

- MECÂNICA DOS FLUÍDOS

# **SIMULAÇÃO NUMÉRICA DAS FORÇAS DEVIDAS AO VENTO EM EDIFICAÇÕES: EFEITO DA SOMBRA AERODINÂMICA EM GEOMETRIAS BIDIMENSIONAIS**

**Roberto F. Bobenrieth Miserda**

Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, Campus Universitário Darcy Ribeiro, Asa Norte, 70910-900, Brasília, DF, Brasil, E-mail: roberto@enm.unb.br

**Alessandra F. de M. Falcão**

**Juliana Maria Duarte Mol**

Instituto Nacional de Meteorologia, Eixo Monumental, Via S1, 70610-400, Brasília, DF, Brasil

## **Resumo**

O objetivo deste trabalho é a adaptação e utilização de um código numérico para realizar uma análise preliminar do carregamento aerodinâmico sobre estruturas com geometrias simples bidimensionais. Para isto, são simuladas as grandes escalas da esteira turbulenta de edificações na presença de um escoamento uniforme, i.e., sem considerar o gradiente de velocidade vertical presente na camada limite atmosférica. O código numérico que serve de base foi desenvolvido por Bobenrieth (1996) e o mesmo resolve o campo de grandes escalas de escoamentos turbulentos utilizando um modelo compressível simplificado e específico para as condições de parede adiabática e baixo número de Mach. Neste trabalho são analisadas geometrias bidimensionais com e sem sombra aerodinâmica, com ênfase no efeito de forma para geometrias sem sombra aerodinâmica e os efeitos de distância relativa para geometrias com sombra aerodinâmica.

**Palavras-chaves:** Turbulência, Carregamento Dinâmico, Edificação, Sombra Aerodinâmica

## **1. INTRODUÇÃO**

A simulação numérica de fenômenos físicos não lineares e não permanentes, como é o caso do vento natural sobre edificações, é uma ferramenta poderosa de análise que permite resolver problemas de engenharia associados a estes tipos de fenômenos. O cálculo do carregamento aerodinâmico em edificações, para um determinado número finito de condições, pode ser obtido utilizando-se normas reguladoras. Estas normas são conservativas, isto é, fornecem carregamentos aerodinâmicos superiores aos reais, que oneram substancialmente o custo estrutural da edificação. Uma alternativa interessante para o cálculo do carregamento aerodinâmico é a utilização de recursos computacionais que, a um custo relativamente baixo, permitam determinar com maior precisão as forças da ação do vento natural sobre edificações. Neste caso é prioritário determinar as forças e momentos resultantes, já que estas resultantes aerodinâmicas são parâmetros fundamentais no projeto estrutural de edificações.

O objetivo deste trabalho consiste em realizar uma análise preliminar do carregamento aerodinâmico sobre estruturas com geometrias simples, concentrando a análise no efeito do parâmetro de forma, em edificações sobre as quais não existe o efeito de outra edificação,

bem como, nos efeitos da sombra aerodinâmica, isto é, os efeitos da esteira turbulenta gerada pela primeira edificação sobre a segunda. Neste último caso, o parâmetro estudado é a distância relativa entre as duas edificações.

É importante mencionar que é realizada uma análise preliminar do carregamento aerodinâmico sobre estruturas com geometrias simples, já que está fora do escopo deste trabalho a simulação computacional do vento natural, dada a complexidade teórica e prática deste tipo de simulação. Em conseqüência, a ênfase está sobre a aerodinâmica de corpos rombudos bidimensionais, onde os parâmetros de forma e distância relativa são determinantes.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

Neste trabalho é utilizado o modelo proposto por Bobenrieth (1996) para simular as grandes escalas presentes em escoamentos turbulentos para baixos números de Mach. Este modelo consiste em uma formulação compressível para as equações governantes, isto é, a densidade não é constante nas equações de continuidade, Navier-Stokes e energia. Para obter-se o campo de grandes escalas, este sistema de equações governantes é filtrado utilizando-se o “filtro de caixa” clássico (Silveira Neto, 1993). Este processo matemático de filtragem tem como subprodutos tensores e vetores submalha, e neste modelo, somente são utilizados o tensor e o vetor de Reynolds, provenientes da filtragem dos termos de transporte convectivo das equações de Navier-Stokes e energia, respectivamente. Utilizando-se a notação de Einstein, as equações governantes filtradas podem ser escritas como:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \underline{u}_i) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \underline{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \underline{u}_i \underline{u}_j) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\underline{\mu} + \underline{\mu}_t) \underline{s}_{ij}], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \bar{\rho} \left[ e + \left( \underline{u}_j^2 / 2 \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left[ e + \left( \underline{u}_j^2 / 2 \right) \right] \underline{u}_i \right\} = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p} \underline{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{\mu} \underline{s}_{ij} \underline{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} [(\underline{k} + \underline{k}_t / \gamma) (\partial \underline{T} / \partial x_i)], \end{aligned} \quad (3)$$

onde o tensor taxa de deformações é dado por

$$\underline{s}_{ij} = \left( \frac{\partial \underline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \underline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \underline{u}_k}{\partial x_k}. \quad (4)$$

Para permitir o fechamento deste sistema, é usado o modelo de turbulência submalha de Smagorinsky (1963):

$$\underline{\mu}_t = \bar{\rho} (C_s \Delta)^2 \sqrt{\underline{s}_{ij} \underline{s}_{ij}} \quad (5)$$

## 3. MÉTODO NUMÉRICO

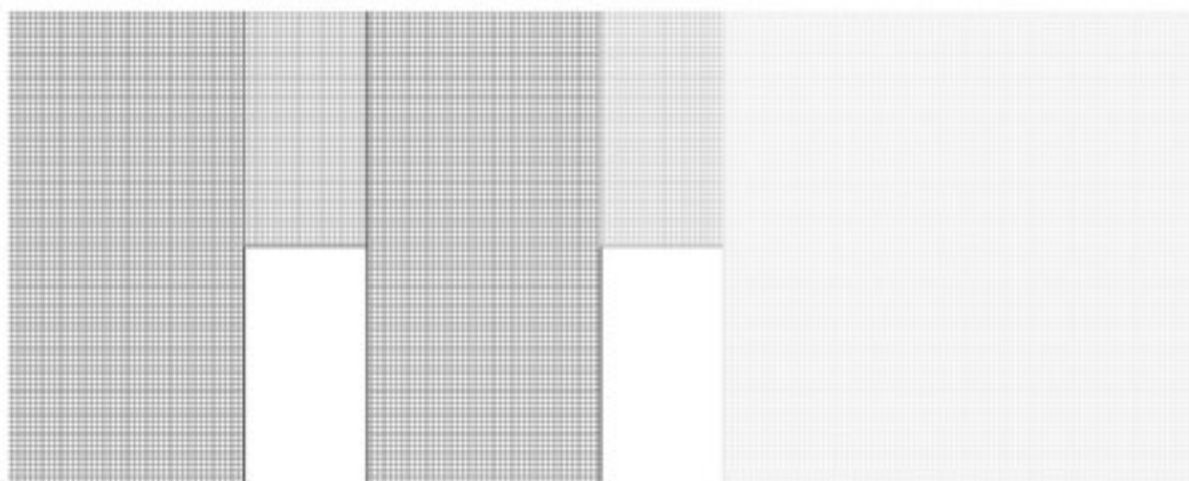
Para integrar numericamente este modelo matemático, é utilizado o método preditor-corretor de MacCormack na sua formulação de volumes finitos (Hirsch, 1990). Como trata-se de um método explícito, com um custo computacional baixo por iteração, é ideal para simular o campo de grandes escalas do escoamento turbulento nas geometrias estudadas, já que este campo é não permanente. Isto significa que é necessário realizar um número muito grande de iterações, para que as propriedades médias calculadas sejam estatisticamente representativas,

e conseqüentemente, para viabilizar este tipo de análise, é fundamental que o custo computacional de cada iteração seja baixo.

#### 4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Primeiramente, foi feita a geração das malhas computacionais para a edificação simplificada bidimensional para os casos com e sem sombra aerodinâmica. Devido à presença do prédio, onde não há o efeito de outra edificação, fez-se necessária a criação de três malhas computacionais, correspondentes às regiões anterior, superior e posterior ao prédio. Para a situação com sombra aerodinâmica, devido à presença de dois prédios, fez-se necessária a criação de cinco malhas computacionais, correspondentes às regiões anterior, superior e posterior ao primeiro prédio e superior e posterior ao segundo prédio (figura 1).

O código computacional que serviu como base foi desenvolvido para simular o escoamento em torno de várias geometrias bidimensionais e tridimensionais. Neste trabalho, foi necessário modificar este código para simular as geometrias estudadas. O código resultante foi escrito em Fortran 90 e executado em uma estação de trabalho DEC AlphaStation 333/500 que utiliza UNIX como sistema operacional. A visualização dos resultados foi feita utilizando-se o software TECPLOT 7.0.



**Figura 1:** Malha computacional típica para um caso com sombra aerodinâmica.

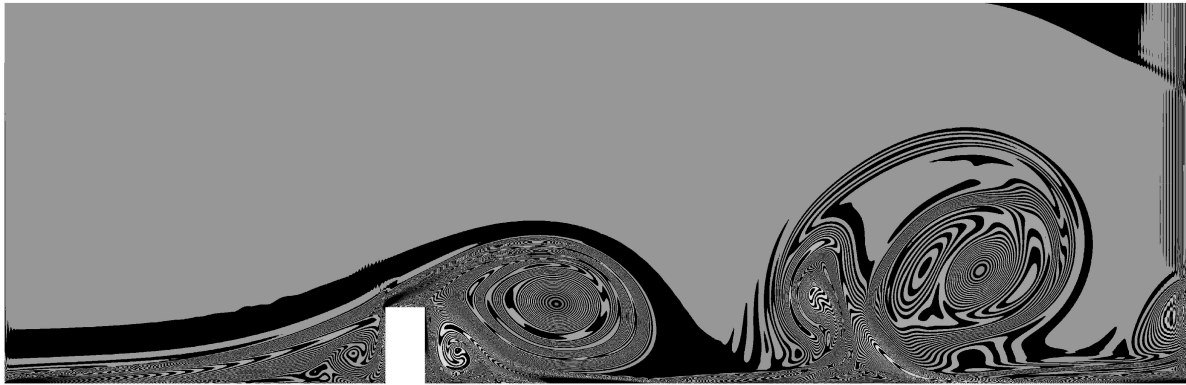
#### 5. RESULTADOS

Foram estudados quatro casos: dois sem sombra aerodinâmica e dois com sombra aerodinâmica. A velocidade do escoamento não perturbado utilizada para todos os casos foi de  $U_{\infty} = 50,0$  m/s, valor máximo para a velocidade básica do vento no Brasil (NBR 6123, 1987). O número de Reynolds, calculado em todos os casos com base na altura dos prédios na direção ortogonal ao escoamento não perturbado, foi de  $3,19 \times 10^8$ . A malha utilizada em todos os casos é regular e possui 50 elementos ao longo da altura ( $H = 100$  m) da estrutura.

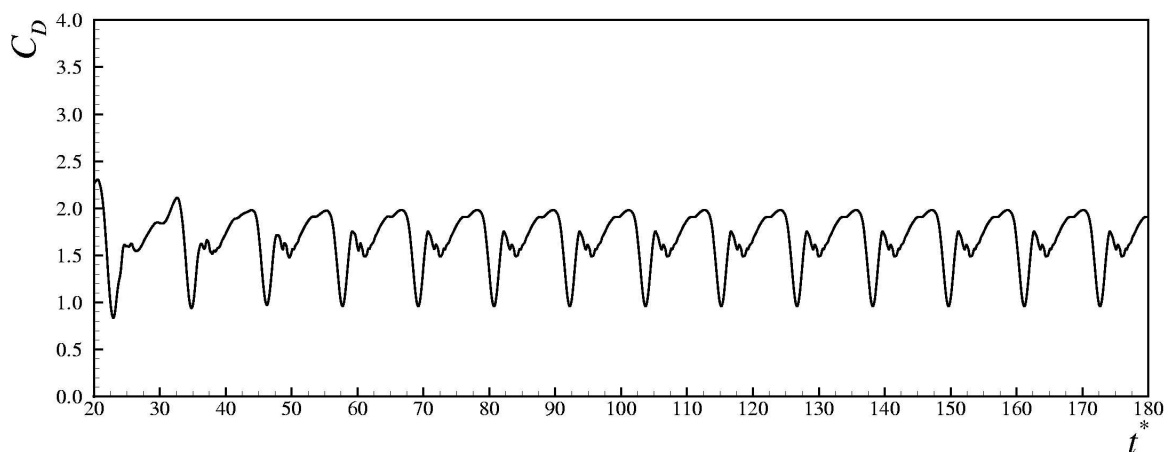
Nos casos sem sombra aerodinâmica foi estabelecida uma razão de forma, definida como a razão entre a altura e a largura da geometria retangular da estrutura, medidas na direção ortogonal e paralela ao escoamento não perturbado, respectivamente. Foram estudadas duas razões de forma, com valores 2,0 (figura 2) e 0,5 (figura 4). Estas figuras apresentam o campo de vorticidade instantâneo. Em particular, na figura 2, pode-se observar o crescimento de um grande vórtice junto à estrutura, assim como a evolução de outro pelo domínio, que também foi gerado pela estrutura em um tempo anterior. Na figura 4, junto ao canto superior direito da



estrutura, pode-se observar a separação da camada limite e o enrolamento da mesma na direção horária, indicando o nascimento de um novo vórtice na presença de outro já maduro que começa a deslocar-se. Comparando-se as duas figuras, pode-se observar o efeito da redução da razão de forma sobre a topologia dos grandes vórtices, provocando a transformação das linhas de isovorticidade concêntricas em onduladas, aumentando o tamanho dos vórtices gerados e diminuindo a intensidade do campo de vorticidade.



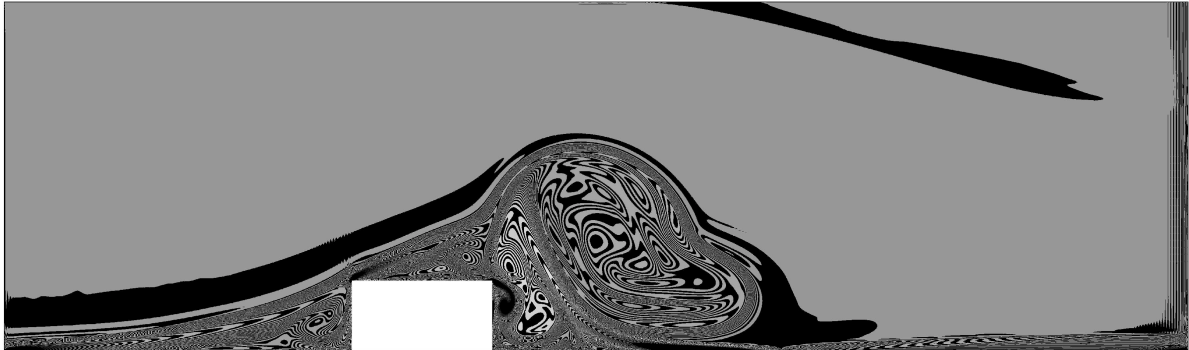
**Figura 2:** Campo de vorticidade adimensional para o tempo  $t = 89,0 H/U_{\infty}$ . Valor mínimo de  $-10$  e máximo de  $10$ . Razão de forma igual a  $2,0$ .



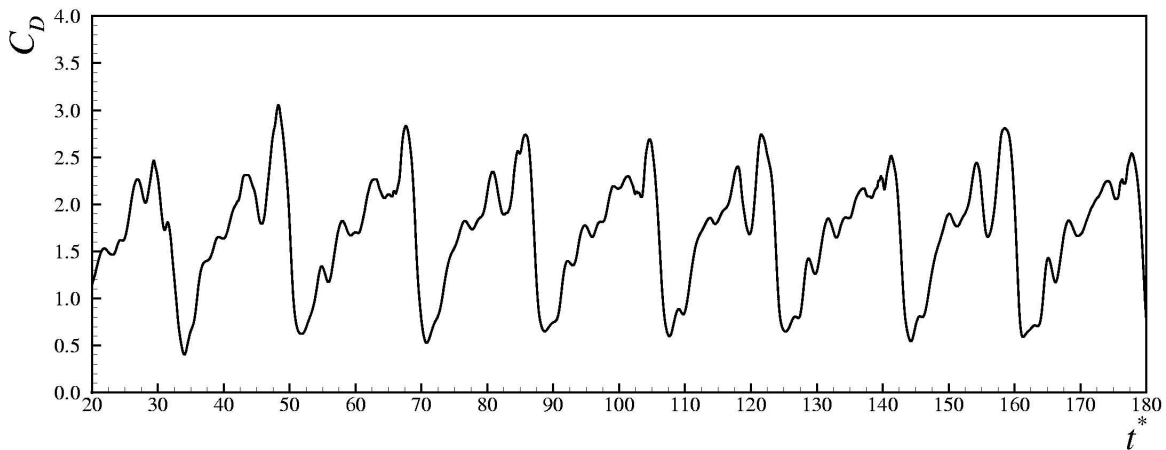
**Figura 3:** Distribuição temporal do coeficiente de arrasto. Razão de forma  $2,0$ . Coeficiente de arrasto médio de  $1,79$ .

Integrando-se numericamente a distribuição superficial de pressão e tensão superficial para o campo de velocidade médio, obtém-se que o coeficiente de arrasto médio é de  $1,79$  para a razão de forma igual a  $2,0$ , e de  $1,68$  para a razão de forma igual a  $0,5$ , correspondendo a um carregamento médio de  $26,83 \text{ ton/m}$  e  $25,18 \text{ ton/m}$ , respectivamente. A amplitude da variação do coeficiente de arrasto instantâneo é de  $1,06$  para o primeiro caso (figura 3), e de  $2,28$  para o segundo (figura 5), correspondendo a uma amplitude de carregamento instantâneo de  $15,89 \text{ ton/m}$  e  $34,18 \text{ ton/m}$ , respectivamente. Nota-se que, quanto menor a razão de forma, menores são os valores do coeficiente de arrasto médio e maiores são as amplitudes do coeficiente de arrasto. Isto ocorre pelo fato de que as estruturas vão se tornando mais complexas, e portanto, o ciclo de geração das grandes escalas e as oscilações dos valores de coeficiente de arrasto instantâneo aumentam, resultando em uma maior solicitação da edificação.

O tempo de CPU necessário para simular o primeiro caso (razão de forma igual a 2,0) foi de 97,5 horas e para o segundo (razão de forma igual a 0,5) foi de 105,0 horas. Uma análise das figuras 3 e 5, permite verificar que o tempo total de simulação é suficiente para estabelecer estatisticamente as médias temporais.

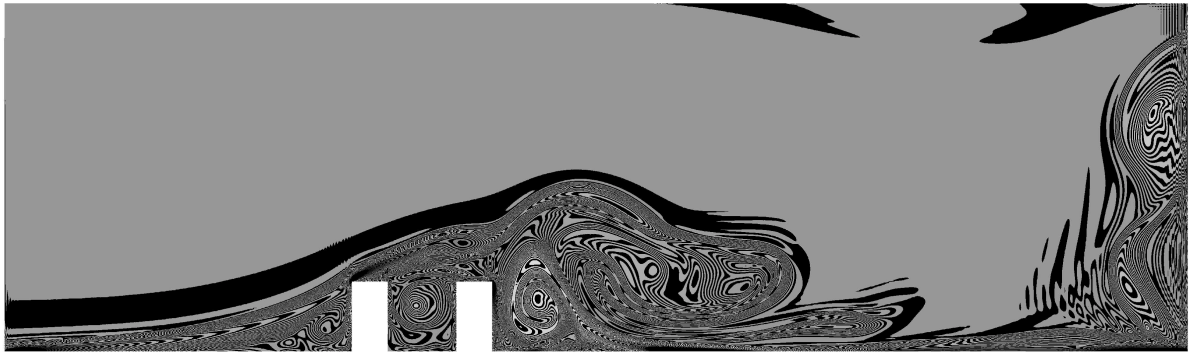


**Figura 4:** Campo de vorticidade adimensional para o tempo  $t = 50,0 H/U_\infty$ . Valor mínimo de -10 e máximo de 10. Razão de forma igual a 0,5.

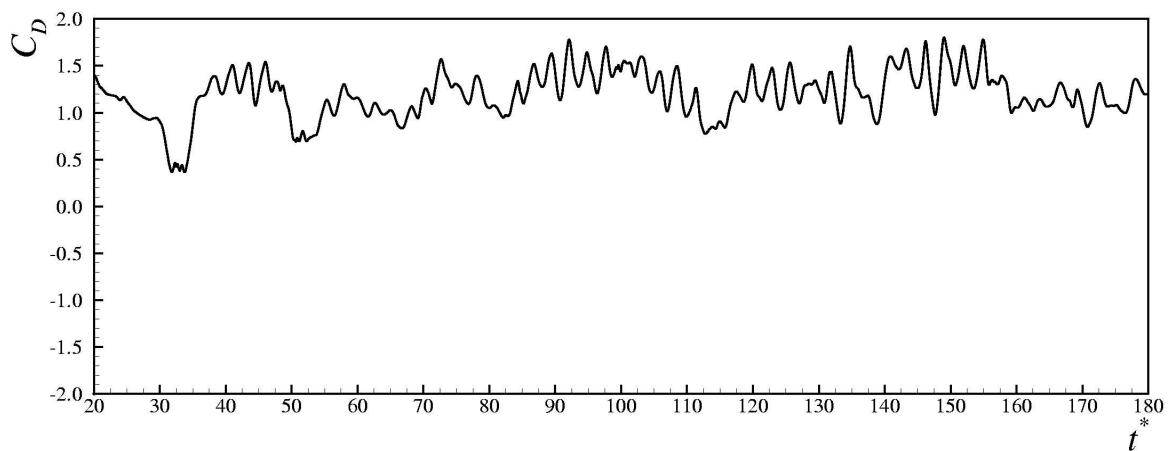


**Figura 5:** Distribuição temporal do coeficiente de arrasto. Razão de forma 0,5. Coeficiente de arrasto médio de 1,68.

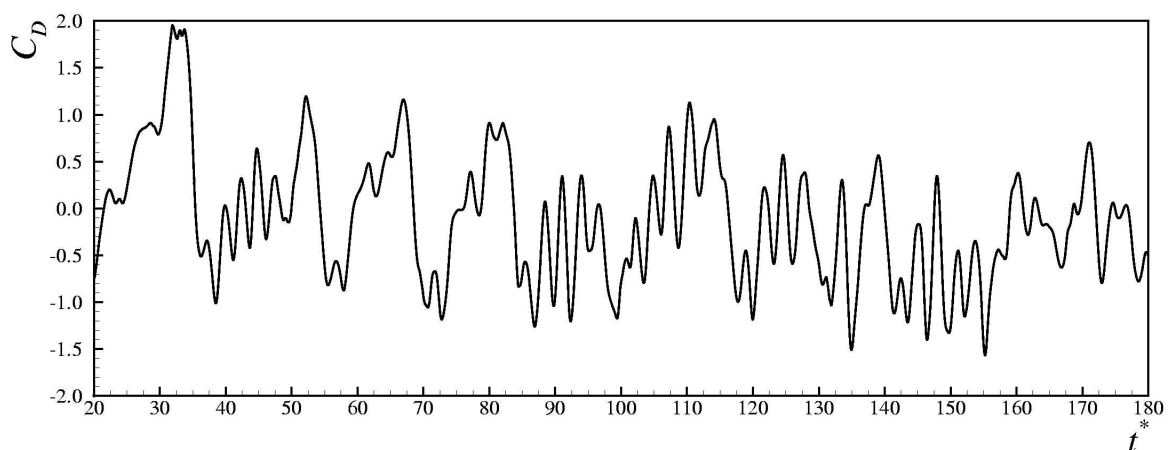
Para estudar o efeito da sombra aerodinâmica, foram selecionados dois parâmetros de distância relativa, definida neste trabalho como a razão entre a distância entre os dois prédios e a altura do primeiro. No primeiro caso, a distância relativa entre os dois prédios corresponde ao comprimento da altura do primeiro prédio (figura 6) e no segundo, corresponde a três vezes a altura do primeiro prédio (figura 9). A altura é a mesma para ambas as edificações. Para todas as estruturas dos casos com sombra aerodinâmica, a razão de forma utilizada foi igual a 2,0. Em ambos os casos, há a formação e convecção de vórtices com comprimentos característicos da ordem do tamanho dos prédios. Observa-se que, para o segundo caso, o comprimento dos vórtices é menor, proporcionando uma maior dissipação da energia cinética de turbulência e conseqüentemente, o ciclo de geração e movimentação dos vórtices pelo domínio computacional também é menor.



**Figura 6:** Campo de vorticidade adimensional para o tempo  $t = 65,0 H/U_{\infty}$ . Valor mínimo de  $-10$  e máximo de  $10$ . Distância entre os prédios igual à altura dos mesmos.



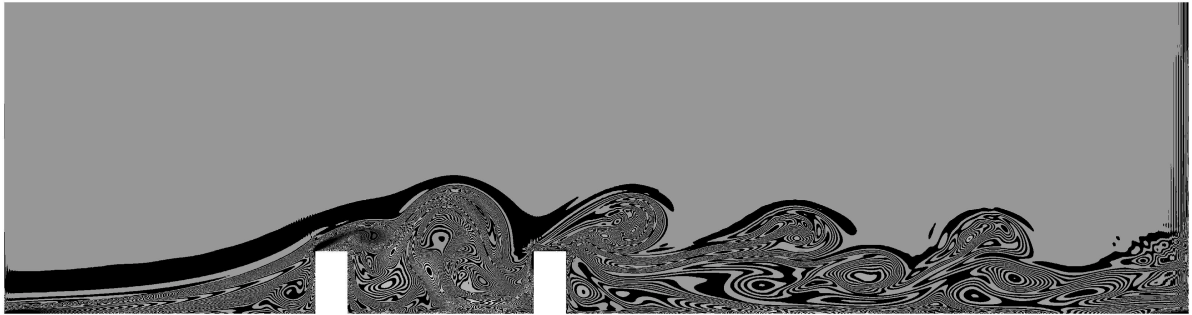
**Figura 7:** Distribuição temporal do coeficiente de arrasto para o primeiro prédio. Distância entre os prédios igual a altura dos mesmos.



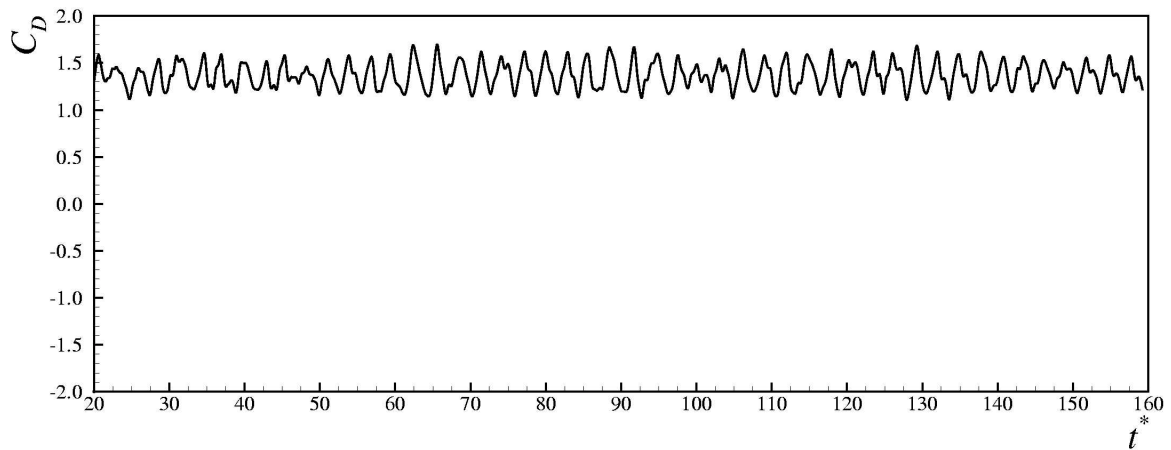
**Figura 8:** Distribuição temporal do coeficiente de arrasto para o segundo prédio. Distância entre os prédios igual a altura dos mesmos.

Para o caso onde a distância relativa entre os prédios é igual a  $1,0$ , o coeficiente de arrasto médio foi de  $1,34$  para o primeiro prédio, e de  $-2,0$  para o segundo. Estes valores correspondem a um carregamento médio de  $20,1$  ton/m e  $-3,0$  ton/m, respectivamente. A amplitude do coeficiente de arrasto instantâneo foi de  $1,13$  e  $2,58$  para a primeira e segunda

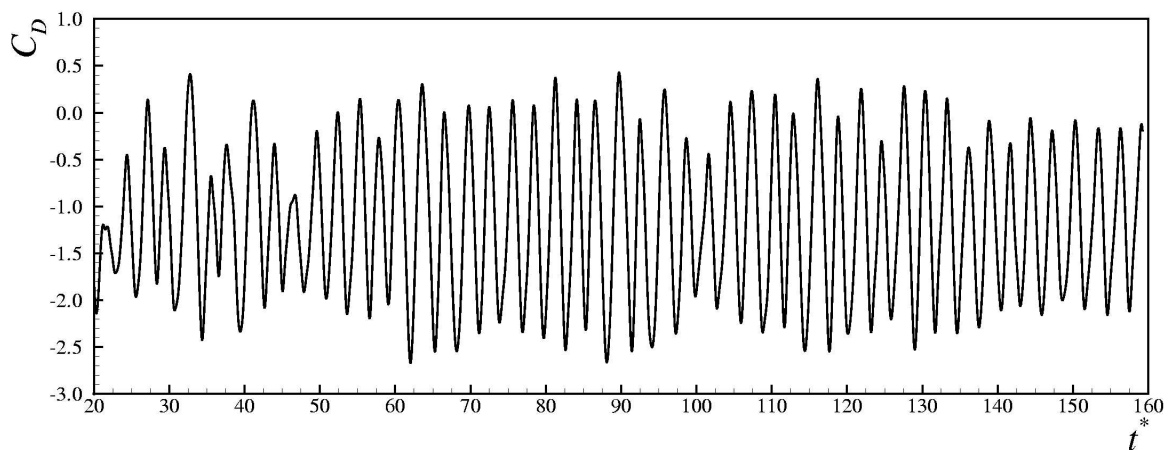
edificação, respectivamente, correspondendo a uma amplitude de carregamento instantâneo de 16,94 ton/m e 38,67 ton/m (figuras 7 e 8).



**Figura 9:** Campo de vorticidade adimensional para o tempo  $t = 87,0 H/U_\infty$ . Valor mínimo de  $-10$  e máximo de  $10$ . Distância entre os prédios igual a três vezes a altura dos mesmos.



**Figura 10:** Distribuição temporal do coeficiente de arrasto para o primeiro prédio. Distância entre os prédios igual a três vezes a altura dos mesmos.



**Figura 11:** Distribuição temporal do coeficiente de arrasto para o segundo prédio. Distância entre os prédios igual a três vezes a altura dos mesmos.

Para o caso em que a distância relativa é igual a 3,0, o coeficiente de arrasto médio foi de 1,57 para o primeiro prédio, e de  $-1,07$  para o segundo, o que corresponde a um

carregamento médio de 23,53 ton/m e -16,04 ton/m, respectivamente. A amplitude do coeficiente de arrasto foi de 0,61 e 3,11 para a primeira e segunda edificação, respectivamente (figuras 10 e 11), correspondendo a um carregamento instantâneo de 9,14 ton/m e 46,62 ton/m.

O tempo de CPU necessário para simular o primeiro caso (distância relativa igual a 1,0) foi de 119,0 horas e para o segundo (distância relativa igual a 3,0) foi de 94,0 horas. Uma análise das figuras 7, 8, 10 e 11 permite verificar que o tempo total de simulação é suficiente para estabelecer estatisticamente a médias temporais.

Comparando-se as figuras 3, 7 e 10, pode-se observar que o efeito da segunda estrutura sobre a primeira é de reduzir a sollicitação estrutural sobre a mesma. Isto se manifesta na redução do coeficiente de arrasto médio e na redução da amplitude do coeficiente de arrasto instantâneo. No caso do coeficiente de arrasto, esta redução diminui com a distância relativa, enquanto que, para a amplitude do coeficiente de arrasto instantâneo, esta redução aumenta com a distância relativa.

Comparando-se as figura 3, 8 e 11, pode observar que o efeito da primeira estrutura sobre a segunda é de aumentar significativamente a sollicitação estrutural sobre a mesma. Apesar de que em ambos os casos, o coeficiente da arrasto médio cai para valores negativos, este benefício é superado pelo aumento significativo na amplitude do coeficiente de arrasto instantâneo, caracterizando um carregamento dinâmico de grande amplitude e alta frequência. Comparando-se as figuras 8 e 11, pode-se observar que este aumento de amplitude e frequência é maior quando a distância relativa é menor.

## 6. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos mostram que, para estruturas bidimensionais simples, estar na sombra aerodinâmica de outra estrutura do mesmo tipo resulta em um aumento significativo da sollicitação estrutural. Isto acontece apesar da queda do coeficiente de arrasto médio, já que a amplitude e a frequência do coeficiente de arrasto instantâneo aumentam.

O carregamento aerodinâmico é cíclico tanto para edificações sem sombra como para edificações com sombra. Neste último caso, o coeficiente de arrasto médio se apresenta negativo ou quase nulo para a segunda edificação, mas são encontrados elevados valores da amplitude do coeficiente de arrasto instantâneo. Este fato, ressalta a importância do cálculo deste carregamento utilizando a simulação numérica de grandes escalas, já que um coeficiente de arrasto médio perto de zero pode corresponder a um carregamento dinâmico intenso, justificando o custo computacional deste tipo de simulação.

## 7. REFERÊNCIAS

- Bobenrieth, R. F. M. “Simulação Numérica de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos através de uma Formulação Compressível para Baixos Números de Mach”, Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, São Paulo, 1996.
- Hirsch, C. “Numerical Computation of Internal and External Flows”, John Wiley & Sons, New York, 1990.
- Silveira Neto, A., Grand, D., Métais, O., Lesieur, A. “A Numerical Investigation of the Coherent Vortices in Turbulence behind a Backward-Facing Step”, J. Fluid Mech., Vol.256, pp.1-25, 1993.
- Smagorinsky, J., “General Circulation Experiment with the Primitive Equations”, I. The Basic Experiment, Monthly Weather Review, Vol. 91, pp. 99-164, 1963.

# ESTUDO NUMÉRICO DE UM JATO COMPRESSÍVEL DE AR INCIDENTE SOBRE UMA PLACA PLANA AQUECIDA

**Jorge Wilson Pereira da Silva**

**Milton Biage**

**Paulo Lopes Silva Júnior**

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, CEP-38400-902, Av. João Naves de Ávila 2160, Campus Santa Mônica, Uberlândia, MG, Brasil.

E-mail: [jwps@mecanica.ufu.br](mailto:jwps@mecanica.ufu.br)

## Resumo

Neste trabalho estudou-se os efeitos de um jato de ar incidente sobre uma placa plana aquecida, utilizando-se a técnica de elementos espectrais. Jatos são usados em processos de aquecimento, resfriamento ou secagem de superfícies, tais como: secagem de papel; têmpera de vidro; aquecimento (resfriamento) de metais e resfriamento de hélices de turbinas e componentes eletrônicos. O escoamento do jato foi considerado bidimensional, turbulento e compressível. Desenvolveu-se um programa computacional capaz de descrever o comportamento qualitativo e quantitativo das estruturas do escoamento, em função das condições de aquecimento da placa e da velocidade de saída do jato. Os resultados apresentados descrevem o comportamento da distribuição do número de Nusselt local na placa aquecida. Adicionalmente, realizou-se estudos sobre as estruturas que predominam no escoamento. Constatou-se que escoamentos com grandes valores de Reynolds e de Mach, as estruturas predominantes são de grandes escalas, e completamente coerentes mesmo para o caso em que o fluido encontra-se confinado.

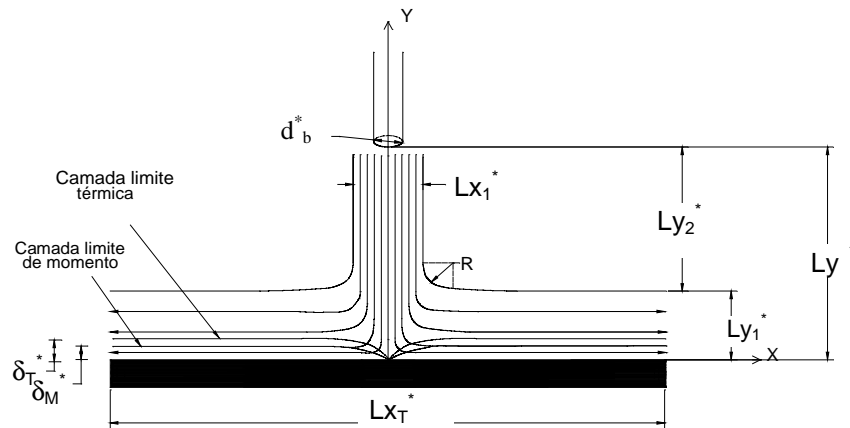
**Palavras-chave:** Escoamentos de jatos, Estruturas do escoamento, Técnica dos elementos espectrais.

## 1. INTRODUÇÃO

Os trabalhos publicados recentemente indicam um crescente interesse no estudo de jatos incidentes. Nas pesquisas apresentadas, na literatura, têm-se preocupado em analisar as características de transferência de calor e massa, tanto em um conjunto de jatos incidentes como em único jato, além de analisar a influência da forma com que o fluido utilizado é descartado para o ambiente.

Uma revisão sobre escoamentos de jatos incidentes revela a existência de um grande número de trabalhos que investigam os vários aspectos envolvidos na mudança da estrutura do escoamento. Os resultados destes trabalhos estão resumidos nos artigos publicados por Martin (1977) e no trabalho de Downs e James (1987). Os trabalhos citados incluem descrições dos diversos parâmetros que influenciam a troca de calor ou de massa em jatos incidentes. Estes parâmetros podem ser classificados em geométricos e não geométricos. Os parâmetros geométricos mais importantes são: o diâmetro do bocal do jato ( $d_b^*$ ), a distância entre o bocal do jato e a placa aquecida ( $L_{YT}^*$ , “*spacing*”), a forma da seção transversal do jato (cilíndrica, retangular, oval), o ângulo de incidência do jato, a curvatura da

superfície da placa, a rugosidade da superfície, o comprimento da placa ( $Ly_T^*$ ) e a espessura da região de expansão do jato ( $Ly_1$ ). E os parâmetros não geométricos pode citar: o número de Reynolds “Eq.1”, a temperatura da placa ( $\theta_p^*$ ) a temperatura de entrada do fluido ( $\theta_p^*$ ) e a intensidade de turbulência inserida no escoamento. Na “Fig. 1” mostra-se alguns dos parâmetros geométricos mais importantes no estudo de jatos incidentes sobre placas aquecidas, nesta figura  $\delta_T$  e  $\delta_M$  representam as espessuras das camadas limites térmica e de momento, respectivamente.



**Figura 1** - Diagrama esquemático de jatos incidentes (Detalhes geométricos).

Stevens e Webb (1991) estudaram a troca de calor em jatos líquidos, analisando os efeitos causados pela variação da razão entre o diâmetro do jato e a distância do bocal do jato à placa sólida e a razão entre a distância radial do ponto de estagnação e o diâmetro do jato, estabelecendo-se um conjunto de correlações entre o número de Nusselt e estes parâmetros geométricos. Neste trabalho, percebeu-se que o número de Nusselt varia proporcionalmente a  $Re^{1/3}$ , onde  $Re$  é o número de Reynolds baseado no diâmetro do jato definido na equação que se segue:

$$Re = \frac{U_{\infty}^* \cdot d_b^*}{\nu} \quad (1)$$

onde  $U_{\infty}^*$  é a velocidade da corrente livre,  $d_b^*$  é o diâmetro do bocal do jato e  $\nu$  é a viscosidade cinemática.

Além do mais, na região de  $0 \leq x/d_b^* \leq 0,75$ , o coeficiente de transferência de calor local manteve-se constante. A variação da distância do bocal à placa pouco interferiu no coeficiente de troca de calor. Percebeu-se, também, que o diâmetro do bocal tem influência sobre o coeficiente de transferência de calor e que esta dependência foi estabelecida em termos do gradiente da velocidade da corrente livre, e nestes casos, o termo  $U_{\infty}^*/d_b^*$  foi introduzido na correlação.

Martin (1977) em seu extenso trabalho de revisão também menciona, sem apresentar dados numéricos, que a presença de uma componente circunferencial na velocidade de um jato incidente não produz alterações significativas na troca de calor ou massa. No entanto, Ward e Mahmood (1982), apresentam conclusões opostas às de Martin (1977), indicando que a presença do escoamento espiralado reduz, significativamente, a troca de calor ou massa. Este trabalho é limitado, pois, o mesmo apresenta resultados de troca de calor local para apenas um valor do número de Reynolds do jato. Adicionalmente, neste trabalho é apresentada uma correlação para o número de Nusselt médio em função da distância adimensional do jato à placa, do número de Prandtl, do número de Reynolds e da intensidade do escoamento espiralado. A precisão desta correlação deve ser verificada, visto que ela foi construída com dados de apenas dois valores do número de Reynolds.

Realizou-se ao longo desta seção a apresentação de alguns problemas típicos de jatos incidentes apresentados na literatura, os quais apresentam fortes relações com problemas tecnológicos. Contudo, pretendeu-se ao longo desta descrição evidenciar os vários fatores que interferem na estrutura do escoamento e principalmente, na caracterização da troca de calor entre a placa e o escoamento. Esta revisão é bastante limitada, contudo, ela permitirá situar o leitor dentro do contexto da pesquisa realizada.

O presente trabalho teve como objetivo principal estudar os efeitos de um jato incidente sobre uma placa plana aquecida, utilizando a técnica de elementos espectrais em um problema que envolve coordenadas curvilíneas.

Na etapa atual da pesquisa serão estudadas as estruturas dos escoamentos em função da temperatura da placa sólida, em função do número de Reynolds (e Mach). De forma semelhante será observado o comportamento dos parâmetros de troca de calor em função, também, da temperatura da placa sólida e do número de Reynolds (e Mach).

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Como observado na seção anterior, trata-se, neste trabalho, do estudo das características de transferência de calor em um jato de ar que incide, a alta velocidade, sobre uma placa aquecida. Para tal, deve-se proceder uma série de cálculos através das equações de conservação (massa, momento e energia) e equações constitutivas que são acopladas pelas condições de contorno e iniciais, além das equações de interface para cada balanço. Contudo, para que se proceda os cálculos desejados, faz-se necessária a montagem prévia de uma malha estruturada sobre o domínio em questão. Esta discretização estruturada caracteriza-se pelo fato dos volumes elementares serem formados por linhas (ou superfícies) curvilíneas. Então é necessário, dependendo da geometria do domínio de cálculo, gerar um sistema de coordenadas curvilíneas que se adapte a esta geometria. A primeira questão que surge é quanto à natureza do sistema de coordenadas: ortogonal ou não-ortogonal. A grande vantagem do sistema ortogonal está na aplicação das condições de contornos que envolvem as derivadas normais das funções na fronteira. Neste caso, a derivada normal da função está relacionada com apenas uma das coordenadas, simplificando consideravelmente o processo de cálculo.

Um outro problema está no fato que as equações de conservação estão definidas em coordenadas cartesianas que se aplicadas no sistema de coordenadas curvilíneas podem acarretar erros de aproximação a níveis inaceitáveis. Além do mais, o pacote numérico que resolve as equações é baseado no método dos elementos espectrais da colocação. Esta técnica exige a determinação prévia de pontos de colocação na malha, e também, que as superfícies que determinam as interfaces dos elementos sejam planas.

Por isto, faz-se necessário trabalhar com um domínio físico (x,y) e outro computacional ( $\xi,\eta$ ), sendo o primeiro um sistema de coordenadas curvilíneas e o segundo um sistema de coordenadas cartesianas, sendo que, o último relaciona-se com o primeiro, através de equações elípticas de transformação de coordenadas Maliska (1995).

Neste trabalho utilizou-se equações de conservação (massa, momento e energia total) na forma vetorial, adimensional e bidimensional (x,y) e ainda desprezou-se a influência das forças de campo.

Os grupos adimensionais usados para a adimensionalização estão apresentados abaixo, onde a presença do sobre-índice \* mostra a grandeza dimensional e a ausência deste sobre-índice mostra as grandezas adimensionais:

$$x = \frac{x^*}{Lx_T^*/2}; y = \frac{y^*}{Ly_T^*/2}; d_b = \frac{d_b^*}{Lx_T^*/2}; v_{xk} = \frac{v_{xk}^*}{U_\infty^*}; v_{yk} = \frac{v_{yk}^*}{U_\infty^*} \quad (2,3,4,5,6)$$

$$t = \frac{t^* \cdot U_\infty^*}{Lx_T^*/2} E_k = \frac{E_k^*}{U_\infty^{*2}}; q_k = \frac{q_k^* \cdot cp_k^* \cdot Lx_T^*}{k_\infty^* \cdot U_\infty^{*2}}; h_k = \frac{h_k^*}{k_\infty^* / Lx_T^*} \quad (7,8,9,10)$$



$$\rho_k = \frac{\rho_k^*}{\rho_\infty^*}; k_k = \frac{k_k^*}{k_\infty^*}; \mu_k = \frac{\mu_k^*}{\mu_\infty^*}; P_k = \frac{P_k^*}{\rho_\infty^* \cdot U_\infty^{*2}}; \theta_k = \frac{\theta_k^*}{\theta_\infty^*} \quad (11,12,13,14,15)$$

## 2.1. Equações Constitutivas

Para obter o fechamento do sistema de equações, faz-se necessário estabelecer uma relação entre as variáveis termodinâmicas  $P_k$  (campo de pressão),  $\rho_k$  (densidade do fluido),  $\theta_k$  (temperatura) e  $E_k$  (energia total=energia cinética +energia interna), assim como estabelecer uma relação entre os parâmetros de transporte  $\mu_k$  (viscosidade do fluido) e  $k_k$  (condutividade térmica do fluido), em função da temperatura. Portanto, o campo de pressão foi calculado através da equação de estado para gases perfeitos, conforme demonstrado em Silva Júnior (1998). Para calcular as propriedades de transporte em função da temperatura ao longo do escoamento, utilizou-se a fórmula de Sutherland para a viscosidade dinâmica e para a condutividade térmica, onde as constantes  $c_1, c_2, s_1$  e  $s_2$  são dadas em (White, 1988):

$$\mu_k = c_1 \frac{\theta_k^{3/2}}{\theta_k + c_2} \text{ e } k_k = s_1 \frac{\theta_k^{3/2}}{\theta_k + s_2} \quad (16,17)$$

O sub-índice  $k$  refere-se ao elemento de cálculo para uma determinada propriedade.

## 2.2. Condições de Contorno e Iniciais

Para realizar os cálculos sobre as equações de conservação acima citadas, deve-se definir as condições de contorno e condições iniciais que completam as informações necessárias para o cálculo das equações de balanço acima citadas.

Portanto, as seguintes condições de contorno serão aplicadas, as quais são adimensionalizadas utilizando os grupos anteriormente especificados e apresentadas na seguinte ordem: na entrada do bocal, nas bordas externas do escoamento e na interface placa-jato.

