quad , \quad I_{12}^{reac} \in \partial I_R^+(\dot{x}_{2E} - \dot{x}_{1E}) \\ I_{23} = k_{23}(\dot{x}_{3E} - \dot{x}_{2E} + \dot{x}_{3A} - \dot{x}_{2A}) + I_{23}^{reac} \quad , \quad I_{23}^{reac} \in \partial I_R^+(\dot{x}_{3E} - \dot{x}_{2E}) \\ I_{13} = k_{13}(\dot{x}_{3E} - \dot{x}_{1E} + \dot{x}_{3A} - \dot{x}_{1A}) \end{cases} \quad (18)$$

sendo ∂I_R^+ a sub-diferencial da indicatriz de R .

Como a ação entre 1 e 3 é à distância, temos $I_{13}^{reac} = 0$.

4.4 Comparação dos resultados

Consideremos o caso particular em que $\dot{x}_{2A} = 0$, $\dot{x}_{3A} = 0$, $m_1 = m_2 = m_3 = m$ e os coeficientes e_α , e_β , k_{12} , k_{13} e k_{23} são iguais a 1. Mostramos na Tab. 1 os resultados obtidos.

Tabela 1: Comparação dos valores para a colisão das moedas.

Modelo	Velocidades Finais		
	\dot{x}_{1E}	\dot{x}_{2E}	\dot{x}_{3E}
Han-Gilmore	0	0	\dot{x}_{1A}
Newton e Glocker-Pfeiffer	$-\frac{1}{3}\dot{x}_{1A}$	$\frac{2}{3}\dot{x}_{1A}$	$\frac{2}{3}\dot{x}_{1A}$
Frémond	0	$0.5 \dot{x}_{1A}$	$0.5 \dot{x}_{1A}$

Podemos observar diferentes valores para as velocidades no momento pós-colisão, quando usamos diferentes modelos.

No primeiro caso (Han-Gilmore) duas moedas ficam paradas enquanto a terceira parte com a velocidade igual à velocidade da primeira moeda antes da colisão. No segundo caso (Newton e Glocker-Pfeiffer), a primeira moeda desloca-se no sentido contrário ao imediatamente antes da colisão, a segunda e a terceira moedas partem juntas com a mesma velocidade. No terceiro caso (Frémond) a primeira moeda fica parada e a segunda e a terceira moedas partem com a mesma velocidade.

5. CONCLUSÕES

Ao considerarmos o choque entre corpos rígidos podemos verificar que alguns dos modelos usados podem falhar. Discutimos esse caso ao tratarmos do choque de uma barra rígida contra uma barreira fixa usando os modelos de Kane-Levinson e de Glocker-Pfeiffer. Observamos que mesmo quando não contrariam leis físicas os modelos podem prever dinâmicas diferentes. Constatamos este fato usando alguns modelos no caso da colisão unidimensional entre três moedas.

6. REFERÊNCIAS

Cataldo, E. , Sampaio, R. , 1998, "Comparação entre modelos de colisão de corpos", Anais do VIII Congresso de Ingenieria Mecanica, Chile, pp. 345-348.

Cataldo, E., 1999, "Modelagem e Simulação de Colisões Planas entre Corpos Rígidos", Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 385p.

Cataldo, E. , Sampaio, R. , 1999, "Comparing some models of collisions between rigid bodies", Proceedings PACAM VI/DINAME, Rio de Janeiro, RJ, Vol. 8, pp. 1301-1304

Cataldo, E. , Sampaio, R. , 1999, "Uma análise crítica de modelos de colisão entre corpos", Anais do COBEM99 em CD-Rom, S23, Águas de Lindóia, SP.

Frémond, M. , 1995, "Collisions of rigid bodies", Contact Mechanics, Edited by M. Raous et al. , Plenum Press, New York, pp. 397-404.

Han, I. , Gilmore, B. J. , 1993, "Multi-body impact motion with friction - analysis, simulation and experimental validation", Transactions of the ASME, Vol. 115, pp. 412-422.

Kane, T. R. , 1984, "A dynamic puzzle ", Stanford Mechanics Alumni Club Newsletter, pp. 6,

Keller, J. B. , 1986, "Impact with friction ", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 53, pp. 1-4.

Klein, F. , 1910, "Zu Painlevés kritik des Coulombschenreibungsgestze ", Zeitsch Math. Phys., Vol. 58, pp. 186-191.

Painlevé, P. , 1905, "Sur les lois de frottement de glissement ", C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 121, pp. 112-115, Vol. 141, pp. 401-405, Vol. 141, pp. 546-552, 1905.

Pfeiffer, F. ; Glocker, C. , 1996, "Multibody dynamics with unilateral contacts", John Wiley & Sons, New York.

ELASTIC MODULI PREDICTION OF TEXTILE POLYMERIC MATRIX COMPOSITES BY FINITE ELEMENT METHOD

José Henriques Iscold de Oliveira¹

Antonio Ferreira Ávila²

¹Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Department of Mechanical Engineering, 30480-000, Belo Horizonte, MG, Brazil. E-mail: iscold@dedalus.lcc.ufmg.br

²Universidade Federal de Minas Gerais, Department of Mechanical Engineering, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brazil. E-mail: aavila@dedalus.lcc.ufmg.br

Abstract

In this paper we would like to address the computational issues on the numerical implementation of a micro-mechanical model based on the unit cell approach. As most of the engineering applications are related with the plain weave configuration, we decide to focus our attention in this type of fiber arrangement. Once the unit cell is selected and all geometric characteristics an algorithm was developed to create a three dimensional representation of the unit cell. The numerical implementation of such algorithm was fulfilled by using the AutoLisp language which allowed us to model the unit cell into a Computer Aided Design tool, namely Autodesk Mechanical Desktop software. Then, the unit cell geometry is transferred to ANSYS. The numerical simulations are performed considering the waviness ratio variation from 0.165 to 0.5. The data are compared against Whitcomb and Naik's results with good agreement. Finally, some computational issues of the CAD and FEM compatibility are address and discussed.

Key words: Textile composites, Computer modeling, Micro-mechanics analysis.

1. INTRODUCTION

Nowadays, unidirectional fibers composites are used in the aerospace industry for secondary structures, such as engine casings, flaps and rudders, where their high strength-weight ratio reduces the overall weight and hence the operating costs of the aircraft. Textile and 3-D woven composites have great potential applications in the aerospace industry, through cost savings due ease of handling, reduced scrap rate, and decreasing of problems of cracks, such as damage and delamination.

In order to increase the use of 3-D woven composite materials in the aerospace industry, it is needed to settle its physical properties. It is also important to know the composite behavior under different applied loads of the wide range of structures available, and tailors the composite to the structure requirements. Variables such as fiber type, dimensions and their arrangement within the composite fabric need to be optimized for each different application. The costs of preparing and analyzing the various possibilities of composite structures are prohibitive. By using the new methodology proposed the number of tests need are dramatically reduced. The designer can change the fiber components and/or matrix to search

for the best architecture of the composite for a specific application. Such task can be done with a computational method without any cost and saving manpower and time. This new computational method will be helpful for light airplanes industry, where the designer wants to get smallest weight and reduced cost of material and fabrication.

