

USO DO ALGORITMO *SIMULATED ANNEALING* NO ESTUDO DE PROBLEMAS INVERSOS EM CONVECÇÃO NATURAL DE CALOR

Cristiene Vasconcelos Gonçalves

Sezimária Pereira Saramago

Gilmar Guimarães

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, 38400-902,

Uberlândia – Minas Gerais

e-mail: cgoncalves@mecanica.ufu.br

Resumo

A técnica denominada *Simulated annealing*, SA, é usada para a obtenção inversa do fluxo de calor e da temperatura da parede em uma placa plana vertical aquecida, com fluxo constante, através de medições de temperatura no interior do fluido. A solução direta das equações que descrevem o problema de convecção é obtida analiticamente através do método de von Kármán-Pohlhausen e de algumas hipóteses simplificativas como regime permanente, escoamento bidimensional e aproximação de Boussinesq. Os resultados obtidos para o SA são então comparados aos obtidos através do método da função especificada sequencial. Uma bancada experimental é montada de forma a fornecer a temperatura do filme no interior da camada limite.

Palavras-Chaves: métodos inversos, *Simulated annealing*, método da função especificada sequencial.

1. INTRODUÇÃO

Em diversas ocasiões práticas em engenharia, tais como controle de aquecimento ou resfriamento, as condições iniciais ou de contornos são inacessíveis. A utilização nesses casos de uma metodologia inversa representa uma ferramenta poderosa, Jarny et al (1991). A aproximação inversa, ao contrário da direta, procura predizer as condições de contorno térmicas de dados experimentais, a saber, medições obtidas dentro do campo de temperaturas, sem que nenhum sensor seja colocado sobre a superfície estudada.

O problema estudado aqui consiste de uma placa plana vertical sujeita a um fluxo de calor prescrito, $q(x)$, e exposta à convecção natural, Figura 1 (a). Pode-se observar, nessas condições, a formação de um escoamento devido às forças de empuxo e o estabelecimento de uma camada limite, representada esquematicamente na Figura 1 (b). É caracterizado por uma geometria cartesiana, bidimensional, sujeita a um fluxo de calor $q(x)$, com escoamento em regime permanente e descrito pelas equações da camada limite incompressível e laminar.

O problema inverso se estabelece à medida que as condições de contorno na parede como o fluxo de calor ou variação de temperatura não são conhecidas. As estimativas dessas variáveis, $q(x)$ e $T_w(x,0)$, são os objetivos desse trabalho.

Existem várias técnicas para a solução de problemas inversos. Nesse trabalho o algoritmo *Simulated Annealing* (SA) é adaptado ao problema inverso de calor. SA é um

método de busca probabilística cuja maior desvantagem se deve a um maior tempo computacional quando comparado aos modelos convencionais. Entretanto, apresenta vantagem sobre os métodos de gradiente convencionais por selecionar valores dos parâmetros fora da vizinhança de um mínimo local. Nesse trabalho o método do gradiente, o método da função especificada de Beck al (1985), é usado para comparação com os resultados obtidos através do SA.

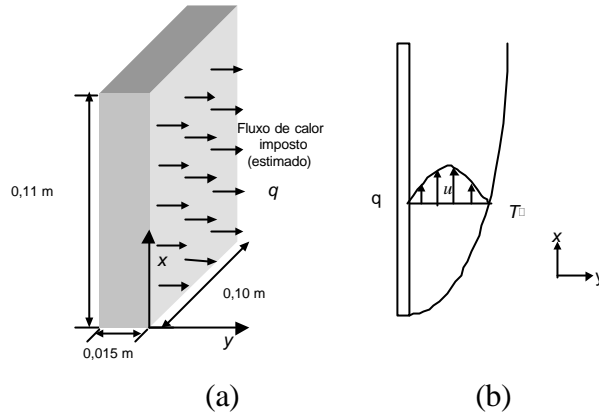


Figura 1- Problema térmico estudado. a) Placa plana vertical aquecida. b) Camada limite representada esquematicamente.