Na região de entrada do jato definiu-se um perfil parabólico para o vetor velocidade, dado pela equação adimensional de um escoamento completamente desenvolvido, denominado de Hagen-Poiseuille (White 1988):

$$\bar{V}_k = \frac{Re^*}{2 \cdot d_b^*} \frac{(Lx_T^*)^2}{Ly_T^*} \cdot \frac{-dP_k/dy}{4} \cdot (r_b^2 - x^2) \quad (18)$$

onde  $r_b$  é o raio do bocal ( $d_b/2$ ) adimensionalizado por  $Lx_T^*/2$ .

Considera-se, também, nesta região um perfil uniforme para a temperatura e a pressão do tipo  $\theta_k^* = \theta_\infty^*$  e  $P_k^* = P_\infty^*$ , respectivamente. Similarmente, adota-se as propriedades físicas uniformes para essa região:  $k_k^* = k_\infty^*$ ,  $cp_k^* = cp_\infty^*$  e  $\mu_k^* = \mu_\infty^*$ . Contudo, a densidade  $\rho_\infty^*$  é determinada pela equação de estado para gases perfeitos explicitando agora a densidade.

Nas regiões envolvendo as bordas externas do escoamento assume-se que todas as propriedades são mantidas constantes.

Na região de interface entre a placa e o jato assume-se que as componentes do vetor velocidade são nulas e que o campo de pressão é ajustado iterativamente no tempo. Contudo, o campo de temperatura é definido como condição de temperatura constante sobre toda a placa.

As condições iniciais usadas serão agora expostas as quais referem-se ao campo de pressão, ao campo de temperatura e para o campo de velocidade.

Campo de pressão foi considerado constante em todo o domínio. A temperatura na placa foi considerada constante e impõe-se numa região muito próxima da placa uma diminuição exponencial do perfil de temperatura e ainda, nas demais regiões adotou-se temperatura de entrada do jato. No que diz respeito as componentes da velocidade fez-se a componente horizontal (u) igual a zero e a componente vertical (v) igual ao valor da velocidade de entrada do jato.

### 2.3. Procedimentos de Cálculo

Para a solução da maioria dos problemas de dinâmica dos fluidos é necessária a resolução de um sistema de equações diferenciais parciais não lineares. A resolução deste sistema só se torna possível através de métodos numéricos apropriados. Alguns aspectos importantes sobre os métodos numéricos mais utilizados na literatura foram discutidos em Fernandes (1998) e Silva Júnior (1998). Para escolher uma das técnicas existentes, deve-se levar em consideração aspectos físicos importantes do problema e as limitações das máquinas de cálculo.

Neste trabalho usou-se o método espectral para a solução de equações diferenciais parciais, onde apenas a discretização espacial é espectral. Sendo assim, para se obter uma solução estacionária estável, separa-se completamente as discretizações no tempo e no espaço. Primeiro discretiza-se os termos espaciais, obtendo-se desta forma uma equação diferencial ordinária no tempo.

O método numérico utilizado para discretização espacial das equações é o método de elementos espectrais da colocação, com polinômios de Chebyshev, cujos coeficientes no espaço transformado são calculados através da técnica de multiplicação de matrizes. O método de Runge-Kutta de ordem 4 é aplicado para a discretização temporal das equações de conservação.

## 3. ANÁLISE DOS RESULTADOS

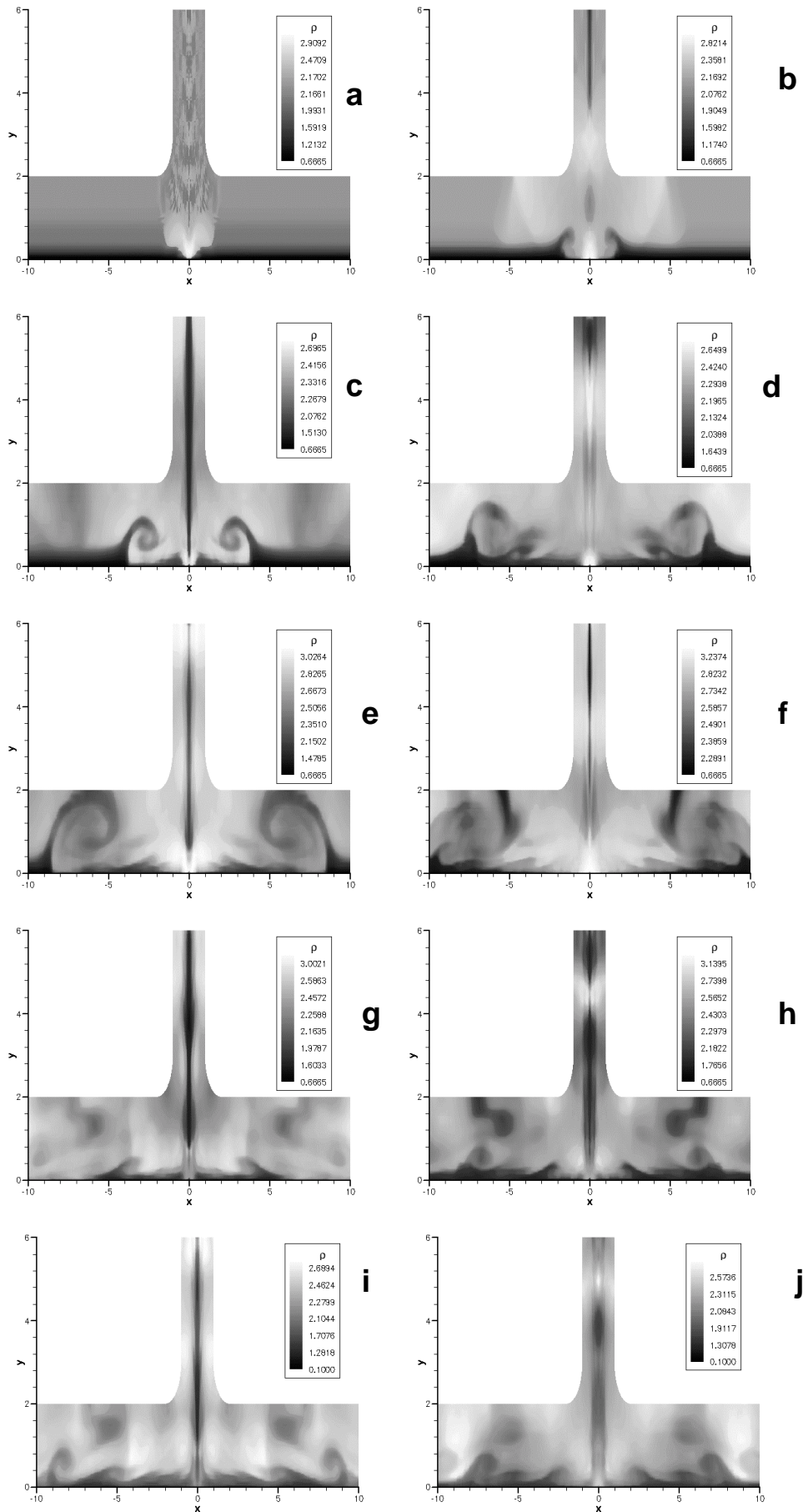
### 3.1. Análise das Estruturas dos Jatos Obtidos na Simulação Numérica

Na “Fig.2” está mostrada a evolução do campo de densidade onde adotou-se os seguintes parâmetros:  $Re=3,1744 \times 10^5$ ,  $M=1,1521$ ,  $\theta_p=1000$  K e  $\theta_\infty=300$  K, onde  $Re$  é o número de Reynolds e  $M$  é o número de Mach dado pelas “Eqs. (19) e (20)”, respectivamente:

$$Re^* = \frac{\rho_\infty^* \cdot U_\infty^* \cdot d_b^*}{\mu_\infty^*}; M = \frac{U_\infty^*}{\sqrt{\gamma_\infty^* R \theta_\infty^*}} \quad (19,20)$$

onde  $U_\infty^*$  é a velocidade de entrada do jato,  $\gamma_\infty^*$  é o coeficiente de expansão térmica,  $R$  é a constante particular dos gases e  $\theta_\infty^*$  é a temperatura de entrada do jato e  $\mu_\infty^*$  é a viscosidade do ar à  $\theta_\infty^*$ .

Na “Fig. 2” observa-se nos gráficos (a) à (d) uma região de baixa densidade ao longo da placa aquecida e uma distribuição de densidade com valores relativamente maiores, nas regiões distantes da placa e no duto vertical. Este fato pode ser explicado pela alta temperatura da placa aquecida que impõe um alto gradiente negativo de densidade nas proximidades da mesma, dando origem à formação nítida de vórtices que expandem-se equilateralmente. A formação destes vórtices deve-se, basicamente, a dois fatores: o choque do jato com a placa que causa uma forte desaceleração do escoamento nesta região e a intensa troca de calor com a placa aquecida. Portanto, observa-se nitidamente na “Fig. 2” que o campo de densidade evolui ao longo do tempo, formando, inicialmente, uma grande estrutura coerente que se propaga em direção à saída do domínio e saindo no gráfico (f) da “Fig.2”. Este vórtice ocupa, praticamente, toda a região de escape do domínio do escoamento, o qual, claramente, propaga-se ao longo do canal de saída, até ocorrer a sua dissipação na saída do domínio.



**Figura 2** - Evolução do campo de densidade ( $Re=3,1744 \times 10^5$ ,  $M=1,1521$ ,  $\theta_p=1000K$ ,  $\theta_\infty=300 K$ ). Onde (a)  $t^*=0,0006s$ , (b)  $t^*=0,0031s$ , (c)  $t^*=0,0094s$ , (d)  $t^*=0,0188s$ , (e)  $t^*=0,0312s$ , (f)  $t^*=0,0375s$ , (g)  $t^*=0,0625s$ , (h)  $t^*=0,0688s$ , (i)  $t^*=0,0875s$  e (j)  $t^*=0,1188s$ .

Contudo, evidencia-se na “Fig. 2” o transporte de estruturas complexas periódicas formadas na região de choque, como pode ser nitidamente observado no gráficos de (h) à (j). Observa-se então, que à medida com que o escoamento tende a um regime, para as condições simuladas, forma-se uma região próxima da placa em que evidencia-se a formação de uma camada de mistura espacial.

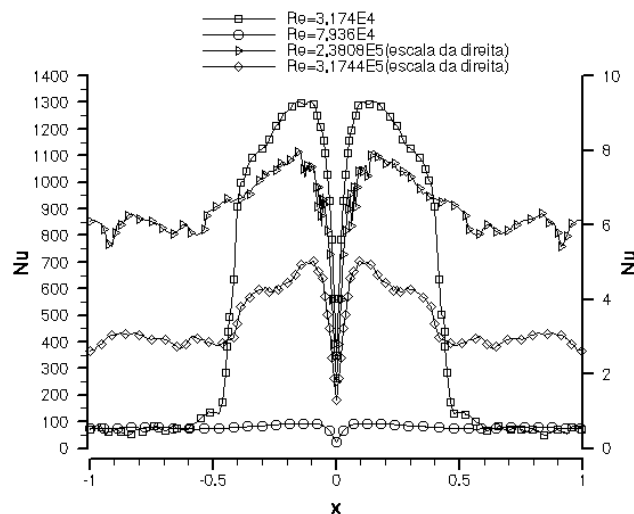
### 3.2. Análise do Número de Nusselt Local

A análise para os perfis do número de Nusselt será feita com base em dois parâmetros: o número de Reynolds e a temperatura da placa refletora. Nas “Figs 3 e 4” trata-se dos perfis do número de Nusselt para a variação do número de Reynolds e da temperatura da placa, respectivamente.

De forma geral o que se observou foi uma diminuição dos patamares dos perfis do número de Nusselt ao se aumentar o número de Reynolds. A “Eq. (21)” mostra a equação para o número de Nusselt local usada no problema.

$$Nu = \frac{h_k \cdot x}{k_k} = \frac{\left(\frac{\partial \theta_k}{\partial y}\right) \cdot x}{\theta_p - 1} \quad (21)$$

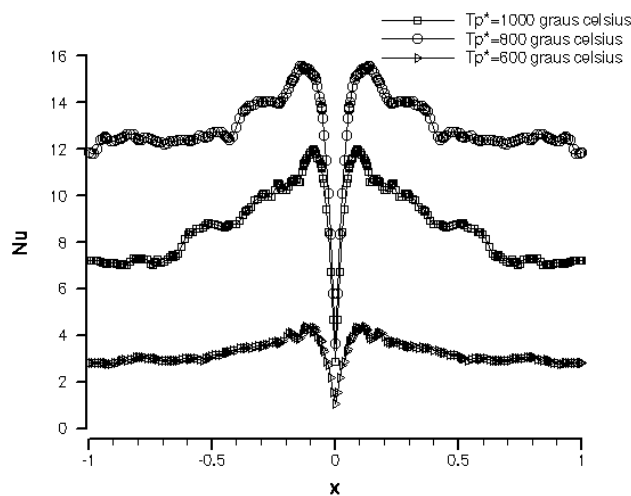
Conforme observado na “Fig. 3” os patamares dos perfis do número de Nusselt, de forma geral, diminui com o aumento do número de Reynolds. Este fato pode ser explicado fazendo-se uma análise sobre a condutividade térmica e o coeficiente de transferência de calor por convecção. Observa-se que ao aumentar o número de Reynolds, maiores componentes de velocidade do escoamento na região da camada limite são obtidas e com isso, é realizado um maior transporte de energia térmica da placa para o fluido, a qual é rapidamente transportada para o escoamento externo, na região central do canal de saída do jato. Este aspecto do transporte de energia faz com que ocorra uma maior homogeneização de energia térmica no escoamento do jato no canal de saída deste, e com isso maiores temperaturas serão atingidas pelo fluido nas regiões da camada limite e, principalmente, nas zonas bem próximas da placa sólida, caracterizando um pronunciamento de aumento da convecção nesta região. Por outro lado, com o aumento da temperatura nas proximidades da placa sólida, também, ocorre um aumento na condutividade térmica do fluido nesta zona. Portanto, pode-se afirmar que com o aumento no número de Reynolds ocorre um aumento no coeficiente de transferência de calor por convecção e um aumento na condutividade térmica do fluido nas proximidades da placa sólida.



**Figura 3** - Evolução do número de Nusselt em função do número de Reynolds para o tempo dimensional 0,125s.

Estes dois fatores contribuem inversamente sobre os valores assumidos pelo número de Nusselt, ou seja, o aumento do coeficiente de transferência de calor por convecção faz com o número de Nusselt aumente e um aumento do coeficiente de condutividade térmica do fluido faz com o número de Nusselt diminua, conforme mostrado pela “Eq.(21)”. Portanto, o que deve ser observado é qual destes fatores interferem de forma mais intensa no número de Nusselt, quando o número de Reynolds aumenta. Neste trabalho como as temperaturas na placa aquecida são relativamente altas (1000 K) acarretando nas proximidades da placa um aumento no valor da condutividade térmica muito maior do que o aumento no coeficiente de convecção.

Uma segunda análise pode ser feita na que diz respeito à influência da temperatura da placa sobre o comportamento do número de Nusselt local. Este aspecto pode ser observado na “Fig. 4”, neste gráfico mostra-se os resultados obtidos na simulação de 3 casos distintos onde as temperaturas da placa, para cada caso, foram de 600, 800 e 1000 para o tempo de 0,1667s. A influência do aumento da temperatura da placa sólida aquecida atua no sentido de aumentar intensidade do número de Nusselt médio, pois a diminuição da temperatura da placa faz com que ocorra uma diminuição da temperatura do fluido na região da camada limite, consequentemente, diminuindo a condutividade térmica do fluido. Por outro lado, a diminuição da temperatura da placa sólida diminui a energia que é absorvida pelo fluido, induzindo menores temperaturas no fluido nas proximidades da placa, mas, também, induzindo menores gradientes de temperatura, nas proximidades da placa. Assim, ao observar a “Eq. 21”, pode-se conjecturar que nas proximidades da placa ocorre uma diminuição no coeficiente de transferência de calor por convecção, o qual, em contrapartida, deverá interferir com maior intensidade no número de Nusselt que o aumento causado neste pela condutividade térmica do fluido.



**Figura 4** - Perfil do Número de Nusselt para diferentes temperaturas da placa,  $t^* = 0,1667$  segundos, para  $Re = 2,3808 \times 10^5$  e  $M = 0,86411$ .

## REFERÊNCIAS

- Downs, S. J., and James, E. H., 1987, “Jet Impingement Heat Transfer-A Literature Survey”, ASME Paper N<sup>o</sup>. 87-HT-35.
- Fernandes, M., 1998, “Simulação Numérica de Camadas de Mistura em Desenvolvimento Temporal e Espacial, Usando a Técnica Espectral da Colocação”. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia.
- Liu, X., Gabour, L. A . e Lienhard, J. H., 1993, “Stagnation-Point Heat Transfer During Impingement of Laminar Liquid Jets: Analysis Including Surface Tension”, ASME J. Heat Transfer, pp. 99-105.

- Maliska, C. R., 1995, “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional”. Livros técnicos e científicos.
- Martin, H., 1977, “Heat and Mass Transfer Between Impinging Gas Jets and Solid Surfaces”, in: *Advances of Heat Transfer*, pp. 1-60.
- Silva Júnior, P. L., “Simulação Numérica de Escoamentos Turbulentos Compressíveis 1-D e 2-D, utilizando a técnica de Elementos Espectrais”. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, 1998.
- Slayzak, S. J., Viskanta, R., and Incropera, F. P., 1994a, “Effects of Interaction Between Adjoining Rows of Circular, Free-Surfaces Jets on Local Heat Transfer from the Impingement Surface”, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 116, pp. 88-95.
- Stevens, J. and Webb, B. W., 1991, “Local Heat Transfer Coefficients Under an Axisymmetric, Single-Phase Liquid Jet”, *Journal of Heat Transfer*, Vol 113, pp. 71-78.
- Ward, J. and Mahmood, M., 1982, “Heat Transfer From a Turbulent Swirling Jet”, *Proc. 7<sup>th</sup> Int. Heat Mass Transfers Conference*, pp. 401-408.
- White, F. M. “Viscous Fluid Flow”. McGraw-Hill, 1974
- Zumbrennen, D. A., Aziz, M., 1993, “Convective Heat Transfer Enhancement Due to Intermittence in na Impinging Jet ” , *Journal of Heat Transfer*, Vol. 115, pp 91-98.

# **AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF A RECOVERABLE ORBITAL PLATFORM AT HIGH SPEED FLOWS**

**Algacyr Morgenstern Jr.**

**Paulo Moraes Jr.**

*Divisão de Sistemas Espaciais - CTA/Instituto de Aeronáutica e Espaço*

*CEP 12228-904 São José dos Campos, SP, Brasil - E-mail: algacyr@iae.cta.br and  
moraes@iae.cta.br*

## **Abstract**

The main aerodynamic parameters involved in the design of a capsule returning from space are force coefficients, moment coefficients, and their variation with Mach number and angle of attack. The aim of the present study is to evaluate these parameters for the configuration of the Recoverable Orbital Platform SARA under development at IAE-CTA, with better accuracy than possible with the use of engineering methods. The three-dimensional, viscous governing equations are solved numerically by employing a LU-SGS algorithm based on a finite volume discretization. Results are obtained for angles of attack ranging from zero to 10 degrees, and Mach numbers ranging from 2 to 6. The results from the numerical computations are compared with calculations applying engineering methods for verification purposes. Validation is further obtained by comparing the bow shock wave detachment position, and shock shape numerically computed with the results of calculations using semi-empirical formulas.

**Keywords:** aerodynamic coefficients; supersonic flow; orbital platform.

## **1. INTRODUCTION**

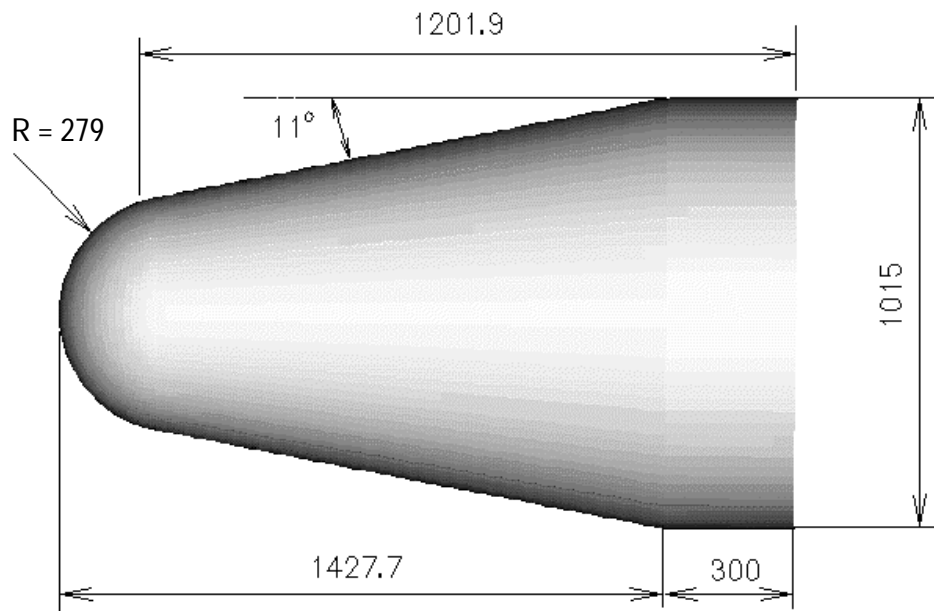
Knowledge of the aerodynamic behavior of a capsule returning from space is of paramount importance to determine its trajectory and to establish its stability characteristics. The main parameters involved are force coefficients, moment coefficients, and their variation with Mach number and angle of attack. In the beginning of a design process, engineering methods are used to approximate these parameters. However, as design evolves, more accurate evaluations of these parameters are necessary. Hence more sophisticated methodologies must be used for this purpose. The usual methods employed to refine the accuracy of the aerodynamic parameters comprise numerical simulations and wind tunnel tests. The former involves the solution of the complete set of governing equations in 3-D formulation for the whole range of Mach numbers and angles of attack. The latter is then employed for verification and further refinement.

The aim of the present study is to evaluate the aerodynamic parameters for the configuration of the Recoverable Orbital Platform SARA under development at IAE-CTA (Moraes,1998), with better accuracy than possible with the use of engineering methods. The three-dimensional, viscous governing equations are solved numerically by employing a LU-SGS algorithm based on a finite volume discretization. To perform the numerical computations a plane of symmetry, corresponding to the plane of varying angle of attack, is employed. Hence only half domain is discretized. Results are obtained for angles of attack ranging from zero to 10 degrees, and Mach numbers ranging from 2 to 6. The results from the numerical computations are compared with calculations applying engineering methods for verification purposes. Validation is further obtained by comparing the bow shock wave detachment position, and shock shape numerically computed with the results of calculations using semi-empirical formulas.

## 2. PROBLEM DEFINITION AND SOLUTION APPROACH

### 2.1 Body Geometry

The geometry of the configuration used in the present study is shown in Fig. 1.



**Figure 1.** Geometry of the configuration. Dimensions in mm.

The capsule is a blunt hemisphere-cone-cylinder with dimensions given in mm, with an  $11^\circ$  cone half angle.

### 2.2 Flow Conditions

Freestream Mach number ranged from 1.55 up to 6.63, Reynolds number per meter  $2.48 \times 10^6$ , and angles of attack varying from  $0^\circ$  to  $10^\circ$ . The flow conditions were selected to represent the reentry trajectory of the capsule from the lower hypersonic regime to the supersonic regime.



## 2.3 Engineering Calculations

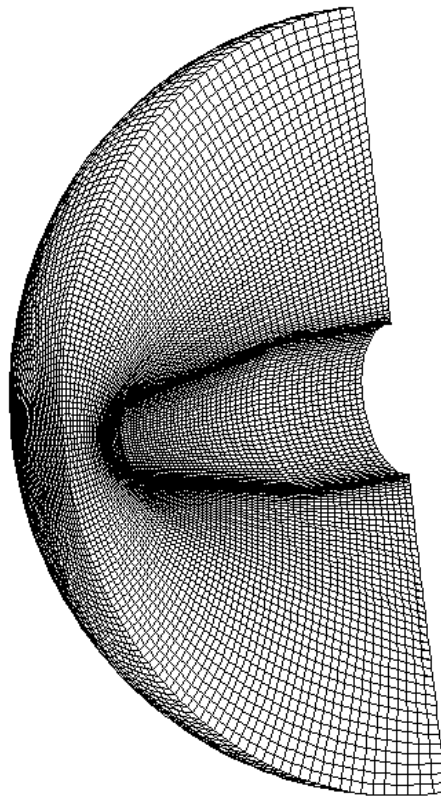
To perform the engineering calculations, two different methodologies have been applied which are based on analytical formulations enhanced by empirical data calibration.

The determination of the stability derivatives, normal force and pitch moment coefficients, and later the longitudinal position of the center of pressure, makes essentially use of experimental data in form of load distributions along the individual components. These component-wise computations are then combined and integrated to give the complete configuration results (Faggiano *et al.*, 1985).

Drag coefficients are calculated using a procedure based on analytical formulations for the several drag components, corrected with wind tunnel data, specially with respect to the base drag contribution. The Reynolds number influence is also taken into account with the use of Standard atmosphere data (Delprat, 1992).

## 2.4 Computational Grid

The three-dimensional computational grid employed in this study is presented in Figure 2. A two-block grid was used where the number of grid points in the axial, circumferential, and radial, directions are  $17 \times 22 \times 53$  and  $60 \times 52 \times 53$ , respectively. The grid was constructed exploiting the symmetry characteristics of the flowfield in the x-z plane. Hence, only half plane of the physical domain was discretized.



**Figure 2.** Computational grid,  $17 \times 22 \times 53$  and  $60 \times 52 \times 53$  grid points

## 2.5 Numerical Algorithm

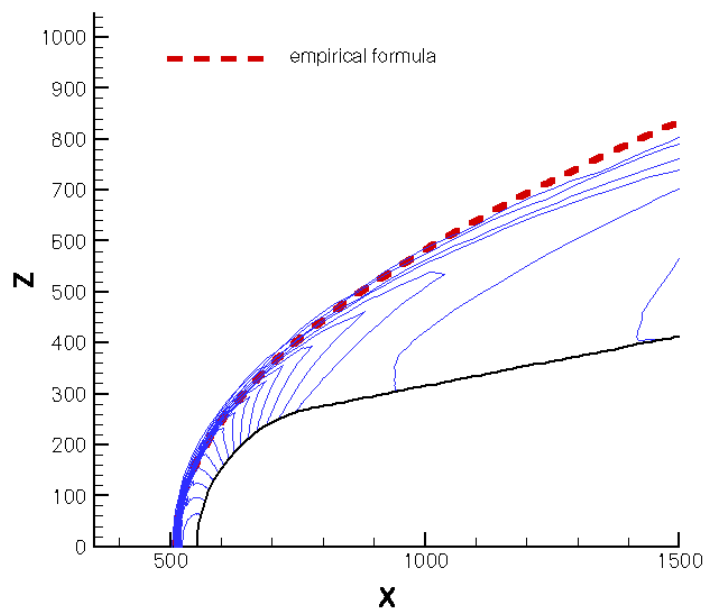
The compressible laminar flow under consideration over a capsule returning from the upper atmosphere is governed by the Navier-Stokes equations, which are written in strong conservation law form in a generalized coordinate system. The equations are solved using the lower-upper symmetric-Gauss-Seidel factorization scheme proposed by Yoon, S. and Kwak, D. (1992). The advantage of this factorization scheme is that the construction of the diagonal of the L and U matrices permits a scalar inversion, leading to a very efficient and vectorizable algorithm.

## 2.6 Initial and Boundary Conditions

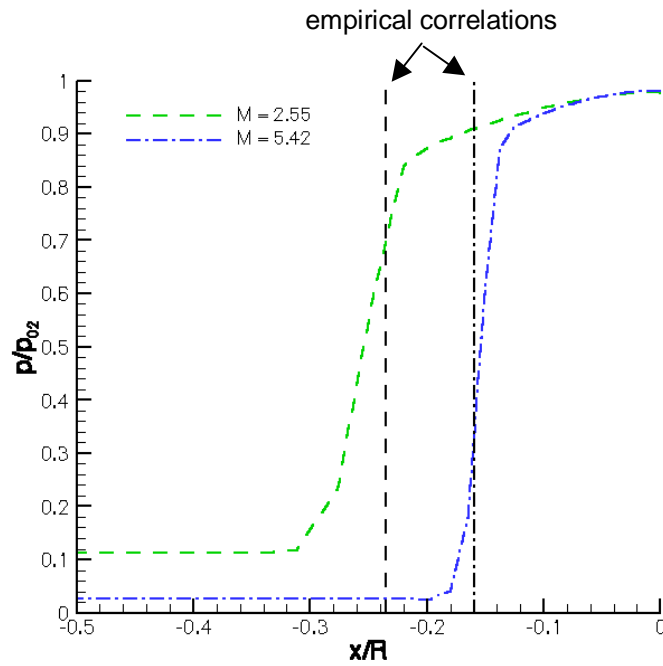
The initial flowfield is set to be freestream everywhere. All variables are extrapolated at the outflow boundary and nonslip wall condition is applied on the surface of the body. Adiabatic wall condition is imposed at the wall.

## 3. RESULTS AND DISCUSSION

The axisymmetric flow at zero angle of attack was computed and the principal flow features were compared with results calculated by empirical formulas given by Anderson (1989). Figure 3 shows the comparison of the computed shock shape with that given by the empirical formula. The comparison between the numerical results and the empirical formula show good agreement. Figure 4 shows the pressure distribution along the stagnation line for Mach numbers 2.55 and 5.42. Also shown in Fig. 4 as vertical lines, the position of the standoff distances computed by the empirical formulas for the two Mach numbers considered. The agreement between the numerical and empirical formulas results is good. Nevertheless, the shock for the lower Mach number presents a less steep pressure jump when compared with the higher Mach number case. This is attributed to the spacing of the grid distribution in that region, since the standoff distance for the lower Mach number is further away from the body



**Figure 3.** Computed pressure contours vs. shock shape correlation.  $M=6.63$ .

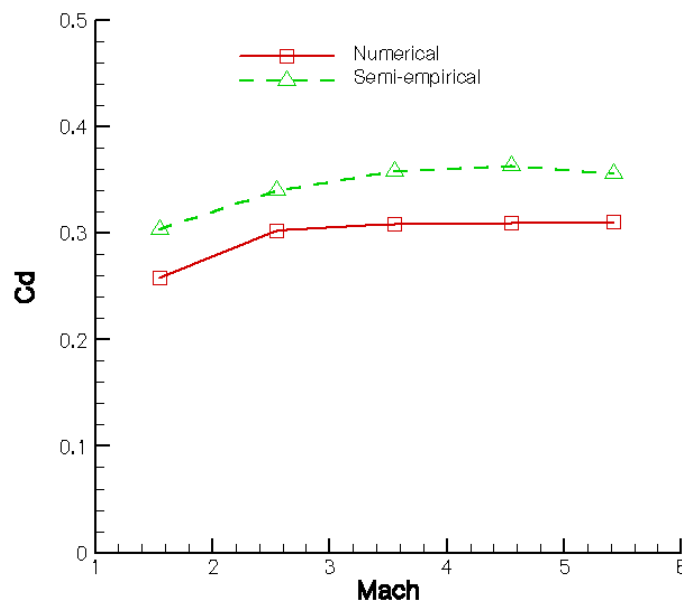


**Figure 4.** Shock standoff distance comparison.

nose, and the computational grid gets coarser with increasing distance from the body.

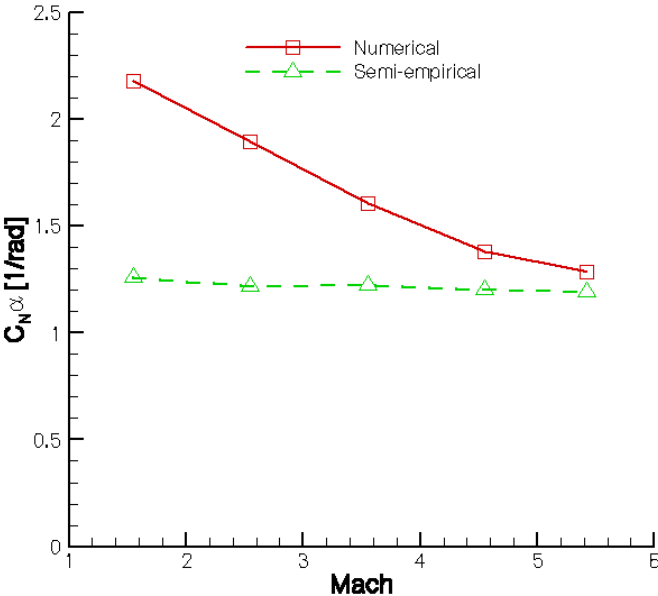
The drag coefficient  $C_d$  is presented in Fig. 5. The numerical computations include both pressure and viscous contributions. However, the contribution from the base region is not included, i.e., the pressure in the base region is assumed to have the freestream value when computing the drag coefficient. The agreement between the results can be considered good due to the fact that the computational model did not consider the flow in the base region of the vehicle.

The derivative of the normal force coefficient  $C_N$  with respect to angle of attack  $\alpha$ ,  $C_{N\alpha}$ ,



**Figure 5.** Drag coefficient,  $\alpha = 0^\circ$ .

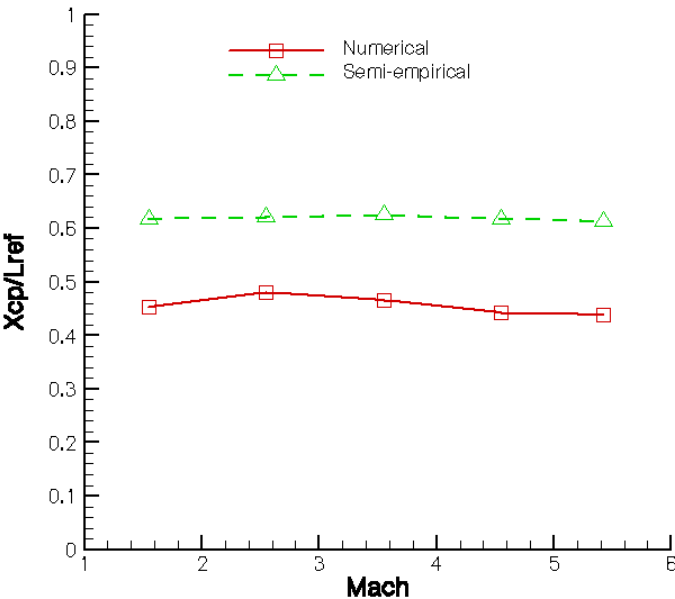
is shown in Fig. 6 as a function of the Mach number. While the results obtained with the semi-empirical calculation method show an almost constant behavior, the results coming from the numerical simulation presents larger decreasing values for the low supersonic regime. This is probably due to the capture of transonic features of the flow. For higher Mach numbers the



**Figure 6.**  $C_n\alpha$  vs. Mach number.

differences practically disappear between both results and converge to an agreement.

The longitudinal position of the center of pressure  $X_{cp}$ , related to the total length of the vehicle  $L_{ref}$ , and plotted as function of the Mach number, is shown in Fig. 7. Both results show similar behavior while the differences are still large. The center of pressure is



**Figure 7.** Longitudinal position of the center of pressure,  $X_{cp}$ , vs. Mach number.

determined by the ratio of the derivatives of pitching moment to normal force coefficients. The differences are probably due to the non-agreement of  $C_{N\alpha}$  shown in the previous Fig. 6.

#### 4. CONCLUSIONS

The main aerodynamic parameters, force coefficients, moment coefficients, and their variation with Mach number and angle of attack, for the configuration of the Recoverable Orbital Platform SARA were calculated numerically and with the use of engineering methods. The main features of the flow field compared very well with those obtained by empirical formulas. The comparison of integral results for forces and their variation with angle of attack showed the same curve trends in both methodologies employed. Although the numerical values obtained presented some large discrepancies, those differences are attributed to the lack of accounting for the base flow in the numerical computations. Nevertheless, further investigation is necessary to validate the numerical results, comparing them with experimental data.

#### 5. REFERENCES

- Anderson, J. D. Jr., "Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics," McGraw-Hill Book Company, ISSB 0-07-001671-2, 1989.
- Delprat, O., 1992, "DRAG – Programa de Cálculo de Arrasto. Manual de Manutenção," CTA/IAE, RT-012/ETP-AED/92 (internal report), São José dos Campos, SP
- Faggiano, C., Barbosa, S. A., Moraes, P. Jr., 1985, NORFOR. "Programa de Cálculo das Características Aerodinâmicas Estáticas Longitudinais de Veículos Axissimétricos Multi-Estágios," IAE/ASE, RT-002/ETP-AED/85 (internal report), São José dos Campos, SP
- Moraes, P. Jr., 1998, "Design Aspects of the Recoverable Orbital Platform SARA", 8o Congreso Chileno de Ingenieria Mecánica, Concepción, Chile.
- Yoon, S. and Kwak, D., "Implicit Navier-Stokes Solver For Three-Dimensional Compressible Flow", *AIAA Journal*, vol. 30, pp. 2653-2659, November 1992.

# UTILIZAÇÃO DAS FUNÇÕES ESTATÍSTICAS NA ANÁLISE DO ESCOAMENTO TURBULENTO NO INTERIOR DO CAPACITOR TÉRMICO

**Julio César Costa Campos**

**Milton Biage**

Centro Universitário do Triângulo, Departamento de Ciências Exatas, Uberlândia, MG, Brasil. E-mail: [jjccampos@uol.com.br](mailto:jjccampos@uol.com.br).

Universidade Federal de Uberlândia, Departamento de Engenharia Mecânica, Uberlândia, MG, Brasil. E-mail: [biage@mecanica.ufu.br](mailto:biage@mecanica.ufu.br)

## Resumo

O presente trabalho consiste num estudo experimental, realizado com a finalidade de prever o comportamento dinâmico de um escoamento no interior do capacitor térmico. Utilizou-se um sistema de amplificação de microtermopares, com compensação automática da temperatura da junta fria para realização de medidas de temperaturas em vários pontos do capacitor. Este estudo foi realizado para três números de Reynolds, na direção axial, azimutal e radial. Com o objetivo de estudar a propagação de pulsos de temperatura ao longo do duto, construiu-se um gerador de pulso controlado por computador, que permite introduzir pulso com amplitudes e frequências diferentes. Na análise do escoamento foram utilizadas as funções estatísticas, tais como: autocorrelação, correlação cruzada e o espectro de energia. Estas medidas foram obtidas utilizando-se microtermopares tipo T. Os resultados obtidos são consistentes de acordo com a literatura.

**Palavras-chave:** Escoamento turbulento, Funções estatísticas, Temperaturas, Capacitor térmico.

## 1. INTRODUÇÃO

O capacitor térmico é caracterizado, geometricamente, por um bojo cilíndrico ou retangular, inserido em uma instalação térmica, de forma a armazenar massa que servirá como elemento de amortecimento das flutuações de temperatura.

O capacitor térmico é utilizado em processos industriais onde se tem flutuação indesejável de temperatura, como por exemplo: em caldeiras, em fornos, em câmaras de umidificação, de secagem, de combustão e de descarga em túneis de vento supersônicos, ou mesmo em ambientes onde se deseja temperaturas absolutamente constantes, como em laboratórios de controle de dados.

A utilização de um capacitor térmico provoca o amortecimento das flutuações devido ao efeito da mistura da massa que entra no cilindro com a massa já existente no mesmo. Nas regiões de recirculação resultam grandes gradientes de velocidade, e conseqüentemente, uma alta intensidade turbulenta. O processo físico no interior do capacitor térmico é caracterizado por um jato em expansão livre. As bordas do jato, da entrada até aproximadamente o centro do capacitor, apresentam vórtices pares. Após a região central, o escoamento divide-se em duas partes: uma zona envolvendo a linha do centro do capacitor, cujo escoamento contrai-se

gradualmente até a saída do fluido no capacitor e uma zona secundária, situada próxima da parede, onde ocorre uma recirculação do fluido que realimenta o processo de mistura ao longo do corpo do jato livre, Lesieur (1986).

Escoamentos no interior de um capacitor são caracterizados por uma série de fenômenos que não são ainda totalmente compreendidos. A formação da grande estrutura coerente, presente no escoamento e a evolução destes vórtices é caracterizadas pelos mecanismos de instabilidades espaciais e temporais. A compreensão dos mecanismos de formação da estrutura deste escoamento pode fornecer várias informações que permitem compreender os aspectos de formação da turbulência tridimensional, permitindo a calibração de modelos turbulentos e verificar o comportamento de métodos numéricos na simulação deste problema. Por outro lado, também, é possível utilizar as informações adquiridas em experimentos para otimizar os projetos industriais de capacitores.

Normalmente, o escoamento no interior de um capacitor térmico é tridimensional, por este fato, procurou-se efetuar um conjunto de medidas de flutuações de temperaturas em vários planos e ao longo de todo o capacitor, de forma que permitam analisar os aspectos tridimensionais da turbulência. Contudo, devido às limitações experimentais estudou-se escoamentos, cujos números de Reynolds são compreendidos no intervalo  $12000 \leq Re \leq 134500$ , os quais possibilitam estabelecer importantes conclusões sobre as características da turbulência neste escoamento.

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo experimental de um escoamento turbulento em um capacitor térmico, analisando o comportamento das flutuações de temperatura, utilizando funções estatísticas. As principais funções estatísticas a serem utilizadas como ferramentas neste estudo são: autocorrelação, intercorrelação e o espectro de potência.

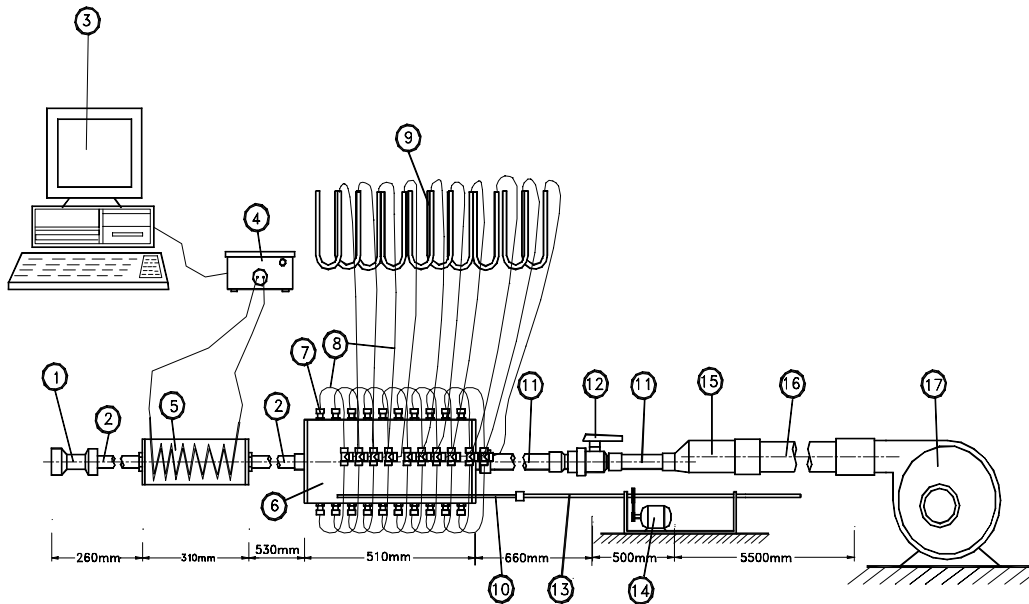
Autocorrelação e intercorrelação permitem verificar o grau de similaridade das oscilações em vários pontos do escoamento, possibilitando caracterizar o grau de dissipação destas no espaço. Adicionalmente, a intercorrelação permite obter a velocidade de propagação dos fenômenos oscilantes.

O espectro de potência representa decomposições de funções temporais não lineares, no espaço de Fourier, contendo diferentes modos frequências, dentro de uma banda, cuja largura depende do grau de determinismo do fenômeno. O espectro de potência fornece a distribuição de energia média das oscilações, com suas frequências características Arpacı & Larsen (1984). Contudo, a distribuição do espectro de potência, caracteriza fisicamente, a maneira pela qual oscilações de diferentes frequências trocam energia entre elas. A troca de energia entre oscilações com diferentes escalas constitui uma das análises que será apresentada neste estudo, procurando evidenciar os aspectos da turbulência, e em particular, verificar tanto o processo de alimentação de energia das pequenas escalas para as grandes, como os mecanismos de dissipação energia pelas pequenas escalas. Adicionalmente, pode-se dizer que o espectro de potência constitui um dos diagnósticos de maior sensibilidade para caracterizar o comportamento dinâmico de escoamentos. Historicamente, a análise das características do espectro de potência tem sido objeto de grande atenção, pois é possível extrair informações sobre a inclinação do espectro, o que permite estabelecer teorias e modelos de turbulência Miller & Dimotakis (1996).

## **2. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL**

Nesse estudo foi construído um aparato experimental que permite analisar o comportamento dinâmico de um escoamento no interior do capacitor térmico. Esse dispositivo experimental é composto de uma seção de testes que constitui-se de um cilindro de acrílico com 200mm de diâmetro e 510mm de comprimento. Uma seção de aquecimento

acoplada à secção de testes por meio de uma tubulação de ferro de 42.30mm de diâmetro e 530mm de comprimento. Um bocal de bronze com coeficiente de descarga igual a 0.98 é utilizado para determinar a vazão volumétrica através do capacitor.



**Figura 1:** Representação do Sistema, (1) Bocal de Bronze; (2) Tubulação de Ferro; (3) Computador Pentium 120MHz; (4) Gerador de pulso; (5) Cilindro recheado com Resistências; (6) Capacitor Térmico (secção de testes); (7) Tomadas de Pressão na parte superior; (8) Mangueiras conectando a tomada de pressão superior com a inferior; (9) Manômetros Tipo U; (10) Deslocador de sonda anemométrica a fio quente, com movimentos lineares e azimutais, controlados por motor de passo; (11)Tubulação de PVC; (12) Válvula de controle; (13) Fuso de deslocamento de sonda; (14) Motor de Passo; (15) Tubulação de PVC de 3 polegadas; (16) Mangueira Flexível de 4 polegadas; (17) Ventilador de 12.5 cv, 3510 rpm, 34A.

O fluxo através do sistema experimental é introduzido, utilizando-se um ventilador centrífugo de alta potência, com 12.5 cv e 3510 rpm. A descarga do escoamento através do capacitor é controlada por uma válvula controladora de vazão que permite uma variação gradual, possibilitando-se estabelecer escoamentos com variados números de Reynolds.

Uma haste é introduzida no interior da secção de testes que permite mover um conjunto de microtermopares ou sondas anemométricas a fio quente, ao longo das direções axiais, radiais e azimutais, sem, entretanto, perturbar o escoamento, uma vez que, as medidas são realizadas à jusante da haste. A Fig. 1 mostra detalhadamente o sistema experimental (todas as medidas estão em mm).

Para o aquecimento do fluido foi utilizado um sistema de resistências em forma espiraladas, distribuídas horizontalmente na tubulação de alimentação do escoamento e preenchendo todo o corpo cilíndrico da secção de aquecimento. As resistências são aquecidas, variando a tensão de alimentação dos resistores de aquecimento do ar, por meio de pulsos digitais, com amplitudes e frequências definidas em programas computacionais. Estes pulsos são convertidos em pulsos analógicos, utilizando conversores D/A, o qual é amplificado através de um circuito TRIAC. A construção deste sistema possibilita introduzir aquecimentos flutuantes ou constantes na entrada do capacitor, com intuito de verificar-se o comportamento da distribuição espacial de temperatura, em vários números de Reynolds.