This paper discusses a new methodology to calculate the mechanical proprieties of a plain weave woven textile polymeric composite. It is applied the concept of tridimensional unit cell (Whitcomb, 1991; Naik & Stembekar, 1992; Dasgupta *et al.*, 1996) which represents the smallest portion of the entire woven textile. The unit cell model is analyzed by applying the finite element method to compute the effective elastic moduli. This approach differs from classical ones (Ishikawa & Chou, 1982; Ishikawa & Chou, 1983; Cox & Flanagan, 1997) due to the application of a numerical technique, which allows us to describe the stress and strain distribution over the fibers and the matrix. Moreover, the effects of ondulation on the elastic moduli and Poisson's ratio can also be studied by applying the finite element formulation in conjunction with the unit cell concept.

The computational aspects of finite element implementation and its pros and cons are also addressed in this paper. As an engineering tool the new methodology can bring the followings advantages:

- Flexibility to test various combinations of materials (fibers and matrix) to make a specific composite material.
- Pre-determine the stress concentration factors on fibers, as a function of ondulation.

2. WEAVE CONFIGURATIONS

In any weave, the warp yarns run along the length of the textile and the weft yarns run across the width. The three main types of single layer weave geometry are plain, satin and twill weave and in each case the warp and weft yarns are oriented at 0 and 90⁰, respectively.

For plain weave, one warp alternatively crosses over and under consecutive weft yarn, while the next warp yarn crosses under and over the wefts. This pattern is classified as 1/1 and is illustrated in Fig.1-a.

For a satin weave textile, each warp yarn crosses at least tree weft yarns and interlaces with fourth weft yarn, with a progression of interlacings of two to the left or right – a 3/1 4/1 or 7/1 weave. These geometries are also known as Crows Foot Satin, Five Harness and Eighth Harness Satin and are shown in Fig.1-b,c,d.

The basket weave have two warp yarns interlaced with two weft yarns, it is classified as 2/2 and is illustrated in Fig.1-f. Twill weave is characterized by two or more warp yarns crossed by a weft yarn, with a progression of interlacings of one weft yarn to the right or left to form a distinctive diagonal line. Twill weave can be even-sided, i.e. the same amount of warp and weft on each side of textile, or it may be warp- or weft-faced, with a predominance of warp or weft yarns on the upper face. An even weave, with each warp crossing two wefts and vice versa, is classified as a 2/2 twill and is show in Fig.1-e.

3. UNIT CELL GEOMETRY

In the Figure 1, the poligonal lines define the boundaries of unit cells. As we are interested into plain weave composite materials we select the unit cell proposed by Naik & Stembekar (1992), see Figure 2.

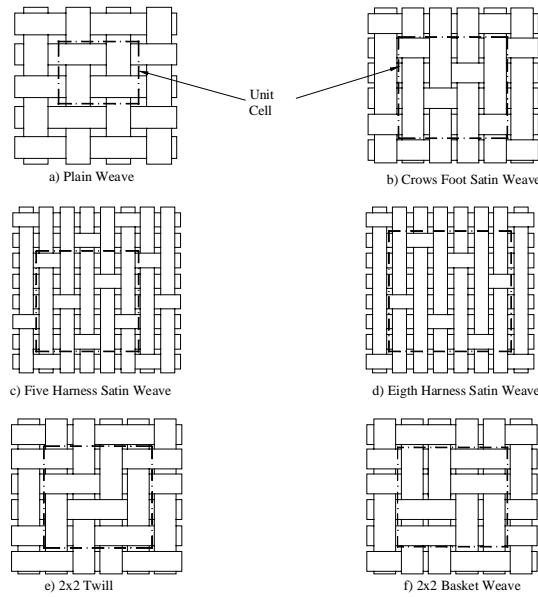


Figure 1 – Unit Cells for principal types of 2D textiles

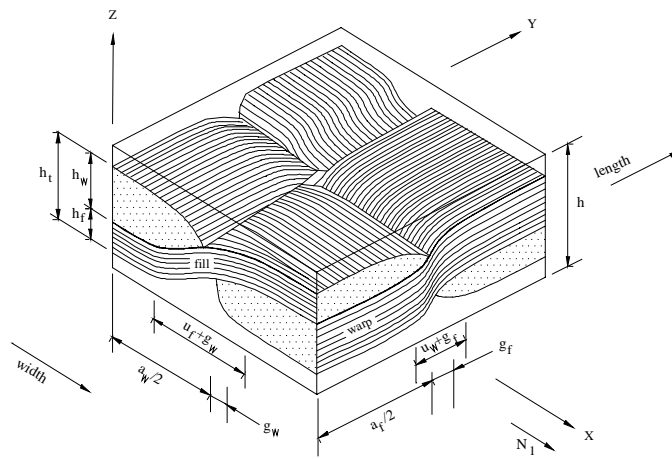


Figure 2 – The unit cell

In Figure 2 the following dimensions are defined: a_w is the width of warp yarn, a_f is the width of weft yarn, while g_w is the distance between two warp yarns. The distance between two weft yarns is represented by g_f , h_w and h_f are the thicknesses of warp yarn and weft yarn, respectively. Finally, the ondulation length of warp yarn, the ondulation length of weft yarn and the lamina thickness are represented by u_w , u_f and h .

By considering in Figure 3 the section DC as the mirror of section AB it is possible to assume that section BC is also the mirror of section AD. In each section of unit cell it can be identified three different regions. The first region is the one where the fiber is straight, the second is where the fiber is curved, and the third one is where the matrix is located. To be able to compute the unit cell dimensions Naik & Stembekar (1992) defined five sections a_1 , a_2 , a_3 , a_4 and a_5 parallel to DC and five other sections b_1 , b_2 , b_3 , b_4 and b_5 parallel to AD. The following equations are used to calculate a_1 to a_5 and b_1 to b_5 :

$$a_1 = \frac{a_w - u_f}{2} \quad a_2 = \frac{a_w}{2} \quad a_3 = \frac{a_w + g_w}{2} \quad a_4 = \frac{a_w}{2} + g_w \quad a_5 = \frac{a_w + u_f}{2} + g_w \quad (1)$$

$$b_1 = \frac{a_f - u_w}{2} \quad b_2 = \frac{a_f}{2} \quad b_3 = \frac{a_f + g_f}{2} \quad b_4 = \frac{a_f}{2} + g_f \quad b_5 = \frac{a_f + u_w}{2} + g_f \quad (2)$$

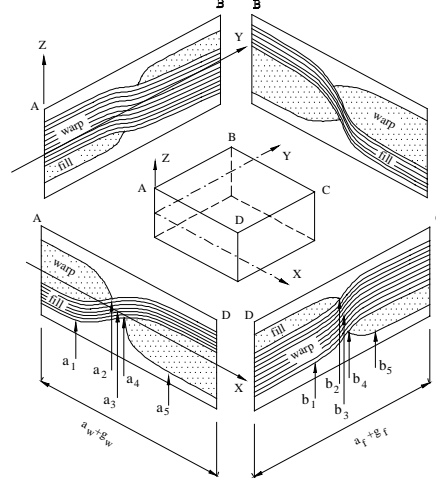


Figure 3: Plain weave unit cell representation

The fibers' configuration in section DC is calculated with the $h_{y1}(y)$ and $h_{y2}(y)$ form functions. The fibers' configuration on section AD is calculated with the $h_{x1}(x,y)$, $h_{x2}(x,y)$ and $h_{x3}(x,y)$ functions. It is out of the scope of this work to reproduce these form functions, it is shown the resultants figures 4a and 4b. For more details see Oliveira (1999).