2. FORMULAÇÃO TEÓRICA

Uma das características das técnicas de problemas inversos é a necessidade de se obter uma equação que forneça uma correlação de uma variável a ser medida (nesse caso $T(x,y)$) em função do parâmetro a ser estimado, $q(x)$ e $T_w(x,0)$. Torna-se necessário, inicialmente, obter-se a solução do problema direto em questão. Esta solução é obtida através das equações de continuidade, movimento e energia que governam o problema de convecção natural sobre uma placa plana aquecida.

2.1. O PROBLEMA DIRETO

O problema de convecção natural sobre uma placa plana vertical aquecida pode ser descrito pelas equações da quantidade de movimento, da energia e da conservação de massa, considerando a aproximação de Boussinesq, ou seja,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \beta (T - T_\infty) + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (2)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

onde x é a coordenada medida ao longo da placa, y é a coordenada normal à placa, u e v são as componentes da velocidade na direção x e y respectivamente, $T(x,y)$ a temperatura, α a difusividade térmica, g a aceleração da gravidade e β o coeficiente de expansão térmica.

A solução das equações da camada limite laminar para convecção natural em uma placa plana vertical com fluxo de calor não uniforme, $q(x)$, na superfície pode ser obtida através do método de von Kármán–Pohlhausen, (Holman,1990), que consiste em uma formulação integral acoplada ao uso de aproximações polinomiais para os perfis de velocidade e temperatura.

O perfil de temperatura é representado por uma função polinomial de y , isto é,

$$T(x, y) = a + b y + c y^2 \quad (4)$$

Sendo que a, b, e, c , são funções de x obtidas de forma que as condições de contorno térmicas presentes no problema sejam satisfeitas, ou seja:

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = q(x), \quad \text{para} \quad y = 0; \quad (5)$$

$$T = T_\infty, \quad \text{para} \quad y = \delta; \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \text{para} \quad y = \delta. \quad (7)$$

onde $\delta(x)$ é a espessura da camada limite, k é a condutividade térmica e $q(x)$ ou simplesmente, q_x , o fluxo de calor não uniforme imposto na placa plana por unidade de área.

Substituindo as condições de contorno dadas pelas Eqs. (5), (6) e (7) em (4), obtém-se a expressão para o perfil de temperatura, como:

$$T(x, y) = T_\infty + \frac{q_x}{2k\delta(x)} y \left[\delta(x) - y \right]^2, \quad (8)$$

Para que a Eq. (8) represente a solução completa do campo de temperatura em função do fluxo de calor imposto, q_x , resta ainda a determinação da espessura da camada limite, $\delta(x)$.

Utilizando-se o método de von-Kármán Pohlhausen chega-se à expressão final para a espessura da camada limite $\delta(x)$:

$$\delta(x) = \frac{9k}{g \int_0^x q_x dx} \left(\frac{240}{7} \int_0^x q_x dx \right)^{1/5} = B_x^{-2} \int_0^x q_x dx \quad (9)$$

onde,

$$B_x = \frac{\int_0^x q_x dx}{x \int_0^x q_x dx} \quad (10)$$

$T(x,y)$ representa o modelo teórico para a temperatura, dada em função das coordenadas x e y , das componentes locais q_x e da influência das componentes $q_{x1}, q_{x2}, \dots, q_{xi}$ ao longo do comprimento da placa.

Observa-se que para o caso onde o comportamento do fluxo de calor seja aproximadamente constante, ou seja, $q_x \cong q = \text{constante}$, então

$$B_x = \int_0^x q_x dx \quad q_x \sim 1 \text{ e conseqüentemente } B_x^2 \sim 1$$

2.2. O PROBLEMA INVERSO

A proposta inicial para a obtenção das componentes do fluxo de calor q_x é a minimização de uma função erro quadrático definida pelo quadrado da diferença entre as temperaturas medidas no interior da camada limite $Y(x,y)_M$ e as temperaturas calculadas pelo modelo teórico dado pela Eq. (8). Assim a função objetivo a ser minimizada, adotada neste trabalho para os dois métodos empregados consiste:

$$F = \sum_{i=1}^M [Y(x, y)_i - T(x, y)_i]^2 \quad (11)$$

onde $Y(x,y)$ é a temperatura medida experimentalmente, $T(x,y)$ é a temperatura obtida pelo modelo e M é o número de posições na direção x da placa.