### 3. ANÁLISE ESTATÍSTICA

Conforme Bendat & Piersol (1986), as propriedades estatísticas mais importantes no tratamento dos fenômenos com um certo grau de aleatoriedade são: a média, o desvio padrão, os valores quadráticos médios (variância), funções de autocorrelação, funções de correlação cruzada e funções de densidade espectral. Todas estas funções foram utilizadas no presente trabalho com o intuito de evidenciar a estrutura de um escoamento no interior do capacitor térmico.

Quando se tem dois registros de dois processos aleatórios diferentes, o estudo da função coeficiente de correlação cruzada é uma outra propriedade bastante importante. Neste trabalho utilizou-se a definição da função de correlação cruzada para identificar o sentido e a velocidade de propagação dos fenômenos envolvidos no sistema.

Pode-se definir uma função coeficiente de correlação cruzada,  $C_{xy}(\tau)$ , de duas amostras  $x(t)$  e  $y(t)$ , da seguinte forma:

$$C_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_{xx}(0)R_{yy}(0)}} \quad (1)$$

Onde  $R_{xy}(\tau)$  é a função correlação cruzada e  $R_{xx}(\tau)$ ,  $R_{yy}(\tau)$ , são, respectivamente, autocorrelação de duas diferentes amostras, para  $\tau=0$ .

A melhor maneira de determinar a função de autocorrelação, na Eq.(1), é através da transformada rápida de Fourier da função de densidade espectral bilateral, cujo procedimento conduz à seguinte equação resultante:

$$\hat{R}_{xx}^s(r\Delta t) = \begin{cases} \frac{(N-r)}{N} \hat{R}_{xx}(r\Delta t) & r = 0, 1, \dots, N-1 \\ \frac{(r-N)}{N} \hat{R}_{xx}[(2N-r)\Delta t] & r = N, N+1, \dots, 2N-1 \end{cases} \quad (2)$$

onde  $\hat{R}_{xx}(\tau)$ , com  $\tau = r\Delta t$  ou  $\tau = (2N-r)\Delta t$ , representa a função de autocorrelação estimada, sem a presença de erros sistemáticos,  $\hat{R}_{xx}^s(\tau)$ , com  $\tau = r\Delta t$ , representa a função de autocorrelação com a presença de erros sistemáticos e  $\Delta t$  é o tempo de amostragem (aquisição).

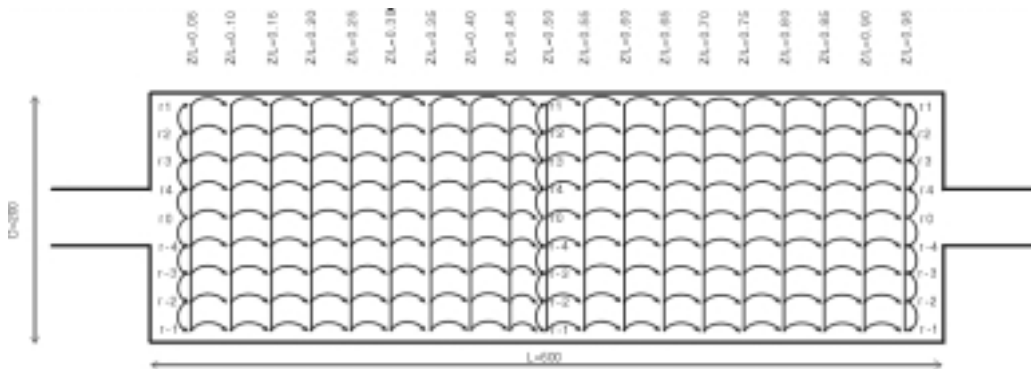
A função de densidade espectral unilateral,  $G_{xx}(f, T)$ , de uma amostra  $\{x_i\}$  é definida como sendo:  $G_{xx}(f, T) = 2S_{xx}(f, T)$ , para  $0 \leq T \leq \infty$  e caso contrário é igual a zero. Sendo que  $S_{xx}(f, T)$  é dado da seguinte maneira:

$$S_{xx}(f, T) = \frac{1}{N_m n_d \Delta t} \sum_{i=1}^{n_d} |X_i(t)|^2 \quad (3)$$

Onde  $N_m$  é o número de pontos em cada subconjunto que compõe a amostra,  $n_d$  é o número de subconjuntos,  $\Delta t$  é o intervalo de amostragem e  $X_i(t)$  é a transformada de Fourier de  $x(t)$ .

#### 4. RESULTADOS E CONCLUSÕES

A Fig. 2 representa a distribuição de termopares, através de uma sonda, ao longo da direção axial e radial do capacitor térmico. Na direção axial foram feitas varias medidas de temperatura nas posições,  $z/L$ , conforme evidenciado nesta figura. Na direção radial,  $r/D$ , os termopares foram distribuídos, igualmente, a uma distância de 19,44 mm. Nesta direção os termopares foram distribuídos do centro da sonda,  $r_0$ , em direção as paredes do capacitor,  $r_1$  e  $r-1$ , conforme Fig.2. As Figs.3 e 4 mostram o comportamento das funções coeficiente de correlação cruzada de duas amostras de flutuações temporais de temperatura de  $z/L=0.05$  à  $z/L=0.95$  adquiridas na direção axial para  $r_4$ ,  $r-4$ ,  $r_3$ ,  $r-3$ ,  $r_1$  e  $r-1$ , conforme Fig.2, para  $Re=12000$ ,  $Re=134000$ , respectivamente,  $\theta=0^\circ$ .



**Figura 2:** Representação da distribuição de termopares ao longo da direção axial e radial do capacitor térmico.

Observa-se na Fig. 4.(e,f) para  $Re=134000$ ,  $\theta=0^\circ$ , situado próximo a parede do capacitor,  $r_1$  e  $r-1$ , que a coerência do sinal decai a medida que se desloca na direção axial. Isto é evidenciado pelos valores dos picos secundários nas funções coeficiente de correlação,  $C_{xy}$ , que são menores quando comparados aos valores dos picos secundários apresentados na Fig.4. (a, b). Conjectura-se que isto ocorre devido a acontecer uma forte quebra da estrutura da turbulência nesta região, que apresenta uma brusca mudança geométrica, causando um processo turbulento bem mais irregular Blanco & Moller (1994).

Uma outra importante característica observada na Fig. 4 é que as flutuações de temperatura se correlacionam por longos intervalos de tempo, conforme caracterizado pelos coeficientes de correlações dos picos secundários, os quais mantêm-se aproximadamente constantes por um longo tempo (o eixo horizontal representa um tempo de 12,5 segundos), para uma mesma função de correlação cruzada. Isto evidencia que a flutuação de temperatura apresenta uma forte similaridade ao longo do tempo, o que indica que estas se preservam quando o tempo transcorre, indicando um grande grau de determinismo do fenômeno. Isto caracteriza a existência de fenômenos de grandes escalas no escoamento, características das flutuações de temperaturas introduzidas no escoamento, conforme explicado anteriormente.

Percebe-se na Fig. 4.(a,b) para  $Re=134000$ ,  $\theta=0^\circ$ , que as flutuações de temperatura apresentam um maior grau de similaridade ao longo do tempo, evidenciada por uma maior homogeneidade nos níveis de coerência dos picos secundários.

Diferentemente das observações feitas com relação à Fig. 4, para  $Re=134000$ ,  $\theta=0^\circ$  a correspondente Fig. 3, para  $Re=12000$ ,  $\theta=0^\circ$  onde o escoamento não apresenta uma turbulência completamente desenvolvida, ocorre um forte amortecimento das flutuações, tanto espacialmente, e na direção axial do capacitor, como ao longo do tempo. Esta conclusão é extraída, observando-se que pico principal apresenta um elevado coeficiente de correlação

cruzada,  $C_{xy}$ , e os demais picos ilustrados ao longo do eixo horizontal, se dissipam, tornando baixos os coeficientes de correlação. Fato pelo qual tem-se um baixo coeficiente de correlação na direção axial. Deve salientar-se que as flutuações de temperaturas introduzidas neste estudo com  $Re=12000$ ,  $\theta=0^\circ$  foram exatamente a mesma que a introduzida no estudo com  $Re=134000$ ,  $\theta=0^\circ$ . Este fato é compreensível se considerar que em baixo número de Reynolds, o efeito dissipativo do escoamento é muito maior, amortecendo com maior intensidade as oscilações presentes no escoamento, tanto de velocidades como de temperatura, pois estes campos são totalmente acoplados.

Adicionalmente, se comparar a Fig. 3, para  $Re=12000$ ,  $\theta=0^\circ$  com a Fig. 4, para  $Re=134000$ ,  $\theta=0^\circ$ , observa-se uma significativa diferença de comportamento da estrutura térmica do escoamento quando o número de Reynolds aumenta. Observa-se na Fig.4 que as flutuações de temperatura se correlacionam por longos intervalos de tempo, conforme caracterizado pela relação entre os coeficientes de correlações dos picos secundários com o pico principal, a qual mantém-se dentro de um intervalo variando de 0,5 próximo à parede do capacitor até 1 na região central do capacitor. Isto evidencia que as flutuações de temperatura apresentam uma forte similaridade ao longo do tempo e no espaço, o que indica que essas flutuações se preservam quando o tempo transcorre, indicando um grau de determinismo do fenômeno. Isto caracteriza a existência de fenômenos de grandes escalas no escoamento, características das flutuações de temperaturas introduzidas no escoamento, conforme explicado anteriormente.

Como é conhecida a distância entre as duas posições referentes aos sinais correlacionados, conclui-se que a velocidade de propagação das flutuações de temperatura é igual esta distância dividida pelo tempo de atraso do pico principal. Assim, conclui-se que a velocidade de propagação das flutuações são menores quando o número de Reynolds é menor, devido a maior dissipação nesse escoamento.

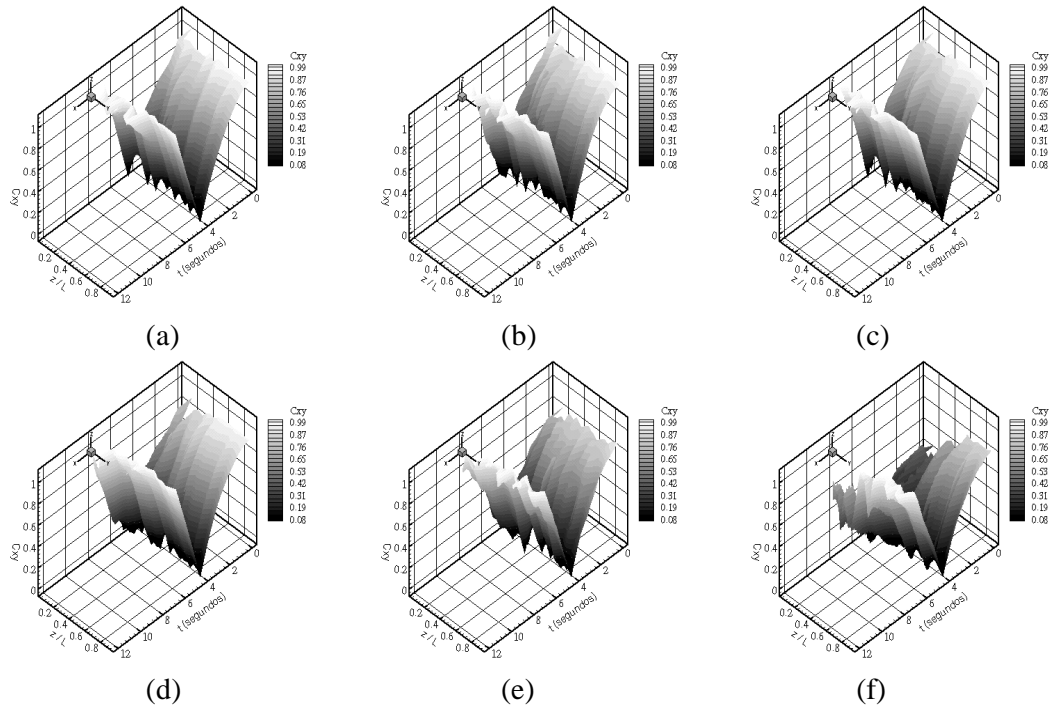
Portanto, a estimação da velocidade de propagação instantânea das flutuações de temperatura na direção axial, mencionada no parágrafo anterior, é dada pela seguinte equação;

$$V = \frac{d}{\tau_0} \quad (4)$$

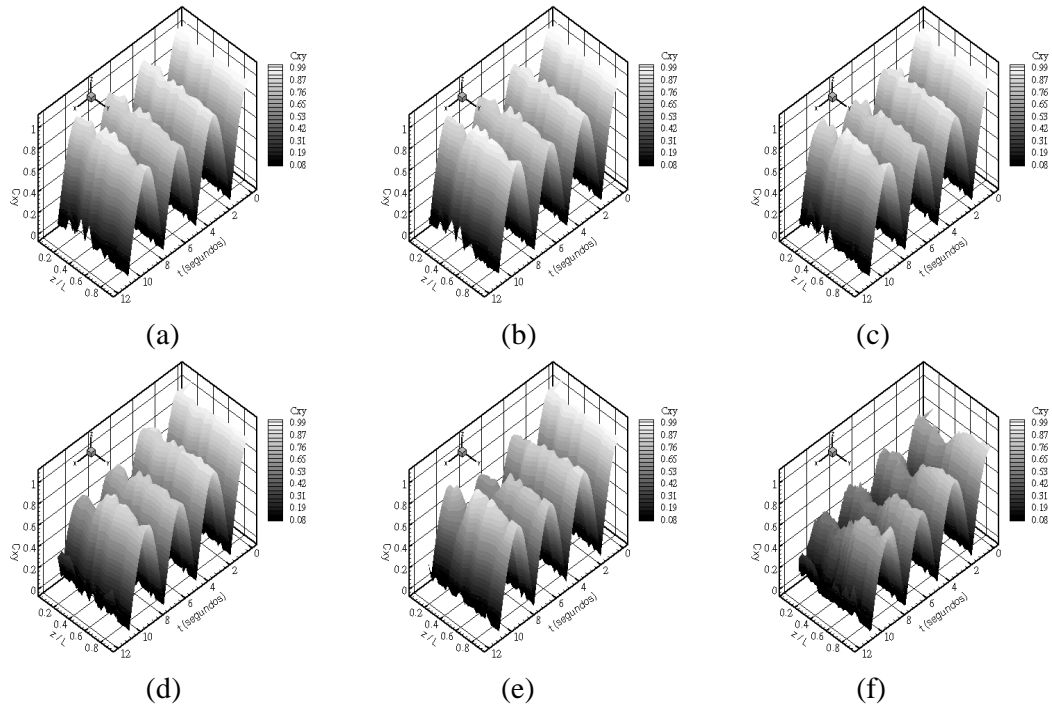
Onde  $d$  é a distância, em metros, entre as posições referentes aos sinais correlacionados e  $\tau_0$  é o tempo de atraso do pico principal, em segundos.

Observa-se nas Figs. 5 e 6 para  $Re=12000$  e  $Re=134000$ ,  $\theta=0^\circ$ , que a estrutura do escoamento obedece uma lei de potência para a sub-região inercial no espectro de energia,  $k^{-5/3}$ , com uma inclinação da curva do espectro de energia igual a  $-5/3$ , onde  $k$  é a constante de Kolmogorov, independente do número de Reynolds e da posição espacial, na qual os dados foram adquiridos. Esta lei é conhecida como lei de Kolmogorov, segundo Hinze (1975), o que caracteriza uma estrutura de escoamento turbulento, tipicamente, tridimensional.

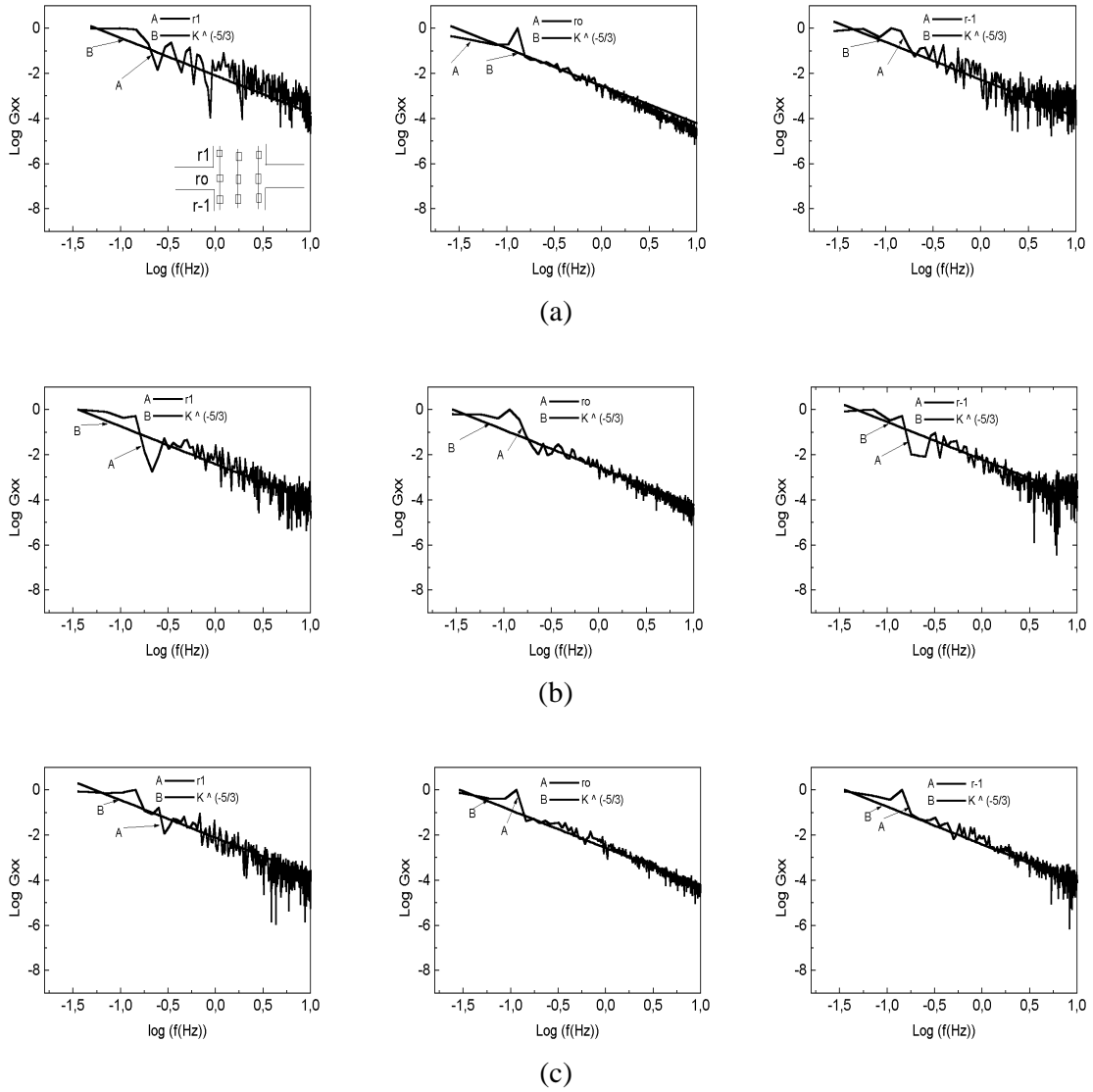
Os números de Reynolds utilizados neste trabalho, para caracterizar a sub-região convectiva-inercial no espectro de energia térmico, foram obtidos na faixa de  $25 \times 10^3 \leq Re \leq 134 \times 10^3$ . Para estes números de Reynolds, conforme evidenciado nas Figs. 5 e 6, não foram observadas diferenças, significativas, do espectro de energia térmico. Isto evidencia, quando a turbulência é completamente desenvolvida, que o espectro de energia é independente do número de Reynolds.



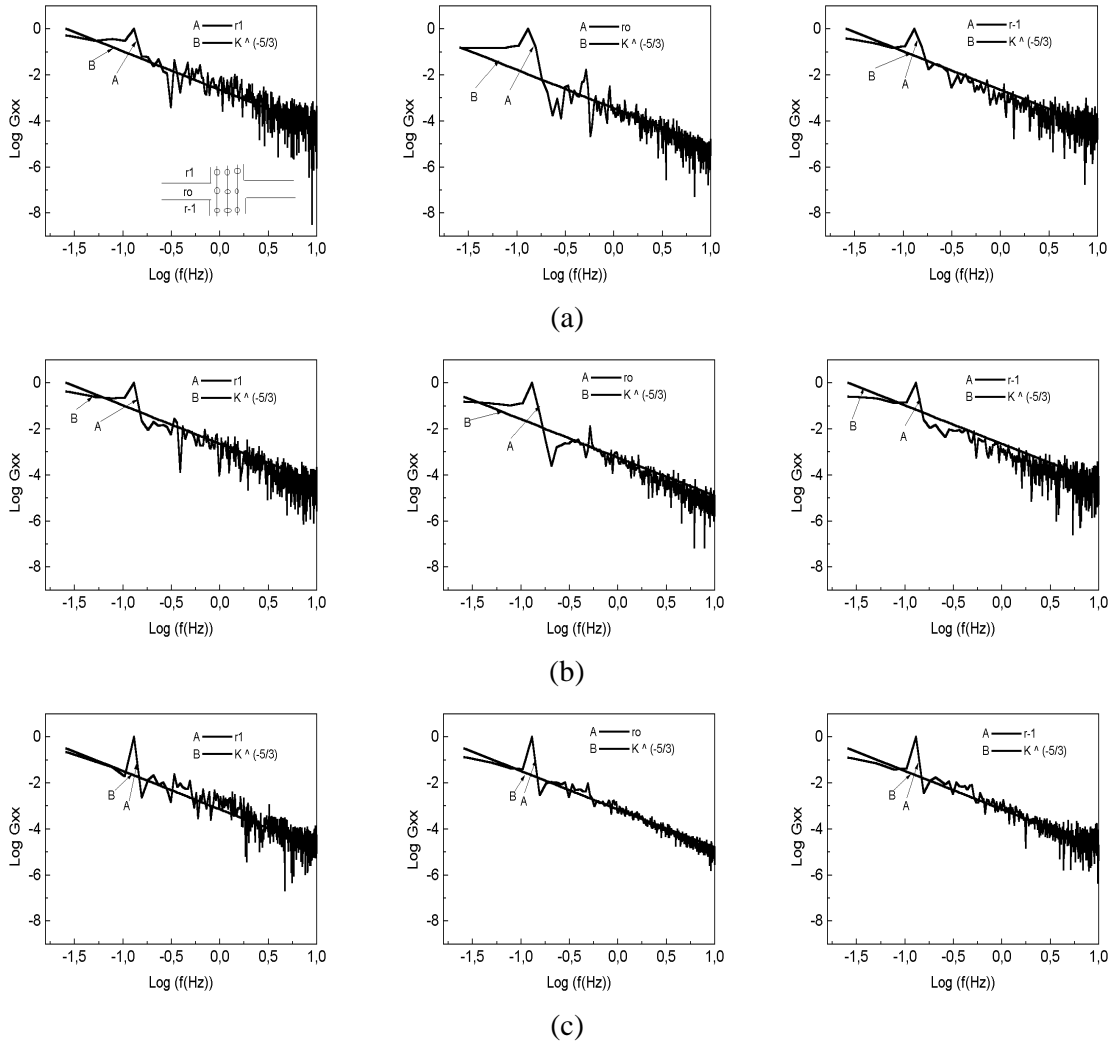
**Figura 3:** Representação do coeficiente de correlação cruzada na direção axial,  $Re=12000$ ,  $\theta=0^\circ$  conforme Fig. 2: (a) r4 ; (b) r-4; (c) r3; (d) r-3 ; (e) r1; (f) r-1.



**Figura 4:** Representação do coeficiente de correlação cruzada na direção axial,  $Re=134000$ ,  $\theta=0^\circ$  conforme Fig. 2: (a) r4 ; (b) r-4; (c) r3; (d) r-3 ; (e) r1; (f) r-1



**Figura 5:** Representação do espectro de energia no interior do capacitor térmico para  $Re=12000$ ,  $\theta=0^\circ$ ; (a)  $z/L=0.05$ , (b)  $z/L=0.50$ , (c)  $z/L=0.95$ .



**Figura 6:** Representação do espectro de energia no interior do capacitor térmico para  $Re=134000$ ,  $\theta=0^\circ$ ; (a)  $z/L=0.05$ , (b)  $z/L=0.50$ , (c)  $z/L=0.95$ .

## 5. REFERÊNCIAS

- Arpaci, Vedat S. e Larsen, Poul S., 1984, “Convection Heat Transfer”, Prentice-Hall, Inc., Englewoods Cliffs.
- Bendat, Julius S., e Piersol, Allan G., 1986, “Random Data: Analysis and Measurement Procedures”, John Wiley e Sons, New York.
- Blanco, R.L.D., e Moller, S.V., 1994, “Análise Espectral de Flutuações de Temperatura em Escoamentos Turbulentos em Dutos Circulares”, Anais do 2º Simpósio Latino Americano sobre Tubulações e Vasos de Pressão”, Rio Grande do Sul, Brasil, pp 396-405.
- Hinze, J. O., 1975, “Turbulence”, McGraw-Hill
- Lesieur, Marcel, 1986, “Turbulence in Fluids: Stochastic and Numerical Modelling”, Kluwer Academic Publishers, London.
- Miller, Paul L., e Dimotakis, Paul E., 1996, “Measurements of Scalar Power Spectra in High Schmidt Number Turbulent Jets”, Journal Fluid Mechanical, Vol. 308, pp 129-146.

# UMA LEI DO ATRITO PARA ESCOAMENTOS TURBULENTOS SANGUÍNEOS: UTILIZANDO O MODELO REOLÓGICO DE CASSON

**Daniel Onofre de Almeida Cruz.**

**Jerson Rogério Pinheiro Vaz**

**Emanuel Negrão Macêdo**

Universidade Federal do Pará, Centro Tecnológico, Departamento de Engenharia Mecânica, 66075-900, Belém, Pa, Brasil. E-mail: [doac@ufpa.br](mailto:doac@ufpa.br)

## **Resumo**

A análise de escoamentos turbulentos de fluidos não-Newtonianos permanece, ainda hoje, como um dos grandes problemas da mecânica dos fluidos. Apesar de sua importância, poucos trabalhos são encontrados na literatura que estudam detalhadamente os fenômenos relativos ao escoamento de fluidos não-Newtonianos em regime turbulento. Dentre os principais fenômenos envolvidos com esse tipo de análise, destaca-se o fluxo sanguíneo em veias e artérias. O estudo do fluxo de sangue é de grande importância não apenas do ponto de vista científico, como também na análise de questões mais práticas envolvendo o projeto e construção de órgãos artificiais e, o diagnóstico de enfermidades. Vários modelos reológicos são empregados na modelagem do escoamento de sangue, dentre eles podemos destacar o de Casson como estando entre os mais populares. No presente trabalho, uma extensão da equação do atrito para fluidos Newtonianos aplicável nos escoamentos turbulentos em dutos será desenvolvida para o caso do escoamento de sangue, utilizando o modelo reológico de Casson. O fator importante desta nova lei do atrito é a influência do escoamento empistonado no fator de atrito. Será mostrado, que a formulação proposta envolve uma relação logarítmica que contém a expressão clássica Newtoniana como um caso particular. Uma comparação com dados experimentais será feita apresentando boa concordância.

**Palavras-Chave:** Hemodinâmica, Turbulência, Lei do Atrito

## **1. INTRODUÇÃO**

A análise do escoamento turbulento de fluidos não-Newtonianos, apresenta um grande desafio a ciência da mecânica dos fluidos. Dentre os principais problemas relativos a esse tipo de fenômeno, está o escoamento de sangue em veias e artérias. A descrição adequada desse tipo de escoamento vem se tornando cada vez mais importante, principalmente na obtenção do diagnóstico de patologia e no dimensionamento e confecção de órgãos artificiais. Apesar dessa importância são poucos os trabalhos encontrados na literatura que tratam do fluxo sanguíneo, especialmente no caso turbulento. Uma grande dificuldade da análise do fluxo de

sangue turbulento, é devido a maioria dos parâmetros e relações características do escoamento turbulento, como por exemplo, a conhecida correlação de Colebrook (1938) para escoamento em dutos, terem sido obtidas utilizando a hipótese Newtoniana como modelo reológico. Vários resultados experimentais (Liesch 1986 Rodkiewicz, C.M 1990) indicam que o sangue deve se comportar como fluido não Newtoniano mesmo em largas artérias a que o fluxo sanguíneo somente pode ser tratado de modo semelhante ao caso Newtoniano quando submetido a elevadas tensões de cisalhamento (Caro, C. G. et al. 1978)

No presente trabalho será apresentada uma versão da lei da parede válida para escoamentos de sangue, deduzida utilizando o modelo reológico de Casson (1959) para a descrição das tensões moleculares. O modelo de Casson tem sido largamente utilizado nas simulações numéricas do fluxo sanguíneo mostrando bons resultados (S. Oka, 1965. A. Brasil *et al.* 1998). Na obtenção dessa lei será utilizada uma nova velocidade característica a qual contém a clássica velocidade de fricção como caso particular (Cruz & Vaz 1999). A dedução do resultado será feita sem a utilização de um modelo de turbulência para a descrição das tensões de Reynolds. Uma relação para o cálculo da perda de carga do escoamento turbulento de sangue no interior de dutos, fundamentada na lei da parede proposta, será mostrada, nessa nova relação os efeitos da região de escoamento empistonado no centro do duto serão considerados. Os resultados obtidos serão comparados com o caso Newtoniano visando analisar a influência do limite de escoamento do fluido sobre o escoamento.

## 2. A LEI DA PAREDE SANGUÍNEA

O escoamento de sangue pode ser analisado como sendo uma suspensão de partículas (células) em um líquido (plasma). A descrição das tensões moleculares nesse tipo de fluxo é bastante complexa, tendo motivado a criação de vários modelos reológicos para a descrição do fenômeno. Dentre esses modelos a equação constitutiva proposta por Casson (1959) destaca-se como estando entre as mais populares. Nessa formulação as tensões moleculares são descritas, no presente caso, de acordo com a expressão:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\bar{\lambda} \frac{\partial u}{\partial y}} \quad (1)$$

onde  $\tau$  é a tensão na de cisalhamento,  $\tau_0$  é o limite de escoamento do fluido,  $\bar{\lambda}$  representa a viscosidade e  $u$  e  $y$  são a velocidade tangente a superfície sólida e a coordenada normal a essa superfície respectivamente. Será deduzido abaixo uma expressão para o perfil médio de velocidade do escoamento turbulento próximo a superfícies sólidas. No presente caso o escoamento ocorre de forma incompressível, obedecendo as condições de deslizamento e não penetrabilidade, atendendo as hipóteses de camada limite, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial y} \gg \frac{\partial}{\partial x} \quad (2)$$

Como primeiro passo para a obtenção da lei da parede deve-se, inicialmente, descobrir as variáveis características do escoamento próximo a superfície sólida. Isto pode ser feito analisando-se o perfil de velocidade do escoamento na subcamada viscosa, muito próximo a parede. Nessa região, o transporte de quantidade de movimento ocorre, causado principalmente pelas tensões moleculares, uma vez que o transporte de quantidade de movimento por convecção e pelas tensões turbulentas são desprezíveis devido as condições de



não deslizamento e não penetrabilidade. Portanto nessa região as equações da conservação da quantidade de movimento, podem ser escritas da seguinte forma, de acordo com a Eq.(2):

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Substituindo a Eq.(1) em (3) e resolvendo a integral, tem-se:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\tau_o}{\rho} + 2\sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (4)$$

onde  $\tau_w$  é a tensão na parede,  $\rho$  é a massa específica e  $\lambda = \bar{\lambda}/\rho$ .  $\bar{u}$  representa o perfil de velocidade médio de escoamento. Desenvolvendo-se a Eq.(4) para o gradiente médio de velocidade obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\left( \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \right)^2}{\lambda} \quad (5)$$

A qual fornece após a integração e a aplicação da condição de não deslizamento, a seguinte relação para o perfil de velocidade na subcamada viscosa:

$$\bar{u} = \frac{\left( \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \right)^2}{\lambda} y \quad (6)$$

A Eq.(6) pode ser rescrita da seguinte forma adimensional:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}} = \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}}{\lambda} y \quad (7)$$

A relação (7) mostra que a velocidade média do escoamento de sangue na subcamada viscosa varia linearmente, de modo semelhante ao caso Newtoniano. Contudo, a velocidade característica utilizada na adimensionalização do perfil médio de velocidade fica, neste caso, sendo descrita pela relação abaixo:

$$u_c = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \quad (8)$$

onde  $u_c$  representa a velocidade característica a qual se reduz à relação válida para o caso Newtoniano quando  $\tau_o = 0$ , ou seja:

$$u_c = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (9)$$

A mesma análise é válida para o caso do comprimento característico, utilizado na adimensionalização da coordenada normal à parede, o qual é dado por:

$$L_c = \frac{\lambda}{u_c} \quad (10)$$

Uma vez obtidos os parâmetros característicos do escoamento na subcamada viscosa, pode-se então, utilizando argumentos de análise dimensional, avaliar o comportamento do perfil médio de velocidade na região, onde as tensões turbulentas são as principais responsáveis pelo transporte de quantidade de movimento (Rosenhead, 1988) que a vorticidade média  $\bar{w}$  deve ser função dos seguintes parâmetros:

$$\bar{w} = f(\bar{w}_p, L_c, y) \quad (11)$$

onde  $\bar{w}_p$  é a vorticidade média na parede, isto implica que a vorticidade média na região completamente turbulenta junto à superfície sólida deve ser descrita por:

$$\bar{w} = \frac{1}{k} \frac{\bar{w}_p L_c}{y} \quad (12)$$

onde  $1/k$  é um coeficiente de proporcionalidade ( $k=0,41$ ) e utilizando a hipótese de camada limite podemos rescrever a relação (12) da forma:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{k} \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}}{y} \quad (13)$$

Resolvendo a equação acima obtêm-se a seguinte relação para o perfil de velocidade:

$$\bar{u} = \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}}{k} \left[ \ln \left( \frac{y}{L_c} \right) + 2,2 \right] \quad (14)$$

Na expressão acima, a constante de integração foi obtida assumindo-se que a equação (14) deve descrever o caso Newtoniano quando  $\tau_o = 0$ .

### 3. A EQUAÇÃO DO ATRITO

Uma relação para o coeficiente de atrito do fluxo sanguíneo no interior de um duto de raio  $R$  pode ser obtida utilizando-se a equação (14) na sua forma adimensional, a qual é mostrada abaixo para  $y = R - a$ :

$$\frac{1}{\sqrt{f} - \sqrt{\frac{2Y}{Re}}} = 4,0743 \log \left[ (1 - \tilde{a}) \left( \sqrt{\frac{Re^2 f}{8}} - \sqrt{\frac{Re Y}{4}} \right) \right] + \frac{5,5}{\sqrt{2}} - \frac{(1 - \tilde{a})(3 + \tilde{a})}{k\sqrt{8}} \quad (15)$$

onde,  $f$  é o fator de atrito de Fanning,  $\tilde{a}$  é o raio adimensional da região de escoamento empistonado,  $Y$  é o limite de escoamento adimensional e  $Re$  é o número de Reynolds, baseado no diâmetro do duto ( $D$ ) e na velocidade média  $V$ . A obtenção da equação (15) foi feita de modo semelhante a dedução da equação de Nikuradse para tubos lisos e fluidos Newtonianos. Sendo que neste caso uma nova velocidade característica foi introduzida a qual depende do limite de escoamento do fluido. Além disso, a equação (15) leva considera o efeito da região de escoamento empistonado representada por  $\tilde{a}$ , onde este parâmetro é função de o limite de escoamento adimensional  $Y$  do fluido.

$$\tilde{a} = \frac{2Y}{f Re} \quad (16)$$

onde, o limite de escoamento adimensional é dado por:

$$Y = \frac{\tau_o D}{\lambda V} \quad (17)$$

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

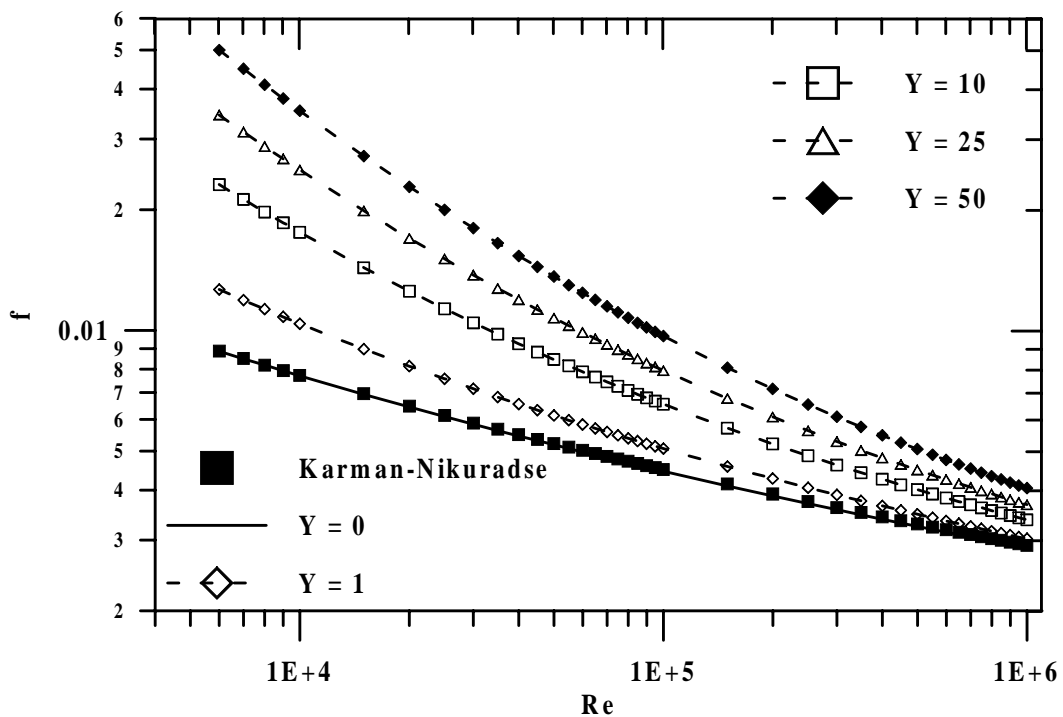
Nesta fase, será feita uma análise da influencia do limite de escoamento do fluido sobre a tensão na parede e no perfil de velocidade da equação (14). Na tabela 1 é mostrada a variação do fator de atrito de Fanning para vários valores do número de Reynolds e do limite de escoamento adimensional  $Y$ .

Nota-se o crescimento do fator de atrito provocado pelo aumento do limite de escoamento causando uma maior dificuldade do escoamento do sangue. Este fato indica que para valores elevados do limite de escoamento o trabalho desenvolvido por uma bomba (coração) para proporcionar o escoamento do sangue deve também ser elevado principalmente em dutos de pequenos diâmetros ou baixos números de Reynolds como pode ser visto na tabela 1. Outra importante consequência, seria os danos causados pelo aumento de pressão necessário para permitir o escoamento de sangue com grandes fatores de atrito. Este fato poderia causar o rompimento de veias ou artérias levando a graves consequências. Neste caso a equação (15) poderia ser utilizada para a obtenção de valores ou intervalos aceitáveis do limite de escoamento relacionando-se a pressão necessária para o escoamento com os valores máximos de tensão suportáveis pelas paredes das artérias.

**Tabela 1.** Fator de atrito de Fanning em função do número de Reynolds (  $Re$  ) e do limite de escoamento adimensional (  $Y$  )

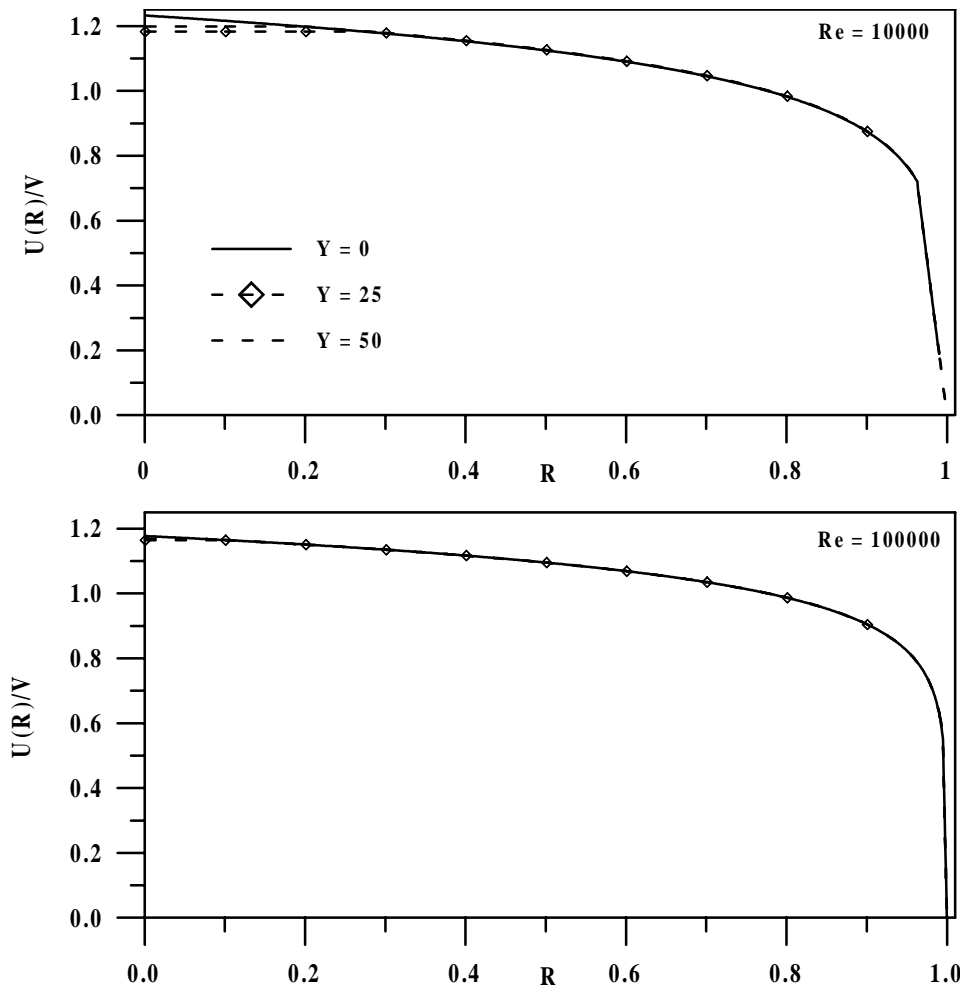
Re	Y				
	0	1.	10	25	50
10000	7.7078E-3	1.0391E-2	1.7562E-2	2.5136E-2	3.5311E-2
50000	5.1851E-3	6.1360E-3	8.4656E-3	1.0740E-2	1.3628E-2
100000	4.4564E-3	5.0735E-3	6.5446E-3	7.9420E-3	9.6792E-3

Na figura 1 é mostrada a distribuição do fator de atrito de Fanning em função do número de Reynolds para vários valores do limite de escoamento adimensional (  $Y$  ), assim como a comparação com os resultados da equação de Karman-Nikuradse. Pode-se observar uma excelente concordância dos resultados para  $Y = 0$  com os de Karman-Nikuradse. É notado uma forte influência do parâmetro  $Y$  no fator de atrito.



**Figura 1.** Fator de Atrito de Fanning em função do número de Reynolds (  $Re$  ) e do Limite de Escoamento Adimensional do Fluido (  $Y$  ).

Na figura 2 é mostrada uma comparação entre os perfis de velocidade. Pode-se notar que a influencia da região de escoamento empistonado no centro do duto é menos efetiva para grandes números de Reynolds. Este fato pode ser também notado observando-se a equação (16) na qual aparece claramente a relação inversa entre o parâmetro  $\tilde{a}$  e o número de Reynolds.



**Figura 2.** Perfis de Velocidade para  $Re = 10000$  e  $100000$  e  $Y = 0, 25$  e  $50$ .

## 5. CONCLUSÃO

No presente trabalho uma análise do escoamento turbulento de sangue próximo a superfícies sólidas foi apresentada, utilizando o modelo reológico de Casson para descrever o comportamento das tensões viscosas. Foi deduzida uma expressão para descrever a variação da velocidade média na região completamente turbulenta, sem a utilização de um modelo de turbulência para descrever as tensões turbulentas. Através dessa equação, foi deduzida uma relação para o fator de atrito de Fanning válida para o escoamento turbulento de sangue em dutos a qual considera os efeitos da região de escoamento empistonado no centro do duto. Foi mostrado que o acréscimo da tensão inicial provoca um aumento do fator de atrito o que pode causar diversas patologias.

A Eq. (16) pode ser utilizada em diversas aplicações, desde condição de contorno para escoamentos turbulentos complexos como os que ocorrem no interior do coração e através de válvulas, artificiais ou não, até casos mais simples como o cálculo da queda de pressão provocada pelo escoamento de sangue no interior de dutos. Vale ressaltar que uma comparação detalhada com dados experimentais deve ser feita, principalmente para a determinação do limite de escoamento.

## REFERÊNCIAS

- Colebrook, C. F., 1938, Turbulent flow in Pipes, vol. 11, pp. 133-156, London.
- Casson, N., 1959, In rheology of disperse systems, P. 84, ed. Pergamon Press C. C. Mill, New York.
- Oka, S., 1965, In Proc. of the Fourth International Congress on Rheology, ed. AL. Copley, part. 4, PP. 81-92, Wiley, New York.
- Brasil, A. C. P. J., Rosa, O. L. S. e Severo, C. A., 1998, Simulação por elementos finitos de escoamento de sangue, V Congresso Norte Nordeste de Engenharia Mecânica, Ceará.
- Rosenhead, L., 1988, Laminar boundary layers, ed. Dover Publications, Inc., New York.
- Stoltz, J.F., Strelfe, F Largan, A., 1970 Étude des courbes d'écoulement pour un fluide obéissant à l'équation de Casson. Application au sang, Vol.9, N 1 Journal de Mécanique.
- Rodkiewicz, C.M., Sinha, P. And Kennedy, J.S., 1990 On the Application of a Constitutive Equation for whole human blood, vol. 112, Journal of Biomechanical Engineering ASME.
- Liepsch, D. W., 1986 Flow in Tubes and Arteries A comparison, Biorheology, vol 23, p. 395.
- Caro, C. G., Pedley, T.J., Schroter, R.C. and Seed, W. A. 1978 The Mechanics of Circulation Chapter 10, p. 177 Oxford University Press Oxford.