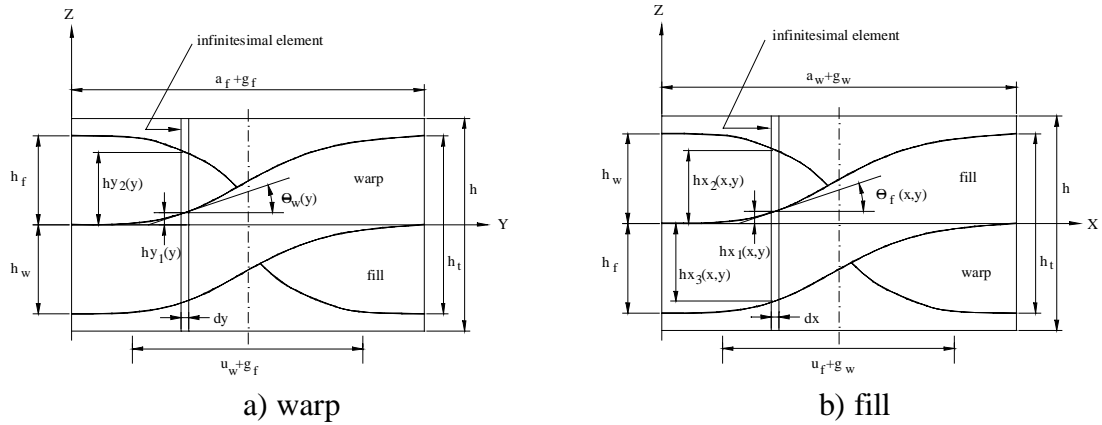


Figure 4: a) sections parallel to DC, b) sections parallel to AD fiber

4. PROPOSED ALGORITHM

An algorithm was developed based on such form functions to construct the unit cell. Before proceed it is needed to establish some geometric definitions. The yarn width on longitudinal and transverse directions are represented by a_f and a_w , while the free distance between two yarns on longitudinal and transverse directions are given by g_f and g_w . The weave yarn on longitudinal and transverse direction are represented by u_f and u_w . The increment on the y direction is given by dy and the yarn height on the longitudinal and transverse directions are represented by h_f and h_w respectively.

The following steps are performed by the proposed algorithm:

Get $a_f, a_w, g_f, g_w, u_f, u_w, h_f, h_w, h_t, dy$
 Compute a_1 through a_5 and b_1 through b_5
 Draw section D-C
 Fix the origin (0,0) $y_i=0; h_{y1}(y_i)=0; h_{y2}(y_i)=h_f$
 Compute $k=a_f+g_f$
 $x1=[1+\sin\{(b_2-b_3)*(\Pi/(u_w+g_f))\}]$
 $h_{y1}(b_2)=x1*h_f/2+h_t/2-h_f$
 Increment $y_{i+1}=y_i+dy$
 If $y_{i+1}<b1$ then do
 $h_{y1}(y_i)=0$ $h_{y2}(y_i)=h_t/2$
 End if
 Draw lines
 $(y_i, h_{y1}(y_i)) (y_{i+1}, h_{y1}(y_{i+1}))$
 $(y_i, h_{y2}(y_i)) (y_{i+1}, h_{y2}(y_{i+1}))$
 If $b_1<y_{i+1}<b_2$ then do
 $x1=[1+\sin\{(y-b_3)*(\Pi/(u_w+g_f))\}]$
 $h_{y1}=x1*h_f/2+h_t/2-h_f$
 $x2=[h_t/2-h_{y1}(b_2)]*\cos\{(y-b_1)*\Pi/u_w\}$
 $h_{y2}(y_i)=x2+h_{y1}(b_2)$
 End if
 Draw lines
 $(y_i, h_{y1}(y_i)) (y_{i+1}, h_{y1}(y_{i+1}))$
 $(y_i, h_{y2}(y_i)) (y_{i+1}, h_{y2}(y_{i+1}))$
 Do $y_{i+1}=b_2$
 Compute $h_{y1}(y_i)=h_{y2}(y_i)=h_{y1}(b_2)$
 Draw lines
 $(y_{i+1}, h_{y1}(y_{i+1})) (b_2, h_{y1}(b_2))$

$(y_{i+1}, h_{y2}(y_{i+1})) (b_2, h_{y2}(b_2))$
 If $b_2<y_{i+1}<b_4$ then do
 $x1=[1+\sin\{(y-b_3)*(\Pi/(u_w+g_f))\}]$
 $h_{y1}(y_i)=x1*h_f/2+h_t/2-h_f$
 End if
 Draw line
 $(y_i, h_{y1}(y_i)) (y_{i+1}, h_{y1}(y_{i+1}))$
 Do $y_{i+1}=b_4$
 Compute $h_{y2}(y_i)=-h_{y1}(b_2)$
 If $b_4<y_{i+1}<b_5$ then do
 $x1=[1+\sin\{(y-b_3)*(\Pi/(u_w+g_f))\}]$
 $h_{y1}(y_i)=x1*h_f/2+h_t/2-h_f$
 $x1=\cos\{(y-b_5)*\Pi/u_w\}-h_{y1}(b_2)$
 $h_{y2}(y_i)=-[h_t/2-h_{y1}(b_2)]*x1$
 End if
 Draw lines
 $(y_i, h_{y1}(y_i)) (y_{i+1}, h_{y1}(y_{i+1}))$
 $(b_4, h_{y1}(b_2)) (y_{i+1}, h_{y2}(y_{i+1}))$
 If $b_5<y_{i+1}<k$ then do
 $h_{y1}(y_i)=h_t/2$
 $h_{y2}(y_i)=-h_t/2$
 End if
 Draw line
 $(y_i, h_{y1}(y_i)) (y_{i+1}, h_{y1}(y_{i+1}))$
 $(y_i, h_{y2}(y_i)) (y_{i+1}, h_{y2}(y_{i+1}))$

The algorithm listed before was applied to create two codes in *Au oLisp*. Such codes were named *T x2 sp* and *ma rix sp* and they are used to generate the unit cell. Once such unit cell was generated by the *Au od sk M c anica D sk op @ RI I* the file is transferred to a finite element code. Figures 5a and 5b show the unit cell before and after the transferring procedure.