Método da função especificada seqüencial (FES)

Uma das técnicas inversas usadas nesse trabalho, envolve a inversão numérica de uma integral de convolução e o uso de passos de futuros. É o chamado método da função especificada, desenvolvido por Beck et al. (1985) para aplicações em problemas lineares de condução de calor. Esta técnica foi adaptada, através de um procedimento iterativo, para a solução do problema não linear causado pelo acoplamento das equações do movimento e energia, (Gonçalves, 1999).

Simulated annealing (SA)

SA tem suas origens na termodinâmica mais precisamente na forma como os metais líquidos se resfriam e se recozem. No recozimento físico, um metal é aquecido e em seguida resfriado lentamente para obter-se uma configuração molecular regular tendo o estado energético mais baixo possível. *Simulated annealing* pode ser realizado em otimização através de uma perturbação aleatória na variável de decisão e mantendo-se o melhor valor da função objetivo para cada conjunto de variáveis aleatória. Para encorajar a formação dessas estruturas cristalinas, um programa de temperaturas é usado para governar a taxa para qual o metal resfria, (Nakao, S e Karasaki, J. N., 1999). Se a temperatura é mantida constante, o sistema se aproxima do equilíbrio térmico e a distribuição de probabilidade para a configuração de energia, E , aproxima-se da probabilidade de Boltzmann:

$$P(\lambda E) = e^{-E/k_b T} \quad (12)$$

onde K_b é a constante de Boltzmann. Metropolis et al. (1953) introduziu primeiramente um algoritmo simples para incorporar essas idéias dentro dos cálculos numéricos de equações de estado. O critério conhecido como algoritmo de Metropolis, é aplicado para determinar se uma transição a outra configuração ocorre com a temperatura presente. Esse método de otimização consiste no uso de analogias ao processo de recozimento da metalurgia. Uma analogia ao processo pode ser visto na Figura 2, (Saramago et al., 1999).

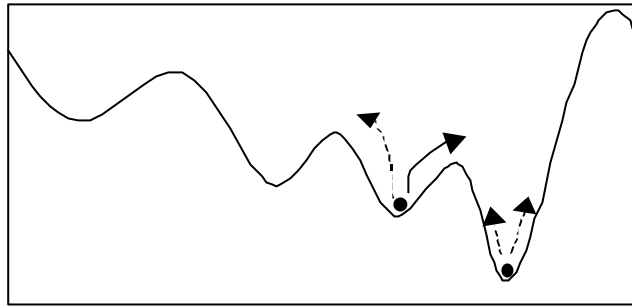


Figura 2 – Analogia ao processo de recozimento.

No SA, o estado energético e a configuração molecular tem analogias exatas. A função objetivo, Eq. (11), é análoga à função de estado, e o conjunto de parâmetros independentes, configuração, é análogo ao arranjos moleculares. Temperatura é simplesmente um parâmetro de controle em um dado problema de otimização.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O algoritmo do SA juntamente com o FES foram usados na solução de um problema inverso em convecção de calor para uma placa plana vertical aquecida. Os dois métodos se mostraram eficientes na recuperação do fluxo de calor desconhecido, assim como da temperatura da parede, $T_w(0,y)$.

Os dados de implementação para o SA podem ser verificados na Tabela 1.

Tabela: Dados de implementação do *Simulated annealing*.

Número de variáveis de projeto	9
Variáveis de projeto inicial	0.01 W/m ² (para todas)
Temperatura inicial	50
Quantidade de temperaturas	10
Quantidade de iterações	300
Numero limite de avaliações da FO	10000
Tolerância	1.e-10
Limite inferior	0
Limite superior	1000

Os resultados computacionais podem ser comparados através da Tabela 2, onde F é o valor da função objetivo. Pode-se notar que o desempenho computacional do FES é pouco superior ao SA, devido ao custo computacional, uma vez que apresentaram valores próximos para F.

Tabela 2: Resultados computacionais obtidos em ambos os métodos empregados.