# ANÁLISE DE MÉTODOS NUMÉRICOS USADOS NO ESTUDO DO ESCOAMENTO EM TROCADORES DE CALOR TUBO CAPILAR-LINHA DE SUÇÃO

**Paulo Eduardo Lopes Barbieri**  
**Marcos Rogério Barbazelli**  
**João Batista Aparecido**  
**André Luiz Seixlack**

Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica, 15385-000, Ilha Solteira, SP, Brasil. Email: [barbieri@dem.feis.unesp.br](mailto:barbieri@dem.feis.unesp.br)

## Resumo

No presente trabalho são analisados e comparados os métodos de integração numérica de Runge-Kutta de 4ª ordem com passo constante, de Runge-Kutta 5ª ordem com passo adaptativo e de Predição e Correção de 5ª ordem utilizados na solução das equações governantes do escoamento ao longo de trocadores de calor tubo capilar-linha de sucção. O modelo homogêneo é usado na modelagem do escoamento bifásico ao longo do tubo capilar. Nesse modelo as equações da conservação da quantidade de movimento e da energia para o tubo capilar são integradas na região de escoamento monofásico e bifásico. Na linha de sucção a equação da conservação da energia é integrada para se obter a temperatura do fluido refrigerante. Como o objetivo do problema é calcular a vazão em massa de refrigerante este conjunto de equações diferenciais ordinárias constituem um problema inverso, no qual a vazão em massa e a temperatura do refrigerante na saída da linha de sucção devem ser estimadas. Para essa estimativa foram comparados e analisados o método de Newton-Raphson, tradicionalmente utilizado, com o processo de estimativa de parâmetros que utiliza o método de minimização de Levenberg-Marquardt.

**Palavras-chaves:** tubo capilar, Runge Kutta, Newton-Raphson, Levenberg-Marquardt.

## 1. INTRODUÇÃO

O escoamento do refrigerante ao longo de um trocador de calor tubo capilar-linha de sucção constitui um problema de valor inicial, uma vez que os parâmetros, tais como a pressão e o grau de sub-resfriamento, são conhecidos na entrada do tubo capilar. Além disso esse escoamento é fortemente unidirecional e portanto as informações são transmitidas em apenas um sentido, o que equivale a dizer que o escoamento é parabólico para efeito de solução.

A solução das equações diferenciais, tanto na região monofásica como na região bifásica ao longo do tubo capilar e do trocador de calor, é obtida por integração numérica. O modelo usado neste trabalho calcula a vazão em massa,  $\dot{m}$ , conhecidos o comprimento do tubo e as condições de operação. O procedimento de cálculo é iterativo, uma vez que as equações de conservação, conforme descritas em Mezavila (1995), dependem da vazão em massa e, além disso, não se conhece a temperatura do refrigerante na saída da linha de sucção

( $T_{s,o}$ ). Dessa forma, inicialmente os valores de  $\dot{m}$  e  $T_{s,o}$  são estimados e o comprimento calculado do tubo capilar ( $L_{calc}$ ), juntamente com o valor da temperatura do refrigerante na entrada da linha de sucção ( $T_{s,i}$ ), são comparados com os seus respectivos valores medidos. Em seguida, os valores de  $\dot{m}$  e  $T_{s,o}$  são corrigidos usando-se um método de estimativa de parâmetros até que a convergência seja obtida. A análise dos métodos de solução, apresentada neste trabalho, utiliza o modelo proposto por Mezavila (1995), cujas equações são:

*Região Monofásica:*

i) Conservação da Quantidade de Movimento para o Tubo Capilar

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{f_L G^2 v_L}{2 d_{int}} \quad (1)$$

na qual  $z$  é a distância ao longo do tubo,  $p$  é a pressão,  $G$  é o fluxo de massa,  $v_L$  é o volume específico do líquido,  $d_{int}$  é o diâmetro interno do tubo capilar e  $f_L$  é o fator de atrito de Darcy, calculado neste trabalho pela equação de Churchill (1977).

ii) Conservação da Energia para o Tubo Capilar – Região do Trocador de Calor

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{1}{\dot{m} c_p} (UA'_{cs}) (T - T_s) \quad (2)$$

na qual  $c_p$  é o calor específico a pressão constante,  $T$  é a temperatura do refrigerante ao longo do tubo capilar,  $T_s$  é a temperatura do refrigerante ao longo da linha de sucção,  $\dot{m}$  é a vazão em massa e  $UA'_{cs}$  é o coeficiente global de transferência de calor entre o tubo capilar e a linha de sucção.

iii) Conservação da Energia para o Tubo Capilar – Regiões de Entrada e de Saída

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{1}{\dot{m} c_p} (UA'_{ca}) (T - T_a) \quad (3)$$

na qual  $T_a$  é a temperatura do meio ambiente e  $UA'_{ca}$  é o coeficiente global de transferência de calor entre o tubo capilar e o meio ambiente.

iv) Conservação da Energia para a Linha de Sucção

$$\frac{dT_s}{dz} = -\frac{1}{\dot{m} c_p} \left[ (UA'_{cs}) (T - T_s) + U_{sa} \pi D_s (T_a - T_s) \right] \quad (4)$$

na qual  $D_s$  é o diâmetro externo da linha de sucção e  $U_{sa}$  é o coeficiente global de transferência de calor entre a linha de sucção e o meio ambiente.

*Região Bifásica:*

i) Conservação da Quantidade de Movimento para o Tubo Capilar

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\frac{f_B}{2} \frac{G^2 v_m}{d_{int}} - G^2 \frac{dv_m}{dz} + G^2 (v_v - v_L) \frac{dx}{dz}}{1 + G^2 \left[ x \frac{dv_v}{dp} + (1-x) \frac{dv_L}{dp} \right]} \quad (5)$$



na qual  $v_m = [(1-x)v_L + xv_v]$  é o volume específico da mistura líquido-vapor,  $v_L$  é o volume específico do líquido,  $v_v$  é o volume específico do vapor,  $x$  é o título e  $f_B$  é o fator de atrito na região bifásica, calculado pelo modelo apresentado por Mezavila (1995).

ii) Conservação da Energia para o Tubo Capilar – Região do Trocador de Calor

$$\frac{dx}{dz} = \frac{-\frac{1}{\dot{m}} \frac{dq_{cs}}{dz} - \left\{ x \frac{dh_v}{dp} + (1-x) \frac{dh_L}{dp} + G^2 v_m \left[ x \frac{dv_v}{dp} + (1-x) \frac{dv_L}{dp} \right] \right\} \frac{dp}{dz}}{h_{LV} + G^2 v_m v_{LV}} \quad (6)$$

na qual  $h_L$  é a entalpia do líquido,  $h_v$  é a entalpia do vapor, o sub-índice LV indica a diferença entre o valor da propriedade no estado de vapor saturado e no estado de líquido saturado e  $q_{cs}$  é o calor trocado entre o tubo capilar e a linha de sucção, dado por  $q_{cs} = (UA'_{cs})(T - T_s)$ .

iii) Conservação da Energia para o Tubo Capilar – Regiões de Entrada e Saída

$$\frac{dx}{dz} = \frac{-\frac{1}{\dot{m}} \frac{dq_{ca}}{dz} - \left\{ x \frac{dh_v}{dp} + (1-x) \frac{dh_L}{dp} + G^2 v_m \left[ x \frac{dv_v}{dp} + (1-x) \frac{dv_L}{dp} \right] \right\} \frac{dp}{dz}}{h_{LV} + G^2 v_m v_{LV}} \quad (7)$$

na qual  $dq_{sa} = U_{sa}(\pi D_s dz)(T_a - T_s)$ , representa o calor trocado por convecção natural entre o capilar e o meio ambiente.

## 1.1 Solução das equações diferenciais

Um método bastante tradicional usado na solução de problemas parabólicos é o método de Runge Kutta de 4ª ordem, através do qual a função integrante é calculada quatro vezes em cada intervalo de integração ( $\Delta z$ ), antes da obtenção do valor final da variável dependente na saída do intervalo.

Uma versão mais elaborada é o método de Runge Kutta de 5ª ordem de passo adaptativo, que apresenta melhor eficiência, pois utiliza passos que atendam a um erro local estipulado. O maior inconveniente do passo adaptativo é, justamente, como controlar o passo, ou seja, o critério adotado para aumentar ou reduzir o intervalo de integração. O método de Runge Kutta de 5ª ordem de passo adaptativo aqui avaliado é descrito por Chapra e Canale (1988).

Além dos métodos anteriores, foi avaliado o método de Predição e Correção de 5ª ordem usando o método de Adams-Bashforth explícito como preditor e o método de Adams-Moulton implícito como corretor. A grande vantagem do método de predição e correção é o uso de informações de passos anteriores o que melhora sua eficiência. A utilização de informações de passos anteriores impõe o uso de um outro método, normalmente o de Runge-Kutta, para gerar os  $n$  pontos necessários para inicializar o procedimento de solução.

Os três métodos anteriores, em conjunto com os métodos de determinação de  $\dot{m}$  e  $T_{s,o}$ , a serem discutidos no próximo item, foram testados e os resultados são apresentados no Item 2.

## 1.2 Métodos de estimativa de parâmetros

Um método bastante usado na realização da estimativa dos valores para  $\dot{m}$  e  $T_{s,o}$  é o método de Newton-Raphson. Entretanto, em alguns casos, esse método apresenta grande instabilidade, fazendo com que o processo de cálculo oscile em torno de um ponto ou não convirja em outros casos. Na tentativa de eliminar o problema da instabilidade é usado o método de Levenberg-Marquardt, apresentado no item a seguir.

### 1.2.1 Estimativa de parâmetros não-lineares: Método de Levenberg-Marquardt

Considerando o problema de minimização de uma função  $f$  de duas variáveis, o procedimento de cálculo consiste em encontrar primeiramente uma direção adequada ( $t$ ), dado um vetor  $s$ , conhecido como “semente”, tal que:  $f(s+\phi t)$  minimize a função, sendo  $\phi \in \mathbb{R}$  e  $\mathbb{R} = \{\phi: a \leq \phi \leq b\}$ .

No método dos mínimos quadrados, a função  $f$  deve possuir a seguinte forma quadrática,

$$F(s) = \sum_{i=2}^m f_i^2 \quad (8)$$

na qual  $f(s)$  e  $F(s)$  são, respectivamente, definidos como:  $f(s) = [f_1(s), f_2(s)]^T$  e  $F(s) = [f^T(s) f(s)]$ .

No caso em estudo, o vetor  $s$  e a função  $F(s)$  são, respectivamente, representados por,

$$s = [\dot{m}^*, T_{s,o}^*]^T \quad (9)$$

$$F(s) = [L(\dot{m}^*, T_{s,o}^*) - L_A]^2 + [T_{s,in}(\dot{m}^*, T_{s,o}^*) - T_{s,inA}]^2 \quad (10)$$

nas quais  $\dot{m}^*$  é a vazão em massa estimada,  $T_{s,o}^*$  é a temperatura estimada na saída da linha de sucção,  $L$  é o comprimento do tubo capilar,  $T_{s,i}$  é a temperatura calculada na entrada da linha de sucção. O subíndice  $A$  indica valores medidos.

A direção  $t_k$  é a solução do sistema linear dado por,

$$\left( J_k^T J_k + \phi_k I \right) t_k = -J_k^T f_k, \quad \phi_k \geq 0 \quad (11)$$

na qual  $f_k$  é vetor das duas funções (Eq. 10),  $J_k$  é a matriz Jacobiana das duas funções,  $\phi_k$  é o parâmetro de Levenberg-Marquardt, inicialmente igual a 0,01 e  $I$  é a matriz identidade da mesma ordem que o número de variáveis da função.

Uma vez encontrada a direção  $t_k$ , o próximo ponto, considerando  $\phi = 1$ , é dado por,

$$s_{k+1} = s_k + t_k \quad (12)$$

O método utiliza a norma do vetor gradiente em cada iteração como critério de parada, comparando-a com uma tolerância  $\xi$  pré-estabelecida.

O método de Levenberg-Marquardt utiliza um parâmetro  $\phi_k$ , que no algoritmo é associado a um outro parâmetro  $\gamma=5$ , que é aplicado utilizando-se o critério dado por,

$$\begin{aligned} F(s_{k+1}) \geq F(s_k) &\Rightarrow \phi_{k+1} = \phi_k \gamma \\ F(s_{k+1}) < F(s_k) &\Rightarrow \phi_{k+1} = \phi_k / \gamma \end{aligned} \quad (13)$$

Assim, quando  $\phi_k \rightarrow 0$ ,  $t_k$  é o mesmo do método Gauss-Newton e quando  $\phi_k \rightarrow \infty$ , o termo  $\phi_k I$  domina o termo  $J_k^T J_k$  e, portanto,  $t_k = -J_k^T f_k / \phi_k$  representa um passo infinitesimal na direção da descida máxima.

O procedimento computacional, utilizando o método de Levenberg-Marquardt, sendo que  $s_o$ ,  $n_g$  e  $\xi$  são, respectivamente, a semente, a norma do vetor gradiente e a tolerância desejada, é dado por,

- 1) Entre com os valores de:  $s_o$  e  $\xi$ , ajuste  $\phi_o=0,01$  e  $\gamma=5$  e faça  $\phi_k = \phi_k / \gamma$
- 2) Encontre  $t_k$  resolvendo a equação:  $\left( J_k^T J_k + \phi_k I \right) t_k = -J_k^T f_k$
- 3) Calcule  $s_{k+1}$ , fazendo:  $s_{k+1} = s_k + t_k$

- 4) Determine  $F_{k+1}$
- 5) Se  $F_{k+1} > F_k$ , faça  $\phi_k = \phi_k \gamma$ , e volte ao passo 3;
- 6) Se  $F_{k+1} < F_k$ , faça  $\phi_{k+1} = \phi_k$ ;
- 7) Calcule o módulo de  $n_{g,k+1}$
- 8) Se  $\|n_{g,k+1}\| < \xi$ , volte ao passo 2;
- 9) Se  $\|n_{g,k+1}\| \geq \xi$ , fim do algoritmo.

## 2. RESULTADOS E ANÁLISE

Nos testes realizados, os métodos de integração numérica e os de estimativa de parâmetros foram combinados originando seis casos. A nomenclatura abaixo indica o tipo de método de estimativa de parâmetros e o método de integração numérica,

1. NR-RK 4<sup>a</sup> - Newton-Raphson + Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem;
2. NR-RK 5<sup>a</sup> - Newton-Raphson + Runge-Kutta de 5<sup>a</sup> ordem com passo adaptativo;
3. NR-PC - Newton-Raphson + Predição e Correção;
4. LM-RK 4<sup>a</sup> - Levenberg-Marquardt + Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem;
5. LM-RK 5<sup>a</sup> - Levenberg-Marquardt + Runge-Kutta de 5<sup>a</sup> ordem com passo adaptativo;
6. LM-PC - Levenberg-Marquardt + Predição e Correção.

Os resultados calculados usando-se as combinações anteriores foram comparados com os resultados experimentais de Melo *et al.* (1998) e Peixoto (1994). Vinte e oito resultados experimentais de Melo *et al.* (1998) foram inicialmente utilizados para a comparação dos resultados calculados pelas seis combinações entre os métodos. Em todos os casos testados uma diferença inferior a 0,3% foi encontrada entre os valores de vazão em massa calculados.

Na Tab. 1 são apresentados seis das comparações realizadas, mostrando-se as vazões em massa experimentais, vazões em massa calculadas e o tempo de processamento dos casos testados. Percebe-se claramente que independente das combinações entre os métodos de integração e os métodos de estimativa de parâmetros utilizados, os resultados calculados são muito próximos entre si e apresentam uma boa concordância com os resultados experimentais.

A principal diferença entre os métodos testados está no tempo de processamento, que pode variar de alguns segundos até mais de uma hora (vide Tab. 1).

Dentre os métodos comparados, os que apresentaram menor tempo de processamento foram os casos 2 e 5 (NR-RK 5<sup>a</sup> e LM-RK 5<sup>a</sup>), ou seja, os programas que utilizaram como método de integração numérica o método de Runge-Kutta de 5<sup>a</sup> ordem com passo adaptativo. Em comparação com o método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem, que usualmente é usado em modelos de escoamento em tubos capilares, o método de Runge-Kutta de 5<sup>a</sup> ordem com passo adaptativo chega a apresentar-se, em média, quatro vezes mais rápido.

De um modo geral, no escoamento ao longo de tubos capilares, o tamanho do passo de integração precisa ser refinado apenas no início da região de escoamento bifásico, sendo possível então, um maior passo de integração durante grande parte do escoamento. O método de Runge-Kutta de 5<sup>a</sup> ordem com passo adaptativo atende a esse processo de ajuste do tamanho do passo de integração, apresentando, por isso, menor tempo de processamento.

Analisando-se os dados da Tab. 1 e a Fig. 1, na qual o tempo de processamento é apresentado em função da vazão em massa calculada, observa-se que o método de Newton-Raphson é o mais rápido na maioria dos casos. Para comprovar esse fato, comparou-se os métodos de estimativa de parâmetros de Newton-Raphson e Levenberg-Marquardt, usando-se vários casos experimentais apresentados por Peixoto (1994). Tais casos apresentam uma extensão da região bifásica maior que os casos experimentais de Melo *et al.* (1998) e, em alguns casos, até o fenômeno de recondensação total é observada. Uma maior região bifásica e a ocorrência de recondensação total dificultam a convergência dos valores de  $\dot{m}$  e  $T_{s,o}$ , implicando em um tempo de processamento maior.

Tabela 1. Comparação entre as vazões em massa calculadas por seis combinações entre os métodos de estimativa de parâmetros e os métodos de resolução de equações diferenciais com os resultados experimentais de Melo *et al.* (1998).

Caso experimental	$\dot{m}_{exp}$ (kg/h)	$\dot{m}_{calc}$ (kg/h)					
		Tempo de processamento (s)					
		NR-RK 4 <sup>a</sup>	NR-RK 5 <sup>a</sup>	NR-PC	LM-RK 4 <sup>a</sup>	LM-RK 5 <sup>a</sup>	LM-PC
C15H028	7,29	7,82 / 105	7,81 / 45	7,82 / 71	7,82 / 2826	7,81 / 69	7,82 / 3949
C15H033	5,58	5,74 / 125	5,74 / 65	5,74 / 713	5,74 / 369	5,74 / 76	5,75 / 2498
C15H040	5,44	5,77 / 169	5,76 / 52	5,77 / 65	5,77 / 1318	5,77 / 45	5,76 / 3413
C13H065	1,81	2,18 / 278	2,18 / 58	2,18 / 334	2,18 / 960	2,18 / 84	2,18 / 870
C13H066	2,55	3,13 / 184	3,12 / 24	3,13 / 132	3,13 / 837	3,12 / 70	3,12 / 2200
C13H070	2,62	3,17 / 214	3,16 / 65	3,17 / 92	3,17 / 542	3,16 / 77	3,17 / 4090

Na Tab. 2 observa-se que, dentre os métodos de estimativa de parâmetros, existem casos em que o método de Newton-Raphson apresenta-se mais eficaz na determinação dos valores da vazão em massa e da temperatura da saída da linha de sucção, em função de sua convergência quadrática, ou seja, em algumas situações esse método converge com maior rapidez. O método de Levenberg-Marquardt, por ser mais "robusto", não apresenta os problemas de divergência e de oscilação em torno de um ponto, que algumas vezes o método de Newton-Raphson apresenta.

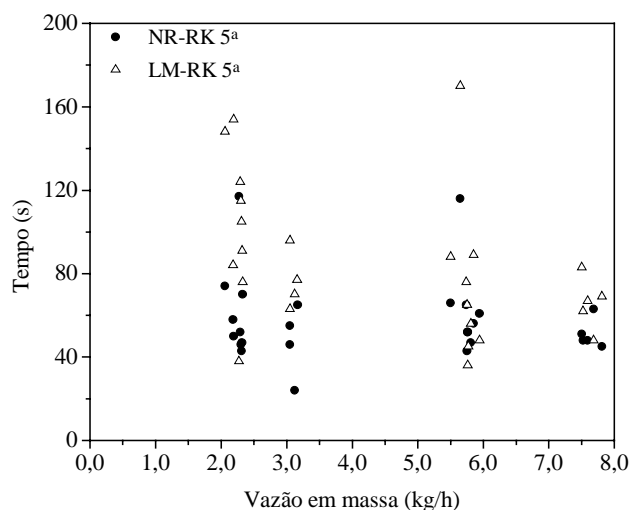


Figura 1. Comparação entre os tempos de processamento por faixa de vazão em massa calculada pelos casos NR-RK 5<sup>a</sup> e LM-RK 5<sup>a</sup>.

A Tab. 2 apresenta o tempo de convergência computacional para cinco resultados experimentais de Peixoto (1994). Nesses casos, manteve-se fixa a temperatura de entrada da linha de sucção ( $T_{s,in}=-4,7$  °C), a pressão de entrada ( $p_e=1150$  kPa) e as características físicas do trocador de calor tubo capilar-linha de sucção ( $L=2,057$  m;  $L_e=0,533$  m;  $L_{tc}=1,003$  m) e variou-se o grau de sub-resfriamento ( $\Delta T_{sub}$ ).

Tabela 2. Comparação entre as vazões em massa calculadas pelos casos NR-RK 5<sup>a</sup> e LM-RK 5<sup>a</sup> com os resultados experimentais de Peixoto (1994).

$\Delta T_{sub}$ (°C)	$\dot{m}_{exp}$ (kg/h)	$\dot{m}_{calc}$ (kg/h) Tempo de processamento(s)	
		NR-RK 5 <sup>a</sup>	LM-RK 5 <sup>a</sup>
1,25	7,00	$\frac{5,57}{741}$	$\frac{5,57}{266}$
1,81	7,77	$\frac{5,82}{825}$	$\frac{5,82}{416}$
4,31	9,00	$\frac{6,86}{674}$	$\frac{6,86}{291}$
5,93	8,33	$\frac{7,07}{19}$	$\frac{7,07}{221}$
7,62	9,28	$\frac{7,21}{11}$	$\frac{7,21}{149}$
8,31	8,31	$\frac{7,28}{17}$	$\frac{7,28}{48}$

Na Fig. 2 mostra-se o perfil do título ao longo do tubo capilar para um caso experimental de Peixoto (1994), no qual  $\Delta T_{sub}=2,41$  °C. Nesse caso, a vazão em massa calculada e a vazão em massa medida são, respectivamente, iguais a 6,09 kg/h e 7,53 kg/h. Após a recondensação total, observa-se uma pequena diferença entre os perfis de título calculados, mas não o suficiente para afetar os valores de vazão em massa calculados.

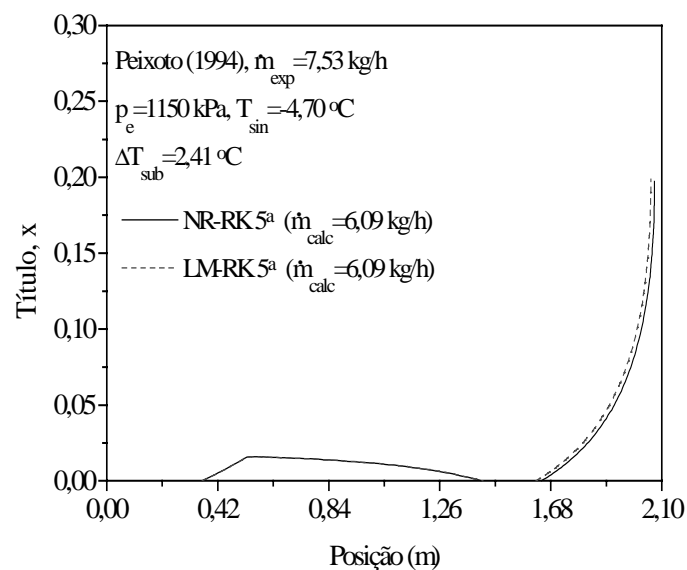


Figura 2. Perfil de título ao longo do tubo capilar.

Na Tab. 3 apresentam-se os resultados de vazão em massa e respectivos tempos de processamento quando a vazão em massa, inicialmente arbitrada ("semente"), é alterada, mantendo-se fixos os demais parâmetros e usando as combinações entre os métodos NR-RK 5ª e LM-RK 5ª, para um caso experimental apresentado por Melo *et al.* (1998). Verifica-se que ambos apresentam regiões de valores de vazões em massa em que um método é mais eficaz do que o outro.

Tabela 3. Influência da vazão em massa estimada inicialmente: caso C15H022 (Tubo capilar A, trocador de calor 01) (Melo *et al.*, 1998).

Vazão Estimada Inicialmente (kg/h)	$\dot{m}_{\text{calc}}$ (kg/h) / Tempo de processamento(s)	
	NR-RK 5ª	LM-RK 5ª
7,24	$\frac{7,58}{58}$	$\frac{7,59}{55}$
6,00	$\frac{7,58}{73}$	$\frac{7,59}{76}$
4,76	$\frac{7,58}{77}$	$\frac{7,59}{50}$
8,48	$\frac{7,58}{59}$	$\frac{7,59}{63}$
9,72	$\frac{7,58}{65}$	$\frac{7,59}{55}$

Nas Figs. 3 e 4 são apresentadas, respectivamente, uma análise de confiabilidade das combinações NR-RK 5ª e LM-RK 5ª. Usando-se essas combinações e escolhendo-se o caso experimental C15H022 (Melo *et al.*, 1998), as soluções são inicialmente obtidas a partir dos mesmos valores arbitrados da vazão em massa e da temperatura de saída da linha de sucção ("sementes") e o resultado final é considerado como exato. Foram criados dois conjuntos de dez elementos cuja média é zero e a variância ( $\sigma^2$ ) da ordem da incerteza de medição da vazão em massa (0,03 kg/h) e da temperatura de saída da linha de sucção (0,2 °C). Esses conjuntos de valores foram somados, respectivamente, à vazão em massa e à temperatura de saída da linha de sucção, arbitrados inicialmente ("sementes"), e o programa computacional foi executado dez vezes para cada combinação. Os resultados foram então plotados como valores estimados e apresentaram-se muito próximos do valor exato, ou seja, não houve grande dispersão dos pontos, demonstrando que os métodos apresentam boa confiabilidade (vide Figs. 3 e 4).

Os valores das vazões em massa e das temperaturas de saída da linha de sucção calculadas a partir dos valores originalmente arbitrados para o caso NR-RK 5ª foram, respectivamente, 7,5840 kg/h e 36,4758 °C e para o caso LM-RK 5ª foram, respectivamente, 7,5937 kg/h e 36,1974 °C. O valor médio para a vazão em massa calculada e a variância para o caso NR-RK 5ª são, respectivamente, 7,5841 kg/h e 0,084 e para o caso LM-RK 5ª são, respectivamente, 7,5838 kg/h e 0,019. O valor médio para  $T_{s,o}$  calculado e a variância para o

caso NR-RK 5ª são, respectivamente, 36,4759 °C e 0,0108 e para o caso LM-RK 5ª são, respectivamente, 36,1970 °C e 0,0408.

É importante salientar que todos os resultados foram obtidos usando-se um computador com a configuração Pentium II, 450 MHz e 64 Mb RAM.

Após a análise das Tabs. 1 a 3 e das Figs. 1 a 4 verifica-se que o caso LM-RK 5ª apresentou um melhor conjunto de resultados e maior estabilidade numérica que o método de Newton-Raphson sendo, portanto, sua utilização aconselhável na modelagem do escoamento em trocadores de calor tubo capilar-linha de sucção usando-se o modelo homogêneo.

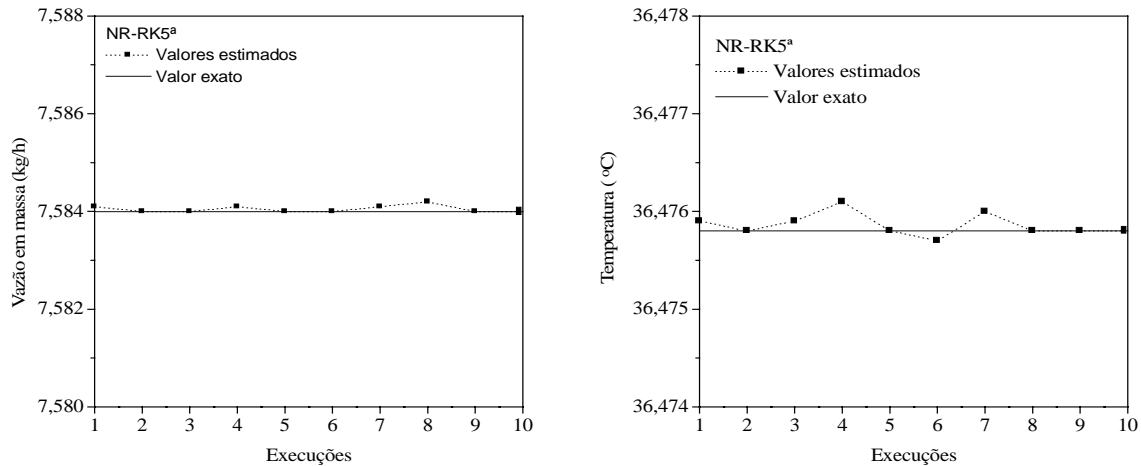


Figura 3. Teste de confiabilidade do caso NR-RK 5ª.

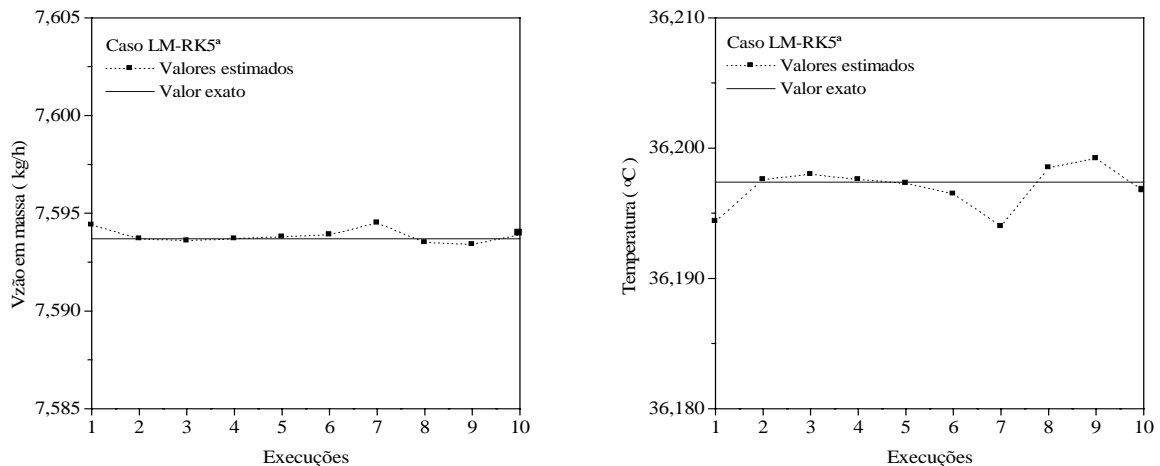


Figura 4. Teste de confiabilidade do caso LM-RK 5ª.

### 3. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo suporte financeiro para a realização deste trabalho.

### 4. REFERÊNCIAS

- Chapra, C.S. and Canale, P.R., 1988, "Numerical Methods for Engineers", Editora McGraw-Hill Ltda, 2ª edição, EUA.
- Churchill, S. W., 1977, "Friction Factor Equation Spans All Fluid Flow Regimes", Chemical Engineering, vol. 84, pp. 91-92.

- Mezavilla, M.M., 1995, "Simulação do Escoamento de Fluidos Refrigerantes em Tubos Capilares Não-Adiabáticos", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 120 p.
- Melo, C., Mendonça, K.C. e Mezavila, M.M., 1998, "Trocadores de Calor Tubo Capilar-Linha de Sucção do Tipo Lateral: Simulação e Experimentos", Anais – V Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste – VCEM-NNE, Vol. 3, pp. 195-202.
- Peixoto, R.A., 1994, "Análise Teórico-Experimental do Escoamento do Fluido Refrigerante HFC-134a em Trocadores de Calor Tubo Capilar-Linha de Sucção Utilizados em Sistemas de Refrigeração", Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Escola Politécnica da USP, São Paulo, 185p.



# MAXIMUM AND AVERAGE VELOCITIES IN PIPE FLOWS - AN EXPERIMENTAL STUDY

**Rudnei José Wittmann**

**Alexis George de Borges Pan**

**Alex Guimarães Azevedo, and**

**Maurício Pazini Brandão**

Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE) e Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)  
12228-904 - Centro Técnico Aeroespacial (CTA) – São José dos Campos, SP, Brasil.

E-mail: pazini@aer.ita.cta.br

## **Summary**

This work deals with an experimental study of fully developed isothermal turbulent gas flows inside a 47 mm diameter pipe, with Reynolds numbers in the range  $1,000 < Re < 100,000$  and Mach number  $M < 0.13$ . This Reynolds number range encompasses the laminar and turbulent flow regimes. Instead of just correlating traditional pipe flow variables with Reynolds number, as usually found in the literature, the present work correlates the average velocity with the velocity in the center of the pipe cross section. These velocities have been both obtained experimentally, by using flow meters and Pitot tubes. It has been observed that, for each pair temperature-pressure, there is a one-to-one relation between these velocities, provided we have fully developed flows.

**Keywords:** Pipe Flows, Isothermal Flows, Laminar and Turbulent Flows, Experimental Correlation.

## **1. INTRODUCTION**

The flow inside pipes is a physical problem that inspires high economic interest from different industrial branches. Among applications of this problem, we can quote, for example, the transportation of petroleum and its derivatives through pipe systems covering extensions of hundreds of kilometers. Another similar example is the transportation of natural gas through pipe systems of international range. We can also mention several segments of the oil industry, the supply of natural gas to consumers, and general flows of gases or liquids in refrigeration systems.

In this work, we consider an experiment where air passes through a pipe in steady state and at low velocities. Within this framework, the isothermal and incompressible hypotheses are adequate representative physical models for the flows. For this purpose, after laying down theoretical considerations for the laminar and turbulent flow of incompressible fluids, the methodology for the experiment is described. In the sequel, the collected data is displayed and analyzed. From this analysis, it can be concluded that a Pitot tube can be used with advantages with respect to traditional laminar flow meters by providing essentially the most valuable information with lower head losses and at lower costs.

## 2. THEORETICAL BACKGROUND

### 2.1. Incompressible fluid theory

The fully developed isothermal flow of an incompressible fluid inside a horizontal tube of constant cross section may be described by a simplified form of the Navier-Stokes equations. Let us consider, for the purpose of analysis, a Cartesian coordinate system whose  $x$ -axis is aligned with the tube centerline. In this one-dimensional flow problem, the fluid has no velocity in the  $y$  and  $z$  directions. Then, the  $v$  and  $w$  fluid velocity components are considered as non-existing. Only the velocity component  $u$ , in the  $x$ -direction, is allowed to vary as a function of the flow itself. Furthermore, the flow is considered here steady. Thus, all derivatives of fluid variables with respect to time vanish. Finally, the flow is fully developed, meaning that the  $u$  velocity component does not change along the  $x$  direction.

Under the hypothetical conditions just described, if we use another set of cylindrical coordinates  $(x, r, \theta)$ , where  $x$  is the direction of the tube centerline – coincident with the  $x$  rectangular coordinate – the continuity equation becomes

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \dot{r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

From the analysis of this equation, we reach the conclusion that in this fully developed isothermal flow there is only one velocity component,  $u = u(r)$ , not existing any flow in the radial direction. Such flow is said to be axisymmetric.

The momentum differential equation in cylindrical coordinates now reduces to

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{dp}{dx} + \rho g_x + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tau) \quad (2)$$

where  $\tau$  can represent either laminar or turbulent shear,  $\rho$  is the air specific mass,  $p$  is the static pressure, and  $g$  is the local gravity acceleration.

With a straightforward procedure, we can integrate equation (2) to find out the shear distribution across the pipe, by using the fact that  $\tau = 0$  at  $r = 0$ . The result of this procedure is

$$\tau = \frac{1}{2} r \frac{d}{dx}(p + \rho g z) = (\text{constant}) (r) \quad (3)$$

Thus, this result shows that the shear varies linearly from the centerline to the wall, for either laminar or turbulent flows.

For internal flows in ducts, another important non-dimensional number, obtained through dimensional analysis considerations, is the Darcy friction factor  $f$ . This factor can be represented in many ways. In this work it will assume the following form:

$$\frac{8 \tau_w}{\rho V^2} = f = F \left( \text{Re}, \frac{\varepsilon}{d} \right) \quad \text{Re} = \frac{\rho V d}{\mu} \quad (4)$$

where  $d$  is the diameter of the tube cross section,  $V$  is the average velocity of the flow,  $\tau_w$  is the shear at the tube wall, and  $\text{Re}$  stands for the flow Reynolds number.

### 2.2. Laminar flow case

If one solves this problem for the fully developed pipe flow in the laminar case, one obtains an exact expression for the velocity profile, which is given by

$$u = \frac{-1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2) \quad (5)$$

In this result,  $R$  is the radius of the pipe and  $\mu$  is the fluid viscosity coefficient.

If one solves the problem for the average and the maximum velocities, we obtain that the first is half of the second, i.e.

$$V = \frac{1}{2} u_{\max} \quad (6)$$

There is an exact theoretical relation for the laminar Darcy friction factor, which is given by

$$f = \frac{64 \mu}{\rho V d} = \frac{64}{\text{Re}} \quad (7)$$

### 2.3. Turbulent flow case

For turbulent flows, it is much harder to solve the differential equations displayed in section 2.1. This higher difficulty is an intrinsic characteristic of the very nature of turbulent flows. In a certain moment of the calculation process, we obtain two indefinite constants, whose values should be defined empirically. A first reasonable proposal for their values has been made by Nikuradse (1933). In this work we have used the values  $k = 0.41$  and  $B = 5.0$  for these constants, as suggested by Knudsen (1958):

$$\frac{u(r)}{u^*} \cong \frac{1}{k} \ln \frac{(R-r) u^*}{\nu} + B \quad u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (8)$$

In consequence, we obtain

$$V = \frac{u_{\max}}{1 + 1.33\sqrt{f}} \quad (9)$$

The turbulent Darcy friction factor cannot be obtained theoretically in this case. Moody, in 1944, as described by Shames (1973) and by White (1994), plotted, over several experiments, what is now known as the Moody chart for pipe friction. This chart can be obtained through the following formula:

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -2.0 \log \left( \frac{\varepsilon/d}{3.7} + \frac{2.55}{\text{Re} f^{1/2}} \right) \quad (10)$$

This result is an accepted design formula for turbulent friction. Its accuracy is known to be  $\pm 15$  percent for design calculations of flows where the Reynolds numbers  $\text{Re} < 10^8$  and  $0.05 < (\varepsilon/d) < 10^{-6}$ . Here,  $\varepsilon$  is a parameter associated to the roughness of the wall.

There is an alternate formula, given in an explicit way, that yields results less than 2 percent different from those provided by equation (10). This formula reads as follows:

$$\frac{1}{f^{1/2}} \approx -1.8 \log \left( \frac{6.9}{\text{Re}} + \left( \frac{\varepsilon/d}{3.7} \right)^{1.11} \right) \quad (11)$$

### 3. EXPERIMENTAL METHODOLOGY

For the present experimental investigation, a continuous atmospheric airflow generator, designed and built in the Aeronautical Systems Division at the Aeronautics and Space Institute (ASA-IAE), has been used. This generator channels the flow through an aeronautic tube that is 30 m long, until the flow gets to the outflow regulator valve. This valve is responsible for the manual control of the flow in the test line. This apparatus makes the flow to be continuous and facilitates the attainment of the steady state. Permanent regimes are quickly obtained, in a matter of few seconds.

The next step consists in making the flow to pass through the element being tested. The test specimen is a tube smooth in the interior, with constant cross section, where a Pitot probe is conveniently mounted in the central longitudinal axis. This Pitot probe provides us with the proper means of measuring the flow maximum velocity. After this, the flow passes through a laminar flow element, called Meriam. Figure 1 presents photos of these main experimental devices. Further details of the laminar flow meters and of the entire set-up used in the experiment are given in Figures 2 and 3.

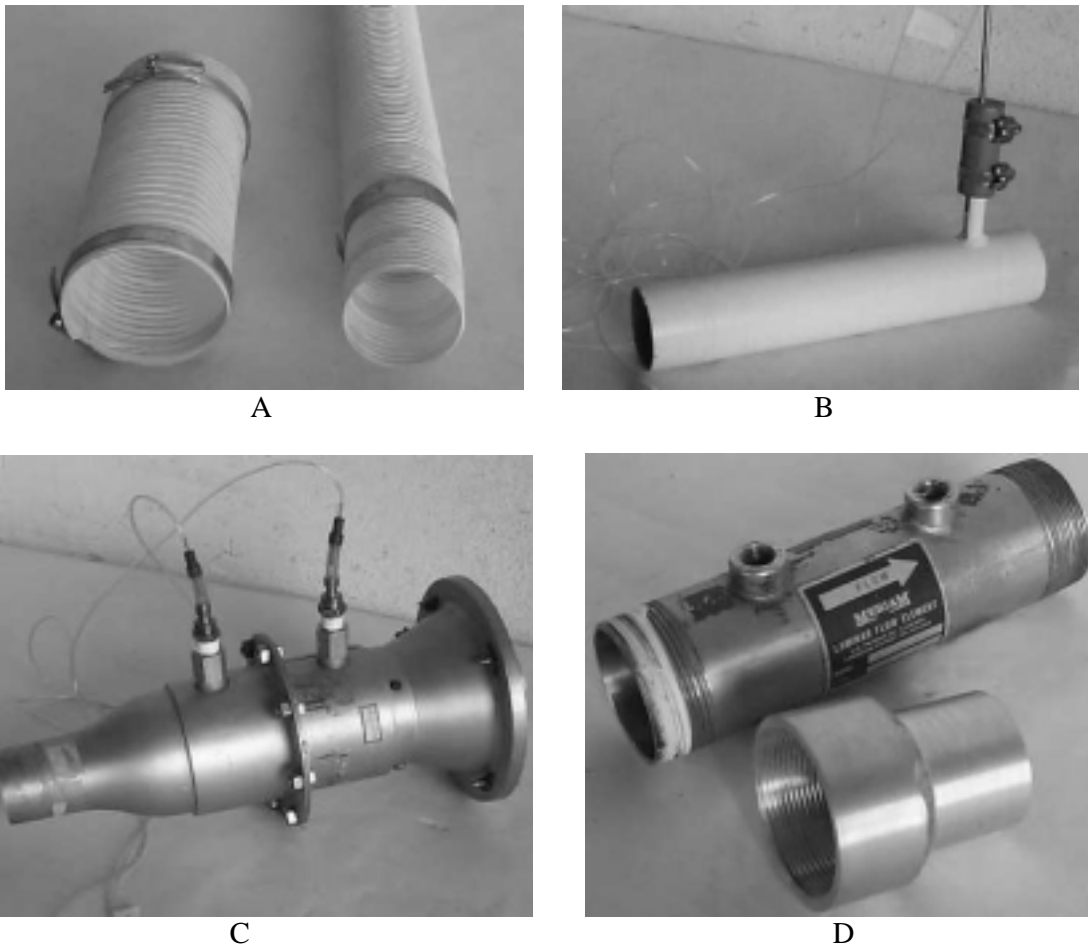


Figure 1. Main devices used in the experiment: A) aeronautical hoses; B) Pitot probe installed in a rigid tube; C) Laminar flow meter Meriam 50MC2-2SF; D) Laminar flow meter Meriam 50MH10-2.

Since there is no source or sink of air in the way between the valve and the laminar element, and since the flow is steady, the airflow rate is the same at each cross section along the test line. This airflow rate divided by the area of the cross section gives the average velocity of the flow in the section.

Therefore, by knowing the dimensions of the pipe cross section where the Pitot probe is located, we can get the maximum air velocity from the Pitot data, as well as the average velocity from the airflow data in that cross section.

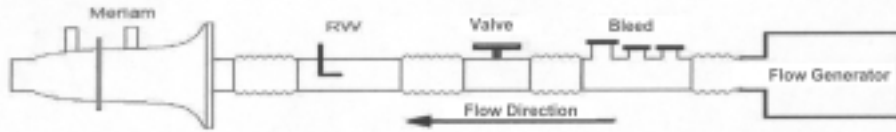


Figure 2. Experimental set-up without honeycomb and with the laminar flow meter Meriam 50MC2-2SF.

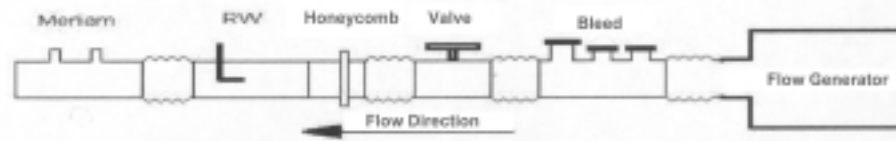


Figure 3. Experimental set-up with honeycomb and with the laminar flow meter Meriam 50MH10-2.

The measurement techniques used in this experiment have followed the recommendations given by Doebelin (1983) and Figliola (1995). More details about the experimental set-up can be obtained from a report by Pan (1999).

Four different experiments have been conducted, as described in Table 1:

Table 1 : Scheme of the experiments conducted.

Experiments	Laminar Element	Use of honeycomb?
1 and 2	50MH10-2	no / yes
3 and 4	50MC2-2SF	no / yes

Honeycomb may be used to turn more homogeneous the flow inside the pipe. In order to determine the influence of this option, Table 1 shows that the use of two different laminar elements has been repeated with and without honeycomb. The results obtained in the four experiments are described in the next section` .

#### 4. DATA AND ITS CALCULATION

Both the Pitot tube and the laminar elements collect data and furnish as output, in each case, a pressure difference  $\Delta p$ . This difference is evaluated by a pressure transducer together with a voltmeter, both coupled to a stabilized current generator.

The pressure transducer has been calibrated using a Betz manometer of 0.05 mm H<sub>2</sub>O precision as a standard reference. The laminar elements have their own calibration curves provided by the manufacturer

In summary, the steps taken to obtain the desired measurements are:

1. read, from the laminar element, in the voltmeter, a voltage in mV, deducting the zero value;
2. with the calibration curve of the transducer, the associated pressure difference  $\Delta p$  is obtained;
3. with  $p$  and  $T$  (ambient values) and the Meriam calibration curve, we get the flow rate in cubic meters per minute;
4. if we divide the previous result by the tube cross sectional area, we get the flow average velocity;
5. the steps 1 and 2 are repeated, but now taking readings from the Pitot tube;
6. with  $p$  and  $T$  (ambient values again) we obtain the maximum velocity; and
7. a correction for low Reynolds numbers following Anderson (1991) is applied and the final maximum velocity value is obtained.

## 5. RESULTS

The velocity range that has been used in the experiment was from 0 to 43 m/s, corresponding to Mach numbers from 0 to 0.13. The tube had a diameter  $d$  of 0.047 m. The associated Reynolds number range was  $10^3 < Re < 10^5$ . Within this framework, the incompressible flow theory can be used with propriety.

According to White (1994), the roughness  $\epsilon$  inside the tube is about 0.15 mm. So, the relation  $\epsilon/d$  becomes 0.003 (0.3%). If we apply this parameter value in equation (10), and, then, subsequently in equation (8), we obtain the theoretical relation between  $Re$  and  $V/u_{\max}$ , for this experimentation.

The relation between  $\Delta p$  for the Pitot tube (called  $\Delta R$ ) and  $\Delta p$  for the laminar elements (called  $\Delta M$ ) can be shown in Figure 4. Notice that the relation between these pressures yields a well-defined curve, and that the adherence of the experimental measurements to this curve varies from 98% to 99.5%. These observations serve to validate the present experimental method.

The relation between  $V$  and  $u_{\max}$  obtained experimentally is shown in Figure 5. It can be noted that again both curves are well defined from the experimental points, something that reinforces the validity of the experimental method.

Regardless of Reynolds number variations, a one-to-one relation between  $V$  and  $u_{\max}$  has been obtained and the usage of the Pitot tube has been shown to have high accuracy for the desired use. Therefore, it can replace laminar elements with advantages, keeping a good dependability, low deviation, and smaller costs, by a factor of ten.