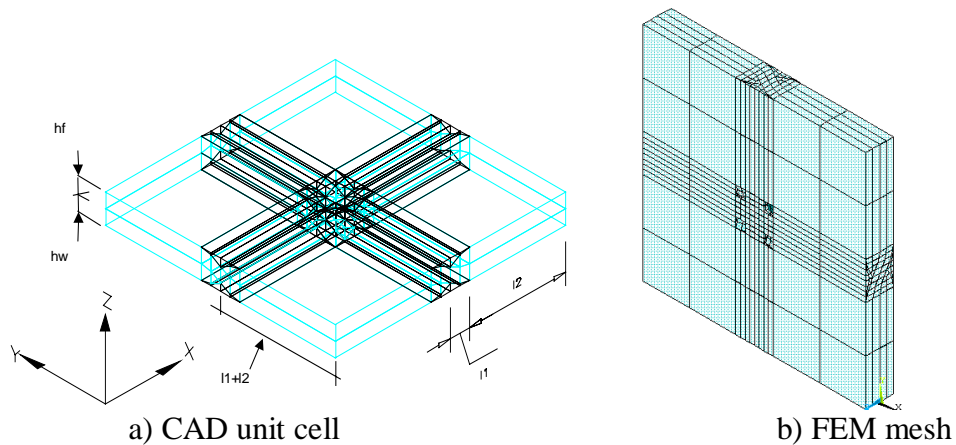


Figure 5: a) Unit cell on Mechanical Desktop, b) Unit cell on ANSYS

To be able to validate the new computational methodology a set of unit cell configurations are studied. In this study, we are able to calculate the elastic moduli for various

geometric parameters, distinct materials, and different volume fractions of fiber and matrix. The geometric parameters are mainly concerned to the fiber undulation and thickness, and the overall laminate thickness.

5 . SOME NUMERICAL SIMULATIONS

The results from the numerical simulation are compared against the data available in the literature. Figures 6 through 8 show the elastic moduli as a function of the fiber undulation. In general, the results are in good agreement with the data available in the literature. It is important to mention that these effective properties are calculated following the methodology proposed by Oliveira (1999).

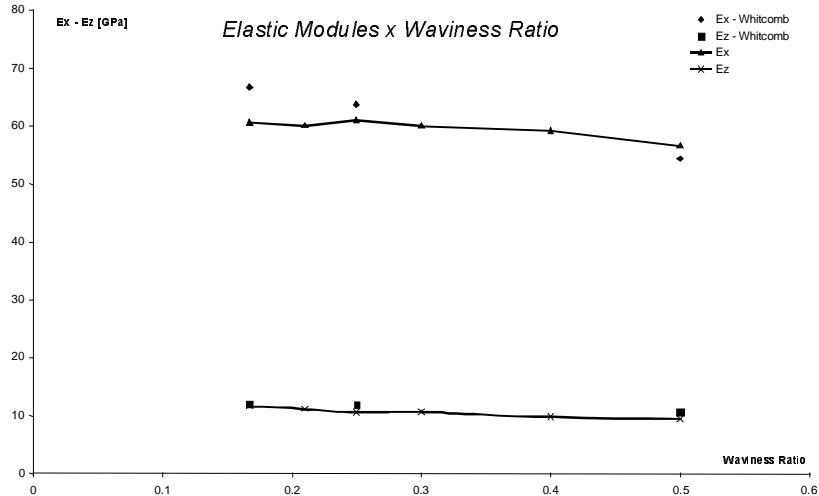


Figure 6 – Effective elastic moduli E_x, E_y, E_z versus waviness ratio

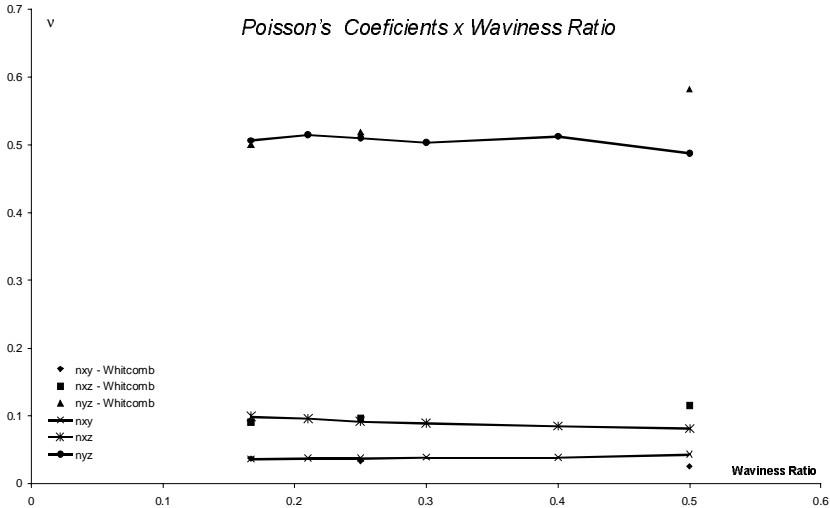


Figure 7 – Poisson's ratios $\nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{xz}$ versus waviness ratio

Another advantage of the new methodology is the potentiality of studying the stress concentration into the fibers by showing the effective stress distribution, represented by the Von Mises stress, into the entire unit cell. By analyzing figures 9 and 10 it is possible to observe the influence of undulation on the stress concentration. Plain weave configurations with waviness ratio bigger seems to be less influenced by stress concentrations, as the Von Mises stresses are considerable lower in such type of composite.

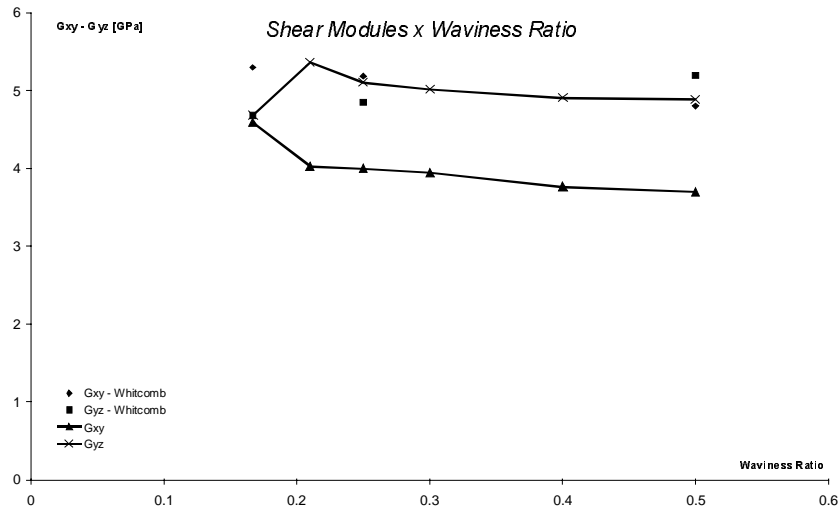
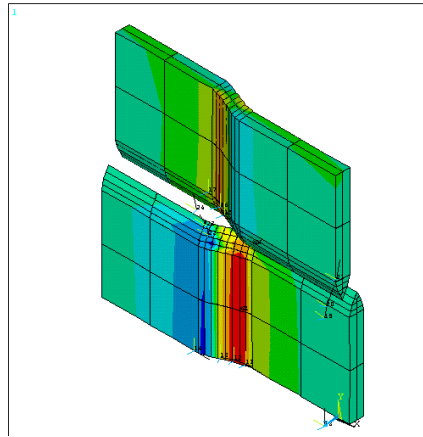


Figure 8 – Shear moduli G_{xy} , G_{yz} , G_{xz} versus waviness ratio

```

ANSYS 5.2
FEB 22 1999
18:53:40
MODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)
DMX =.001007
SMN =77.446
SMX =176.327
77.446
88.433
99.419
110.406
121.393
132.38
143.367
154.354
165.34
176.327