<i>Simulated annealing</i>	Função Especificada Seqüencial
F = 2.5583*10 ⁻⁵	F = 2.2375*10 ⁻⁴
Nº de pontos visitados = 4549	Chamadas de F = 50
Nº de pontos aceitos = 1178	custo computacional = 1.1500 Seg.
custo computacional = 51.7900 Seg.	

A Figura 3 mostra uma comparação do fluxo obtido para os dois métodos, juntamente com o fluxo teórico experimental. Pode-se observar que ambos os métodos apresentaram resultados semelhantes quanto a recuperação do fluxo de calor.

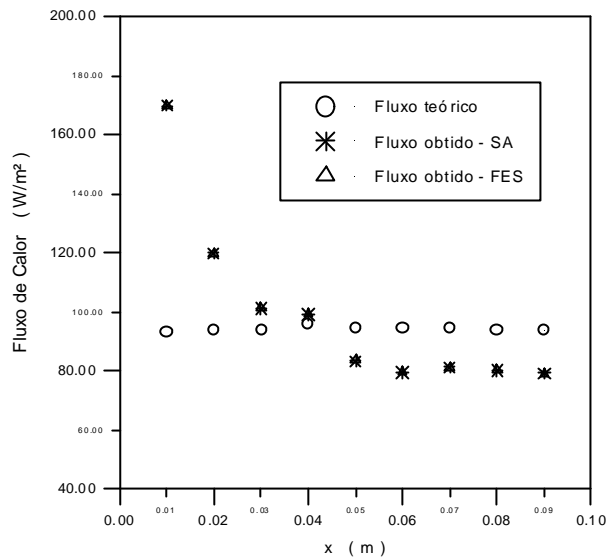


Figura 3: Fluxo de calor obtido através do *Simulated annealing* (SA) e do método da função especificada sequencial (FES).

A temperatura da parede, assim como o erro relativo encontrado pode ser vista na Figura 4(a) e 4(b), respectivamente. Nota-se que exceto pela primeira posição os erros foram inferiores a 5%. Experimentalmente esse fato significa um excelente resultado de recuperação da condição de contorno da placa. O resultado ruim para a primeira posição pode ser justificado devido ao fato que o modelo que descreve a camada limite ser parabólico, tornando-o dependente de informações anteriores.

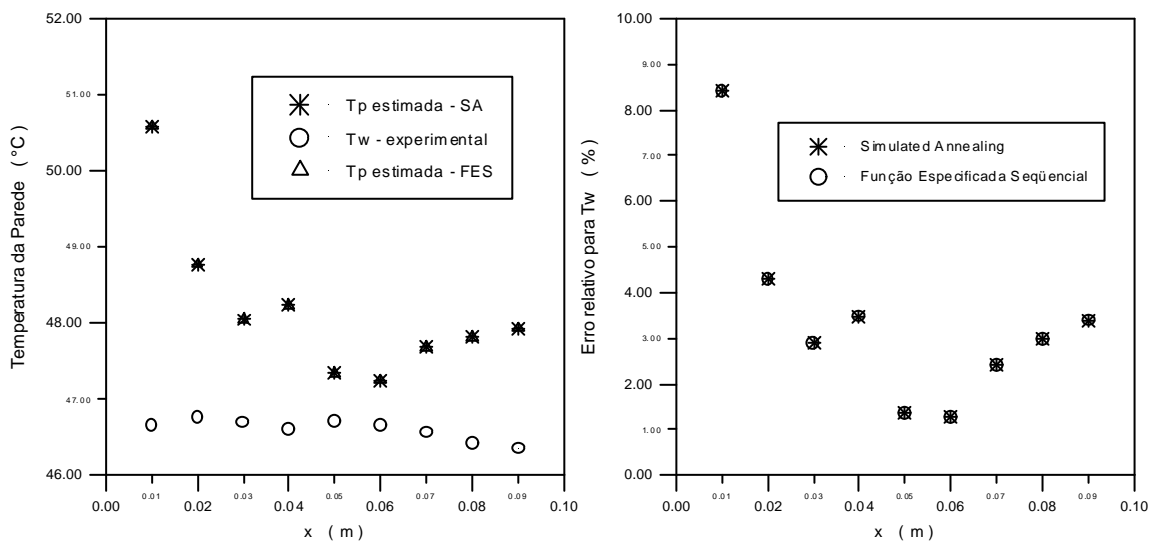


Figura 4 – (a) Temperatura da parede obtida pelo SA e FES. (b) Erro relativo encontrado na obtenção da temperatura da parede.