The difference between the curves implies probably a discrepancy in the calibration of at least one of the laminar elements. The use of both elements at the same time was not imagined in the beginning of the experiment planning, but can be easily implemented in order to find a correction for the deviation between them.

The relation between the Reynolds number and the velocity ratio  $V/u_{\max}$  obtained in the experiments is shown in Figure 6, where the value obtained from theory is also plotted. The agreement between experiment and theory starts at  $Re = 8,000$ , and the variations, according to the Reynolds number, are up to 6% (for the 50MH10-2 Meriam laminar element) and 11% (for the 50MC2-2SF Meriam laminar element).

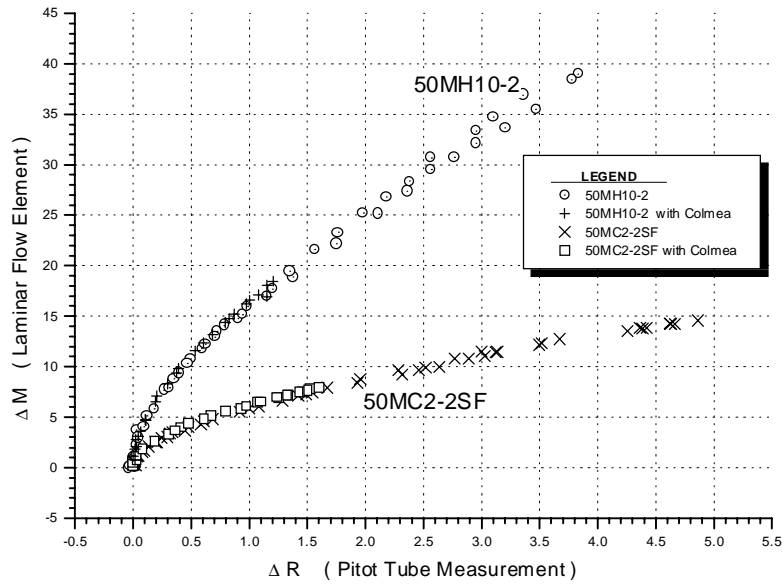


Figure 4 – Pressure differences at the Pitot and the flow meters.

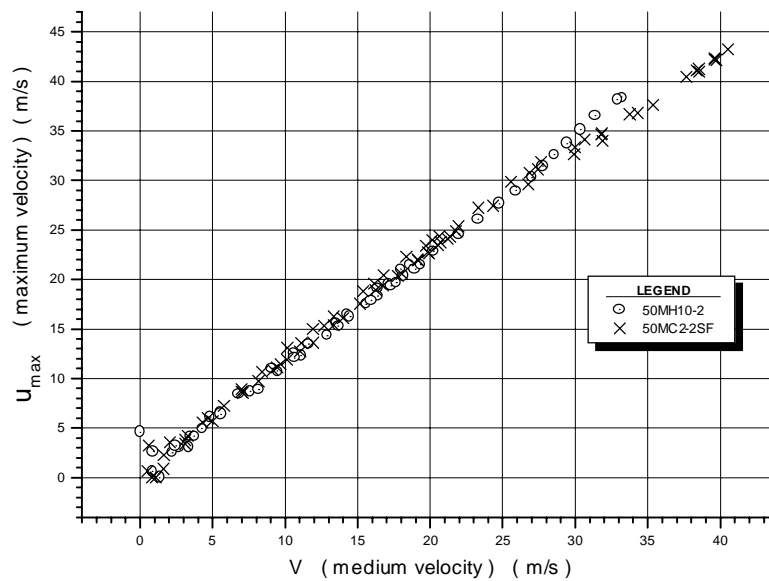


Figure 5 – Relation between the average and maximum velocities.

The data sharpness obtained by the sequencing of the experimental points suggests that its response is good, with 1 until 2% precision, since the standard instruments used give the reality of the phenomena involved.

## 6. CONCLUDING REMARKS

The relation between the average velocity  $V$  and the maximum velocity  $u_{\max}$  obtained experimentally in this work has shown good alignment and precision of about 1% in the Pitot's data reading. It seems to have a little deviation error in the calibration of the laminar element 50MC2-2SF for Reynolds numbers greater than 70,000.

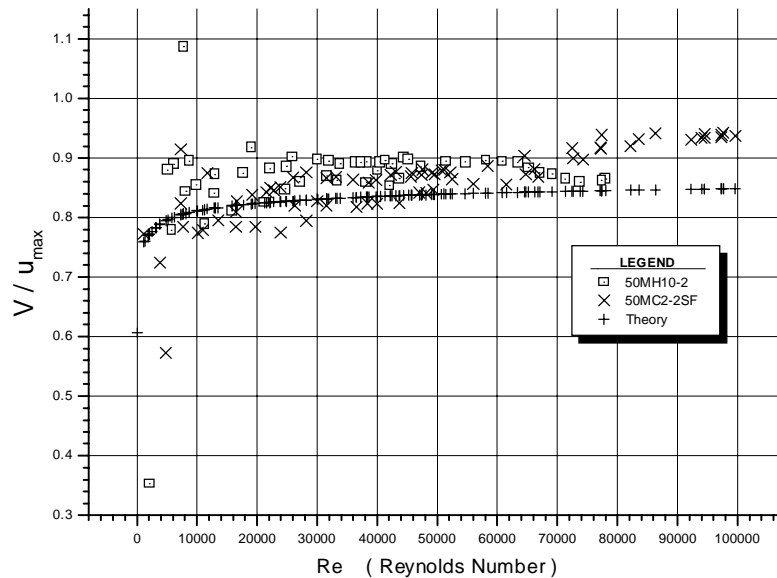


Figure 6 – The influence of the Reynolds number on the average to maximum velocity ratio.

The main conclusion is that the Pitot tube can be used as an alternative equipment for flow measurements of this type with advantages, the major of them being the lower costs and the decrease in head losses. The utility range for this method starts at Reynolds number 8,000 and goes up indefinitely, since a superior limit has not been found in the present experiments. On the other hand, no valid results have been obtained for the laminar flow range.

For future works, it is suggested a new calibration of the laminar elements (Meriam), used here, with a primary standard, in order to couple both experimental curves. Furthermore, it is suggested the expansion of this experiment for fluids of low and high densities, as well as a deeper investigation into the laminar flow range.

## 7. ACKNOWLEDGEMENTS

This work has been supported by the Brazilian Command of Aeronautics, via its Department of Research and Development (DEPED). The last author also acknowledges support from the National Council for Scientific and Technological Development (CNPq), under grant No. 300675/96-8, and from the São Paulo State Foundation for Research Support (FAPESP).

## 8. BIBLIOGRAPHY

- Anderson Jr., J.D., 1991, “Fundamentals of Aerodynamics”, 2<sup>nd</sup> edition, McGraw-Hill, New York.
- Doebelin, E.O., 1994, “Measurement Systems”, 4<sup>th</sup> edition, McGraw-Hill, New York.
- Figliola, R.S. and Beasley, D.E., 1995, “Theory and Design for Mechanical Measurements”, 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons, New York.
- Knudsen, J.G., 1958, “Fluid Dynamics and Heat Transfer”, McGraw-Hill, New York.
- Nikuradse, J., 1933, “Strömungsgesetze in Rauhen Rohren”, VDI Forschungsh. 361; English translation, NACA Tech. Mem. 1292.
- Pan, A.G.B., 1999, “Estudo Experimental de um Mensurador de Fluxo de Ar”, Internal Report, ITA-CTA, São José dos Campos, Brazil.
- Shames, I.H., 1973, “Mechanics of Fluids”, McGraw-Hill, New York.
- White, F.M., 1994, “Fluid Mechanics”, 3<sup>rd</sup> Edition, McGraw-Hill, New York.



# VALIDAÇÃO DE CÓDIGO CHIMERA TRIDIMENSIONAL COM APLICAÇÕES PARA O VLS

**Edson Basso**

**Alexandre Pequeno Antunes**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Centro Técnico Aeroespacial, CTA/ITA/IEA,  
12228-900, São José dos Campos, SP, Brasil. E-mail: [basso@iae.cta.br](mailto:basso@iae.cta.br), [alex@iae.cta.br](mailto:alex@iae.cta.br)

**João Luiz F. Azevedo**

Instituto de Aeronáutica e Espaço, Centro Técnico Aeroespacial, CTA/IAE/ASE-N,  
12228-904, São José dos Campos, SP, Brasil. E-mail: [azevedo@iae.cta.br](mailto:azevedo@iae.cta.br)

## Resumo

No presente trabalho são apresentadas simulações do escoamento aerodinâmico sobre o primeiro Veículo Lançador de Satélites brasileiro, VLS, durante o voo de seu primeiro estágio. Para o cálculo das propriedades dentro do domínio computacional utiliza-se a técnica Chimera, a qual é baseada em malhas estruturadas de múltiplos blocos sobrepostos. A presente abordagem é baseada na solução das equações de Euler tridimensionais em coordenadas curvilíneas generalizadas. O método de diferenças finitas é aplicado nestas equações, utilizando uma discretização espacial centrada. Nestas equações são adicionados termos de dissipação artificial baseados em um modelo escalar não isotrópico. O processo de marcha no tempo é realizado através de um esquema de Runge-Kutta de cinco estágios e segunda ordem de precisão. Os resultados foram validados utilizando-se dados experimentais de ensaios em túnel de vento disponíveis para o VLS.

**Palavras-chave:** Técnica multibloco, Chimera, VLS, Diferenças finitas, Validação.

## 1 Introdução

No presente trabalho são apresentados os resultados obtidos de simulações do escoamento aerodinâmico sobre a configuração do primeiro veículo lançador de satélites brasileiro, VLS. Este trabalho está inserido no esforço de desenvolvimento de ferramentas computacionais necessárias para simular escoamentos aerodinâmicos em geometrias aeroespaciais, especialmente aquelas relacionadas com o sistema VLS (Azevedo, Menezes & Fico, 1995, Azevedo, Menezes & Fico, 1996, Azevedo, Strauss & Ferrari, 1997, Strauss & Azevedo, 1999). O VLS apresenta uma configuração geométrica muito complexa, a qual é constituída de quatro foguetes laterais em torno de um corpo central (Azevedo & Buonomo, 1999). Os quatro foguetes laterais são dispostos simetricamente em torno do corpo central compondo o primeiro estágio do veículo. A geração de malhas para simulação do escoamento durante o voo do primeiro estágio pode ser um processo muito laborioso tanto para a abordagem estruturada como para a não estruturada.

Atualmente, ambas as abordagens para a geração de malha são utilizadas pelo grupo de trabalho, porém os resultados que serão aqui apresentados são relativos à abordagem estruturada. Malhas multiblocos justapostas foram utilizadas nas tentativas iniciais para discretização

da configuração completa do VLS. Entretanto, dentro do contexto da utilização destas técnicas, não foi possível gerar malhas de qualidade suficiente para que se conseguisse obter resultados satisfatórios nas simulações. Isto levou, portanto, à busca de uma outra forma de abordagem do problema. Uma vez que o grupo de trabalho obteve experiência suficiente com o uso de malhas estruturadas aplicadas a veículos lançadores (Azevedo, Zdravistch & Silva, 1991, Azevedo & Buonomo, 1999), o próximo passo na tentativa de se obter malhas com a qualidade desejada foi a utilização de uma abordagem Chimera. O código para a simulação do escoamento sobre o VLS com a abordagem multibloco foi obtido pela continuação do desenvolvimento de um código já disponível para simulações em bloco único (Bigarelli, Mello & Azevedo, 1999). O código de bloco único baseia-se em uma formulação tridimensional de Euler e foi validado usando-se dados experimentais do VLS e outros foguetes de sondagem desenvolvidos no Instituto de Aeronáutica e Espaço, IAE (Bigarelli, Mello & Azevedo, 1999). No presente caso, a técnica de malhas multibloco sobrepostas ou Chimera (Wang & Yang, 1994, Wang, Buning & Benek, 1995), é usada para simular escoamentos sobre o VLS completo. Esta técnica provê a capacidade de se utilizar malhas estruturadas para a discretização do domínio de cálculo para configurações realisticamente complexas. Além disto, a abordagem Chimera permite um refinamento de malha comparável àquele atingido em malhas não estruturadas.

## 2 Formulação Teórica

Assume-se que o escoamento de interesse no presente trabalho pode ser representado pelas equações de Euler em três dimensões. Estas equações podem ser escritas em forma conservativa para um sistema de coordenadas curvilíneas gerais como

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \zeta} = 0, \quad (1)$$

onde  $\bar{Q}$  é o vetor de variáveis conservadas, definido como

$$\bar{Q} = J^{-1} [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e]^T. \quad (2)$$

Nestas equações,  $\rho$  é a densidade,  $u, v, w$  são as componentes cartesianas da velocidade e  $e$  é a energia total por unidade de volume. Os vetores de fluxo não viscosos são representados por  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$  e  $\bar{G}$ . O jacobiano da transformação,  $J$ , é representado por

$$J = (x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\eta y_\zeta z_\xi + x_\zeta y_\xi z_\eta - x_\xi y_\zeta z_\eta - x_\eta y_\xi z_\zeta - x_\zeta y_\eta z_\xi)^{-1}. \quad (3)$$

Expressões para os vetores de fluxo não viscosos podem ser encontrados em Vieira *et al.* (1998), juntamente com outras referências. A pressão pode ser obtida da equação de estado para um gás perfeito como

$$p = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right]. \quad (4)$$

Uma adimensionalização (Pulliam & Steger, 1980) adequada para as equações governantes, Eqs. 1, é utilizada. Em particular, os valores das propriedades do escoamento são adimensionalizados com respeito às quantidades de escoamento não perturbado, como descrito em Pulliam & Steger (1980).

As equações governantes foram discretizadas em um contexto de diferenças finitas em malhas estruturadas de hexaedros, as quais se conformam aos corpos do domínio computacional. Uma vez que um esquema de diferenças centradas para discretização espacial está sendo usado, termos de dissipação artificial devem ser adicionados a formulação no sentido de controlar instabilidades não lineares. Os termos de dissipação artificial aqui usados são baseados no modelo escalar de Turkel e Vatsa (1994), sendo que este modelo é não linear e não isotrópico, com o escalonamento

dos operadores de dissipação artificial em cada direção coordenada ponderados pelos correspondentes raios espectrais das matrizes jacobianas de fluxo. Na presente implementação, o operador de resíduo é definido como

$$RHS_{i,j,k}^n = -\Delta t(\delta_\xi E_{i,j,k}^n + \delta_\eta F_{i,j,k}^n + \delta_\zeta G_{i,j,k}^n). \quad (5)$$

Aqui, os termos  $\delta_\xi$ ,  $\delta_\eta$ , e  $\delta_\zeta$  representam os operadores de diferença centrada de ponto meio nas direções  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , respectivamente. Os vetores de fluxo numérico são definidos como

$$\begin{aligned} E_{i\pm 1/2,j,k} &= \frac{1}{2}(\bar{E}_{i,j,k} + \bar{E}_{i+1,j,k}) - d_{i\pm 1/2,j,k}, \\ F_{i,j\pm 1/2,k} &= \frac{1}{2}(\bar{F}_{i,j,k} + \bar{F}_{i,j+1,k}) - d_{i,j\pm 1/2,k}, \\ G_{i,j,k\pm 1/2} &= \frac{1}{2}(\bar{G}_{i,j,k} + \bar{G}_{i,j,k+1}) - d_{i,j,k\pm 1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Os operadores de dissipação artificial,  $d_{i\pm 1/2,j,k}$ ,  $d_{i,j\pm 1/2,k}$  e  $d_{i,j,k\pm 1/2}$  são definidos precisamente como em Turkel & Vatsa (1994).

Sendo soluções de estado estacionário o maior interesse do presente estudo, um procedimento de passo no tempo variável para aceleração de convergência foi implementado (Azevedo, Zdravistch & Silva, 1991). O processo de marcha no tempo é baseado num algoritmo de Runge-Kutta de 5 estágios e segunda ordem de precisão (Jameson, Schmidt & Turkel, 1981), onde

$$\begin{aligned} \bar{Q}_i^{(0)} &= \bar{Q}_i^n, \\ \bar{Q}_i^{(l)} &= \bar{Q}_i^{(0)} - \alpha_l RHS^{(l-1)}, \quad l = 1, \dots, 5, \alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{6}, \alpha_3 = \frac{3}{8}, \alpha_4 = \frac{1}{2}, \alpha_5 = 1, \\ \bar{Q}_i^{n+1} &= \bar{Q}_i^{(5)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Deve-se enfatizar que apenas o operador convectivo dentro do termo  $RHS$  da Eq. 7 é realmente avaliado em cada passo no tempo. Os termos de dissipação artificial são avaliados no primeiro e segundo estágios do processo de marcha no tempo. Pode ser mostrado que isto provê amortecimento suficiente para manter a estabilidade não linear (Jameson, Schmidt & Turkel, 1981) e, por outro lado, leva a um esquema numérico mais eficiente. As condições de contorno utilizadas no presente trabalho são semelhantes àquelas descritas em Yagua & Azevedo (1999).

### 3 Técnica Chimera

A distribuição de pontos sobre o domínio físico no qual o escoamento é calculado é sempre um aspecto crítico para o sucesso destes cálculos. A distribuição de pontos deve ser suficientemente bem balanceada para cobrir todo o campo do escoamento, evitando regiões pouco refinadas. Por outro lado, pontos devem ser aglomerados em regiões nas quais fenômenos, tais como expansões e ondas de choque ocorrem, sem exceder desta forma os recursos computacionais. As malhas computacionais usadas em cada um dos blocos no presente trabalho foram geradas por métodos algébricos. Para a configuração completa do VLS, foram geradas cinco malhas, uma para cada corpo. A Fig. 1 mostra a malha para o corpo central do foguete. Detalhes desta malha na região frontal do veículo são mostrados na Fig. 2.

Deve-se enfatizar que, embora o presente trabalho concentre-se principalmente na solução das equações de Euler, algumas destas malhas tem uma grande concentração de pontos nas proximidades das paredes sólidas. Este refinamento se deve às tentativas de captura do choque e suas reflexões nas regiões próximas aos propulsores laterais. Outro importante aspecto é a necessidade de se ter um número de pontos suficiente entre a superfície lateral dos propulsores laterais e o corpo central do foguete para se obter um comportamento adequado do processo de “cavar buracos” característico da abordagem Chimera. Neste processo, pontos de ambas as malhas são eliminados do conjunto de pontos ativos de cada malha por estarem fora da região de interesse do escoamento ou para evitar uma região de sobreposição muito grande.

Este processo é realizado com muito cuidado de forma a permitir a existência de uma área de interpolação entre pontos de malhas adjacentes. A existência de um grande número de pontos nestas áreas sobrepostas produz um aumento na precisão da informação trocada através das malhas. As trocas de informações entre cada ponto de fronteira interior das malhas são realizadas utilizando-se um procedimento de interpolação trilinear.

O código que realiza atualmente o processo de “cavar buracos” é uma ferramenta desenvolvida pelo próprio grupo. No caso das malhas do VLS, o código realiza uma eliminação lógica dos pontos da malha que se encontram no interior de outros corpos e, desta forma, fora do domínio de cálculo. O processo de solução do escoamento essencialmente segue os seguintes passos:

1. Uma condição inicial é imposta em todas as malhas;
2. Uma ordem de operação através de todas as malhas é definida;
3. O resíduo é calculado na primeira malha;
4. Uma nova solução é calculada para os pontos interiores da primeira malha;
5. Condições de contorno são atualizadas para a primeira malha;
6. Pontos dispostos na fronteira do buraco são atualizados em todas as malhas, as quais possuem alguma região sobreposta a primeira malha;
7. O processo é reiniciado no passo 3 para a próxima malha.

Este processo é repetido até que todas as malhas tenham atingido a nova solução no tempo  $(n + 1)\Delta t$ . Logo após, a convergência da solução é testada. Se o critério de convergência não é atingido, o processo é reiniciado a partir do passo três.

## 4 Resultados e Discussões

Os resultados aqui apresentados referem-se ao escoamento sobre o VLS durante o vôo de seu primeiro estágio. Os resultados específicos aqui incluídos são relativos ao caso de número de Mach de escoamento livre igual a 2 e ângulo de ataque igual a zero. Além do mais, como o tempo de vôo em baixa atmosfera para estes lançadores de satélite é muito pequeno e como o veículo está em velocidade supersônica durante a maior parte do seu vôo, parece apropriado selecionar uma condição de vôo supersônica para a presente discussão. Desta forma, o propósito do presente trabalho é mais voltado a descrição da capacidade implementada, ao invés de demonstrar os detalhes do escoamento aerodinâmico sobre o VLS. No regime supersônico de velocidade muitos aspectos interessantes da tecnologia multibloco podem ser observados e analisados, tais como a comunicação de informação através da fronteira interna entre os blocos, sendo que existem descontinuidades das propriedades do escoamento. Deve-se observar que algumas simulações 3-D, utilizando a técnica Chimera, já foram realizadas pelo grupo (Yagua & Azevedo, 1999), mas estas consideraram apenas geometrias bastante simples. No presente caso, uma configuração complexa e bastante realística está sendo considerada, a qual traz a evidência de que é possível o uso desta capacidade para atividades práticas de projeto de veículos lançadores.

O domínio de cálculo da configuração completa foi dividido em cinco malhas. A malha que discretiza o domínio computacional em torno do corpo central utiliza  $120 \times 65 \times 33$  pontos nas direções  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , respectivamente. Quatro malhas idênticas foram utilizadas para os foguetes laterais, as quais apresentam  $120 \times 36 \times 33$  pontos nas direções longitudinal, normal e circunferencial, ou nas direções  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , respectivamente. Desde que apenas condições de escoamento sem ângulo de ataque foram considerados até então, poderia estar sendo usado apenas meia malha e impor condições de simetria no plano de arfagem para a presente simulação. Entretanto, esta metodologia não foi adotada aqui e está sendo representado o veículo (VLS) completo. Além disso, como pode ser observado na Fig. 3, a parte traseira do veículo foi simplificada para as simulações aqui apresentadas. Esta simplificação foi realizada pois experiências prévias (Azevedo, Strauss & Ferrari, 1997)(Strauss & Azevedo, 1999) com escoamentos na região

traseira de veículos lançadores demonstrou a necessidade de uma formulação viscosa turbulenta para a captura adequada dos fenômenos relevantes nesta região.

A Fig. 4 apresenta uma visão tridimensional do conjunto de malhas do VLS, mostrando as malhas nas superfícies dos cinco corpos e um plano longitudinal para a malha do corpo central, juntamente com o plano inferior para o mesmo componente.

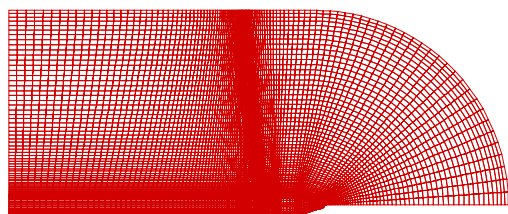


Figura 1: Malha computacional do corpo central.

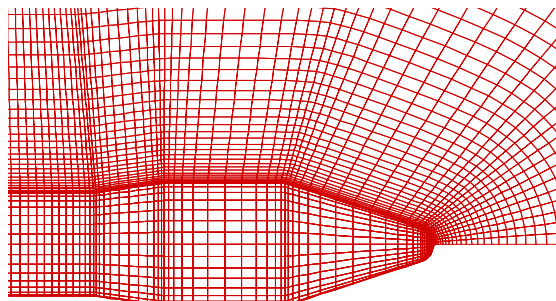


Figura 2: Detalhe da malha do corpo central na região da coifa do veículo.

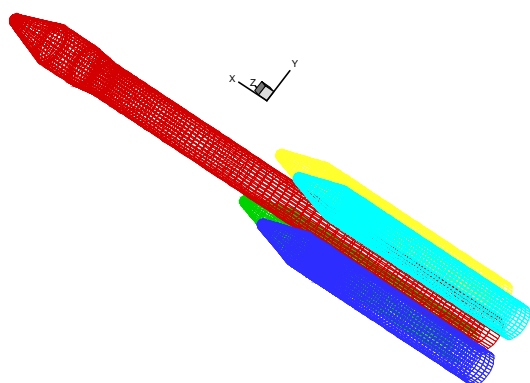


Figura 3: Detalhe da malha do VLS sobre as superfícies dos foguetes.

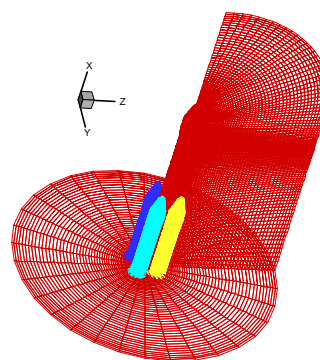


Figura 4: Vista tridimensional da malha do sistema VLS.

A Fig. 5 exibe uma vista tridimensional da malha do corpo central, indicando os buracos criados nesta malha para acomodar os foguetes laterais. Um detalhe da Fig. 5, mostrando a malha próximo ao plano longitudinal de saída, é representado na Fig. 6. Um controle da distribuição de pontos para todas as malhas foi exercitado de modo a garantir uma boa concentração de pontos próximo às paredes sólidas. Outro fator importante é a concentração de pontos em regiões de sobreposição. É importante garantir uma concentração suficiente de pontos nestas regiões de modo a minimizar os erros do processo de interpolação (Wang, Buning & Benek, 1995) entre as várias malhas.

Os contornos de número de Mach ao longo das paredes do corpo do veículo podem ser vistos na Fig. 7. Uma forte compressão no escoamento ocorre na área frontal do foguete, indicando regiões de estagnação do escoamento, como pode ser visto na Fig. 7.

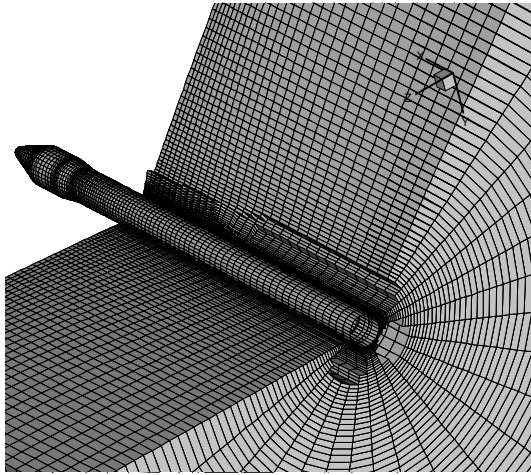


Figura 5: Malha computacional do VLS após o processo de “cavar buracos” numa visão tridimensional.

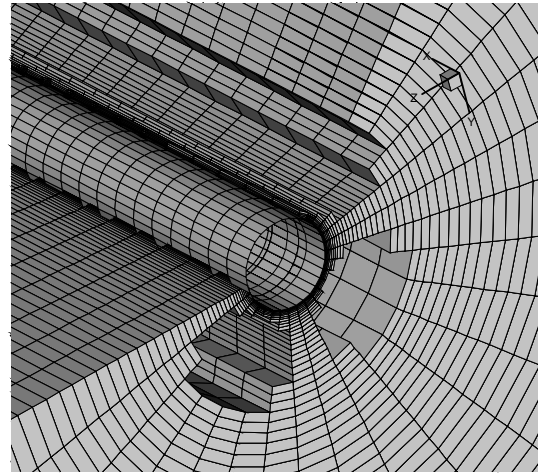


Figura 6: Detalhe da malha computacional na região posterior do VLS após o processo de “cavar buracos” numa visão tridimensional.

Uma análise detalhada da Fig. 7 pode também indicar que a extensão da região de baixa velocidade é maior na coifa do corpo central do que nas coifas dos foguetes laterais. Também se pode ver na Fig. 7 uma região de baixa velocidade ao longo da parede do corpo central, bem como a jusante das coifas dos foguetes laterais. Esta região está associada com as ondas de choque destacadas dos foguetes laterais, as quais convergem para o corpo central criando uma região de alta pressão e baixa velocidade. Esta região de alta pressão causa um desvio nas linhas de corrente para longe dos foguetes laterais. A Fig. 8 exibe os contornos de número de Mach ao longo da superfície do corpo central e dos foguetes laterais. Várias regiões afetadas pelo choque destacado dos propulsores laterais podem ser vistas na Fig. 8. Além do mais, pode-se claramente ver que a solução ao longo de cada um dos propulsores laterais é simétrica, como esperado para o caso onde o ângulo de ataque é zero.

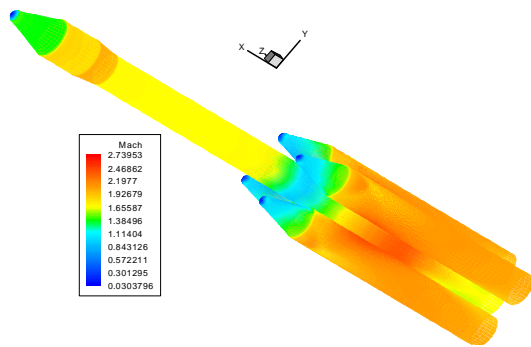


Figura 7: Contornos de número de Mach na superfície do VLS para número de Mach do escoamento livre igual a 2,0 e zero grau de ângulo de ataque.

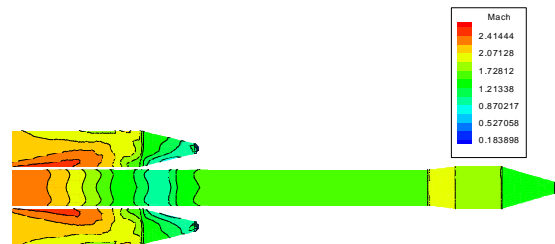


Figura 8: Contornos de número de Mach para a superfície do corpo central e dois foguetes laterais opostos ( $M_{\infty} = 2,0$  e  $\alpha = 0^{\circ}$ ).

Uma visualização da solução no campo e a solução sobre os corpos está representada na Fig. 9. Esta figura indica claramente um choque destacado à frente do veículo, uma expansão que ocorre na região frontal da intersecção do cone cilíndrico, uma região de expansão ao longo da coifa, e uma região de compressão à frente dos foguetes laterais. Deve-se também observar que existe um choque formado na intersecção da seção cônica com o cilindro traseiro, sobre o corpo central, devido à existência do canto de compressão na geometria do veículo. A complexidade

do escoamento nas regiões dos foguetes laterais pode ser observada na Fig. 9. Deve-se notar, entretanto, que a resolução da malha ainda não é adequada para a captura das reflexões dos choques entre o corpo central e os propulsores laterais.

Uma das razões para a seleção deste caso teste foi a existência de dados experimentais para esta condição de vôo. Estes dados experimentais e detalhes dos testes em túnel de vento são descritos em Moraes & Neto (1990). A Fig. 10 exibe uma comparação entre a distribuição do coeficiente de pressão calculado,  $C_p$ , ao longo do corpo central do veículo e os dados experimentais. Neste caso, um plano longitudinal que contém o corpo central e o eixo de dois foguetes laterais foi selecionado para comparação. Em outras palavras, a comparação está indicando a concordância entre os dados para o plano do corpo central correspondente ao corte indicado na Fig. 9. Pode-se observar que a concordância na parte frontal do veículo é muito boa. A concordância na região traseira, especialmente onde existe uma proximidade entre o corpo central e os foguetes laterais, não é tão boa. Entretanto, alguns aspectos dos resultados na região à jusante do veículo podem ser explicados e merecem maiores comentários. Primeiramente, deve-se observar que dados experimentais indicam a reflexão do choque destacado dos propulsores laterais na posição  $x/L$  aproximadamente igual a 0,6. Como previamente discutido, a resolução da malha não estava adequada o suficiente para capturar este fenômeno nos cálculos numéricos. A perceptível diferença entre os resultados a jusante da posição  $x/L \cong 0,92$  deve-se ao fato que o bocal do motor do corpo central não ter sido modelado nos cálculos presentes, apesar de estar presente no modelo do túnel de vento. Existe também uma grande diferença na distribuição de  $C_p$  na região  $0,75 < x/L < 0,90$ . Neste ponto os autores estão atribuindo esta diferença a falta de resolução da malha computacional nesta região. Estudos do refinamento de malha estão atualmente sendo executados de modo a se tentar resolver estas dificuldades.

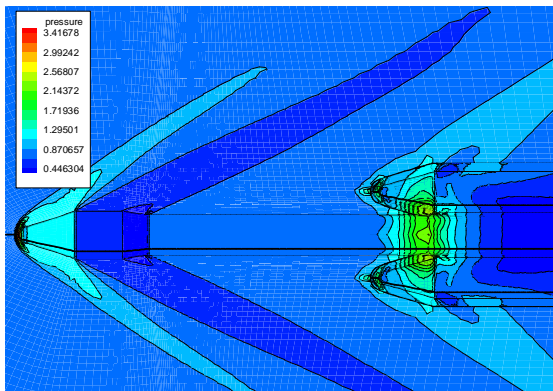


Figura 9: Contornos de pressão para um plano longitudinal com a presença de dois foguetes laterais ( $M_\infty = 2,0$  e  $\alpha = 0^\circ$ ).

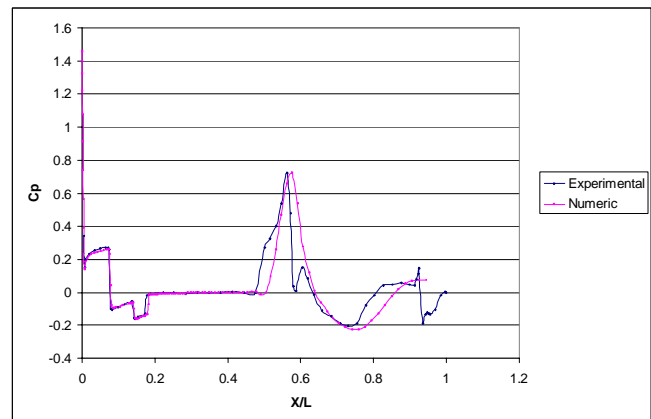


Figura 10: Comparação entre a distribuição do coeficiente de pressão calculado e experimental sobre a superfície do corpo central ( $M_\infty = 2,0$  e  $\alpha = 0^\circ$ ).

## 5 Comentários Finais

O trabalho apresentou resultados para simulações do escoamento sobre a configuração completa do primeiro Veículo Lançador de Satélites brasileiro, VLS, durante o vôo de seu primeiro estágio, utilizando a formulação de Euler tridimensional. Pelo conhecimento dos autores, esta é a primeira vez que uma simulação tão acurada e detalhada para o escoamento sobre o VLS foi realizada e apresentada. Um código multibloco estruturado foi implementado usando a abordagem Chimera para lidar com geometrias com configurações complexas. Um esquema de diferenças centradas, mais a adição de termos de dissipação artificial, foi utilizado na discretização espacial, e um esquema explícito de Runge-Kutta foi usado para a marcha no tempo. Detalhes

do processo de criação de buracos e outros aspectos da implementação da abordagem Chimera foram discutidos no trabalho. O procedimento implementado foi aplicado para simulação do escoamento em velocidades supersônicas para a configuração do voo do primeiro estágio do VLS, sendo que para o presente trabalho foram simulados escoamentos para  $M_\infty = 2$  e ângulo de ataque nulo. A concordância com os dados experimentais é muito boa nas porções frontais do veículo, mas claramente existe a falta de refinamento da malha para uma melhor resolução do campo de escoamento nas regiões traseiras do veículo. Não houve aparente degradação da qualidade da solução do escoamento devido ao fato de existirem ondas de choque atravessando fronteiras entre malhas sobrepostas.

## 6 Agradecimentos

O presente trabalho recebeu suporte parcial do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, através do Projeto Integrado de Pesquisa No. 522413/96-0. Suporte adicional foi recebido do CNPq em termos de bolsa de estudos de pós-graduação para o primeiro e segundo autores. Os autores também estão em débito com o NACAD-COPPE/UFRJ, o qual providenciou os recursos computacionais usados nas presentes simulações.

## 7 Referências

- Azevedo, J.L.F., 1990, “Euler Solution of Transonic Nozzle Flows,” Anais do III Encontro Nacional de Ciências Térmicas, Itapema, SC, Vol. 1, pp. 243-248.
- Azevedo, J.L.F., and Buonomo, C.A., 1999, “Axisymmetric Turbulent Simulations of Launch Vehicle Forebody Flows,” AIAA Paper No. 99-3528, 30<sup>th</sup> AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, Norfolk, VA.
- Azevedo, J.L.F., Menezes, J.C.L., and Fico, N.G.C.R., Jr., 1995, “An Assessment of Boundary Layer Properties for Transonic and Supersonic Flows over the VLS,” AIAA Paper No. 95-1769-CP, Proceedings of the 13<sup>th</sup> AIAA Applied Aerodynamics Conference, Part 1, San Diego, CA, pp. 41-51.
- Azevedo, J.L.F., Menezes, J.C.L., and Fico, N.G.C.R., Jr., 1996, “Accurate Turbulent Calculations of Transonic Launch Vehicle Flows,” AIAA Paper 96-2484-CP, Proceedings of the 14<sup>th</sup> AIAA Applied Aerodynamics Conference, Part 2, New Orleans, pp. 841-851.
- Azevedo, J.L.F., Strauss, D., and Ferrari, M.A.S., 1997, “Viscous Multiblock Simulations of Axisymmetric Launch Vehicle Flows,” AIAA Paper No. 97-2300-CP, Proceedings of the 15<sup>th</sup> AIAA Applied Aerodynamics Conference, Part 2, Atlanta, GA, pp. 664-674.
- Azevedo, J.L.F., Zdravistch, F., and Silva, A.F.C., 1991, “Implementation and Validation of Euler Solvers for Launch Vehicle Flows,” Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Symposium on Computational Fluid Dynamics, Vol. 1, Davis, CA, pp. 42-47.
- Bigarelli, E.D.V., Mello, O.A.F., and Azevedo, J.L.F., 1999, “Three Dimensional Flow Simulations for Typical Launch Vehicles at Angle of Attack,” Proceedings of the 15<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Águas de Lindóia, SP, Brazil.
- Jameson, A., Schmidt, W., and Turkel, E., 1981, “Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes,” AIAA Paper No. 81-1259.
- Moraes, P., Jr., and Neto, A.A., 1990, “Aerodynamic Experimental Investigation of the Brazilian Satellite Launch Vehicle (VLS),” Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Brazilian Thermal Sciences Meeting, Vol. 1, Itapema, SC, Brazil, pp. 211-215.
- Pulliam, T.H., and Steger, J.L., 1980, “Implicit Finite-Difference Simulations of Three-Dimensional Compressible Flow,” AIAA Journal, Vol. 18, No. 2, pp. 159-167.



- Strauss, D., and Azevedo, J.L.F., “A Numerical Study of Turbulent Afterbody Flows Including a Propulsive Jet,” 1999, AIAA Paper No. 99-3190, Proceedings of the 17<sup>th</sup> AIAA Applied Aerodynamics Conference, Norfolk, VA, pp. 654-664.
- Turkel, E., and Vatsa, V.N., 1994, “Effect of Artificial Viscosity on Three-Dimensional Flow Solutions,” AIAA Journal, Vol. 32, No. 1, pp. 39-45.
- Vieira, R., Azevedo, J.L.F., Fico, N.G.C.R., Jr., and Basso, E., 1998, “Three Dimensional Flow Simulation in the Test Section of a Slotted Transonic Wind Tunnel,” ICAS Paper No. 98-R.3.11, Proceedings of the 21<sup>st</sup> Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, Melbourne, Australia.
- Wang, Z.J., Buning, P., and Benek, J., 1995, “Critical Evaluation of Conservative and Non-Conservative Interface Treatment for Chimera Grids,” AIAA Paper No. 95-0077, 33<sup>rd</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV.
- Wang, Z.J., and Yang, H.Q., 1994, “A Unified Conservative Zonal Interface Treatment for Arbitrarily Patched and Overlapped Grids,” AIAA Paper No. 94-0320, 32<sup>nd</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV.
- Yagua, L.C.Q., and Azevedo, J.L.F., 1999, “Application of the Chimera Technique for the Simulation of the 3-D Compressible Flow Equations,” Proceedings of the 15<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Águas de Lindóia, SP, Brazil.

# DESENVOLVIMENTO DE UM ESCOAMENTO TIPO CAMADA LIMITE ATMOSFÉRICA EM TÚNEL DE VENTO COM PEQUENAS DIMENSÕES

**Roberto M. Girardi**

**Mateus F. Santa Catarina**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), Praça Mal. Eduardo Gomes, 50,  
CEP.: 12.228-900, S. J. Campos, SP, Brasil. E-mail: girardi@aer.ita.cta.br

## Resumo

O objetivo do presente trabalho é relatar a metodologia usada para desenvolver um escoamento com perfil de velocidade tipo camada limite atmosférica, no interior de um túnel de vento, semelhante ao escoamento encontrado sobre a superfície do oceano. Normalmente, túneis de vento para este fim possuem comprimento de seção de testes relativamente grandes, para permitir o desenvolvimento de um escoamento tipo camada limite. No presente trabalho, foi implementada uma outra maneira de se obter o escoamento requerido, através da utilização de triângulos isosceles, colocados no início da seção de testes, conhecidos na literatura como *spires*. Além disto foi necessário a utilização de uma manta de bidim, fixada à superfície inferior da seção de testes, a qual possibilitou o ajuste do perfil de velocidades requerido. Perfis de velocidade média e de flutuação (valor RMS) foram medidos em diversas posições da seção de testes e para vários números de Reynolds, de maneira a se verificar alterações no escoamento em questão.

**Palavras-chave:** Camada Limite Atmosférica, Túnel de Vento, Métodos Experimentais

## 1. INTRODUÇÃO

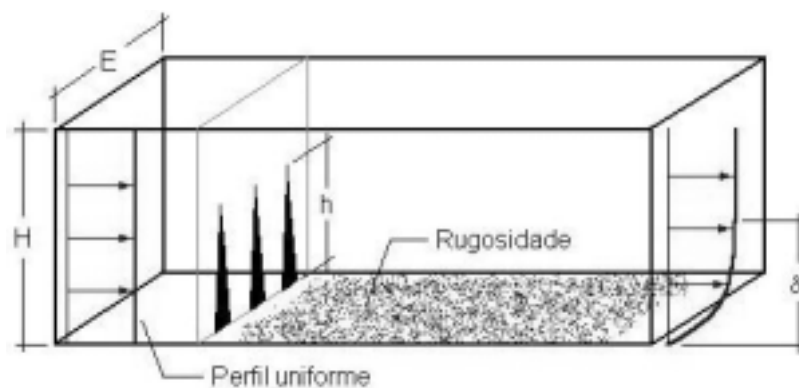
O relevo no Centro de Lançamento de Foguetes de Alcântara (CLA) lembra um degrau, pois o mar encontra um paredão com grande inclinação (falésia) que possui uma altura de aproximadamente 40 m, sendo o topo uma região relativamente plana. É nessa região, a cerca de 500m do paredão, que se encontra instalada a plataforma de lançamento. O vento marítimo que sopra do mar para a terra enfrenta a subida do paredão citado anteriormente, causando perturbações na posição da plataforma de lançamentos. A verificação da intensidade destas perturbações é a principal motivação do presente trabalho.

O primeiro passo desta pesquisa foi encontrar o método mais adequado para a simulação do vento atmosférico no interior de um túnel de vento com seção de testes com pequeno comprimento. Em geral, nos túneis onde as condições atmosféricas são simuladas, o vento flui ao longo de um piso rugoso de grande extensão. A desvantagem é que este processo exige um comprimento de cerca de 25 m para formar uma camada limite de 60 a 120 cm de altura, como posto por Blesmann (1973). Para este trabalho era requerida uma camada limite com espessura de aproximadamente 30 cm, porem, o túnel de vento disponível tem uma seção de testes com comprimento menor que 3 m. Existem diversos métodos para produção de um escoamento tipo camada limite

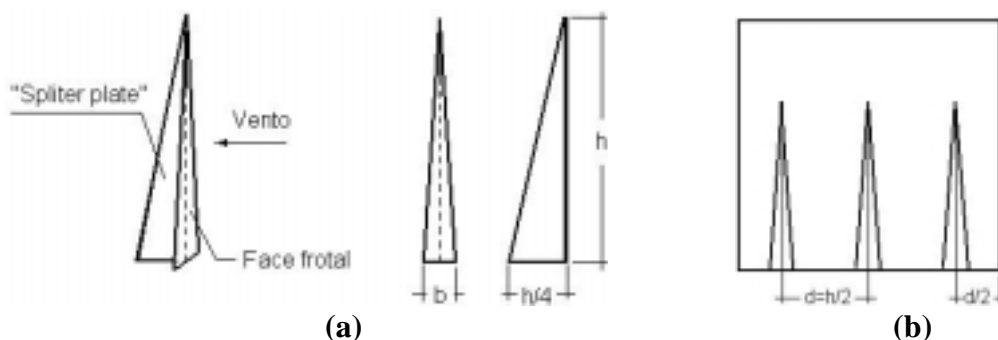
atmosférica. Alguns usam telas, outros barras paralelas dispostas horizontalmente e com espaçamento variável como usado por Owen e Zienkiewicz (1957). Blesmann (1973), em sua tese de doutorado, usou a técnica dos jatos transversais dispostos transversalmente à direção do vento. O método que se mostrou mais adequado e que foi utilizado para fazer a simulação, utilizou a técnica das *spires*, que são placas planas com o formato de triângulo isósceles, as quais são instaladas na entrada da seção de testes. Juntamente com as *spires* deve-se ter um piso com rugosidade, a qual tem papel fundamental no ajuste do perfil de velocidades requerido para a camada limite.

## 2. APARATO PARA SIMULAÇÃO DA CAMADA LIMITE ATMOSFÉRICA

O vento natural apresenta um perfil de velocidade média adimensional ( $U/V_\infty$ ), que varia exponencialmente com a altura adimensionalizada ( $Y/\delta$ ), onde  $\delta$  é espessura da camada limite atmosférica. Os valores do expoente  $\alpha$  e de  $\delta$  dependem do tipo de terreno, sendo que para vento marítimo os mesmos situam-se em torno de 0.15 e 280m respectivamente. A intensidade de turbulência, definida como a razão entre o valor *rms* das flutuações de velocidade e a velocidade na fronteira da camada limite ( $V_\infty$ ). Segundo Blesmann, a intensidade de turbulência para ventos marítimos é em torno de 0,08, independentemente da altura.



**Figura 1** Seção de testes do túnel com 3 *spires* e rugosidade no piso.



**Figura 2** (a) Características geométricas de uma *spire* e (b) vista frontal da seção de testes com as *spires* instaladas

As dimensões das *spires* (vide Fig. 2a) dependem do tipo de camada limite que se quer e das dimensões do túnel (vide Fig. 1). A altura das *spires* ( $h$ ) requeridas para a formação da camada limite deve levar em consideração a eq. (1). Esta relação é obtida a partir da recomendação, encontrada no trabalho de Irwin (1981), de que a distância entre uma *spire* e outra ( $d$ ) deve possuir a metade da altura (ver figs. 2b). Desta forma,

considerando-se que a seção de testes do túnel tem largura E e que  $n$  *spires* são instaladas, obtém-se

$$h = \frac{2.E}{n} \quad (1)$$

A relação entre h e  $\delta$  é dada pela seguinte relação empírica (vide Irwin, 1981):

$$h = 1,39 \left( \frac{\delta}{1 + \frac{\alpha}{2}} \right) \quad (2)$$

A largura b (Fig. 2 a) é função da altura do *spires* (h), da relação H/ $\delta$  e do expoente  $\alpha$ , conforme pode ser visto nas equações apresentadas por Irwin (1981).