```

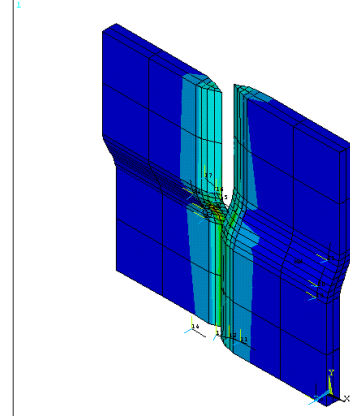


a) warp

```

ANSYS 5.2
FEB 22 1999
20:32:26
MODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)
DMX =.001
SMN =5.358
SMX =42.792
5.358
9.517
13.676
17.836
21.995
26.154
30.314
34.473
38.632
42.792

```



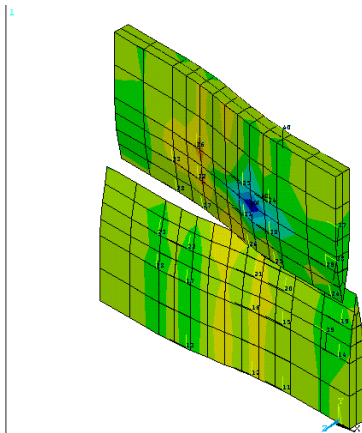
b) fill

Figure 9: Stress distribution on fiber for waviness ratio = 0.167

```

ANSYS 5.2
FEB 22 1999
19:48:54
MODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)
DMX =.001
SMN =54.883
SMX =180.702
54.883
69.862
84.842
99.822
114.802
129.782
144.762
159.742
174.722
189.702

```

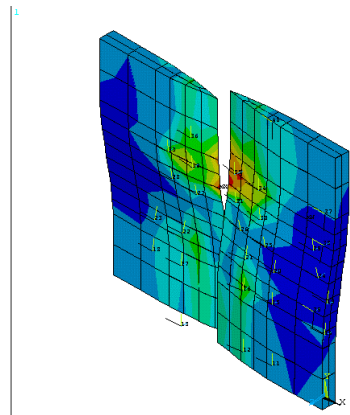


a) warp

```

ANSYS 5.2
FEB 22 1999
20:14:46
MODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)
DMX =.001
SMN =5.985
SMX =16.07
5.985
7.194
8.404
9.613
10.823
12.032
13.242
14.451
15.66
16.07

```



b) fill

Figure 10: Stress distribution on fiber for waviness ratio = 0.5

6. CONCLUDING COMMENTS

The proposed algorithm seems to be a helpful tool to create numerical representations of textile composites. By applying such type of algorithm is possible to create and analyze different types of textile composites configurations. By using such algorithm the user is allowed to identify possible locations of stress concentrations and correct such problems before hand.

7. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to acknowledge the financial support provided by the Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG) and the Brazilian Research Council (CNPq). Additional support and computer grants were furnished by the Midwest Center for High Performance Computing (CENAPAD-MG/CO).

8. REFERENCES

- Cox, B. and Flanagan, G, 1997, "Handbook of Analytical Methods for Textile Composites", NASA Contract Report 45750, Langley Research Center, Hampton, Virginia.
- Dasgupta, A, Argarwal, R. K, and Bhandarkar, S. M., 1996, "Three-Dimensional Modeling of Woven-Fabric Composites for Effective Thermo-Mechanical and Thermal Properties", Composites Science and Technology, Vol. 56, pp. 209-223.
- Ishikawa, T. and Chou, T. W, 1982, "Stiffness and Strength Behavior of Woven Fabric Composites", Journal of Material Science, Vol. 17, pp. 3211-3220.
- Ishikawa, T. and Chou, T. W, 1983, "One-dimensional Micromechanical Analysis of Woven Fabric Composites", AIAA Journal, Vol. 21, pp. 1714-1721.
- Naik, N. K. and Stembekar, P. S, 1992, "Elastic Behavior of Woven Fabric Composites: I – Lamina Analysis", Journal of Composite Materials, Vol. 26, pp. 2196-2225.
- Oliveira, J. H. I, 1999, "Modelo para Cálculo de Propriedades Elásticas de Materiais Compostos de Tecidura de Matriz Polimérica", DEMEC - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Whitcomb, J. D, 1991, "Three-Dimensional Stress Analysis of Plain Weave Composites", Composite Materials: Fatigue and Fracture (Third Volume), ASTM STP 1110, T. K. O'Brien, Ed., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp. 417-438.

SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE FRANJAS ÓTICAS UTILIZANDO A TÉCNICA EXPERIMENTAL SHADOW MOIRÉ

Perrin Smith Neto

Guilherme Cremasco Coelho

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Mecânica, Av. Dom José Gaspar, 500 – 30.535-610, Belo Horizonte Minas Gerais, Brasil. E-mail: psmith@pucminas.br

Resumo

A utilização de imagens geradas por técnicas de simulação tem sido utilizada para a verificação de validade de métodos para a análise de franjas óticas em técnicas experimentais, como Fotoelasticidade, técnicas Moiré no plano e Shadow Moiré, bem como na comparação de resultados obtidos. Este trabalho tem o objetivo de apresentar o princípio da simulação de padrões de franja Shadow Moiré, seus aspectos computacionais, bem como descrever o algoritmo básico, implementado em linguagem Matlab® 5.1. São apresentados também alguns exemplos nos quais foi utilizado como modelos um disco simplesmente apoiado por todo o contorno com carga puntual no centro na direção fora do plano, e uma superfície matemática. O trabalho apresenta detalhadamente os programas desenvolvidos que podem facilmente ser modificados e utilizados de forma a produzir simulações de outros modelos.

Palavras-chave: Shadow Moiré, Simulação, Franjas óticas

1- INTRODUÇÃO

Shadow Moiré é uma técnica experimental que utiliza a interferência produzida entre um padrão geométrico e sua sombra projetada em um objeto para extrair informações topológicas de superfícies, conforme Cloud (1995). As franjas resultantes, conhecidas como *isotâmicas*, são linhas de nível de igual profundidade em relação ao plano do padrão-mestre.

Dentre as técnicas existentes para a medição do relevo de um objeto, a técnica Shadow Moiré é a mais simples. Os outros métodos são baseados em interferometria e necessitam de luz monocromática, superfície convenientemente polida e equipamentos de alto custo. Nos métodos baseados em técnicas interferométricas, o erro é da ordem do comprimento de onda da luz utilizada; porém, têm seu uso limitado apenas a casos em que há pequena variação na topologia da superfície, de acordo com Post et al. (1994).

A técnica Shadow Moiré necessita basicamente de uma fonte de luz colimada, uma grade-mestre e, em geral, uma câmera fotográfica ou de vídeo como observador, conforme mostrado na figura 1. A sensibilidade, em uma abordagem ordinária, é da ordem do passo do padrão utilizado, isto é, maior que 0,1 mm; técnicas para o aumento da exatidão foram desenvolvidas, como a técnica *Deslocamento de Fase*. A técnica Shadow Moiré pode ser utilizada em objetos que possuem grande variação de relevo. O seu uso é mais adequado ao ambiente industrial.