Os dados experimentais foram obtidos a uma distância fixa de 2 mm ao longo da placa. Um dos motivos foi a sensibilidade do método FES à localização do sensor. À medida que o

sensor de temperatura se distancia da placa menos informação referente ao fluxo desconhecido é obtida. A fim de se verificar a robustez do SA com relação a esse tipo de problema de localização do sensor foi realizada uma simulação, onde um fluxo de calor de 300 W/m^2 é imposto, constante ao longo de toda placa. Considerou-se primeiramente uma posição de y fixa e arbitrária, correspondente a 40% do máximo valor da camada limite, posteriormente fez-se o mesmo estudo de uma posição a 65% do valor máximo. Obteve-se os perfis de temperatura simulados para essas localizações, $Y(x,y)$, sendo que foi acrescentado um erro aleatório de $\pm 1^\circ\text{C}$. Os resultados para o fluxo de calor, do primeiro caso, assim como para o erro pode ser verificado na Figura 5(a) e 5(b), respectivamente.

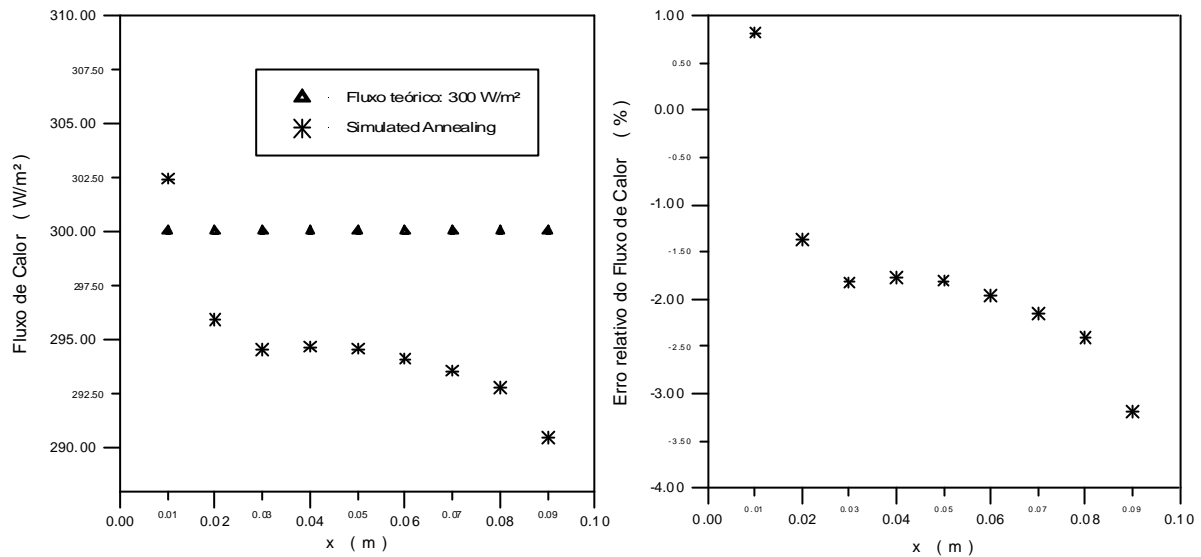


Figura 5 – (a) Fluxo de calor obtido pelo SA para um posição fixa de y correspondente a 40% da camada limite. (b) Erro relativo referente ao fluxo de calor obtido.

A temperatura da parede, para o primeiro caso, juntamente com e erro relativo podem ser vistas na Figura 6 (a) e 6(b), respectivamente.