A câmara de ensaios do túnel de vento usado neste trabalho tem seção transversal quadrada, com lado igual a 460 mm e comprimento de 1200 mm. A velocidade pode ser variada na faixa entre 8 e 30 m/s e o nível de turbulência é de 0,5% para a máxima velocidade.

Considerando-se as características do túnel de vento e os valores para as alturas da falésia no CLA e da camada limite atmosférica sobre a superfície do oceano, discutidos anteriormente, adotou-se um fator de escala de 1:1000 para a confecção do modelo. Neste caso, a espessura da camada limite no interior do túnel de vento deve ter aproximadamente 280 mm de espessura.

Recorrendo-se a eq. (1), e considerando-se os valores para E e H apresentados acima, verifica-se que o número de *spires* (n) deve ser maior que 2. A eq. (2) permite a determinação da altura (h) das *spires*, a qual está relacionada com a espessura da camada limite ( $\delta$ ). Desta forma, considerando-se  $\alpha = 0,15$ , e variando-se o número de *spires* que devem ser instalados no túnel de vento, obtém-se os resultados apresentados na tabela 1.

**Tabela 1-** Valores possíveis para h e  $\delta$  em função do número de *spires* (n)

N	h (mm)	$\delta$ (mm)
3	307,7	237
4	230,0	178

Vê-se que para n=3 o valor de  $\delta$  mais se aproxima dos 280mm. Utilizando as equações apresentadas por Irwin (1981), obtém-se o valor da largura (b) da base das *spires*. Desta forma, três *spires*, com dimensões h=307,7 mm e b=32,6 mm, são utilizadas, neste trabalho, para a geração do perfil de velocidade requerido.

Segundo Irwin (1981), a camada limite estará bem formada a uma distância 6.h das *spires* que corresponde a 1840mm. Como a seção de testes apresenta um comprimento de 1200mm, foi necessário fazer um prolongamento da mesma.

O piso do túnel não é capaz de dar a contribuição de arrasto necessário para o ajuste da parte inferior do perfil da camada limite. Assim, deve-se modificar a superfície junto ao piso, de modo a incrementar esse arrasto. Normalmente utilizam-se paralelepípedos que introduzem uma rugosidade para produzir arrasto. Neste caso, pode-se aplicar a eq.

(3)

$$\frac{\tau}{\delta} = \exp\left\{\frac{2}{3} \ln\left(\frac{D}{\delta}\right) - 0,116 \ln\left[\left(\frac{2}{C_f}\right) + 2,05\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \quad (3)$$

onde  $\tau$  é a altura do paralelepípedo,  $D$  a distância entre eles e  $C_f$  é o coeficiente de fricção, que é relacionado com o parâmetro  $\alpha$  através da eq. (4).

$$C_f = 0,136 \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1}\right)^2 \quad (4)$$

Entretanto, a eq. (3) é válida apenas no intervalo  $30 < \frac{\delta \cdot D^2}{\tau^3} < 2000$ . Neste caso, como  $\alpha = 0,15$ , obtém-se através da eq. (4) que  $C_f = 2,31 \cdot 10^{-3}$ . Variando o parâmetro  $D$  entre 10 e 200 mm obtém-se valores de  $\tau$  na faixa entre 0,85 e 6,3 mm, utilizando-se a eq. (3). Para estes valores obtém-se  $28.334 < \frac{\delta \cdot D^2}{\tau^3} < 28.474$ . Fica claro que a equação

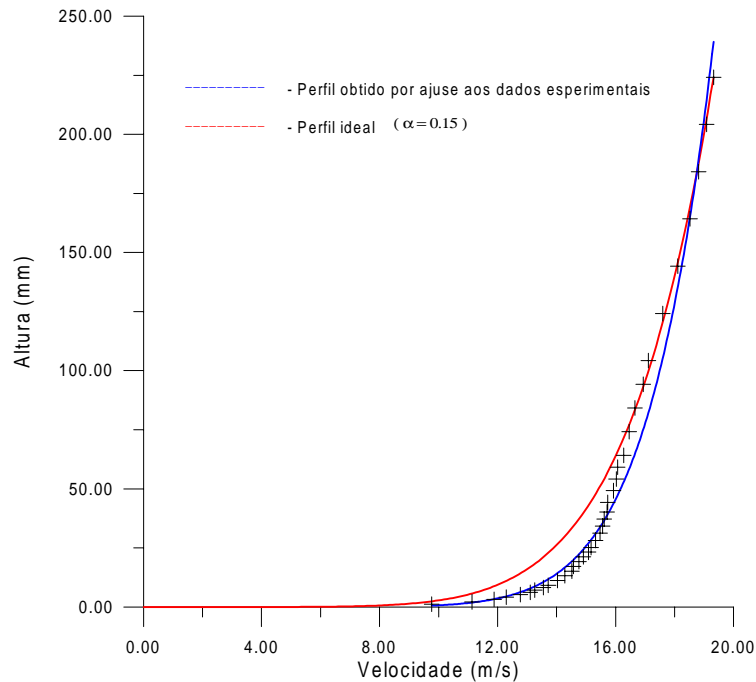
(3) não é válida para os valores de  $\alpha$  e  $\delta$  requeridos no presente trabalho. Desta maneira, o uso de paralelepípedos tornou-se inviável. Optou-se por usar um tapete rugoso, mais especificamente uma manta de bidim, usada na confecção de endredons (vide fig. 4), a qual é fixada na superfície inferior da seção de testes prolongada.

Para se medir o perfil de velocidade e a intensidade de turbulência utilizou-se um anemômetro de fio quente, cuja sonda foi instalada em um sistema de posicionamento de três eixos, que permite realizar posicionamentos com resolução de 0,1 mm. O sinal do anemômetro, depois de linearizado, foi enviado para um sistema de aquisição de dados, o qual determina os valores médio e *rms* da velocidade em cada ponto do perfil.

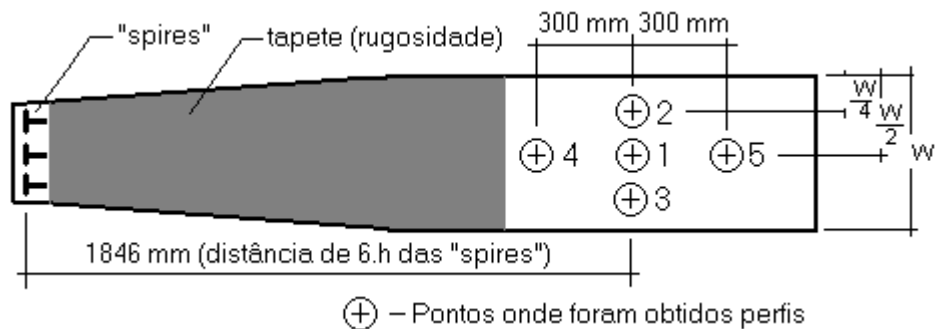
A análise de incerteza foi realizada através da metodologia proposta por **Kline e McClintock (1953)**. **Uma incerteza de 0.6% foi obtida para a velocidade adimensional e de 1% para o número de Reynolds.**

### 3. ANÁLISE DOS RESULTADOS

As *spires* sozinhas já produzem um perfil bastante próximo daquele para o qual ela foi projetada, sendo que a rugosidade serve como um ajuste. A rugosidade tende a aumentar o valor de  $\alpha$ , pois a mesma oferece resistência ao escoamento próximo ao solo. Portanto  $\alpha$  deve apresentar um valor menor que 0,15 para o caso das *spires* com ausência de rugosidade. Este foi o caso, conforme pode-se verificar na Fig. 3, na qual é apresentado o perfil de velocidades obtido em uma posição localizada à 6h das *spires*, com ausência de rugosidade. Considerando a região próxima ao solo, o perfil desejado ( $\alpha=0,15$ ) possui valores menores de velocidade, A outra curva contínua representa o perfil que melhor se ajustou aos resultados ( $\alpha=0,11$ ) e os símbolos são os resultados experimentais. Pode ser notado que a partir de aproximadamente 70mm de altura, os resultados experimentais concordaram bem com os requeridos. No entanto, para alturas inferiores, os valores experimentais de velocidade se mostraram acima daqueles requeridos, mostrando a necessidade de rugosidade.



**Figura 3** Perfil de velocidade média à 6h das *spires*, com ausência de rugosidade



**Figura 4-** Superfície inferior da seção de testes e definição das posições de medidas ( $W=440$  mm)

Para se analisar o escoamento produzido pelas *spires*, foram obtidos cinco perfis de velocidade com ausência de rugosidade no piso. Um destes perfis foi obtido no centro da seção de testes à uma distância 6.h das *spires*. Os perfis de velocidade nas posições 1, 2 e 3 (vide Fig. 4) foram obtidos para verificar a bidimensionalidade do escoamento gerado pelas 3 *spires*. Os perfis medidos nas posições 1, 4 e 5 foram usados para verificar se o escoamento sofre alterações significativas ao longo da direção longitudinal. Os resultados desta análise mostraram que o perfil de camada limite se manteve praticamente inalterado desde a posição 4 até a 5. Já a medição feita nos pontos 1, 2 e 3 evidenciou uma pequena discrepância (menor que 2% da velocidade máxima), a qual, na prática, pode ser desconsiderada.

Para encontrar a rugosidade ideal (comprimento ideal do tapete) seguiu-se a seguinte metodologia:

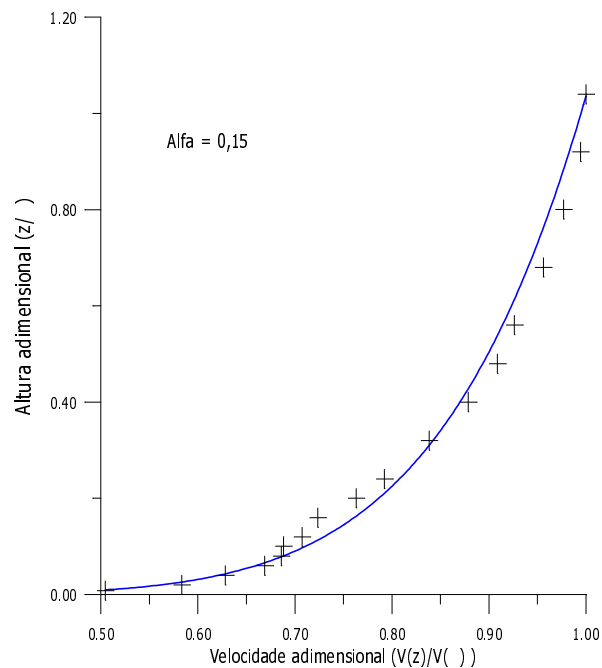
- Primeiramente cobriu-se 1570mm do piso do túnel (a partir das *spires*) com o tapete rugoso, mencionado anteriormente, e fez-se a obtenção de um perfil à distância de 6.h das *spires*. O valor de  $\alpha$  obtido foi por volta de 0,25, bem maior do que o pretendido, indicando a presença de muita rugosidade.

- Fez-se então cortes no tapete (para diminuir seu comprimento e conseqüentemente a rugosidade) seguidos da obtenção de perfis, até chegar no comprimento de tapete que fornecia a rugosidade ideal, de modo a produzir o perfil desejado ( $\alpha=0,15$ ).

Os resultados da metodologia precedente estão mostrados na tabela 2, onde pode-se verificar que um comprimento de 79 cm foi requerido para o ajuste do perfil de velocidades deste trabalho. As informações da tabela 2 também podem ser usadas para determinar o comprimento do tapete rugoso requerido para ajustar o perfil de velocidades da camada limite atmosférica que ocorre sobre outros tipos de superfícies (terrenos).

**Tabela 2-** Comprimentos do tapete de bidim e respectivos valores de  $\alpha$

Comprimento (mm)	1570	1390	1000	790	0
$\alpha$	0,26	0,20	0,17	0,15	0,11



**Figura 5** - Perfil de velocidade média obtido na posição 1, para  $Re = 3,04.10^5$

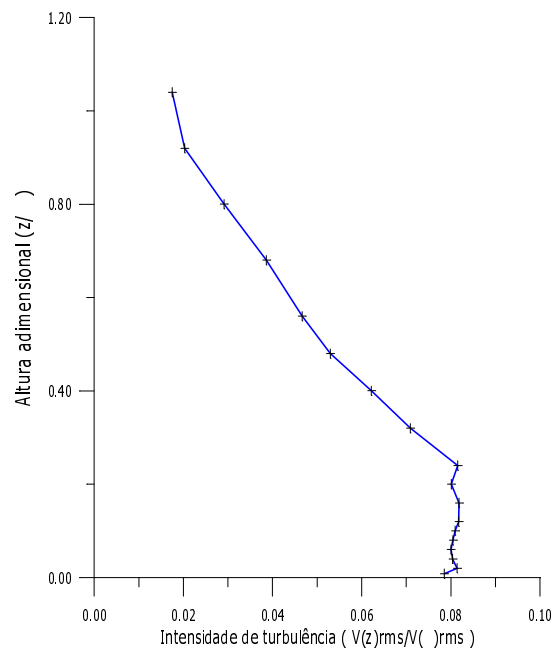
Após encontrada a rugosidade ideal, foram feitos ensaios para obter as características do escoamento. Foram obtidos perfis de velocidade média e intensidade de turbulência nas posições 1, 4 e 5 (vide figura 4). Ainda foram obtidos perfis na posição 1 para três diferentes velocidades (diferentes números de Reynolds) do escoamento, para ver se o perfil se modifica com o número de Reynolds.

Os resultados destes experimentos são mostrados nas Figs. 5 e 6 e nas tabelas 3 e 4. Pode-se observar que a curva com  $\alpha=0,15$  se ajusta bem aos resultados experimentais (Fig. 5) e que a intensidade de turbulência,  $I^*$ , (Fig. 6) é caracterizada por um valor aproximadamente constante até uma altura adimensional de 0,25. O decréscimo de  $I^*$  com a altura esta ligado a dois fatores: (i) a forma das *spires*, que causam menor perturbação na parte superior, devido ao menor bloqueio que acarretam no escoamento e

(ii) a presença do tapete rugoso, que incrementa o arrasto e, também, o nível de turbulência na região mais próxima da superfície inferior da seção de testes.

Os resultados apresentados na tabela 3 mostram que o expoente  $\alpha$  e a intensidade de turbulência ( $I^*$ ) decaem ligeiramente ao longo da direção longitudinal do escoamento. Esta observação mostra que sem o tapete rugoso o escoamento médio se modifica, tendendo a um escoamento com perfil uniforme e, como esperado, a turbulência gerada no tapete sofre um decaimento.

A variação do número de Reynolds praticamente não acarreta alterações nos valores de  $\alpha$  e  $I^*$ , como pode ser observado na tabela 4. Pode-se verificar somente uma pequena queda no valor de  $\alpha$ , a qual pode estar associada à variação do coeficiente de fricção ( $C_f$ ), do tapete rugoso, o qual, normalmente sofre um decréscimo com o aumento do  $Re$ .



**Figura 6:** Perfil de intensidade de turbulência obtido na posição 1, para  $Re = 3,04 \cdot 10^5$

**Tabela 3 -** Valores de  $\alpha$  e  $I^*$  em função da posição

Posição (vide Fig. 4)	$\alpha$	$I^*$	Reynolds
4	0,15	0,087	$3,04 \cdot 10^5$
1	0,15	0,080	$3,04 \cdot 10^5$
5	0,14	0,075	$3,04 \cdot 10^5$

**Tabela 4 -** Valores de  $\alpha$  e  $I^*$  em função do número de Reynolds

Posição (vide Fig. 4)	$\alpha$	$I^*$	Reynolds
1	0,15	0,080	$2,09 \cdot 10^5$
1	0,15	0,080	$3,04 \cdot 10^5$
1	0,14	0,082	$5,00 \cdot 10^5$

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS



A técnica que utiliza *spires* foi aplicada com sucesso para o desenvolvimento de um escoamento com perfil de velocidade tipo camada limite atmosférica, para o caso de um túnel de vento com pequenas dimensões.

O perfil de intensidade de turbulência não ficou uniforme como seria desejável, conforme relatado na literatura. Para melhorar esta característica, pode-se utilizar uma tela fina uniforme, posicionada à montante das *spires*, a qual introduziria uma turbulência uniforme no escoamento.

Os resultados dos experimentos para se encontrar a rugosidade ideal para este trabalho, podem ser usados para se obter outros tipos de perfil de velocidade, apropriados para o modelamento do escoamento atmosférico sobre outros tipos de terrenos. Ainda com relação a este aspecto, os valores de  $\alpha$  e  $I^*$  parecem estar ligados com o tipo de rugosidade do tapete colocado no piso da seção de testes. Desta forma, experimentos adicionais com tapetes diferentes, poderiam fornecer informações importantes para se obter qualquer tipo de combinação, requerida para os parâmetros mencionados acima.

Por fim, como mencionado anteriormente, esta pesquisa será continuada com a instalação de um degrau na seção de testes e com o estudo do escoamento na parte superior do mesmo.

## 5. AGRADECIMENTOS

À Fundação de Ampara a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelos recursos disponibilizados para a aquisição de equipamentos, através dos processos 95/05569-1 e 96/12147-9.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Blesmann, J., 1973, “Simulação da estrutura do vento natural em um túnel aerodinâmico”, Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), São José dos Campos, SP.
- Irwin, H.P.A.H., 1981, “The design of *spires* for wind simulation”, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 7, pp. 361-366.
- Kline, S. J. & McClintock, F. A., 1953, “Describing Uncertainties in Single-Sample Experiments”, *Mechanical Engineering*.
- Owen, P.R. and Zienkiewicz, H.K., 1957, “The production of uniform shear flow in a wind tunnel”, *J. Fluid Mech.*, August, pp 521-531.

# INFLUÊNCIA DA PARTE FRONTAL DE UM MODELO DE ÔNIBUS SOBRE OS SEUS COEFICIENTES AERODINÂMICOS

**Luís Carlos Pires Videira**

**Roberto da Mota Girardi**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, Divisão de Engenharia Aeronáutica, 12.228-901, São José dos Campos, SP, Brasil. E-mail: [luis@aer.ita.cta.br](mailto:luis@aer.ita.cta.br) e [girardi@aer.ita.cta.br](mailto:girardi@aer.ita.cta.br)

## Resumo

Pesquisas em túneis de vento mostram a alta influência da forma aerodinâmica dos veículos terrestres na redução do coeficiente de arrasto e como consequência, a diminuição no consumo de combustível. O objetivo do presente trabalho é determinar experimentalmente os coeficientes de arrasto, força lateral e momento de guinada de um modelo de ônibus cuja parte frontal pode ser modificada. Os ensaios foram realizados para ângulos de guinada na faixa de  $-15^\circ$  e  $12^\circ$  utilizando para estes ensaios de uma balança de 3 componentes especialmente projetada para obter os esforços aerodinâmicos. Foram testados cinco modelos de maneira a se determinar a influência das inclinações das superfícies lateral e superior. Os resultados são apresentados na forma de coeficientes aerodinâmicos em função do ângulo de guinada. Observou-se uma variação acentuada do  $C_D$  com as alterações na parte frontal do veículo. Os coeficientes de momento de guinada e de força lateral praticamente não sofreram modificação.

**Palavras-chave:** Aerodinâmica de ônibus, Corpo rombudo, Coeficientes aerodinâmicos

## 1. INTRODUÇÃO

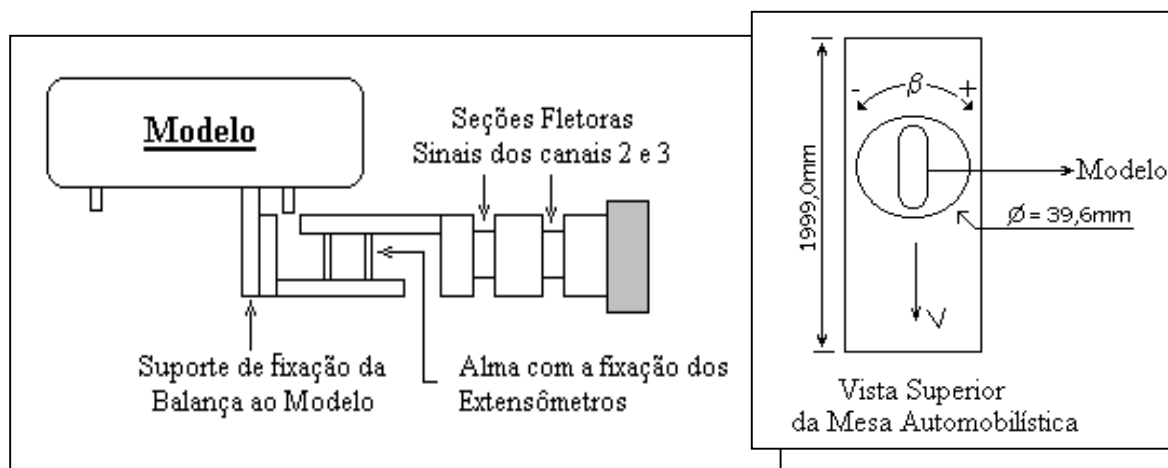
Segundo Wong (1978) a importância da economia de combustível vem aumentando o interesse no desenvolvimento de novos conceitos em aerodinâmica de veículos. Um coeficiente de arrasto elevado provoca um consumo excessivo de combustível, e como consequência direta desta, tem-se uma grande emissão de poluentes no ar atmosférico, tornando-se assim um importante item para a elaboração de um projeto. O custo para se reduzir o arrasto através de um melhor projeto aerodinâmico é relativamente baixo, comparado ao custo do desenvolvimento de motores com melhores rendimentos e menores consumos. Como exemplo, Hucho (1986), cita que um modelo de ônibus com a parte frontal com os cantos sem arredondamento, apresentou um  $C_D=0,88$ , enquanto que um modelo com a mesma frente mas com os cantos arredondados apresentou um  $C_D=0,36$ . Um terceiro modelo com um ângulo de inclinação frontal e arredondamento da frente do modelo apresentou um  $C_D=0,34$ . Portanto, pequenas alterações na forma do modelo podem provocar reduções significativas no coeficiente de arrasto.

Câmara (1993) foi o primeiro a trabalhar com o presente modelo obtendo uma redução expressiva do coeficiente de arrasto com o arredondamento das arestas do modelo. Este mesmo modelo foi usado como configuração básica na pesquisa desenvolvida por Moreira (1996), na qual foram realizados ensaios para diferentes ângulos de guinada ( $\beta$ ) e duas modificações na superfície frontal do modelo foram testadas. Nestas modificações foram alterados o ângulo da superfície frontal com relação ao plano horizontal.

O presente trabalho é uma continuação da pesquisa realizada por Moreira(1996). Quatro modificações da configuração básica do modelo foram consideradas: duas para estudar o efeito da inclinação da superfície frontal com relação ao plano de simetria vertical do modelo e outras duas para verificar o impacto causado por modificações simultâneas com relação aos planos horizontal e vertical.

## 2. APARATO E PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Segundo Gorecki (1989), num laboratório de ensaios aerodinâmicos, o túnel de vento é o principal equipamento para se realizar experimentos relacionados com a aerodinâmica. O túnel utilizado neste trabalho é do tipo soprador e circuito aberto. Este túnel aerodinâmico subsônico opera na faixa de 6 a 30 m/s, possui seção de ensaio com dimensões 460 x 460x 1200 mm, sendo que a área real de ensaio, isto é a área descontada dos cantos da seção do túnel é aproximadamente  $0,2027\text{m}^2$  e o nível de turbulência (NT) apresenta um valor de aproximadamente 0,5%, para a máxima velocidade.



**Figura 1.** Vista lateral da balança utilizada nos ensaios de força e momento.

**Figura 2.** Esquema da Mesa Automobilística

Foi utilizada uma balança que permite fazer medidas de 3 componentes conforme a Fig. 1. Esta é semelhante à balança utilizada em ensaios de modelos aeronáuticos. Extensômetros são utilizados como elementos sensores e são fixados: (i) em uma das almas do filtro mecânico da parte frontal da balança, o qual é usado para fazer os registros da força de arrasto; (ii) nas seções fletoras, cujos sinais de saída fornecem os momentos na seção fletora mais próxima ( $M_{FA}$ ) e mais afastada ( $M_{FB}$ ) do modelo. Estes momentos são causados pela força lateral ( $F_L$ ) e pelo momento de guinada ( $M_G$ ), em torno do ponto de fixação do modelo à balança. As relações entre estes parâmetros são dadas pelas equações abaixo:

e

onde  $L = 0,230\text{m}$ , é a distância do ponto de fixação do modelo à seção fletora mais próxima e  $\Delta = 0,095\text{m}$ , é a distância entre as seções fletoras (vide Fig. 1). Deve-se deixar claro que tanto o momento ( $M_G$ ) quanto o ângulo de guinada ( $\beta$ ) são considerados como sendo positivos no sentido horário, como pode ser visto na figura 2.

A calibração da balança foi realizada através da adição de blocos de massa-padrão obtendo-se assim um valor de força de arrasto, força lateral e momento de guinada em função da tensão fornecida pelos extensômetros.

O modelo utilizado foi construído em madeira e tem semelhança geométrica com o ônibus modelo Mercedes-Benz O 400 RSD. As dimensões do modelo (vide tabela 1) foram escolhidas para se ter uma razão de bloqueio inferior a 5%, de maneira a minimizar as interferências provocada pela fronteira do fluxo de ar proveniente do túnel de vento, pois os ensaios foi feito em uma seção de testes aberta. Deve-se mencionar que não foram feitas correções nos resultados experimentais, pois trata-se de um estudo comparativo.

Conforme mencionado anteriormente, a superfície frontal do modelo básico (denotado como configuração do modelo 1), foi modificada sistematicamente, alterando-se os ângulos com relação ao plano horizontal ( $\alpha$ ) e com relação ao plano de simetria vertical ( $\gamma$ ), como mostrados na figura 3. Na tabela 2 são fornecidos valores para  $\alpha$  e  $\gamma$  para as respectivas configurações do modelo. Deste modo, o conjunto (I) formado pelas configurações 1,2 e 3 é usado para se analisar as variações dos esforços aerodinâmicos devido a variação de  $\gamma$ . As configurações 1,4 e 5 formam um conjunto (II), com o qual variações simultâneas de  $\alpha$  e  $\gamma$  podem ser analisadas.

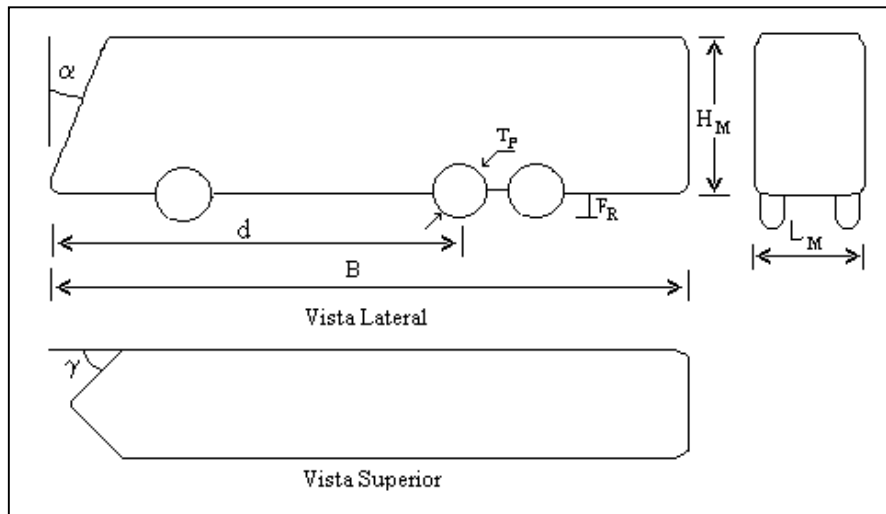
O modelo, a mesa automobilística e a balança são montado sem um suporte, o qual é posicionado na saída da seção de testes do túnel de vento. A superfície da mesa automobilística é posicionada um pouco acima da superfície inferior do túnel de vento. Desta forma, a camada limite que passa no vão entre a mesa e o modelo é pouco espessa, minimizando, assim, a interferência nos resultados.

Para o cálculo do número de Reynolds ( $Re$ ), mediu-se as pressões total e a estática em tomadas de pressão instaladas no início da seção de testes do túnel de vento. Com isso, é possível obter a pressão dinâmica que é lida por um transdutor de pressão, cujo sinal é amplificado, filtrado e, em seguida, transmitido para o sistema de aquisição de dados. Este sistema é constituído por um micro computador, placa de aquisição da *National Instruments* e pelo programa *LabView*, que controla o processo de medida e executa o pós processamento dos dados.

Os ensaios foram realizados com aproximadamente o mesmo valor de pressão dinâmica, de maneira a se obter o mesmo Reynolds, permitindo a comparação dos resultados dos modelos ensaiados. O número de Reynolds tem como o comprimento característico a altura do modelo  $H_M = 105,7\text{mm}$  (vide figura 3), por ser esta a dimensão característica normalmente usada na literatura.

O procedimento adotado para realizar os ensaios foi o seguinte: (i) após o alinhamento inicial do modelo com o auxílio de um teodolito, foi realizado o ajuste da pressão dinâmica do túnel de vento. (ii) Em seguida o ângulo de guinada ( $\beta$ ) foi variado, tomando valores no intervalo de  $-15^\circ$  e  $+12^\circ$  variando de 3 em 3 graus. Este intervalo foi estudado para se ter, pelo menos, duas medidas para cada ângulo e para verificar alguma possível assimetria do aparato experimental. (iii) Para cada ângulo  $\beta$ , foram lidos os sinais de tensão provenientes da medida

de pressão dinâmica e de cada canal da balança. (iv) No início e no final de cada ensaio mediu-se a pressão e a temperatura ambiente, com a finalidade de se obter a densidade do ar.



**Figura 3.** Esquema do modelo com inclinação do plano superior ( $\alpha$ ) e vertical ( $\gamma$ ).

**Tabela 1.** Dimensões do modelo básico.

Dimensão	Valores (mm)
Largura ( $L_M$ )	72,6
Altura ( $H_M$ )	105,7
Comprimento ( $B_M$ )	392,4
Vão ao solo ( $F_R$ )	10,0
Balanço dianteiro ( $G_M$ )	76,5
Distância do eixo auxiliar em relação à superfície frontal ( $E_{R1M}$ )	260,0
Distância do eixo motriz em relação à superfície frontal ( $E_{R2M}$ )	290,0
Espessura do pneu ( $S_{PM}$ )	10,5
Diâmetro do pneu ( $T_P$ )	21,0
Raio de arredondamento das arestas do modelo básico	10
Distância da superfície frontal ao ponto de fixação na balança (d)	262,4

**Tabela 2.** Ângulos de inclinação frontal ( $\alpha$ ) e lateral ( $\gamma$ ) para as diferentes configurações do modelo.

Modelo	Ângulo de inclinação frontal ( $\alpha$ )	Ângulo de inclinação lateral ( $\gamma$ )
Configuração 1	0°	0°
Configuração 2	0°	20°
Configuração 3	0°	40°
Configuração 4	20°	40°
Configuração 5	40°	40°

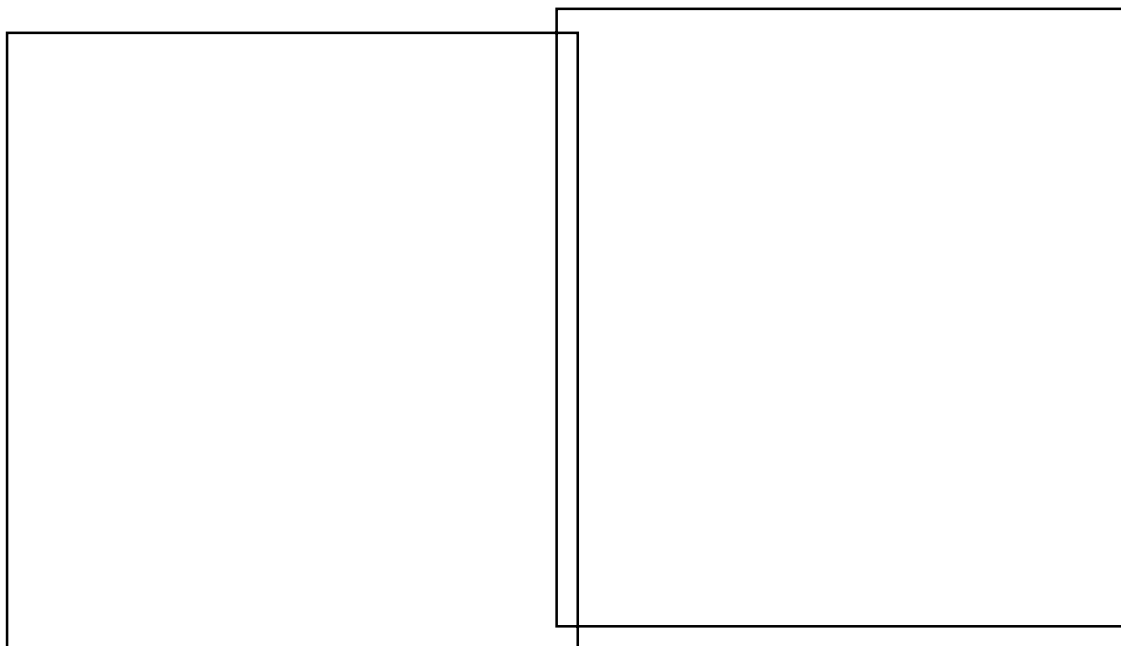
Por fim, a análise de incertezas dos resultados apresentadas neste trabalho foram tratadas segundo a metodologia apresentada por Kline & McClintock (1953). Nos cálculos de propagação das incertezas, utilizou-se o critério da distribuição de Gauss para um valor de desvio padrão ( $\sigma$ ) de 95%, isto é,  $\pm 2\sigma$ .

### 3. RESULTADOS

Para calcular os coeficientes de força lateral,  $C_{FL}$ , de momento de guinada e de arrasto, que atuam no ônibus utilizam-se as relações clássicas encontradas na literatura, Hucho(1986). A força lateral tem direção normal ao eixo longitudinal do veículo e o momento de guinada é medido em relação ao ponto de fixação da balança, apresentado na tabela 1. Em todos os coeficientes a área de referência utilizada é  $0,008114 \text{ m}^2$ , correspondente a superfície frontal do modelo e o comprimento de referência usado para determinar o coeficiente de momento de guinada é a distância entre os eixos, fornecida na tabela 1.

Para se evitar um congestionamento dos pontos experimentais, apresentou-se somente duas curvas que representam os limites inferior e superior desta variação. Analisando as curvas obtidas dos ensaios para os diferentes modelos, constatou-se uma variação muito pequena nos resultados do coeficiente de força lateral ( $C_{FL}$ ) e momento de guinada ( $C_M$ ) como pode ser visto respectivamente nas figura 5 e 6.

As incertezas obtidas para os ensaios do coeficiente de força lateral e momento de guinada apresentaram valores em torno de 0,2 para o  $C_{FL}$  e 0,35 para o  $C_M$ . Embora as incertezas obtidas para estes ensaios tenham sido elevadas, os resultados apresentaram uma dispersão muito pequena. Estes valores de incerteza justificam o fato de  $C_{FL}$  ser diferente de zero para ângulo de guinada igual a zero.



**Figura 5.** Curva do coeficiente de força lateral ( $C_{FL}$ ) para os diferentes modelos.

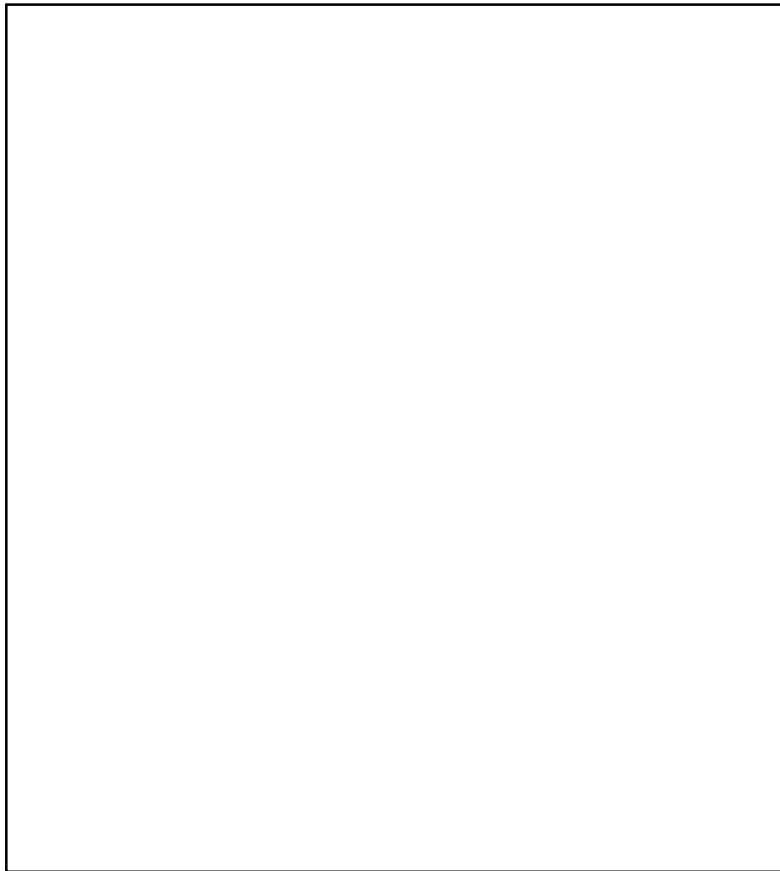
**Figura 6.** Curva do coeficiente de momento de guinada ( $C_M$ ) para os diferentes modelos.

Nas figuras 5 e 6 pode-se observar que os resultados para os coeficientes de força lateral e momento de guinada praticamente não se alteraram, mostrando que a modificação da parte frontal do veículo tem pouca influência nestes parâmetros. Para explicar este fato, deve-se pensar em termos de distribuição de pressão na superfície do modelo e das forças que

resultam desta distribuição. A força lateral e o momento de guinada são causados por uma assimetria na distribuição de pressão em relação ao plano de simetria vertical do modelo. Isto é, para  $\beta=0$  as distribuições de pressão nas superfícies laterais do modelo são idênticas e, portanto, a força lateral e o momento de guinada são nulos. Quando o modelo é submetido a um escoamento com ângulo de guinada diferente de zero, ocorre uma assimetria das distribuições de pressão nas superfícies laterais do modelo, que acarretam o aparecimento da força lateral e o momento de guinada.

Para a configuração básica, as distribuições de pressão nas superfícies frontal e traseira não fornecem contribuição para a força lateral e para o momento de guinada, pois as forças que atuam nestas superfícies são alinhadas com o eixo de simetria longitudinal do modelo (direção da força de arrasto). Neste caso, somente a força que atua na superfície lateral é responsável pela variação com  $\beta$ , que se observa nas Figs. 5 e 6.

As modificações na superfície frontal do modelo implicam no aparecimento de superfícies inclinadas, com relação ao plano de simetria vertical (vide vista superior na Fig. 3). Neste caso as forças que atuam nestas superfícies tem componentes nas direções das forças de arrasto e lateral. Desta forma, uma assimetria das distribuições de pressão, devido a  $\beta \neq 0$ , fornece uma contribuição para a força lateral e para o momento de guinada do modelo. No entanto, como a área da superfície frontal do modelo é bem menor que a área da superfície lateral, esta contribuição é pequena comparada com a aquela dada pela assimetria das distribuições de pressão nas superfícies laterais. Este raciocínio explica as pequenas variações encontradas nas inclinações das retas observadas nas Figs. 5 e 6.



**Figura 7.** Curva do coeficiente de arrasto ( $C_D$ ) para os diferentes modelos.

Inicialmente os resultados da figura 7 são analisadas para o caso do escoamento sem ângulo de guinada. Para o conjunto de modelos (I), constituído pelas configurações 1,2 e 3, verifica-se que o aumento do valor do ângulo  $\gamma$  acarreta em diminuição do  $C_D$ . Esta diminuição foi bem pronunciada no caso da configuração 2 e pode ser explicada pela redução acentuada na região de estagnação (onde  $C_p$  é aproximadamente igual a 1) na parte frontal do modelo, devido a inclinação das superfícies laterais da mesma. Esta explicação é baseada nos resultados do trabalho de Moreira (1996), que considerou a inclinação da superfície frontal, com relação ao plano horizontal e obteve uma redução de arrasto associada à explicação fornecida acima.

Para o conjunto de modelos (II), constituídos pelas configurações 1,4 e 5, observa-se uma redução do  $C_d$  devido à inclinação simultânea das superfícies laterais e superior. Não foi verificada variação do  $C_d$  devido ao aumento da inclinação da superfície superior ( $\alpha$ ). A pequena diferença encontrada para os valores de  $C_d$  das configurações 4 e 5 está dentro da faixa de incerteza da medida.

Ainda considerando o caso de  $\beta=0$ , pode-se verificar que as configurações 4 e 5 tem coeficiente de arrasto maior que as configurações 2 e 3. A expectativa inicial era encontrar o resultado oposto, pois era esperado que a região de estagnação na parte frontal do modelo com inclinações simultâneas fosse menor que nos modelos com inclinação lateral. Para fornecer uma explicação para este resultados são necessários ensaios de medida de distribuição de pressão e, também, a realização de visualização do escoamento, pois a causa do resultado mencionado acima pode estar na formação de vórtices longitudinais, com origem nas arestas inclinadas que aparecem nas interseções das superfícies laterais com a superfície superior da parte frontal do modelo. Estes vórtices ocasionam o chamado arrasto de vórtice, que certamente não existe no escoamento sobre as configurações 2 e 3.

Considerando-se a variação do coeficiente de arrasto em função do ângulo de guinada, verifica-se (vide Fig. 7) que a configuração 2 possui comportamento similar à configuração 1 (modelo básico). Este comportamento é alterado para as configurações 3, 4 e 5, para as quais se observa uma menor variação do  $C_d$  com  $\beta$ . Deve-se lembrar que as configurações 3, 4 e 5 tem uma característica em comum, pois possuem o mesmo valor para  $\gamma$ .

No trabalho de Moreira (1996) foi verificado que a variação do coeficiente de arrasto do modelo com o ângulo de guinada está fortemente associada à variação do coeficiente de arrasto de base, resultante da distribuição de pressão na superfície traseira do veículo. Por outro lado, esta distribuição de pressão é causada pelo escoamento na esteira próxima do modelo. Estas informações indicam que a parte frontal das configurações 3, 4 e 5 está influenciando o escoamento na esteira dos modelos, talvez, devido à elevada inclinação das superfícies laterais (ângulo  $\gamma$ ), que acabam evitando o descolamento na junção entre as partes frontal e lateral do modelo.

#### 4. CONCLUSÕES

A análise dos coeficientes aerodinâmicos é muito importante para ângulos de guinada  $\beta$  diferente de zero, pois um veículo trafegando em uma estrada, certamente estará sujeito a ventos na direção transversal a sua trajetória. Por este motivo, é muito interessante que um veículo tenha baixa variação do coeficiente de arrasto em função do ângulo  $\beta$ .

Nos resultados experimentais apresentados neste trabalho, pode-se observar que o  $C_{FL}$  e o  $C_M$  praticamente não variaram para as diferentes configurações o modelo básico. Este fato está associado à relação de áreas entre a superfície lateral do modelo e a projeção da parte frontal no plano de simetria vertical dos modelos. Do ponto de vista prático, este resultado mostra que a modificação da parte frontal do modelo, a qual pode acarretar redução significativa do consumo de combustível, quase não tem influência na estabilidade do ônibus.



Os modelos com parte frontal inclinada com relação ao plano de simetria vertical apresentaram coeficientes de arrasto menores que as configurações com inclinação simultânea das superfícies da parte frontal. Este resultado inesperado pode ser consequência da geração de um vórtice longitudinal (arrasto de vórtice), na aresta formada pela interseção das superfícies lateral com a superior da parte frontal do modelo. A análise deste problema pode ser realizada com experimentos adicionais, realizando-se visualização do escoamento e medidas da distribuição de pressão dos modelos estudados no presente trabalho.

A variação do coeficiente de arrasto com relação ao ângulo de guinada foi menor para os modelos com parte frontal inclinada com relação ao plano de simetria vertical. Este resultado parece estar associado com a configuração do escoamento na esteira próxima, o qual parece estar sendo influenciado pelo não descolamento do escoamento sobre a superfície lateral do modelo. Este descolamento ocorre normalmente na junção entre a parte frontal e o corpo do modelo. Para ângulo de derrapagem nulo ( $\beta=0$ ), observa-se um recolamento nas superfícies laterais e superior, entretanto, quando  $\beta \neq 0$  não ocorre este recolamento em uma das superfícies laterais. Aparentemente, este tipo de configuração não está ocorrendo para o modelo com maior inclinação da parte frontal, relativa ao plano de simetria vertical.

Por fim, deve-se lembrar que as variações adotadas para as inclinações da superfície frontal tem o objetivo de se compreender melhor o complexo escoamento sobre um veículo. Na prática, ângulos muito elevados para tais inclinações podem acarretar inconveniências em um projeto de ônibus. A questão da metodologia adotada para a calibração da balança, com a qual se obteve valores elevados das incertezas para os coeficientes de força lateral e momento de guinada, deve ser modificada. Uma alternativa para melhoria dos resultados seria fazer uma calibração tipo matricial.

## 5. AGRADECIMENTOS

À Fundação de Ampara a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelos recursos disponibilizados para a aquisição de equipamentos usados nesta pesquisa (processo 95/05569-1) e a Coordenadoria de Apoio a Pesquisa de Nível Superior (CAPES) pelo suporte do primeiro autor, na forma de bolsa de estudo.

## 6. REFERÊNCIAS

- Câmara, E.F., 1993, “Estudo Aerodinâmico do Escoamento sobre o Modelo de um Ônibus”, Tese de Mestrado, ITA.
- Doebelin, E.O., 1990, “Measurement Systems: Application and Design” Mc Graw-Hill, Inc.
- Gorecki, J.P., 1989, “Túneis Aerodinâmicos”, Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), São José dos Campos, SP.
- Hucho, W.H., 1986, “Aerodynamics of Road Vehicle”, Butterworths Co.
- Kline, S.J. and McClintock, F.A., 1953, “Describing Uncertainties in Single-Sample Experiments”, Mechanical Engineering.
- Manual – Dados Técnicos de Ônibus Rodoviários, O 400R, O 400RS, O 400RSL e O 400RSD”Mercedes Benz do Brasil S.A.
- Moreira Jr, O. e Girardi R.M., 1996, “Estudo Experimental da Inclinação da Superfície Frontal em Modelos de Ônibus”, VI Congresso Brasileiro de Ciências Térmicas, ENCIT 96.
- Wong, J.Y., 1978, “Theory of Ground Vehicles”, John Wiley & Sons Inc, 3 ed. pág 127 a 132.

# CALIBRAÇÃO DE UM DISPOSITIVO PARA ENSAIO EM VÔO DE AVIÕES: MEDIDA DE PESSÃO, VELOCIDADE E ATITUDE

**Roberto M. Girardi**

**Emerson Schmidt**

**Fábio H. Lameiras Pinto**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

12.228-900 São José dos Campos, SP, Brasil. E-mail: [girardi@era.ita.cta.br](mailto:girardi@era.ita.cta.br)

## Resumo

A última fase do desenvolvimento do projeto de uma aeronave, assim como parte de sua certificação pelo órgão homologador, é feito com auxílio dos resultados de ensaios em vôo, os quais devem ter grande confiabilidade. Para se medir a velocidade do avião, a pressão estática do nível de vôo e os ângulos de ataque e de derrapagem, utiliza-se um dispositivo (boom) que é fixado no avião. O objetivo deste trabalho é descrever o resultado da calibração deste dispositivo em um túnel de vento. Para realizar tal calibração foram seguidos os seguintes passos: Desenvolvimento de um dispositivo para a fixação do boom na seção de saída do túnel de vento, que permite a variação dos ângulos de ataque e de rolamento do mesmo e ensaios para se obter as curvas de calibração, nos quais a pressão dinâmica e estática serão medidas para um conjunto de ângulos de ataque e de rolamento.