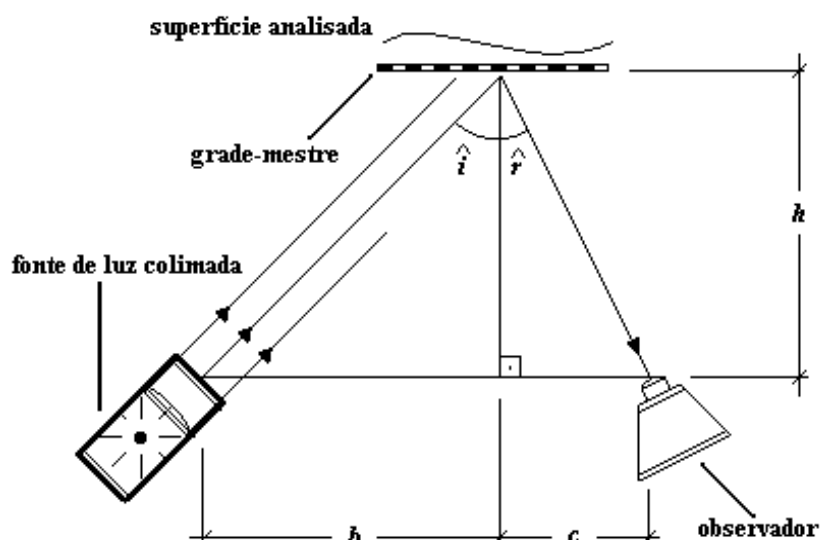


Figura 1: Arranjo experimental Shadow Moiré básico

Uma das formas de se avaliar resultados experimentais obtidos pela técnica Shadow Moiré e resultados teóricos de deslocamentos na direção z , obtidos por teoria da elasticidade ou elementos finitos, é a simulação computacional de franjas. A simulação, ou Moiré inverso, consiste na produção de imagens Shadow Moiré correspondentes à um dado campo de deslocamentos teórico.

Caso seja necessário, por exemplo, uma avaliação da adequação de fórmulas prontas para flambagem de placas sem furos em casos de placas com furos, utiliza-se a simulação. Gera-se imagens de franjas Shadow Moiré por simulação, utilizando as fórmulas para deslocamentos de placas sem furos flambadas, e compara-se qualitativamente (de forma visual) ou quantitativamente (usando processadores de franjas Shadow Moiré) com imagens de franjas de placas com furos flambadas obtidas experimentalmente.

A utilização de Moiré inverso tem se mostrado particularmente útil na verificação da validade de novas técnicas para processamento automático de padrões Shadow Moiré. Tornou-se uma ferramenta indispensável na verificação dos erros computacionais, diferentes dos erros experimentais, presentes em qualquer método computacional para análise de padrões Shadow Moiré que utilize processamento digital de imagens.

2- PRINCÍPIOS DE SHADOW MOIRÉ

O método Shadow Moiré utiliza a superposição de um padrão com a sua própria sombra. Faz-se um feixe de luz colimada incidir obliquamente em uma superfície passando por uma grade mestre, posicionada na frente da superfície analisada, como mostrado na figura 2; onde p é o passo da grade-mestre, W é a distância entre a superfície e a grade-mestre, \hat{i} é o ângulo de incidência da luz e \hat{r} é o ângulo de reflexão da luz na direção do observador.

Um pouco de geometria analítica leva, para um observador situado no infinito, à clássica equação (1):

$$w = \frac{Np}{\tan \hat{i} + \tan \hat{r}} \quad (1)$$

onde w é a distância entre o plano do padrão e a superfície, e N é a ordem de franja. Buitrago e Durelli (1978) generalizaram as condições de iluminação e de observação para pontos situados a distâncias finitas, porém a interpretação do deslocamento não é simples. A

diferença entre as equações desenvolvidas e a equação (1) é mínima, quando a distância entre o observador e o padrão é muito maior que w ; por esse motivo, a equação (1) pode ser utilizada sem perda de precisão.

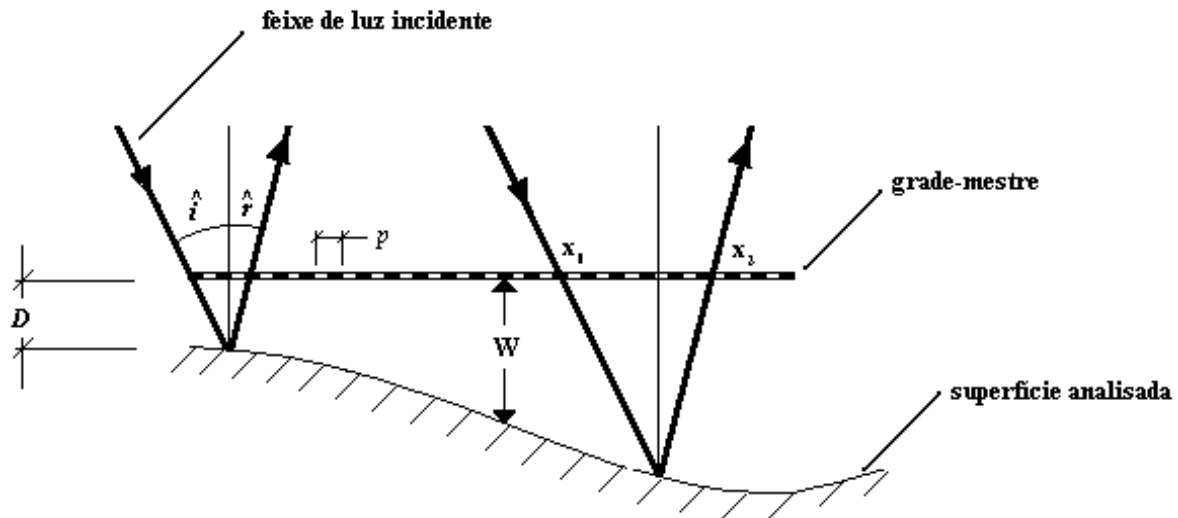


Figura 2: Geometria da técnica Shadow Moiré

Por simplificação, faz-se a distância c igual a zero, de forma que o eixo do observador seja perpendicular à grade-mestre. Desta forma, o ângulo \hat{r} de reflexão da luz na direção do observador torna-se zero, e a equação (1) reduz-se a:

$$w = \frac{Np}{\tan \hat{i}} = \frac{Npb}{h} \quad (2)$$

Assume-se que o padrão possua uma forma senóide dada por Mauvoisin (1973):

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{2\pi x}{p} + 1 \right) \quad (3)$$

A luz passa pelo padrão em um ponto x_1 , conforme mostrado na figura 2, atinge a superfície e é refletida, passando novamente pelo padrão, pelo ponto x_2 . O padrão luminoso que chega ao observador, formado pela interferência da grade-mestre com sua sombra é dado por Mauvoisin(1973):

$$I(x, y) = a + \beta \cos(\phi(x, y)) \quad (4)$$

em que α e β dependem da qualidade da superfície, da intensidade da fonte luminosa e do contraste aplicado à câmera fotográfica ou de vídeo; e ϕ é a fase. A fase está relacionada com a ordem de franja por:

$$\phi = 2\pi N = 2\pi \frac{w \tan \hat{i}}{p} \quad (5)$$

3- SIMULAÇÃO DE FRANJAS SHADOW MOIRÉ

A simulação consiste em se gerar a imagem das franjas a partir dos deslocamentos correspondentes, utilizando as equações (4) e (5). O primeiro passo é a obtenção dos deslocamentos. Dispõe-se, para isso, do método de elementos finitos ou de fórmulas para deslocamentos de teoria da elasticidade. Considera-se então que, de início, se tenha todo o campo de deslocamentos do experimento que se deseja simular, sob a forma analítica (fórmulas da elasticidade ou equação de alguma superfície) ou sob a forma discreta (resultados obtidos por elementos finitos).