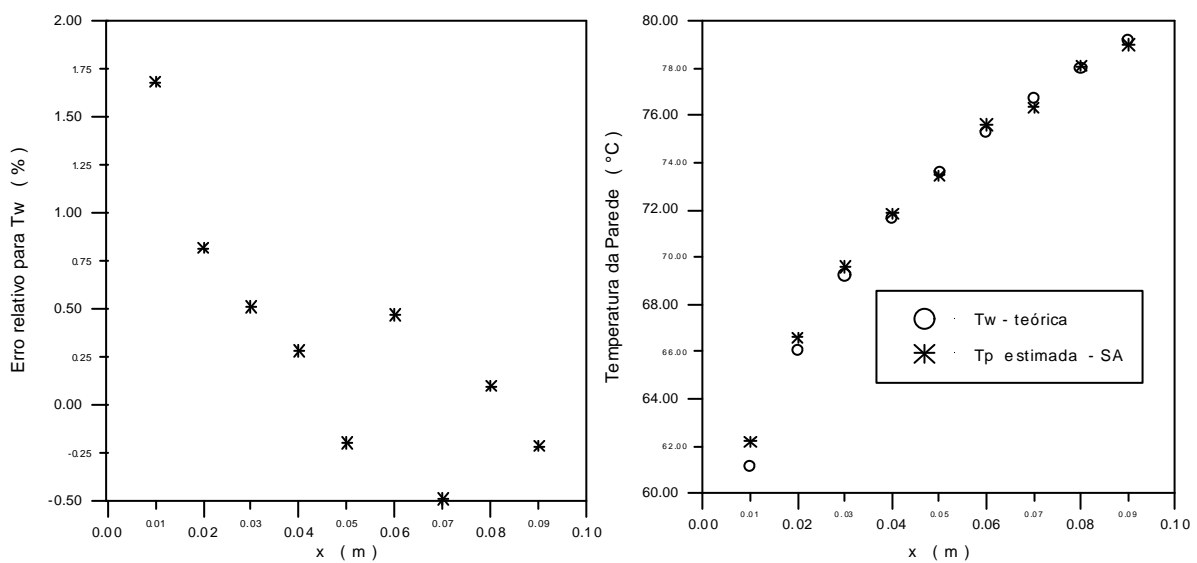


Figura 6 – (a) Temperatura da parede obtida com o sensor localizado a 40% do valor máximo da camada limite. (b) Erro relativo para a temperatura da parede.

O segundo caso testado foi uma posição fixa de y a 65% da distância máxima da camada limite. Obteve-se convergência do algoritmo SA, entretanto os resultados não foram precisos. Deve-se salientar que a 65% do valor máximo da camada limite, poucas temperaturas influenciadas pelo fluxo de calor são retidas.

Não se obteve convergência com o método FES em nenhum dos casos testados, o que indica uma melhor robustez do método SA com relação à localização do sensor.

4. CONCLUSÕES

O método do *Simulated annealing* apresentou o mesmo resultado que o método da função sequencial especificada. Obteve-se erros menores que 5% para a temperatura da parede, exceto para a primeira posição.

Em uma simulação para verificar a robustez do método, o SA mostrou-se bastante robusto, apresentando resultados para regiões superiores a 40% do valor máximo da camada limite.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Gonçalves, CV., 1999, “Desenvolvimento de técnicas de problemas inversos em convecção de calor”, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG., Brasil, 75pp.
- Holman, J. P., 1990, “ Heat Transfer”, Seventh Edition, McGraw-Hill, Inc, N.Y.
- Jarny, Y., Ozisik, M. N. & Bardon, J. P., 1991, “A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction”, Journal of heat and mass transfer. Vol. 34, No.11, pp. 2911-2919.
- Nakao, Shinsuke, Najita, Julie & Karasaki, Kenzi, 1999, “ Sensitivity study on hydraulic well testing inversion using *Simulated annealing*”, Ground Water Publishing Company, Vol. 37, Issue 5, pp. 736-747.
- Saramago, S. F. P., Assis, E. G., & Steffen, Valder., 1999, “ *Simulated annealing*: Some applications in mechanical systems optimization”, 20th Iberian Latin – American Congress on Computational Methods in Engineering (CD – ROM), São Paulo, Brasil.