**Palavras-chave:** Ensaio em Vôo, Túnel de Vento, Calibração, Medida da velocidade

## 1. INTRODUÇÃO

A atividade de ensaio em vôo requer medidas exatas da velocidade, altitude e dos ângulos de ataque e derrapagem da aeronave ensaiada. Normalmente, os sensores embarcados utilizados na operação da aeronave, usados para obtenção dessas informações, apresentam erros de medida maiores que os máximos aceitáveis na atividade de ensaio, que fornece subsídios para a homologação da aeronave. Isto torna imprescindível a utilização de equipamentos mais precisos, como por exemplo, centrais inerciais, *boom* para ensaio em vôo e até DGPS.

O *boom* é essencialmente um tubo de Pitot, que possui sensores de direção para determinar os ângulos de ataque ( $\alpha$ ) e derrapagem ( $\beta$ ) da aeronave. Erros de pressão total e pressão estática são sistemáticos, podendo ser determinados através de uma calibração. Os demais erros envolvidos, por sua vez, são funções do projeto do *boom*, sua instalação e utilização, podendo também ser eliminados através de uma calibração. Uma vez que o vôo pode acontecer em altos ângulos de ataque e derrapagem, torna-se necessária a calibração do *boom* nestas condições, para que se possa determinar os erros das medidas de pressão, e consequentemente de velocidade., nestas situações típicas.

Este trabalho tem por objetivo a calibração do *boom* da *SpaceAge Control, Inc.*, usado pelo grupo de ensaios em vôo do CTA, quando sujeitado a escoamentos em altos ângulos de ataque e derrapagem.

No trabalho desenvolvido por Richardson & Pearson (1959) são relatados os resultados de calibração de um *boom* composto com transdutores de pressão, temperatura e direção do fluxo numa faixa de número de Mach entre 0,60 e 2,87. Segundo este trabalho, as variações na pressão estática devido ao ângulo de ataque são geralmente menores que 1% da pressão de impacto para ângulos de até 15°, enquanto a variação devido ao ângulo de derrapagem entre -10° e +10° pode estar entre 2% e 4%, variando conforme o número de Mach. Os efeitos de ângulos de ataque

entre  $-3^\circ$  e  $20^\circ$  e/ou ângulo de derrapagem de  $-10^\circ$  a  $10^\circ$  na medida de pressão total é menor que 0,5% da pressão de impacto.

Gracey (1956a) analisa o efeito da inclinação do escoamento nas pressões medidas por 54 diferentes tubos de pressão total, a ângulos de ataque de até  $60^\circ$ , em número de Mach na faixa de 0,26 a 1,62.. Explica que para tubos simples, a faixa utilizável de ângulos de ataque depende do formato da seção frontal, o tamanho da abertura da seção de impacto (relativa ao diâmetro do tubo), e o formato da câmara interna após a abertura de impacto. A melhor combinação destes termos leva a maior faixa utilizável ( $28^\circ$  a Mach 0,26)..Para fins de medição de velocidades em vôo, não é necessário que o tubo tenha uma faixa extensa de utilização em ângulos de ataque negativos. Assim, pode-se estender a faixa para maiores ângulos de ataque através de um novo perfil de bordo de ataque. O trabalho verificou também que o número de Mach tem efeito considerável sobre as medidas de pressão.

Em um segundo trabalho, Gracey (1956b) realiza a calibração em ângulo de ataque de um tubo com 11 tomadas de pressão estática (4 orifícios superiores e 7 inferiores) em diversos números de Mach (entre 0,20 e 0,68). Foi observado que o erro de pressão estática permaneceu dentro de 1% da pressão de impacto na faixa entre 0 e  $40^\circ$  de ângulo de ataque a  $M=0,20$  e entre 0 e  $18^\circ$  para  $M=0,68$ . Devido ao arranjo assimétrico dos orifícios, a sensibilidade dos tubos a ângulos de derrapagem é muito maior que para ângulos de ataque. Foi verificado que o erro permaneceu dentro de 1% da pressão dinâmica na faixa de  $-5^\circ < \beta < +5^\circ$  para  $M=0,20$ .

## 2. APARATO E PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

O boom utilizado foi o modelo 100600 da empresa americana *SpaceAge Control, Inc*; como mostrado na Figura 1. Ele tem o corpo construído em alumínio 2024-T351, com nariz inclinado (tomada de pressão total), feito em aço inoxidável. Possui aletas diretoras para medida de ângulos de ataque e derrapagem, e tomadas de pressão estáticas distribuídas de forma assimétrica. A massa aproximada do boom é de 1,6 kg. Os transdutores de pressão utilizados para medir as pressões total e estática foram os da série 1332/1333 de uso geral da Rosemount. Tais transdutores são do tipo capacitivo, tendo entrada de 28 VDC e sinal de saída de 0-5VDC. O fabricante do transdutor garante um erro estático na faixa de 0,10% da saída, incluindo histerese, repetibilidade, resolução e não-linearidade.

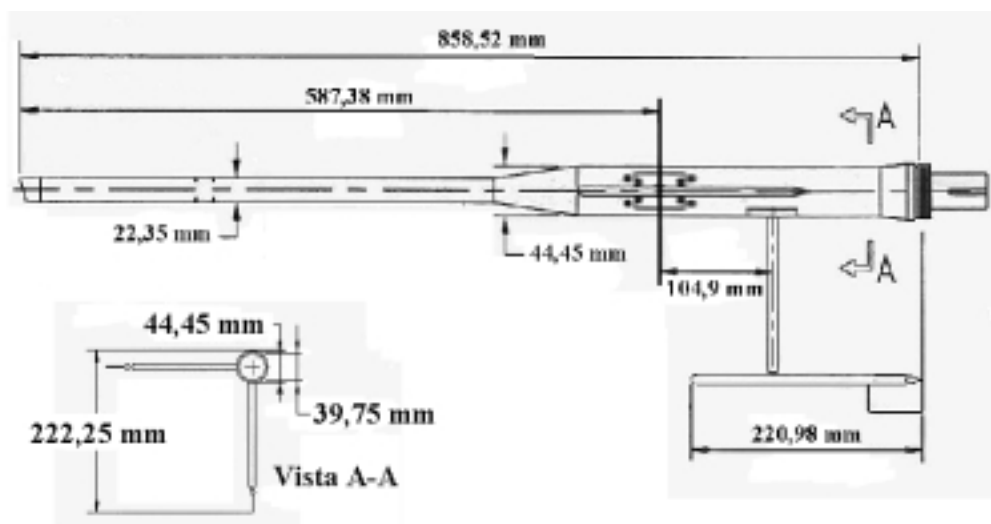


Figura 1: Características geométricas do boom modelo 100600 (vista lateral)

Para a calibração do boom foi utilizado o túnel de vento subsônico do Laboratório de Aerodinâmica do ITA. Este túnel é de sopro e sua seção de ensaio é quadrada com 460 mm de lado. A potência do túnel é 22 kw e o mesmo opera na faixa de velocidade entre 6 e 30 m/s. Na máxima velocidade o nível de turbulência é 0,5%. Com este tipo de túnel também é possível ensaiar modelos fora da seção de testes, aproveitando o fluxo de ar que sai do mesmo, sendo esta a configuração adotada neste trabalho.

Para o ensaio do *boom* no túnel de vento, foi necessário o projeto e a construção de um suporte que possibilitasse posicioná-lo na seção de testes. Este suporte possui um mecanismo de movimentação que permite ensaiar o *boom* numa dada faixa de  $\alpha$  e  $\beta$ . A principal qualidade de um suporte desse tipo é a de não influenciar o escoamento a montante, de modo a não alterar as medidas de pressão estática e total. Características desejáveis como a simplicidade de construção, e a possibilidade de utilização de um outro *boom* para ensaio em vôo nortearam o projeto do suporte. Além disto, foi estipulado que o suporte deveria promover a rotação do *boom* em torno de um ponto fixo: a tomada estática, que assim, permaneceria no mesmo ponto do escoamento do túnel durante todas as seqüências de tomada de valores.

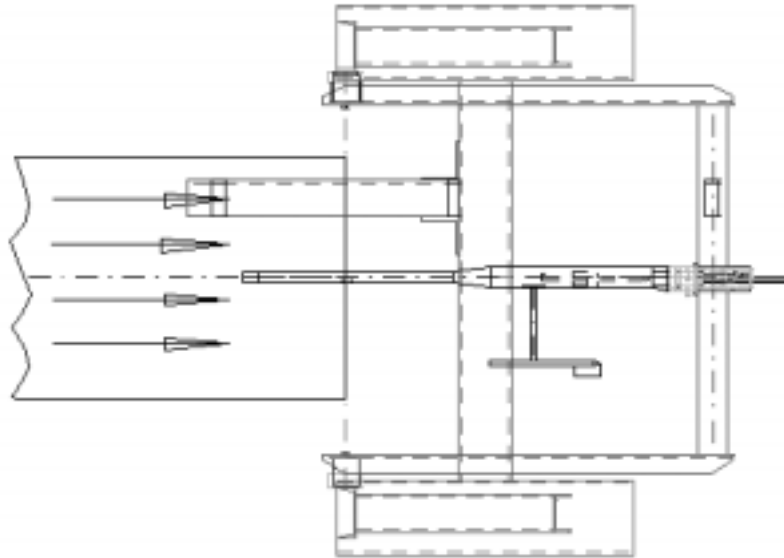


Figura 2: Vista superior do suporte com o *boom* instalado na saída do túnel de vento.

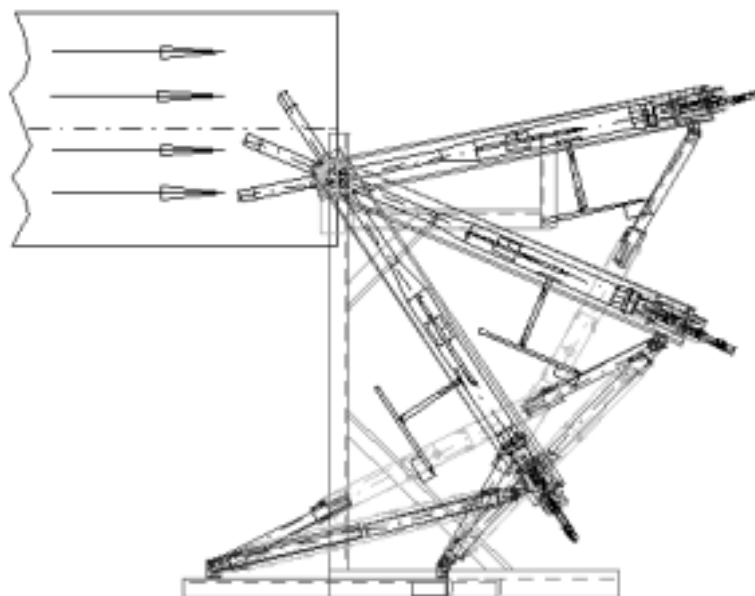


Figura 3: Vista lateral do suporte com o *boom* instalado na saída do túnel de vento

Dados empíricos obtidos por Gracey [3] mostram que as perturbações são notáveis a montante até em torno de 8 diâmetros. Assim, optou-se por fixar o *boom* num suporte em formato de garfo (vide Fig. 2), mantendo o centro de rotação fixo na tomada estática, como pode ser visto na Fig. 3. Na primeira concepção para o suporte do *boom* os ângulos de ataque e derrapagem verdadeiros eram fornecidos por meio de mecanismos que envolviam muitas partes móveis, cujas folgas acarretariam erros no posicionamento do *boom* com relação ao escoamento não perturbado do túnel de vento. Para resolver este problema, foi concebida a idéia de conjugar os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , de modo a serem representados pelos ângulos  $\gamma$  e  $\theta$ , definidos, respectivamente, como a inclinação do *boom* com relação à direção do escoamento não perturbado e a rotações em torno do eixo longitudinal do *boom*. Esta “mudança de variáveis” é muito importante, pois facilitou o projeto do suporte, o qual pode ser construído com maior facilidade e com folgas bem pequenas, de maneira que as cargas aplicadas (aerodinâmicas) ao mesmo não acarretem em modificações nos ângulos requeridos para o ensaio de calibração. As relações entre as variáveis acima são dadas nas equações abaixo e sua dedução pode ser encontrada em Schmidt (1999).

$$tg(\gamma) \cdot \cos(\theta) = tg(\alpha) \quad (1)$$

$$tg(\gamma) \cdot \sen(\theta) = tg(\beta) \quad (2)$$

Para medir os ângulos  $\theta$  e  $\gamma$  foram fixados ao suporte dois potenciômetros. Através de uma calibração, foram obtidas as relações entre voltagem e rotação (ângulos  $\theta$  e  $\gamma$ ). As vantagens de se utilizar essa montagem são a facilidade de utilização e a rapidez da leitura dos valores. Este método também permite perceber ligeiras modificações nestes ângulos durante o experimento, devido à vibração ou mesmo às forças aerodinâmicas. Os potenciômetros têm como características principais a resistência de 500 ohms, e o sistema duplo de medição. São potenciômetros de uso aeronáutico, com grande resistência a vibração e variações de temperatura.

As medidas no laboratório foram precedidas de uma série de procedimentos, como determinação do perfil de velocidades do túnel, determinação do perfil de direção do escoamento, e elaboração de um suporte para fornecimento dos ângulos iniciais. Para a elaboração dos perfis de velocidade e direção, foram utilizados: (i) um dispositivos de posicionamento de três eixos, (ii) um sistema de anemometria de fio quente; (iii) condicionadores de sinais (amplificadores e filtros) e (iv) um sistema de aquisição de dados para coleta, armazenamento, tratamento e redução de dados, baseado em placas da empresa *National Instruments* e no programa *LabView*.

A medição dos valores iniciais de  $\theta$  e  $\gamma$  é um procedimento muito importante, pois os demais ângulos, obtidos através das leituras provenientes dos potenciômetros, são funções dos valores iniciais. Para realizar a medida da angulação inicial, foi necessário construir um aparato que fornecesse apoio a um “prumo eletrônico”, também conhecido por inclinômetro. O inclinômetro utilizado foi o *Pro 360 Digital Protractor*, que tem uma precisão de  $0,1^\circ$ . Para garantir que, inicialmente, o *boom* estivesse alinhado com o eixo do túnel de vento foi usado um teodolito. Para tanto, no primeiro passo o teodolito foi alinhado com o eixo do túnel. Em seguida, o *boom* foi alinhado usando-se os recursos disponíveis no teodolito.

Para se medir a pressão dinâmica (usada como padrão para a calibração do *boom*) e, portanto, a velocidade do escoamento na seção de testes do túnel de vento foram usadas tomadas de pressão localizadas no final da contração do túnel. Nesta posição, as pressões total e estática são influenciadas por uma distorção do escoamento causada pela curvatura das paredes da contração. Devido a este fato, foi necessário fazer uma calibração da pressão dinâmica com auxílio de um tubo Pitot padrão localizado na saída da seção de testes, na posição onde o *boom* foi instalado. A medida da pressão dinâmica foi realizada por um transdutor de pressão, conectado a um condicionador de sinais, cujo sinal foi enviado ao sistema de aquisição de dados descrito anteriormente.

A calibração do *boom* seguiu o seguinte procedimento experimental: Inicialmente é feito o alinhamento do *boom* e o ajuste do ângulo  $\theta$  (rotação em torno do eixo longitudinal do *boom*). Deve-se deixar claro que  $\theta = 0$  graus e o *boom* alinhado correspondem a  $\alpha = \beta = 0$  graus. Em seguida o túnel de vento é ligado e uma pressão dinâmica é definida e mantida fixa durante todo o ensaio. Com  $\theta$  fixo, é feita uma varredura para o ângulo  $\gamma$ . Para cada valor de  $\gamma$  são feitas as medidas de pressão dinâmica do túnel, pressão dinâmica e pressão estática do *boom* e dos valores de tensão provenientes dos potenciômetros, conectados aos ângulos  $\theta$  e  $\gamma$ . Todas as medidas são realizadas pelo sistema

de aquisição de dados. O procedimento acima é repetido para vários valores de  $\theta$ , de maneira a se ter dados para a formulação de uma carta de calibração do instrumento.

### 3. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Durante o ensaio em voo de uma aeronave são medidos os ângulos de ataque ( $\alpha$ ) e de derrapagem ( $\beta$ ), a pressão dinâmica e a pressão estática. Neste trabalho, os resultados dos ensaios de calibração são fornecidos na forma de erros percentuais, definidos nas equações abaixo, em função dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ . Desta maneira, pode-se utilizar os resultados deste trabalho para verificar a faixa de ângulos para a qual o dados fornecidos pelo *boom* podem ser usados diretamente e, também, para corrigir os dados obtidos nos ensaios em voo, quando os ângulos de ataque e derrapagem estão fora da faixa mencionada acima.

$$\Delta P = \frac{P_m - P_p}{P_p} \times 100 \quad (3)$$

$$\Delta q = \frac{q_m - q_p}{q_p} \times 100 \quad (4)$$

onde  $q$  e  $P$  são, respectivamente, as pressões dinâmica e estática, o sub índice “ $m$ ” indica valores medidos pelo *boom* e “ $p$ ” indica valores padrão, obtidos a partir do sistema anemométrico do túnel de vento. Desta forma,  $\Delta q$  e  $\Delta P$  são os desvios dos valores corretos, devido à posição do eixo longitudinal do boom relativa ao escoamento não perturbado.

#### Pressão Dinâmica Devido a Variação do Ângulo de Ataque.

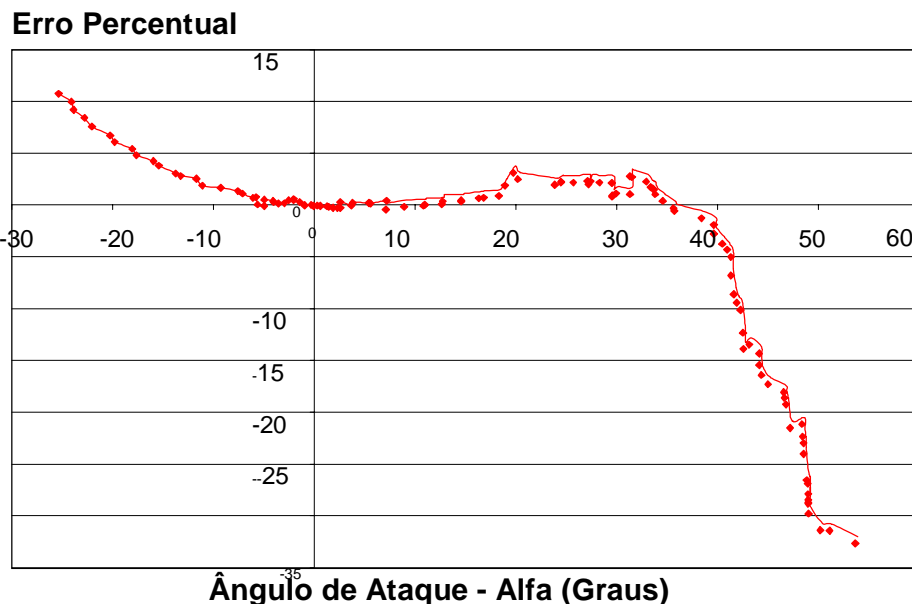


Figura 4: Efeito do ângulo de ataque sobre a pressão dinâmica, com ângulo de derrapagem nulo.

O erro percentual da pressão dinâmica, para a situação onde o ângulo de guinada é nulo, é mostrado na figura 4. Observa-se uma não simetria do resultados, justificada pelo fato da tomada de pressão total ser inclinada em relação ao eixo de simetria do *boom*, deslocando para o lado positivo a faixa de ângulos de ataque, para a qual o *boom* mede a

pressão total com desvio muito pequeno. O incremento do erro entre 20 e 30 graus é normalmente encontrado para tubos de Pitot e ocorre devido a um desvio na medida da pressão estática, pois a medida da pressão total é praticamente insensível até um ângulo de aproximadamente 40 graus. A pressão estática é alterada para altos ângulos de ataque porque surgem vórtices, cujo eixo é praticamente paralelo ao eixo do *boom*, os quais causam uma depressão que reduz o valor da pressão medida nas tomadas estáticas. Já para a pressão total, após cerca de 40 graus, ocorre descolamento no nariz do *boom*, isto é, na tomada de pressão total, reduzindo drasticamente a pressão total medida e provocando o comportamento observado na Fig. 4.

### Pressão Estática Devido a Variação do Ângulo de Derrapagem.

Erro Percentual

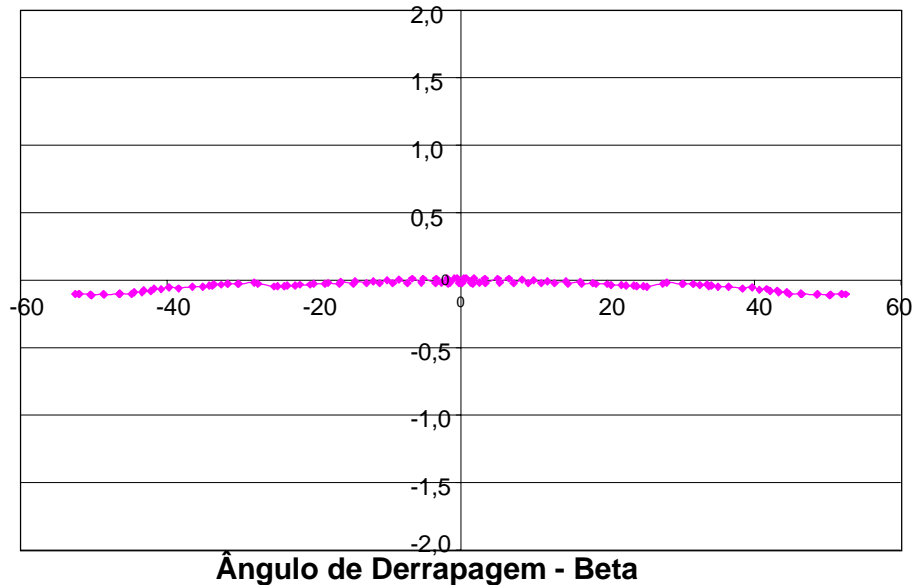


Figura 5: Efeito do ângulo de derrapagem sobre a pressão estática, para ângulo de ataque nulo.

### Pressão Dinâmica Devido a Variação do Ângulo de Derrapagem.

Erro Percentual

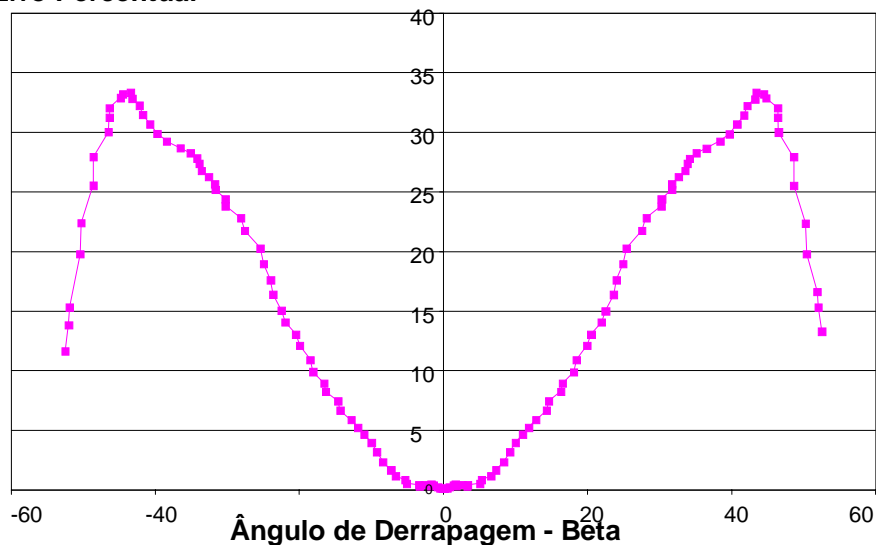


Figura 6: Efeito do ângulo de derrapagem sobre a pressão dinâmica, para ângulo de ataque nulo.

Para o caso onde o ângulo de ataque é mantido constante e igual a zero, verifica-se na Fig. 5 que o erro percentual da pressão estática começa a aumentar após aproximadamente 30 graus. Deve ficar claro, que o erro percentual na pressão estática é obtido com relação à pressão atmosférica local (cerca de 710 mm de Hg) e que a pressão dinâmica usada para se fazer os ensaios é muito pequena ( $q_{\infty} = 20$  mm de H<sub>2</sub>O). Portanto, os baixos valores de erro, observados na Fig. 5, não significam que a pressão estática sofre pouca variação com relação às mudanças do ângulo de guinada. Exatamente o oposto pode ser observado na Fig. 6, onde se verifica uma variação acentuada do erro da pressão dinâmica em função do ângulo de guinada, para o caso onde  $\alpha = 0$  graus. Esta variação ocorre justamente devido a uma redução da pressão estática medida pelo boom. Para  $\beta$  pouco maior que 40 graus ocorre o descolamento no nariz do boom, fato que provoca a redução do erro na pressão dinâmica.

Uma variação simultânea dos ângulos de ataque e derrapagem, isto é, variação em  $\alpha$  igual à variação de  $\beta$ , acarreta os resultados mostrados na Figura 7. Observa-se um comportamento semelhante aos casos anteriores para a pressão dinâmica, porém, com valores intermediários. Neste caso, verifica-se um erro máximo de aproximadamente 15% que é praticamente a metade do erro encontrado para o caso de variação de  $\beta$  com  $\alpha = 0$  graus.

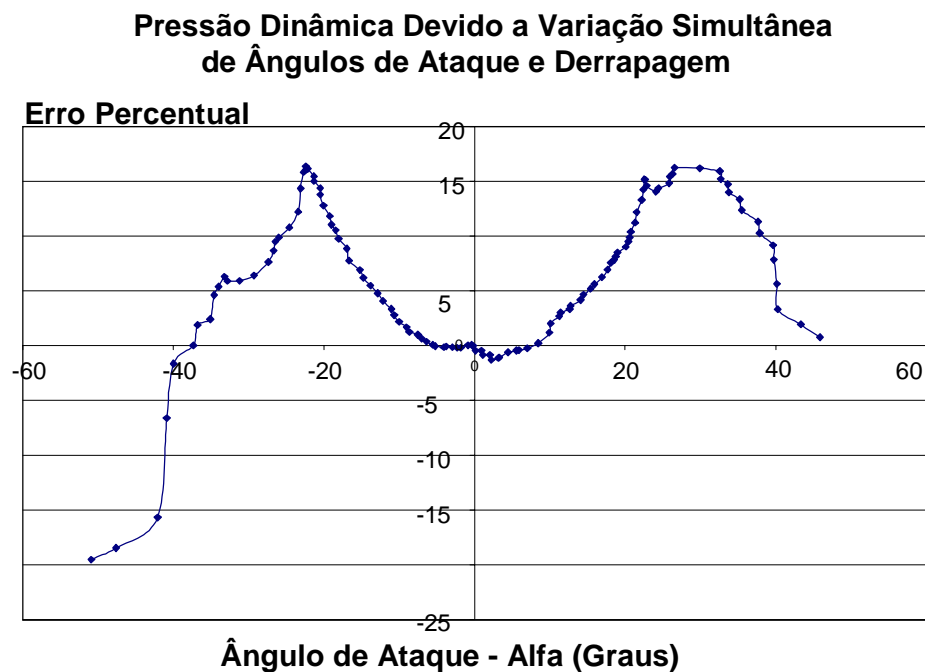


Figura 7: Efeito combinado dos ângulos sobre a pressão dinâmica.

#### 4. CONCLUSÕES

O suporte do boom projetado neste trabalho e a metodologia de ensaio permitiu a realização da calibração do mesmo, obtendo-se resultados com muito boa precisão e repetibilidade.

Os resultados mostraram que o boom empregado pelo grupo de ensaios em vô do CTA tem muito boas características, principalmente para o caso onde o ângulo de derrapagem é nulo, onde erros menores que 3% foram encontrados para a pressão dinâmica medida, na faixa de ângulos de ataque entre  $-10$  e  $+40$  graus. Esta faixa se reduz quando o ensaio é feito com ventos de través, acarretando em ângulo de derrapagem. Para ensaios em altos ângulos de ataque, alcançados pelas aeronaves de combate mais modernas, é necessário fazer correções nos dados obtidos diretamente nos ensaios em vô. Neste caso, ensaios de calibração, como os realizados neste trabalho, são fundamentais para fornecer os valores numéricos destas correções para cada valor de  $\alpha$  e  $\beta$ . No entanto, devido à limitação do túnel de vento usado, não foi possível verificar a variação dos resultados apresentados com relação aos números de Reynolds e Mach.



Para facilitar os ensaios de calibração seria interessante a instalação de um motor para variação do ângulo de ataque. Com isto, os ensaios poderiam ser feitos com maior rapidez e, portanto, com menor custo. Esta questão torna-se muito relevante no caso de se fazer ensaios com maiores números de Reynolds e Mach.

## 5. AGRADECIMENTOS

À Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelos recursos disponibilizados para a aquisição de equipamentos usados nesta pesquisa (processo 95/05569-1) e ao Grupo de Ensaio em Vôo do CTA pelo apoio na construção do suporte do *boom*.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cheremisinoff, N.P., 1979, "Applied Fluid Flow Measurement - Fundamentals and Technology", Marcel Dekker.
- Cheremisinoff, N. P., and Cheremisinoff, P. N., 1988, "Flow Measurement for Engineers and Scientists", Marcel Dekker.
- Gracey, W., 1956a, "Wind-Tunnel Investigation of a Number of Total-Pressure Tubes at High Angles of Attack - Subsonic, Transonic, and Supersonic Speeds", NACA TN 3641.
- Gracey, W., 1956b, "Measurement of Static Pressure on Aircraft", NACA TN 4184.
- Gracey, W., 1981, "Measurement of Aircraft Speed and Altitude", John Willey & Sons.
- Pope, A., 1947, "Wind-Tunnel Testing". John Willey & Sons.
- Pope, A., and Harper, J.J., 1966, "Low-Speed Wind Tunnel Testing", John Willey & Sons.
- Richardson, N.R. and Pearson, A.O., 1959, "Wind-Tunnel Calibrations of a Combined Pitot-Static Tube, Vane-Type Flow-Direction Transmitter, and Stagnation-Temperature Element at Mach Numbers From 0,60 to 2,87", NASA TN-D 122.
- Schmidt, E., 1999, "Trabalho de Graduação, Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), São José dos Campos, SP, Brasil.

## ESTUDO DO ESCOAMENTO NA ESTEIRA DE UM CORPO ROMBUDO BIDIMENSIONAL

**Karina Diogo de Sousa**

**Roberto da Mota Girardi**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), Divisão de Engenharia Aeronáutica, 12.228-900, São José dos Campos, São Paulo, Brasil. E-mail: [girardi@era.ita.cta.br](mailto:girardi@era.ita.cta.br)

### Resumo

Este trabalho busca estudar o escoamento na esteira próxima à um corpo rombudo bidimensional, e os parâmetros que influenciam no mesmo. O mesmo está inserido dentro de um projeto de pesquisa mais amplo, no qual pretende-se otimizar um dispositivo de ventilação natural, que utiliza a depressão na base de um corpo rombudo, para realizar a sucção do ar do interior de uma instalação predial. Em uma primeira etapa, foi realizada a concepção do modelo a ser ensaiado (projeto e construção), bem como a preparação do experimento, onde são feitos mapeamentos dos campos de pressão, velocidade média e flutuante da esteira próxima do modelo, além da frequência de liberação dos vórtices e da vazão succionada pelo modelo. Com base nos resultados obtidos pode-se obter parâmetros importantes do escoamento, tais como o coeficiente de pressão na base, o número de Strouhal, a vazão succionada pelo corpo estudado e discutir a questão da definição do comprimento da região de formação.

**Palavras-chave:** Escoamento bidimensional, Esteira, Corpo rombudo, Ventilação natural

### 1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de dispositivos de ventilação natural é muito importante não só por representar economia de energia, mas, também, por evitar adicionais agressões à ecologia devido à formação de represas e emissões de poluentes para a geração de energia elétrica. O dispositivo de ventilação natural estudado neste artigo foi proposto por Girardi (1999a) e é baseado na diferença de pressão entre a base de um corpo rombudo, sujeito ao vento atmosférico, e a região no interior de uma instalação predial. Essa diferença de pressão é induzida pela passagem de um escoamento externo que, contornando o dispositivo, gera uma zona de baixa pressão na base do corpo, causada basicamente pela presença de grandes vórtices na esteira próxima (região de formação) do mesmo. Desta forma, um fluxo de ar é estabelecido entre a região no interior da instalação predial e a base da placa, aberta a atmosfera, onde ocorre uma interação entre o fluxo interno e o escoamento externo, caracterizado pela formação e liberação de grandes vórtices.

Neste trabalho são relatados os primeiros resultados de uma pesquisa básica, cujo objetivo é estudar a interação entre o escoamento externo que passa por um corpo rombudo bidimensional e o fluxo ar proveniente da base do corpo, o qual é aspirado do ambiente devido à depressão que ocorre na esteira. Desta forma, pode-se entender melhor este tipo de escoamento e, com isto, melhorar a eficiência do dispositivo proposto. O objetivo específico do presente trabalho é apresentar e analisar os resultados referentes ao mapeamento dos

campos de velocidade (média e flutuante) e de pressão obtidos para o caso onde não há aspiração, os quais vão servir como base de comparação para os demais experimentos, onde a aspiração do ar será permitida. Além disto, também são analisados os resultados para o número de Strouhal com e sem fluxo interno, assim como a vazão succionada pelo corpo rombudo estudado.

Fage e Johansen (1928) estudaram as esteiras formadas por corpos de diferentes formas, sendo eles, um aerofólio, um cilindro e uma placa plana perpendicular ao escoamento entre outros. Foram obtidos resultados a respeito de características comuns a essas esteiras, a distribuição de velocidades nestas, e a largura média de cada uma delas. Esta largura foi usada para estabelecer a similaridade entre esteiras de corpos rombudos diferentes. Esta similaridade também foi verificada através do número de Strouhal, o qual se mostrou constante em relação à variações do número de Reynolds (Re).

Na região de formação observa-se uma flutuação significativa na medida das velocidades, a qual foi associada à presença de vórtices que são liberados em uma frequência bem definida. Bearman (1965) verificou que o máximo valor de velocidade flutuante (valor rms) é detectado na posição onde os vórtices alcançam sua maior intensidade (circulação) e, em seguida, são liberados para formar a chamada esteira de von Kármán. A distância entre este ponto e a base do corpo foi definida como comprimento da região de formação. Por outro lado, este parâmetro também pode ser definido através de medidas da distribuição de pressão estática ao longo da esteira. Roshko (1954) foi o primeiro a realizar este tipo de medida, verificando a presença de uma região onde a pressão alcança um valor mínimo, localizada na posição onde o vórtice tem a maior intensidade de circulação, isto é, o final da região de formação. Tanto medidas de velocidade de flutuação, como de pressão foram usadas por Sousa (1993) para o mesmo experimento, porém, verificou-se uma discrepância nos valores encontrados para o comprimento da região de formação, obtidos pelas técnicas usadas por Bearman (1965) e Roshko (1954). No presente trabalho são apresentados resultados que podem esclarecer este ponto, de maneira a aprimorar a definição do comprimento da região de formação.

A questão da bidimensionalidade do escoamento sobre um corpo rombudo foi bem discutida no trabalho de Bearman (1965), no qual foi introduzida a idéia do *end plate*, usado para minimizar a interação da camada limite das paredes laterais do túnel de vento com a esteira do corpo rombudo. Bearman (1965) mostrou que esta interação provoca uma distorção do escoamento nas extremidades do modelo, provocando uma tridimensionalidade que se propaga ao longo da envergadura do mesmo.

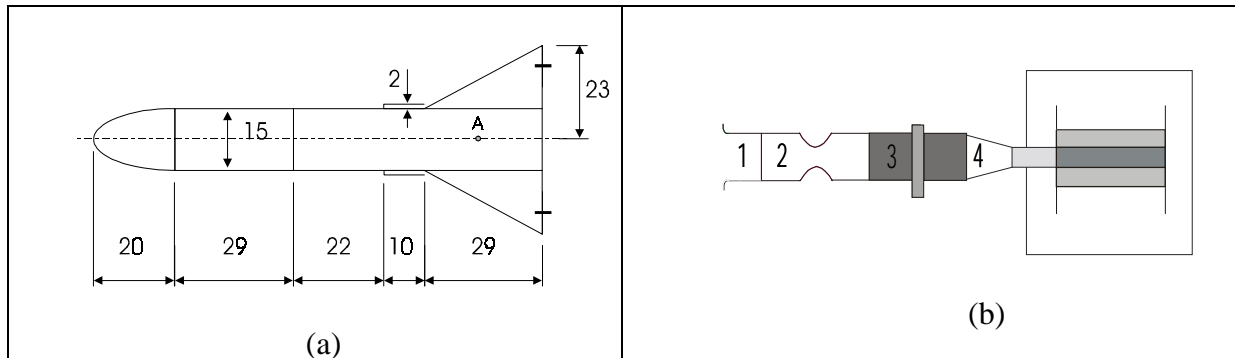
## 2. APARATO EXPERIMENTAL

Foi usado um túnel de vento de sopro, com seção de testes quadrada, com largura de 460 mm. A velocidade do escoamento pode ser variada na faixa entre 10 e 32 m/s e o nível de turbulência para velocidade máxima é de 0,5%.

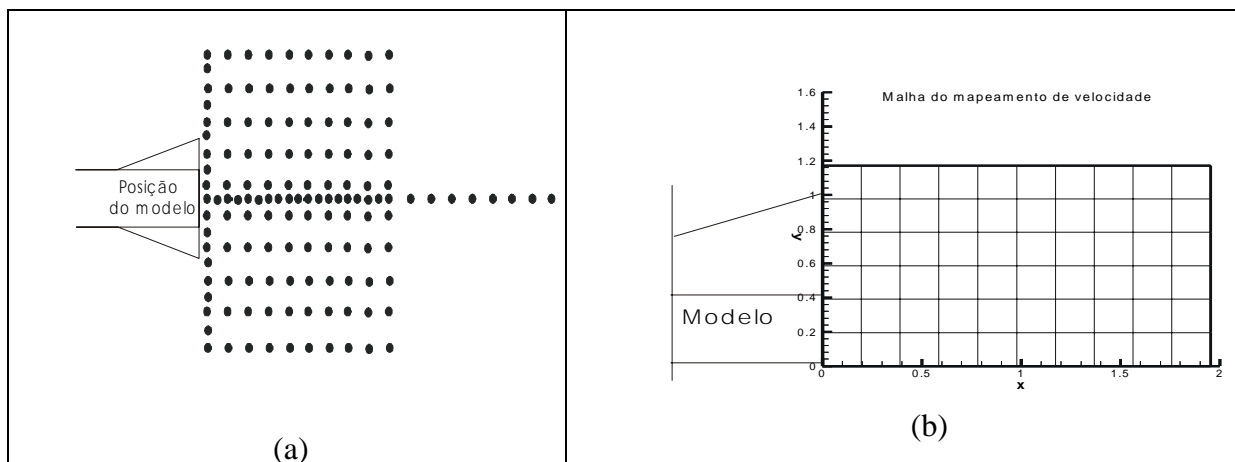
O projeto do modelo, mostrado na Fig. 1, teve como base as dimensões do túnel de vento e conceitos teóricos de aerodinâmica (vide Rae e Pope, 1984) que delimitam a melhor forma e tamanho dados ao protótipo. Uma consideração importante na elaboração do modelo é a razão de bloqueio deste em relação ao túnel, que não deve ultrapassar os 10%. Outra característica importante é a forma do modelo, constituído por: (i) um corpo central, necessário para a acomodação de telas e colméias em seu interior para uniformizar o fluxo de ar interno e (ii) uma cunha de 90 graus, localizada na parte traseira do corpo central, cuja função é aumentar a depressão na região da esteira. Deve ficar claro que este modelo é diferente do estudado por Bearman (1965), justamente pela presença da parte traseira em forma de cunha. A figura 1 b) mostra o modelo considerado junto com a aparelhagem que succiona o ar do ambiente externo. O trajeto percorrido pelo ar no interior da aparelhagem segue a indicação numérica:

proveniente do ambiente externo, entra pela peça indicada com o número 1, seguindo seu trajeto até entrar no modelo pela peça de número 4.

Para garantir a bidimensionalidade foram usados *end-plates*, que são placas fixadas às extremidades do modelo a ser ensaiado, cuja função é isolar o modelo da influência da camada limite das paredes laterais do túnel de vento. As dimensões dos *end-plates* foram calculadas utilizando as relações desenvolvidas por Kubo (1989). Para posicionar os *end-plates* com relação às paredes do túnel de vento é necessário conhecer a espessura da camada limite na seção de ensaio do mesmo. Esta informação foi obtida no trabalho de Sousa (1993), por meio da utilização da técnica de anemometria de fio quente.



**Figura 1:** (a) Vista lateral do modelo (todas as cotas estão em mm) e (b) vista de trás do modelo no interior do túnel de vento, com o duto para aspiração do fluxo de ar do ambiente.



**Figura 2:** (a) Posição das tomadas de pressão na superfície do *end-plate*. (b) Malha para medida dos campos de velocidade média e flutuante

Na superfície de um dos *end-plates* tem-se 136 tomadas de pressão, sendo que elas se situam cobrindo toda a região de formação, como mostrado na Fig. 2(a). Essas tomadas são distribuídas da seguinte maneira: (i) uma fileira vertical situada na base do modelo, com 11 tomadas igualmente espaçadas de 5 em 5mm; (ii) uma fileira horizontal central que começa na base do modelo e se estende até o final do *end-plate* com 27 tomada e (iii) um conjunto de tomadas, distribuídas em forma matricial 10 x 10, distanciados de 10 em 10 mm .

No modelo tem-se 20 pontos de tomada de pressão, onde 10 se situam na seção transversal central do modelo, espaçados de 2 em 2 mm e são usados para determinar a pressão na base do corpo. Outras 10 tomadas são posicionadas ao longo da envergadura do modelo e são usadas para verificar se o escoamento é bidimensional.

O mapeamento do campo de velocidades (média e flutuante) na esteira próxima do modelo foi realizado no plano de simetria do mesmo, no centro de sua envergadura, nos pontos definidos pelos nós da malha apresentada na Fig. 2(b). A medida de velocidade é feita com um anemômetro de fio quente (1 canal), fixando-se a sonda em um dispositivo de posicionamento da Dantec, cuja menor divisão é 0,1 mm. O fato da sensibilidade do anemômetro ser bastante elevada, determina uma boa precisão nas medidas de velocidade, mesmo de valores bastante baixos. Os dados foram coletados com o sistema de aquisição de dados e processados por um programa feito no *software Labview*, no qual o valor médio e o desvio padrão (valor rms) da velocidade são obtidos através de uma amostra da velocidade instantânea. Esse programa permite ao experimentador arbitrar parâmetros como o tempo de medida e a taxa de aquisição das mesmas.

As medidas de pressão foram feitas com a utilização de 4 válvulas seletoras (*scanivalves*), conectadas com 4 transdutores de pressão, as quais trabalham em paralelo, isto é, o sinal de cada um dos transdutores, após amplificado e filtrado, é ligado a um canal do sistema de aquisição de dados. Cada válvula seletora tem a capacidade de medir 48 tomadas de pressão. Para a coleta das medidas de pressão, foi feito um programa no ambiente do *software Labview* que controla automaticamente as válvulas seletoras, através de uma interface com reles, projetada e construída especialmente para este trabalho. No programa de aquisição dos dados e controle do experimento devem ser fixados os tempos de aquisição (60 segundos) e o tempo requerido para a estabilização da pressão, após a mudança de tomada de pressão realizada pela válvula. Após algumas experiências, verificou-se que 20 segundos é um tempo suficiente para a estabilização.

A frequência de liberação de vórtices, necessária para o cálculo do número de Strouhal, foi obtida através de uma amostra da velocidade instantânea medida com o anemômetro de fio quente. Através do sistema de aquisição de dados essa amostra é coletada e enviada a um analisador de espectro digital, existente no *software LabView*. Para este experimento, a sonda de fio quente é posicionada fora da esteira, a aproximadamente um comprimento característico da base do corpo, como feito por Bearman (1965). O ensaio foi feito para vários valores de velocidade do escoamento não perturbado, de maneira a se obter a variação do  $St$  com o  $Re$ .

A vazão succionada foi medida, para cada velocidade do túnel de vento, dentro da faixa permitida por este, com o auxílio do tubo de Venturi introduzido no duto de sucção durante os ensaios de vazão (vide Fig. 1b). Esse tubo de Venturi foi previamente calibrado (Girardi, 1999b) e um transdutor foi usado para medir a diferença de pressão nas tomadas do mesmo. O sinal de saída do transdutor de pressão é condicionado (amplificado e filtrado) e, em seguida, enviado ao sistema de aquisição de dados mencionado anteriormente.

A pressão dinâmica do escoamento não perturbado do túnel de vento é medida em tomadas de pressão, localizadas no início da seção de testes, através de transdutores de pressão, cujo sinal é condicionado e também enviado para o sistema de aquisição de dados. O valor desta pressão dinâmica é corrigido com base nos dados de uma calibração prévia.

### **3. ANÁLISE DOS RESULTADOS**

Neste trabalho são apresentados somente os resultados para o mapeamento de velocidade e de pressão para a configuração do modelo sem fluxo de ar succionado. Neste caso, foi feita a obstrução da entrada de ar (vide Fig. 1b), mantendo o modelo no interior do túnel de vento inalterado. Os resultados dos mapeamentos de velocidade (média e flutuante) são adimensionalizados pela velocidade do escoamento livre. As coordenadas X e Y são adimensionalizadas pela altura da base do modelo, que também é o comprimento característico usado na determinação do número de Reynolds.

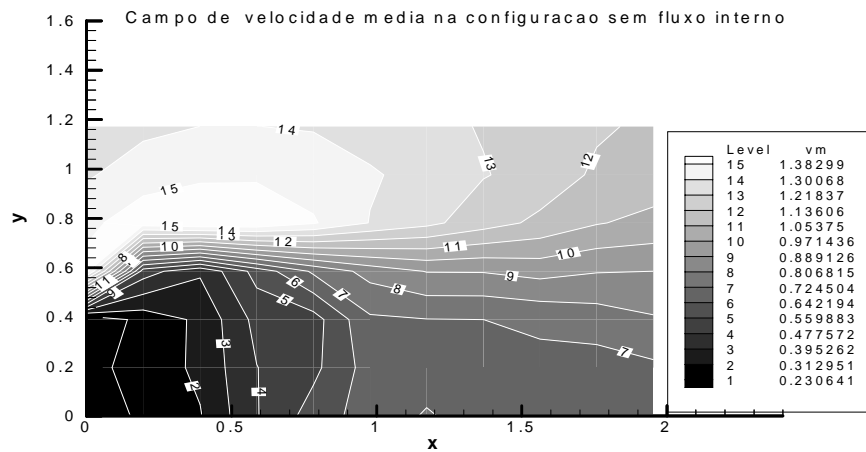
O campo de velocidade média é apresentada na Fig. 3. Pode-se observar que próximo à base do modelo as velocidades são muito baixas, evidenciando a chamada “região de água morta”. Próximo a  $Y=0,5$  (ponto de separação do escoamento) verifica-se a presença da camada de cisalhamento livre, caracterizada por altos valores do gradiente de velocidade (vorticidade).