Se os deslocamentos estão sob a forma analítica, deve-se discretizá-los. Obviamente, a discretização consiste em gerar uma malha bidimensional de valores para x e y no domínio de interesse e, em seguida, calcular o valor do deslocamento na direção fora do plano para todos os pares ordenados da malha.

É extremamente importante e fundamental que se tenha uma malha bastante refinada. Uma malha de densidade 200×200 pontos é satisfatória. Uma malha excelente possui 500×500 pontos. Quanto maior a quantidade de franjas, menor deverá ser o espaçamento da malha. Deve-se atentar ao fato de que o refinamento máximo será limitado pela resolução do monitor do computador no qual as imagens serão formadas e pela quantidade de *pixels* existentes na área na qual a imagem será exibida.

Dispondo, então, do campo de deslocamentos no domínio de interesse, atribui-se valores para \hat{i} (ângulo de incidência) e p (passo da grade-mestre), para, em seguida, calcular as ordens de franja N utilizando a equação (1). Calcula-se a fase ϕ através da equação (5). Atribui-se valores para a e β , pertencentes ao intervalo $[0;1]$. Imagens mais nítidas são obtidas fazendo $a=0$ e $\beta=1$. Calcula-se, enfim, $I(x,y)$ utilizando a equação (2). Dispondo do campo de intensidades luminosas, cujos valores pertencem ao intervalo $[0;1]$, pode-se gerar a imagem, plotando na tela os pontos do domínio, sendo que esses pontos serão plotados com uma intensidade luminosa dada por I calculado no ponto. A imagem resultante é o padrão Shadow Moiré.

4- ALGORITMO BÁSICO PARA A SIMULAÇÃO

O algoritmo básico para a geração de imagens obtidas por Moiré inverso podem ser implementados em qualquer linguagem que possua bibliotecas para tratamento de imagens. Os passos do procedimento de Moiré inverso para o caso de deslocamentos sob a forma de funções analíticas são:

Passo 1: Criar uma malha suficientemente densa de pares ordenados. Uma malha retangular apresenta bons resultados quando possui um número de nós em torno de 200×200 .

Passo 2: Calcular os valores dos deslocamentos $w_{ij} = w(x_i, y_j)$ em cada par ordenado utilizando as equações analíticas.

Passo 3: Calcular o campo de ordens de franja $N_{ij} = N(x_i, y_j)$ através da equação (1).

Passo 4: Calcular a fase $\phi_{ij} = \phi(x_i, y_j)$ utilizando a equação (5).

Passo 5: Atribuir valores para p , \hat{i} , α , e β e, em seguida, calcular o campo de intensidade luminosa $I_{ij} = I(x_i, y_j)$, utilizando a equação (4).

Passo 6: Plotar os pontos com suas respectivas intensidades luminosas.

É dado, no apêndice, um algoritmo escrito em linguagem *Matlab*[®] 5.1. Este software gera simulações de padrões Shadow Moiré para o caso de uma placa circular simplesmente apoiada por todo o contorno com uma força F puntual aplicada na direção z no centro da placa. O programa pode ser executado em qualquer computador *Pentium* com no mínimo 16 Mb de memória RAM que possua o software *Matlab*[®] versão 5.2 instalado.

5- APLICAÇÃO

5.1- Disco circular simplesmente apoiado

Foi feita uma aplicação do método de simulação para uma placa circular de raio $R=250$ mm; espessura $h=2,5$ mm; cujo material tem módulo de elasticidade $E=250000$ MPa; coeficiente de Poisson $\nu=0,3$; submetido a uma força puntual de $F=70$ N aplicada no centro do

disco na direção z , conforme mostrado na figura 3. O arranjo Shadow Moiré simulado tem um padrão de passo $p=0,2\text{ mm}$; e um ângulo de incidência $\hat{i}=45^\circ$. A malha utilizada possui tamanho 200×200 pontos.

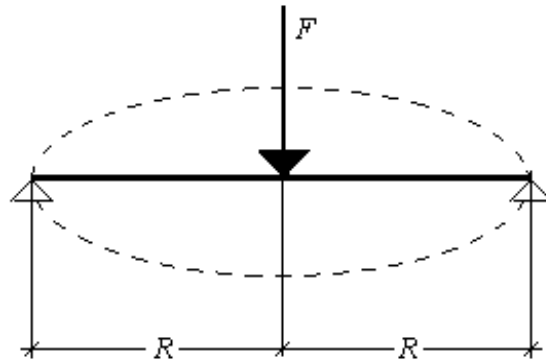


Figura 3: Esquema da forma de carregamento e condições de contorno

As equações que governam o experimento são:

$$w = \frac{FR^2}{16\pi D} \frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} (1-\alpha^2) + \frac{FR^2}{8\pi D} \alpha^2 \ln \alpha \quad (6)$$

onde

$$\alpha = \frac{r}{R} \quad (7)$$

$$e \ D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (8)$$

sendo E o módulo de elasticidade, ν o coeficiente de *Poisson*, e r a distância da origem ao ponto.

O deslocamento obtido pode ser observado na figura 4. O padrão Shadow Moiré gerado pelo procedimento de Moiré inverso está ilustrado na figura 5.

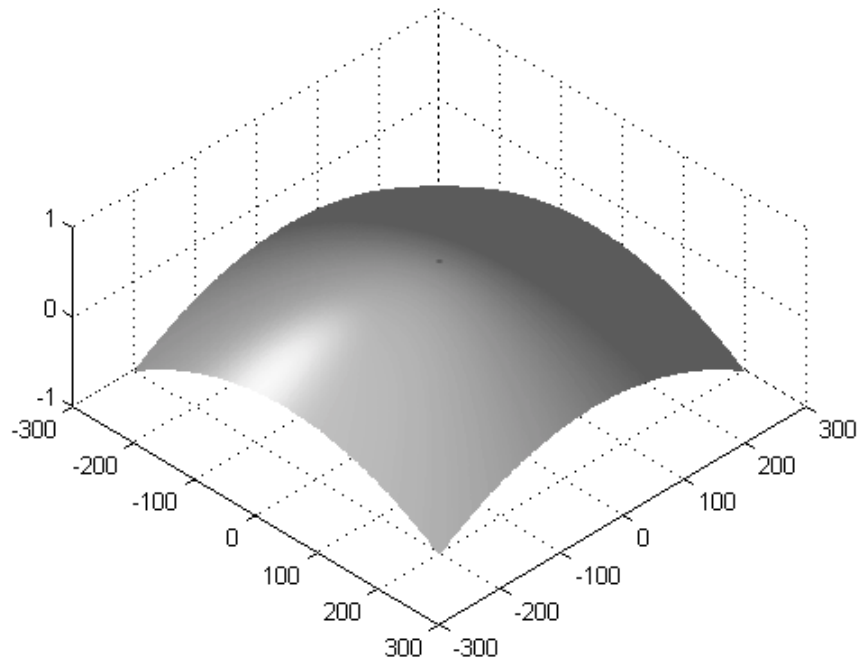


Figura 4: Deslocamento obtido

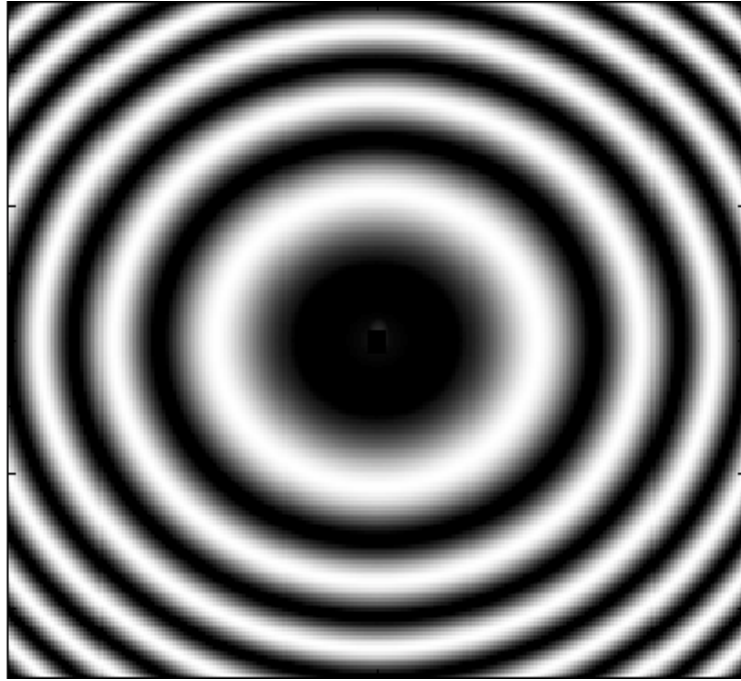


Figura 5: Franjas Shadow Moiré geradas pelo processo de Moiré inverso

5.2- Simulação de padrões em superfícies matemáticas

Uma aplicação da técnica de Moiré inverso pode ser feita em uma superfície matemática qualquer, para a observação do comportamento das franjas em regiões interessantes, como na superfície de equação:

$$z = \frac{x^3 - y^2}{100} \quad (9)$$

com $-5 \leq x \leq 5$ e $-5 \leq y \leq 5$. Essa superfície pode ser visualizada na figura 6.

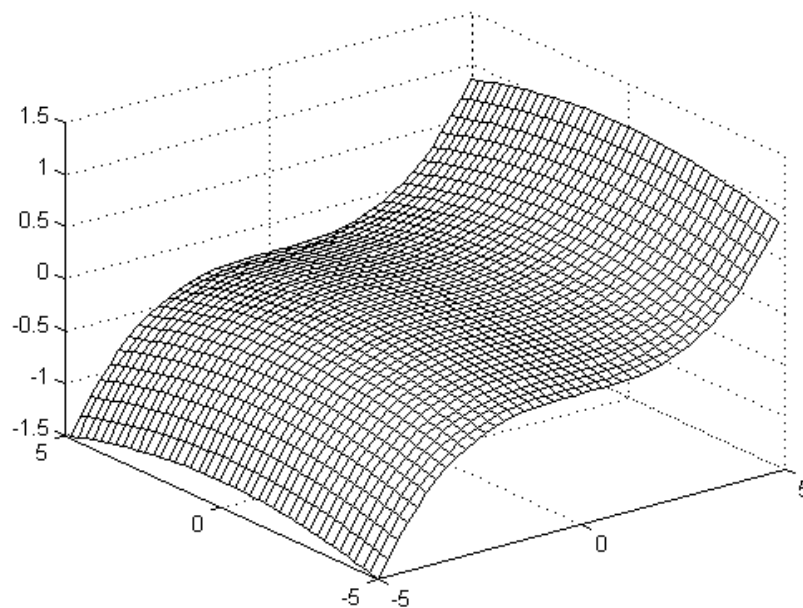


Figura 6: Superfície da equação (9)

Gerou-se uma imagem simulada das franjas. Fez-se o passo $p = 0,2 \text{ mm}$ e o ângulo de incidência $\hat{i}=45^\circ$. A malha utilizada possui tamanho 200×200 pontos. O padrão obtido é mostrado na figura 7.

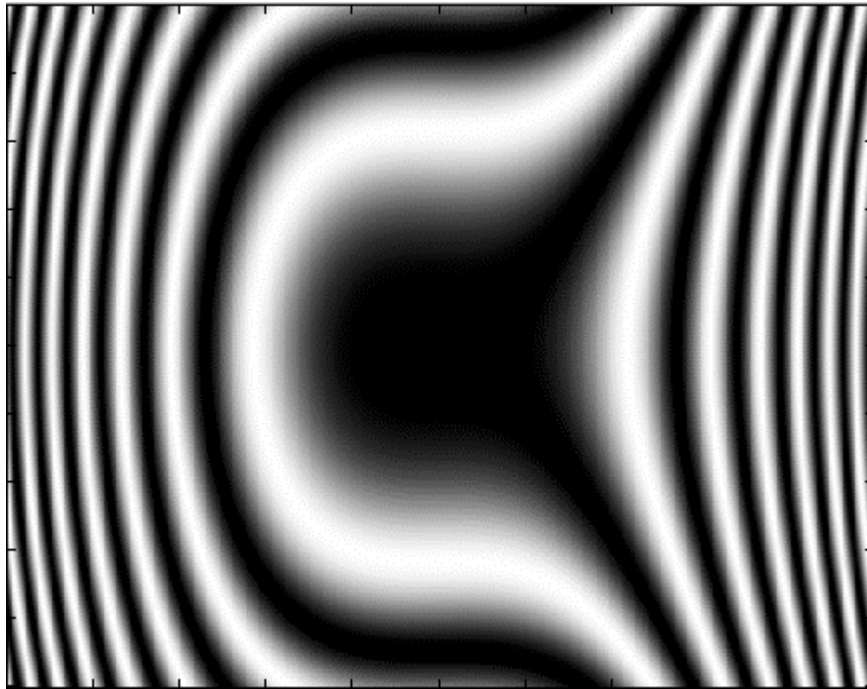


Figura 7: Franjas óticas simuladas

6- CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentou-se os fundamentos da técnica ótica Shadow Moiré para a determinação de geometria de superfícies, bem como as suas vantagens em relação às técnicas baseadas em interferometria. Apresentou-se o método de obtenção de franjas simuladas, procedimento também chamado de Moiré inverso, seus aspectos computacionais e um algoritmo básico. O método Moiré inverso tem sido utilizado na avaliação da validade de novos métodos de processamento de franjas Shadow Moiré que utilizam processamento digital de imagens, tornando-se ferramenta indispensável para o cálculo de erros computacionais.

7- REFERÊNCIAS

- Builtrago, J.; Durelli, A. J.: "On the Interpretation of Shadow Moiré Fringes"; Experimental Mechanics; pp 221-226; Junho; 1978.
- Cloud, Gary L.: "Optical Methods for Engineering Analysis"; 1ª ed.; Cambridge University Press; pp 179-182; New York; 1995.
- Mauvoisin, Gérard; Bremand, Fabrice; Lagarde, Alexis: "Shadow Moiré by Phase Shifting Method, Application to 3D Shape Reconstruction"; ATEM 93; Kanazawa; Japan; 1993.
- Post, Daniel; Han, Bongtae; Ifju, Peter: "High Sensivity Moiré"; 1ª ed.; Springer-Verlag; New York; 1994.