Na Fig. 4, observa-se que a velocidade de flutuação ( $V'$ ) é incrementada a medida que se caminha ao longo da camada de cisalhamento livre. Para  $X \approx 0,75$  verifica-se que  $V'$  alcança um máximo, que se estende até  $X \approx 1,6$ . Este resultado deve ser explicado com base na velocidade induzida por um vórtice na sonda do anemômetro de fio quente. Logo após o ponto de separação, a vorticidade existente na camada de cisalhamento livre começa a se enrolar para formar um vórtice. Enquanto este vórtice caminha aproximadamente ao longo da camada de cisalhamento livre, sua intensidade (circulação) vai aumentando, acarretando maior flutuação da velocidade quando passa pela sonda de anemômetro de fio quente. Seguindo este raciocínio, verifica-se que a máxima flutuação deve ocorrer quando o vórtice tiver a máxima intensidade. A partir desta situação ocorre o desprendimento e a circulação do vórtice permanece aproximadamente constante, enquanto o mesmo é arrastado para jusante, para formar a chamada esteira de von Kármán. Neste caso, a região de máxima velocidade flutuante é o resultado da passagem do vórtice após ter ocorrido o desprendimento. A diminuição de  $V'$  para  $X > 1,6$  pode estar associada ao aumento do núcleo do vórtice, que ocorre devido à difusão da vorticidade por causa da viscosidade do fluido.

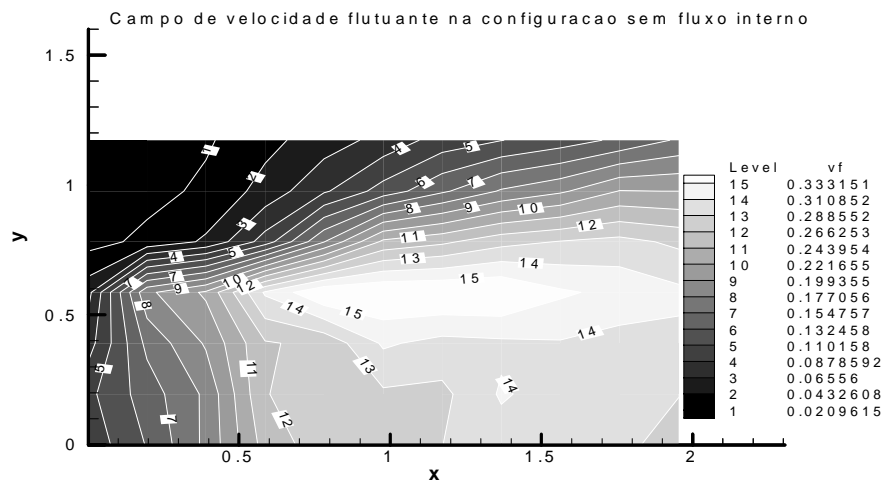
O coeficiente de pressão ( $C_p$ ) na superfície do *end plate* é mostrado na Fig. 5. Próximo à base do modelo, observa-se uma região de pressão constante, a qual é compatível com as baixas velocidades médias encontradas nesta região (vide Fig. 3). Na região entre  $X \approx 0,55$  e  $0,95$  verifica-se que o coeficiente de pressão alcança um valor mais baixo que aquele medido na base do modelo. O centro desta região é localizado em  $X \approx 0,75$  e, segundo Roshko (1954), este ponto é o final da região de formação. Esta afirmação é baseada no fato da pressão no núcleo do vórtice ser menor que a pressão na periferia, de modo que haja um balanço entre as forças de pressão e centrífuga em uma partícula fluida no interior do vórtice. Com base neste equilíbrio de forças, pode-se afirmar que um vórtice mais intenso (maior circulação) deverá ter pressão menor no seu núcleo. Assim, no final da região de formação obtém-se o menor valor de  $C_p$ .

Comparando as Figs. 4 e 5 verifica-se que região de máxima velocidade de flutuação é bem mais espalhada que a região de mínimo  $C_p$ . Levando-se em consideração as explicações dadas nos dois parágrafos precedentes, seria natural concluir que estas regiões coincidissem. Afinal, depois do desprendimento a circulação do vórtice é praticamente constante e a região de baixa pressão deveria se estender para jusante, ao longo da trajetória do mesmo. Esta aparente discrepância pode ser esclarecida recorrendo-se ao fato que o resultado para pressão é fruto de uma medida média, onde devem ser considerados os efeitos combinados dos vórtices liberados de cada fila da esteira e do tempo de permanência destes vórtices em uma região. Com base neste argumento, pode-se concluir que na região entre  $X \approx 0,55$  e  $0,95$  os vórtices levam um certo tempo interagindo entre si, maior que aquele gasto na região à jusante de  $X \approx 0,95$ , onde os vórtices passam de forma isolada, com uma velocidade pouco inferior à do escoamento não perturbado. No caso dos resultados para velocidade flutuante, que são obtidos com o anemômetro de fio quente, verifica-se duas regiões distintas, uma para cada fila de vórtices. Este tipo de medida está associada a passagem de um vórtice com uma determinada intensidade pelo ponto de medida, sendo, aparentemente, menos sensível a questão de tempo de residência discutido anteriormente.

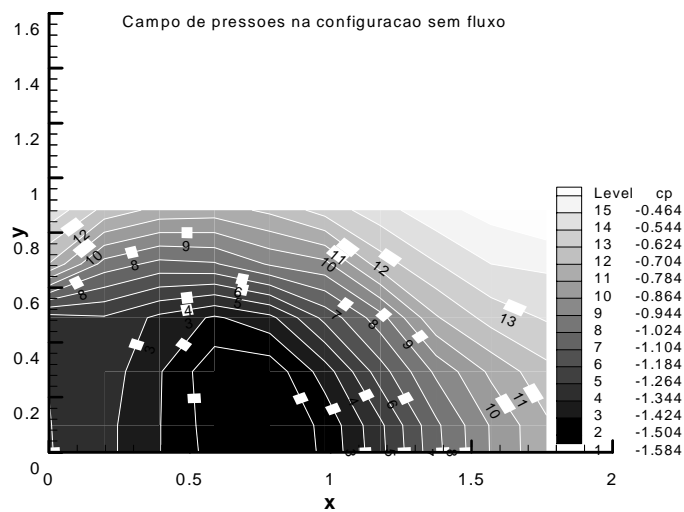
O número de Strouhal ( $St$ ) praticamente não varia com o  $Re$ , como pode ser visto na Fig. 6. Deve-se observar que a escala do gráfico esta bem ampliada e as oscilações no  $St$  estão dentro da faixa de incerteza do experimento. Esta explicação é corroborada pelo fato das



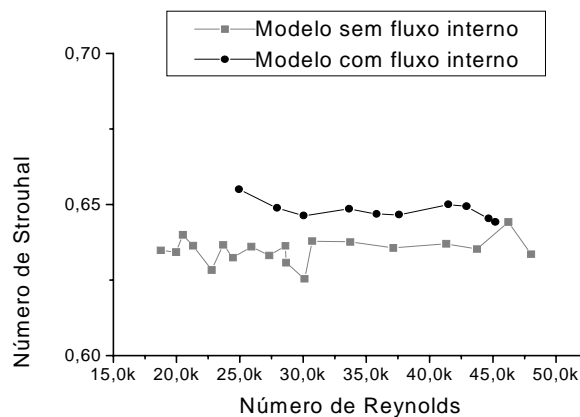
**Figura 3:** Mapeamento da velocidade media na esteira próxima do modelo para  $Re = 6,3 \cdot 10^4$ . Configuração sem fluxo interno.



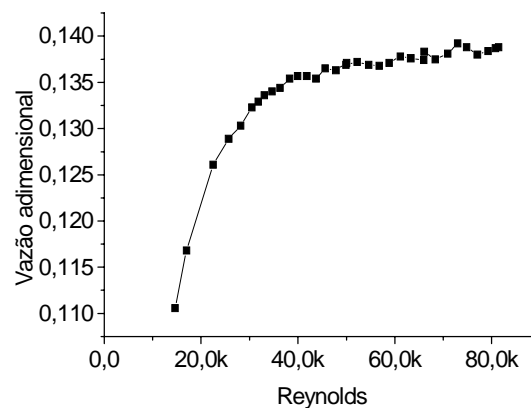
**Figura 4:** Mapeamento da velocidade flutuante (valor rms) na esteira próxima do modelo para  $Re = 6,3 \cdot 10^4$ . Configuração sem fluxo interno.



**Figura 5:** Campo de pressões para  $Re=7,6 \cdot 10^4$ . Configuração sem fluxo interno



**Figura 6:** Variação do número de Strouhal em função do número de Reynolds



**Figura 7:** Variação vazão em função do número de Reynolds

oscilações mencionadas acima serem mais pronunciadas para baixos valores de Re, os quais foram obtidos para valores baixos de pressão dinâmica. Na Fig. 6 pode-se observar que o St para o experimento com fluxo interno é pouco maior que aquele obtido sem fluxo. Até o momento estes autores não conhecem uma explicação para este resultado.

A vazão succionada da região externa ao túnel de vento para o interior da região de formação do modelo é adimensionalizada por  $V \cdot d^2$ , onde “V” é a velocidade do escoamento não perturbado e “d” é a altura da base do modelo. O comportamento observado na Fig. 7 está associado às perdas de carga que ocorrem no escoamento interno ao modelo e a tubulação externa ao túnel de vento, onde foi instalado o tubo de Venturi. É conhecido na literatura (Rae e Pope, 1984) que o coeficiente de perda de carga diminui com o aumento do Re do escoamento interno, provocando o incremento da vazão succionada pelo modelo. Deve-se lembrar que o aumento da velocidade do escoamento não perturbado provoca um incremento da vazão sucionada, com conseqüente aumento do Re do escoamento interno.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentados os primeiros resultados da pesquisa conduzida para estudar o problema da interação do escoamento externo a um corpo rombudo com o escoamento interno, que sai da base deste corpo, devido à sucção causada pela depressão que



ocorre na região de formação. Estes resultados, referentes à configuração sem fluxo interno, servem como base de comparação, para se verificar as alterações que ocorrem quando o fluxo interno esta presente.

Os campos de velocidade média e flutuante e o campo de pressões forneceram informações importantes: (i) critérios para a determinação do comprimento da região de formação foram estabelecidos levando-se em conta tanto o campo de pressões como o de velocidade flutuante e (ii) a questão do tempo de residência dos vórtices na região de formação foi evidenciada.

Para o número de Strouhal foi apresentada uma comparação entre os valores com e sem fluxo interno. Pequena diferença foi detectada, evidenciando a questão da interação entre os escoamentos interno e externo, mencionada acima. No presente trabalho não foi possível fornecer uma explicação para esta diferença, evidenciando a necessidade de experimentos adicionais, que forneçam valores de outros parâmetros, que possam ser correlacionados com o  $St$ , de modo a se poder extrair informações que auxiliem na compreensão do escoamento em questão.

O comportamento da vazão succionada em função do  $Re$  foi análogo ao observado para o caso do modelo tridimensional do dispositivo de ventilação natural, relatado por Girardi (1999a). Este fato indica que os estudos em modelos bidimensionais deverão ser úteis para melhoria do dispositivo real.

Por meio de experimentos adicionais, foi possível constatar que o número de Reynolds na faixa analisada, não exerce influência determinante no comprimento e na largura da região de formação.

## 5. AGRADECIMENTOS

À Fundação de Ampara a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelos recursos disponibilizados para a aquisição de equipamentos usados nesta pesquisa (processo 95/05569-1) e pelo suporte dado ao primeiro autor, na forma de bolsa de estudo (processo 98/12248-5).

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bearman, P.W., 1965, "Investigation of the flow behind a two-dimensional model with a blunt trailing edge and fitted with splitter plates", *J.Fluid Mech.*, vol.21, pp.241-255.
- Fage, A . and Johansen, F.C., 1928, "The structure of vortex sheets", *Phil.Mag*, vol.5, pp.417-441.
- Girardi, R.M., 1999a, "Natural ventilation device: a practical use for the depression in a bluff body wake", Brazilian Congress of Mechanical Engineering (COBEM), "Águas de Lindóia, SP, Brazil, (in CD).
- Girardi, R.M., 1999b, "Implementação de um Dispositivo para Calibração de Baixas Vazões", Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM), "Águas de Lindóia, SP, Brasil, (em CD).
- Kubo, Y. et al, 1989, "Effects of end plates and blockage of structural members on drag forces", *J. Wind Eng. Ind. Aerodynamics*, vol.32, pp.329-342.
- Rae, W.H. and Pope, A., 1984, "Low speed wind tunnel testing", John Wiley & Sons, Second edition, USA.
- Roshko, A., 1954, "On the drag and shedding frequency of two-dimensional bluff bodies", NACA TN 3169.
- Sousa, F.L., 1993, "Influência da razão de bloqueio no escoamento plano sobre corpos rombudos", Tese de mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), S.J.Campos, SP.

# BREVE INTRODUÇÃO À MODELAGEM FUNDAMENTAL DE PROCESSOS DE FLUIDIZAÇÃO GÁS-SÓLIDOS

**Luben Cabezas Gómez**

**Fernando Eduardo Milioli**

Núcleo de Engenharia Térmica e Fluidos, Escola de Engenharia de São Carlos, USP. Av. Dr. Carlos Botelho, N° 1465, São Carlos, SP, Brasil. CEP 13560-250. E-mail: lubencg@sc.usp.br

## Resumo

Apresenta-se uma descrição geral da modelagem matemática de escoamentos bifásicos gás-sólidos aplicada a processos de fluidização, particularmente a leitos circulantes. São descritas as linhas gerais de modelagem matemática fundamental em fluidização. Finalmente são apresentados resultados de simulação numérica de leitos circulantes obtidos a partir de modelagem Euleriana usando o modelo tradicional das duas fases separadas.

**Palavras-chaves:** modelagem fundamental, fluidização, escoamentos gás-sólidos.

## 1. INTRODUÇÃO

A fluidização gás-sólidos tem variadas aplicações industriais entre as quais incluem-se as indústrias do petróleo, química, metalúrgica e de geração de energia. Reatores de leito fluidizado são amplamente utilizados na combustão de carvão e na queima parcial de combustível renovável (gaseificação da biomassa) para geração termoelétrica de energia em grande escala. Outra grande aplicação de reatores de leito fluidizado circulante ocorre no craqueamento catalítico de hidrocarbonetos pesados na indústria do petróleo.

Os combustores de leito circulante têm emergido como uma opção promissora para a geração de energia em caldeiras de queima de carvão e de gaseificação de biomassa. Existem muitas vantagens na utilização destes combustores, tais como: a flexibilidade no combustível, a grande eficiência da combustão, a ampla faixa de carga, as baixas emissões de óxidos de nitrogênio e enxofre  $\text{NO}_x$  e  $\text{SO}_2$ , e a boa taxa de recirculação do material no tubo ascendente. O leito circulante denomina-se a segunda geração de combustores de leito fluidizado (Tsuo, 1989).

No entanto, a tecnologia de fluidização gás-sólidos apresenta ainda problemas a serem resolvidos, tais como: a forte erosão das superfícies internas ao leito, dos tubos de troca de calor, etc., assim como a possível bloqueio das partículas finas no tubo ascendente. Além disso, devido à sensibilidade do escoamento fluidizado à escala e às condições operacionais, o processo de escalonamento torna-se extremamente complexo (Ding, 1990).

Os estudos hidrodinâmicos podem contribuir de forma significativa para o melhor conhecimento e solução desses problemas. A estrutura do escoamento multifásico em colunas de leito fluidizado circulante é bastante complexa, caracterizada por grandes variações da fração volumétrica de sólidos ao longo do tubo ascendente, pela formação e dissipação de aglomerados de particulado e pela grande recirculação de sólidos. Essas complexas condições

de escoamento provêm um intenso contato superficial entre gases e sólidos, garantindo as altas taxas de reação necessárias aos processos reativos. O conhecimento da hidrodinâmica do processo é então de grande importância para que os parâmetros reativos e de transporte de massa no reator possam ser estabelecidos.

A modelagem matemática dos processos de fluidização gás-sólidos representa uma ferramenta auxiliar para a minimização dos esforços experimentais requeridos no desenvolvimento de instalações industriais. A experimentação e o desenvolvimento de protótipos são as ferramentas principais no projeto de qualquer processo industrial em engenharia. No entanto, os procedimentos de modelagem matemática e simulação numérica estão em constante desenvolvimento contribuindo de forma crescente para uma melhor compreensão de processos e fenômenos físicos. Além disso os modelos do processo de fluidização necessitam, para sua validação, de medições experimentais complexas de difícil execução. Assim, o desenvolvimento de modelagem também representa um estímulo ao desenvolvimento de novas técnicas e métodos experimentais.

O objetivo deste trabalho é oferecer uma breve introdução aos procedimentos usados em modelagem matemática fundamental em processos de fluidização, especificamente em leitos fluidizados circulantes gás-sólidos.

## **2. LINHAS GERAIS DE MODELAGEM MATEMÁTICA EM FLUIDIZAÇÃO**

Harris and Davidson apud Pugsley and Berruti (1996) apresentam uma classificação de modelos utilizados na simulação de leitos fluidizados circulantes. Segundo esses autores existem três tipos de modelos matemáticos utilizados para modelar os processos de fluidização gás-sólidos em leitos circulantes:

1. Os modelos que predizem a variação axial da densidade da suspensão de sólidos, mas que não caracterizam a variação radial.
2. Os modelos que predizem a variação radial da densidade da suspensão de sólidos e as altas velocidades médias de deslizamento, assumindo duas ou mais regiões com diferentes características de escoamento (por exemplo, os modelos pistonado anular e de escoamento anular com aglomerados).
3. Os modelos que utilizam as equações fundamentais da dinâmica dos fluidos para prever o escoamento bifásico gás-sólidos. Tal é o caso do modelo das duas fases separadas (modelo tradicional) e do modelo baseado na teoria cinética dos escoamentos granulares (TCEG).

Os dois primeiros tipos de modelos são preferencialmente utilizados como ferramentas de projeto, para investigar os efeitos das condições de operação e das dimensões do tubo ascendente do leito na estrutura do escoamento. Esses modelos podem ser facilmente acoplados à modelos cinético-químicos para simular o desempenho dos reatores de leito circulante (Pugsley and Berruty, 1996).

Os modelos do terceiro tipo são mais adequados para pesquisar as estruturas locais do escoamento, e para verificar a influência local da geometria sobre o escoamento (Pugsley and Berruty, 1996). Segundo Kuipers *et al.* (1998) estima-se que a utilização destes modelos para projeto e operação de reatores de leitos fluidizados experimentará uma significativa expansão num futuro próximo. Estes autores apresentam uma breve comparação, mostrada a seguir na tabela 1, deste tipo de modelos com os denominados modelos de sistemas globais ou de reatores clássicos, que são semelhantes àqueles dos tipos um e dois acima descritos.

Existe controvérsia entre os vários pesquisadores quanto a qual tipo de filosofia de modelagem é mais válida (Pugsley and Berruty, 1996), fato este reforçado pela comparação apresentada na Tabela 1.

**Tabela 1.** Comparação dos modelos fundamentais com os modelos globais.

Modelos fundamentais	Modelos globais
<b>Vantagens</b>	<b>Vantagens</b>
Disponibilidade de uma solução mais exata; o fenômeno descreve-se por cálculos de forma direta; pode-se obter equações de balanço formais de maneira rigorosa; pode-se visualizar o processo.	Modelos e soluções simples que facilitam a compreensão do fenômeno; modelos adaptáveis à informação requerida; uma capacidade limitada de cálculo é suficiente; pode-se obter predição exata do comportamento do sistema por posterior ajuste de parâmetros.
<b>Desvantagens</b>	<b>Desvantagens</b>
Requer-se: Conhecimento detalhado de processos elementares; redução de dados; grande capacidade de cálculo; esforço computacional adicional para cada problema específico; e o comportamento macroscópico não sempre é obtido com exatidão.	Necessita-se de conhecimento prévio do fenômeno além de imaginação; necessita-se de validação experimental previa e ajuste de parâmetros; o sentido dos parâmetros é as vezes pouco claro devido às considerações médias feitas.

Nesse trabalho considera-se a descrição dos modelos fundamentais do terceiro tipo, aplicados estritamente a processos de fluidização gás-sólidos. A Figura 1 apresenta as linhas ou tendências atuais da modelagem matemática nessa classe de modelos.

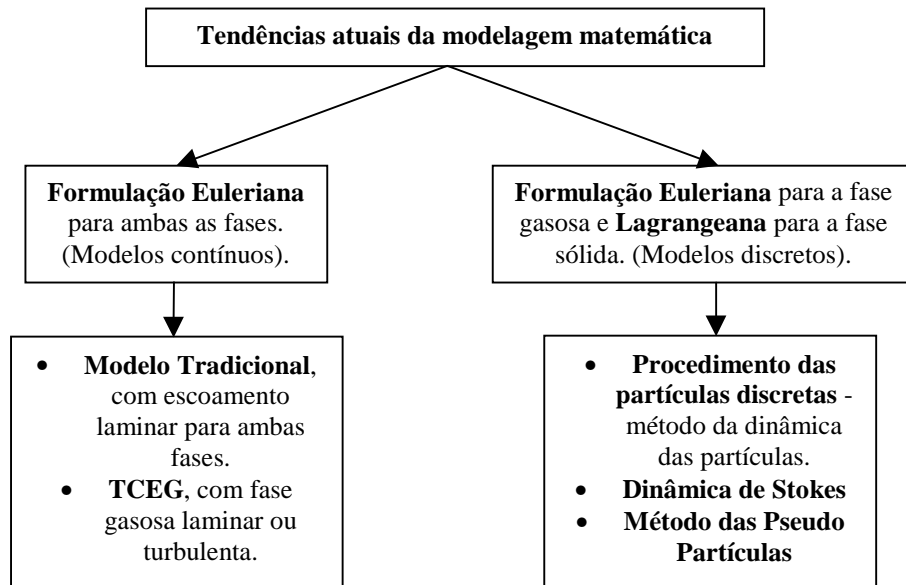


Figura 1. Tendências atuais da modelagem matemática em fluidização baseadas em equações fundamentais.

O método de Euler ou formulação Euleriana tem sido muito utilizado na modelação dos processos de fluidização. O método de Euler divide-se em dois procedimentos principais: o modelo tradicional e a teoria cinética dos escoamentos granulares.

O modelo tradicional, que utiliza o método das médias de Euler e considera as duas fases como fases contínuas, denomina-se **modelo das duas fases separadas**. Este modelo é formulado considerando cada fase em separado, em termos de um sistema de equações de conservação de massa, quantidade de movimento para cada direção coordenada, e

conservação da energia, para cada fase respectivamente. Devido a que ambas as fases interagem entre si, aparecem nas equações de campo termos devidos a essa interação, que especificam o transporte de massa, quantidade de movimento e energia através da interface. Na literatura existe um grande número de publicações que utilizam este modelo das duas fases, tais como Gidaspow and Ettehadieh (1983), Syamlal and Gidaspow (1985), Gidaspow (1986), Bouillard *et al.* (1989) entre outras.

A desvantagem do modelo tradicional consiste na necessidade de introduzir a viscosidade dinâmica do sólido,  $\mu_s$ , como um dado obtido experimentalmente mediante um balanço de quantidade de movimento, como mostrado em Miller and Gidaspow (1992). Devido a esse fato este modelo é também denominado de modelo das duas fases com viscosidade constante.

Os modelos baseados na TCEG para tratamento da fase sólida são atualmente adotados pela maioria dos pesquisadores, embora ainda não tenha sido demonstrado que este modelo possa produzir resultados mais realistas que os obtidos através do modelo das duas fases com viscosidade constante (Kuipers and van Swaaij, 1997).

A TCEG foi desenvolvida por vários pesquisadores com base na teoria cinética dos gases densos (Chapman and Cowling, 1970). A grande vantagem dos modelos baseados nessa teoria é que permitem calcular diretamente o valor de  $\mu_s$ , além da pressão da fase sólida. Suas desvantagens são a maior complexidade numérica e a necessidade de mais tempo de cálculo computacional. Alguns dos trabalhos que utilizam a TCEG são Ding and Gidaspow (1990), Boemer *et al.* (1995), e Samuelsberg and Hjertager (1996) entre outros.

A formulação de Euler-Lagrange constitui outra linha de modelagem numérica atualmente utilizada em fluidização. Nessa formulação, em geral, a fase gasosa é modelada como uma fase continua pelo método das médias de Euler, enquanto a fase sólida é modelada utilizando a formulação Lagrangeana.

De maneira geral essa linha de modelagem permite uma melhor compreensão das interações partícula-partícula e partícula-parede. Isto oferece uma ferramenta para obter novos modelos reológicos das suspensões fluidizadas, o que permite melhorar a formulação das leis de fechamento necessárias nos modelos contínuos (modelo das duas fases separadas).

Como mostra-se na Figura 1 podem-se distinguir três procedimentos gerais deste tipo de formulação: o procedimento das partículas discretas, o modelo da dinâmica de Stokes, e o método das pseudo partículas (Kuipers and van Swaaij, 1997).

No procedimento das partículas discretas o movimento das partículas individuais esféricas é calculado diretamente a partir das forças que atuam sobre essas partículas, levando em consideração as interações partícula-partícula e partícula-parede, assim como o arrasto entre as partículas e fase gasosa intersticial. Os trabalhos de Tsuji *et al.* (1998) e de Hoomans *et al.* (1996) entre outros são representativos deste procedimento. Os primeiros autores utilizam o modelo das “partículas brandas”, considerando que as partículas se deformam durante as iterações entre si. Os segundos autores utilizam o modelo das “partículas duras”, considerando as partículas como esferas quase rígidas que não sofrem deformações durante as interações.

O modelo da dinâmica de Stokes e o método das pseudo partículas constituem os outros dois procedimentos que utilizam a formulação de Euler-Lagrange. Uma explanação destes dois procedimentos assim como do procedimento das partículas discretas é apresentada no trabalho de Kuipers and van Swaaij (1997).

A formulação Lagrangeana aplicada à fase de sólidos implica em que um conjunto de equações seja gerado e resolvido para cada partícula no domínio físico de cálculos. Esse fato dificulta tremendamente sua aplicação à escoamentos contendo grandes quantidades de particulado, como é o caso de escoamentos fluidizados, em vista das limitações dos recursos computacionais atuais.

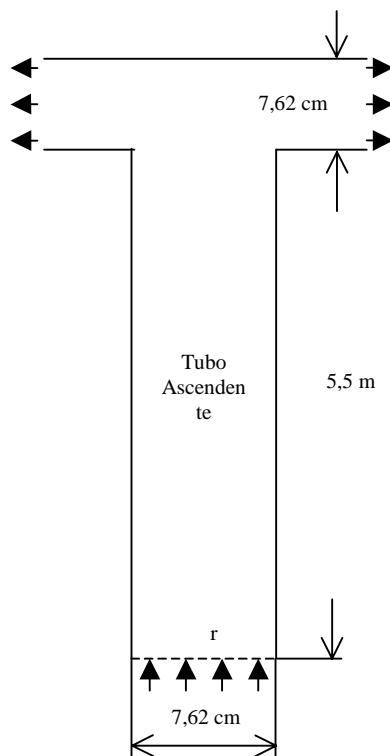
A seguir mostra-se na Tabela 2 uma comparação entre modelos contínuos e discretos para a fase sólida tomada de Kuipers *et al.* (1998). Segundo estes autores, devido à variedade e grau de complexidade dos sistemas de fluidização modelados, existe uma forte demanda por um procedimento integrado de modelagem onde modelos com elevado grau de sofisticação devem ser usados para alimentar modelos que usam sub-modelos com forte base empírica. Nesse contexto os modelos discretos oferecem uma ferramenta para desenvolver leis de fechamento para as interações partícula-partícula e partícula-parede, que podem ser usadas e testadas nos modelos contínuos desenvolvidos para a simulação dos sistemas macroscópicos de interesse, tais como os leitos fluidizados circulantes gás-sólidos.

**Tabela 2.** Comparação entre modelos contínuos (MC) e modelos discretos (MD).

	MC	MD
Úteis para predições engenharieis de escala	+	-
Incorporação dos efeitos distribuídos sob a fase dispersa (sólida)	-	+
Esforço computacional	+	-
Nível de detalhamento computacional	-	+
Fechamento das equações	-	+

### 3. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

A seguir apresenta-se resultados de simulação numérica do escoamento bifásico gás-sólidos no tubo ascendente da instalação do sistema de transporte gás-sólidos do IIT (Illinois Institute of Technology) apresentada em (Luo, 1987) e em (Tsuo, 1989) segundo as condições e geometria especificadas na Figura 2.



Dados da simulação:

Diâmetro das partículas:  $d_p = 520 \mu\text{m}$   
 Densidade do sólido:  $\rho_s = 2620 \text{kg/m}^3$   
 Velocidade mássica do sólido:  $G_s = 24,9 \text{kg/sm}^2$   
 Viscosidade do sólido:  $\mu_s = 0,509 \text{Pa s}$

Condições iniciais:

Tubo ascendente sem sólido  
 $P = 101,325 \text{kPa}$   
 $T = 300 \text{K}$

Condições de contorno na entrada:

$v_s = 0,386 \text{m/s}$   
 $v_g = 4,979 \text{m/s}$   
 $\alpha_s = 0,0246$   
 $P = 121,590 \text{kPa}$   
 $T = 300 \text{K}$

Condições de contorno na saída:

Condição de continuidade

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0 \quad (3)$$

onde  $f$  pode ser  $\alpha_g$ ,  $u_g$  ou  $u_s$   
 Pressão fixa:  $P = 101,325 \text{kPa}$

Condições computacionais:

$\delta r = 0,381 \text{cm}$   
 $\delta z = 7,62 \text{cm}$   
 $\delta t = 0,0005 \text{s}$   
 Número de nós:  $(12 \times 75) = 900$   
 Tempo real de cálculo  $t = 48 \text{s}$

Figura 2. Geometria e condições iniciais e de contorno usadas na simulação do sistema de transporte do IIT apresentado em (Luo, 1987) e em (Tsuo, 1989).

Na simulação utiliza-se o modelo hidrodinâmico B usado pelo grupo de pesquisa do IIT/ANL (Argonne National Laboratory). Este consiste no modelo tradicional das duas fases separadas com algumas modificações. As equações básicas de conservação da massa e da quantidade de movimento do modelo tradicional são dadas respectivamente por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \rho_k \vec{U}_k) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k \vec{U}_k) + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \rho_k \vec{U}_k \vec{U}_k) = -\alpha_k \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \tau_k) + M_{kl} + \alpha_k \rho_k \vec{g} \quad (2)$$

onde  $\alpha_k$ ,  $\rho_k$ ,  $U_k$ , e  $\tau_k$  representam respectivamente a fração volumétrica, densidade ( $\text{kg/m}^3$ ), velocidade média (m/s), e o tensor das tensões viscosas (Pa) para a fase k, P a pressão termodinâmica ou pressão do gás (Pa), g a aceleração da gravidade ( $\text{m/s}^2$ ), e  $M_{kl}$  a transferência de quantidade de movimento na interface entre as fases ( $\text{N/m}^3$ ).

Para fechar as equações (1) e (2) precisa-se modelar os termos  $\tau_k$  e  $M_{kl}$ . Para o tensor das tensões viscosas normalmente assume-se um fluido Newtoniano tanto para a fase gasosa quanto para a fase sólida. Além disso deve-se especificar a viscosidade da fase sólida,  $\mu_s$ . No modelo clássico assume-se um valor constante para esse coeficiente. Outro aspecto a modelar através das leis de fechamento é a denominada pressão do sólido que caracteriza as tensões normais que aparecem na fase sólida devido às colisões partícula-partícula e às flutuações da velocidade do particulado. No modelo tradicional a pressão do sólido é modelada por equações empíricas.

No modelo utilizado são também consideradas as seguintes hipóteses simplificativas: escoamento bifásico não reativo sem transferência de massa na interface; escoamento laminar e isotérmico para ambas as fases, as quais são consideradas meios contínuos; e particulado homogêneo caracterizado por apenas um diâmetro médio de partícula  $d_p$  (m). Para maiores detalhes da derivação do modelo hidrodinâmico utilizado, da técnica numérica usada, assim como de aspectos concernentes à modelagem matemática de escoamentos bifásicos gás-sólidos pode-se consultar os trabalhos de Cabezas (1999), e Cabezas e Milioli, (1999).

A Figura 3 mostra os contornos de fração volumétrica de sólidos no tubo ascendente. Nessa figura, quanto menos intenso o tom de cinza maior a fração volumétrica de sólidos. Observa-se a formação e dissipação de aglomerados, formando-se o primeiro à 1,5 segundos aproximadamente. Os resultados mostrados na Fig.3 são qualitativamente semelhantes aos obtidos por Tsuo (1989), que modelou essa mesma instalação utilizando coordenadas cartesianas (vide Cabezas, 1999). Como observa-se na figura a hidrodinâmica do escoamento bifásico gás-sólidos numa coluna de leito circulante é bastante complexa, caracterizando-se por grandes variações radiais e axiais da concentração de sólidos, e pela freqüente formação e dissociação de aglomerados sólidos que escoam de forma ascendente e descendente.

#### 4. COMENTÁRIOS FINAIS

Existem diferentes tipos de modelos para simular o escoamento multifásico num leito fluidizado. Entre os modelos usados em modelagem fundamental destacam-se os modelos contínuos e os modelos discretos. Apesar dos avanços atingidos no desenvolvimento e utilização destes tipos de modelos, ainda existem problemas significativos a serem resolvidos. Entre eles estão a modelagem dos termos viscosos para a fase sólida e a modelagem da turbulência, entre outros, para os modelos contínuos, e o alto custo computacional dos modelos discretos, impossibilitando sua aplicação à simulação de sistemas fluidizados de escala industrial.

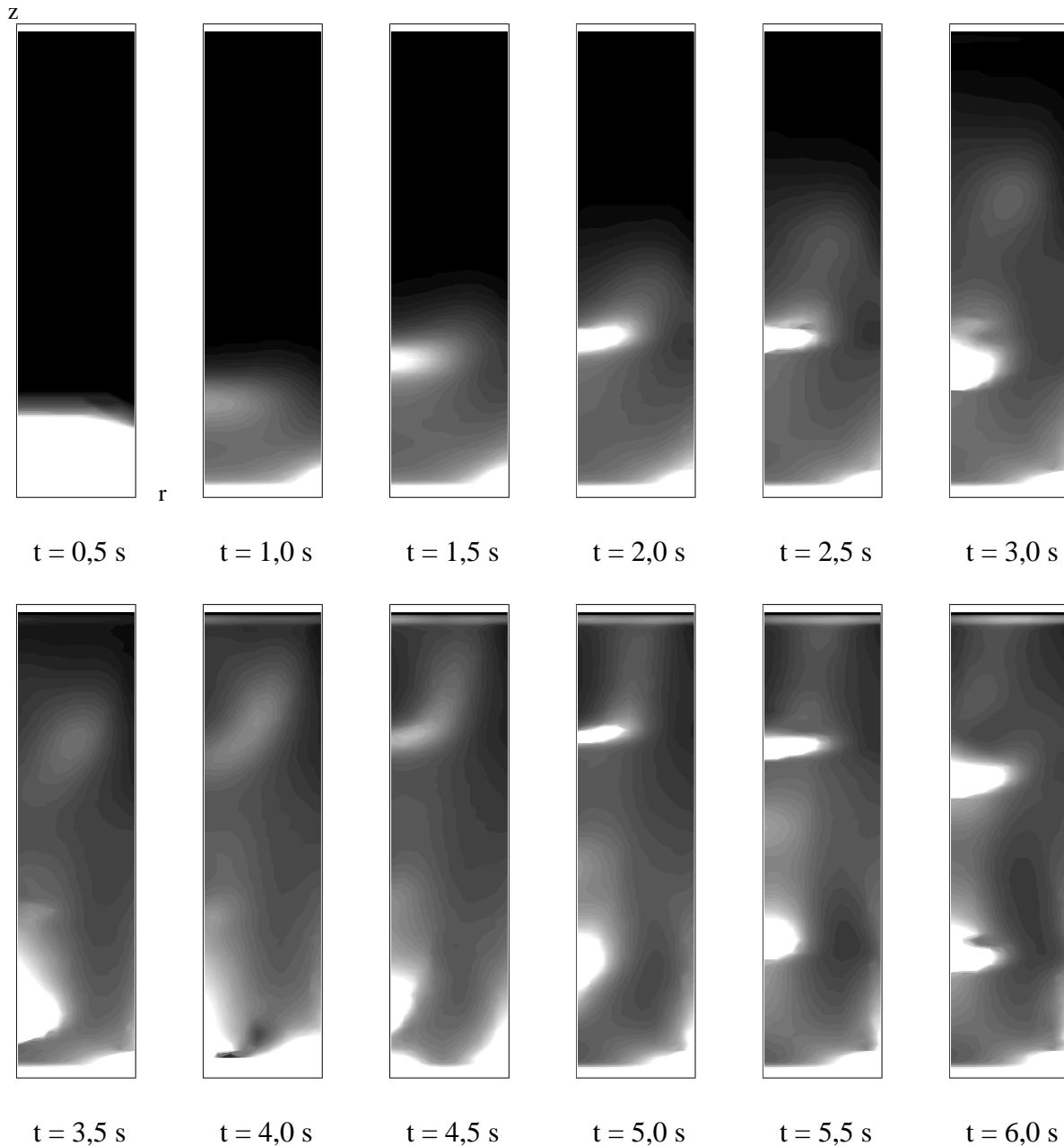


Figura 3 - Perfis do contorno da fração volumétrica de sólidos em função do tempo.

Salienta-se a importância da pesquisa e desenvolvimento destes tipos de modelos visando sua aplicação ao projeto de unidades industriais de leitos fluidizados para geração de energia e produção de combustíveis. Uma forma de atingir esse propósito é a utilização de procedimentos de modelagem integrados, como descrito na seção 2.

Atualmente estão sendo desenvolvidos trabalhos de pesquisa nesta área de modelagem fundamental de processos de fluidização em continuidade ao presente trabalho.

## 5. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer o apoio financeiro do CNPq na forma de bolsa de mestrado para o primeiro autor do trabalho.



## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Boemer, A., Qi, H., Renz, U., Vasquez, S., Boysan, F., 1995, "Eulerian computation of fluidized hydrodynamics-a comparison of physical models", Proc.13<sup>th</sup> Int. Conf. on Fluidized Bed Combustion, v.2, p.775-787.
- Bouillard, J.X., 1989, "Porosity distributions in a fluidized bed with an immersed obstacle", AIChE Journal, v.35, n.6, p.908-922.
- Cabezas, L.G., 1999, "Um estudo da modelagem matemática e simulação numérica de escoamentos bifásicos gás-sólidos", Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, Brasil.
- Cabezas, L.G., Milioli, F.E., 1999, "Modelagem matemática e simulação numérica do escoamento bifásico gás-sólidos num leito fluidizado circulante", XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Águas de Lindoia, SP, Brasil.
- Chapman, S., Cowling, T.G., 1970, "The mathematical theory of non-uniform gases", 3<sup>rd</sup> Ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K.
- Ding, J., 1990, "A fluidization model using kinetic theory of granular flow", Ph.D. Thesis, Illinois Institute of Technology, Chicago.
- Ding, J., Gidaspow, D., 1990, "A bubbling model using kinetic theory of granular flow", AIChE Journal, v.36, n.4, p.523-538.
- Gidaspow, D., Ettehadieh, B., 1983, "Fluidization in two-dimensional beds with a jet 2. Hydrodynamics modeling", Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals, v.22, p.193-201.
- Gidaspow, D., 1986, "Hydrodynamics of fluidization and heat transfer: Supercomputing modeling", Applied Mechanical Reviews, v.39, n.1, p.1-23.
- Gidaspow, D., 1994, Multiphase Flow and Fluidization. Continuum and Kinetic Theory Descriptions, Academic Press, Boston.
- Hoomans, B.P.B., Kuipers, J.A.M., Briels, W.J., van Swaaij, W.P.M., 1996, "Discrete particle simulation of bubble and slug formation in a two-dimensional gas-fluidized bed: a hard-sphere approach", Chemical Engineering Science, v.51, n.1, p.99-118.
- Kuipers, J.A.M., van Swaaij, W.P.M., 1997, "Application of computational fluid dynamics to chemical reaction engineering", Reviews in Chemical Engineering, v.13, n.3.
- Kuipers, J.A.M., Hoomans, B.P.B., van Swaaij, W.P.M., 1998, "Hydrodynamic models of gas-fluidized beds and their role for design and operation of fluidized bed chemical reactors", In Fluidization IX, Engineering Foundation, Fan, L.-S., Knowlton, T.M., Eds., Engineering Foundation: New York, p. 15-30.
- Miller, A., Gidaspow, D., 1992, "Dense, vertical gas-solid flow in a pipe", AIChE Journal, v.38, n.11, p.1801-1815.
- Pugsley, T.S., Berruti, F., 1996, "A predictive model for circulating fluidized bed risers", Powder Technology, v.89, p.57-69.
- Samuelsberg, A., Hjertager, B.H., 1996, "An experimental and numerical study of flow patterns in a circulating fluidized bed reactor", International Journal of Multiphase Flow, v.22, n.3, p.575-591.
- Syamlal, M., Gidaspow, D., 1985, "Hydrodynamics of fluidization: prediction of wall to bed heat transfer coefficients", AIChE Journal, v.31, n.1, p.127-135.
- Tsuji, Y., Tanaka, T., Yonemura, S., 1998, "Cluster patterns in circulating fluidized beds by numerical simulation (discrete particle model versus two-fluid model)", Powder Technology, v.95, n.3, p.254-264.
- Tsuo, Y.P., 1989, "Computation of flow regimes in circulating fluidized beds", Ph.D. Thesis, Illinois Institute of Technology, Chicago.

## **ESCOAMENTO TURBULENTO COM TROCA DE CALOR SOBRE UM DEGRAU**

**D. O. A. Cruz,**

**Danielle Gurra**

**E. N. Macêdo**

, Universidade Federal do Pará Departamento de Engenharia Mecânica – UFPA  
Campus Universitário do Guamá, 66075-900, Belém, Pará, Brasil  
E-mail: [doac@ufpa.br](mailto:doac@ufpa.br)

**Atila P. Silva Freire**

Programa de Engenharia Mecânica COPPE/UFRJ  
Universidade Federal do Rio de Janeiro  
C.P. 68503, 21945-970, Brasil  
Email: [atila@serv.com.ufrj.br](mailto:atila@serv.com.ufrj.br)

### **Resumo**

A separação da camada limite constitui-se em um dos principais fenômenos da mecânica dos fluidos por ocorrer com grande frequência em problemas de engenharia. Muitos estudos têm sido desenvolvidos no sentido de determinar o comportamento do escoamento nesta região, assim como o modo pelo qual ocorre a troca de calor. Este trabalho propõe um procedimento para o cálculo do número de Stanton nas regiões de separação e de recolamento do escoamento. O método a ser utilizado emprega as equações para a velocidade e temperatura derivadas por Cruz & Silva Freire (1998). O procedimento consiste em obter o gradiente de pressão, a tensão de cisalhamento e o fluxo de calor na parede através das equações de velocidade e temperatura para a região de redesenvolvimento utilizando dados experimentais dos perfis de velocidade e temperatura e o método dos mínimos quadrados. Para este fim, o fenômeno foi estudado experimentalmente através do escoamento turbulento sobre um degrau descendente com 0,05 m de altura tendo à frente de sua face uma seção de teste aquecida em um túnel de vento. Uma comparação com os resultados de Vogel & Eaton foi feita mostrando bons resultados.

**Palavras Chaves:** Camada Limite, Escoamento Turbulento, Transferencia de Calor.

## 1. INTRODUÇÃO

Escoamentos turbulentos com separação e recolamento são classificados como escoamentos complexos, caracterizados por alta intensidade turbulenta e fluxo reverso. O fenômeno de separação da camada limite turbulenta vêm sendo pesquisado há vários anos, pois a presença de um gradiente de pressão adverso e conseqüentemente o aparecimento da separação e recolamento, possuem considerável significado na prática por serem de grande importância em projetos aerodinâmicos como: máquinas à jato, aerofólios, pás de helicóptero, pás de turbinas e dutos com expansão.

A separação é o resultado de um movimento retardado do fluido adjacente à parede; e a força de atrito é um importante fator neste processo. A presença de uma região de separação juntamente com o recolamento de um escoamento, provoca o aumento da instabilidade, flutuações de pressão, vibrações em estruturas e ruído.

As pesquisas realizadas dentro deste assunto têm como principal motivação o entendimento da física do fenômeno, e o empenho em encontrar possíveis métodos para amenizar os impactos desfavoráveis provocados pelo processo. Apesar de muitos estudos experimentais em escoamentos com separação, a estrutura da região de separação não está completamente entendida (Simpson, Chew e Shivaprasad, 1981). Mesmo com o desenvolvimento de anemômetros a laser e pulsáteis, as medidas de velocidade na zona de separação é ainda sujeita a erros (Adams e Eaton 1988).

O presente trabalho visa o estudo do fenômeno de separação tanto fluidodinâmico quanto térmico, teoricamente e experimentalmente, o qual foi realizado com escoamento turbulento utilizando como fluido o ar. O experimento foi desenvolvido com escoamento subsônico, sobre um degrau descendente, Figura 1, em um túnel de vento aberto e de baixa intensidade turbulenta. O estudo tem por objetivo contribuir com um novo conjunto de medidas experimentais de velocidade e de temperatura, uma vez que existe uma carência de dados experimentais para ambos os casos. Outro objetivo se relaciona ao aspecto teórico, em que um novo procedimento para o tratamento dos parâmetros característicos como tensão na parede e fluxo de calor, foram estimados através da aplicação da técnica do problema inverso, a qual foi utilizada para a implementação das equações de velocidade e temperatura derivadas por Cruz e Silva Freire(1998). Foi aplicado ao código computacional desenvolvido os dados experimentais do trabalho de Vogel e Eaton (1984), os dados estimados pelo código demonstraram boa concordância. Todos os experimentos foram realizados no Laboratório de Mecânica da Turbulência do Programa de Engenharia Mecânica do Instituto de Pós-Graduação Alberto Luis Coimbra – COPPE/UFRJ

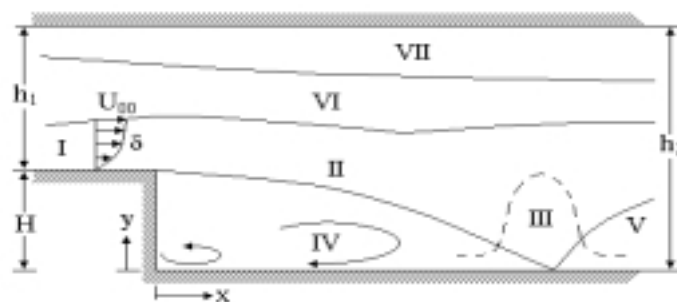


Figura 1. Degrau descendente.

Onde I = Camada limite V = Região de redensolvimento II = Camada cisalhante  
VI = escoamento potencial III = Região de recolamento IV = Região de recirculação

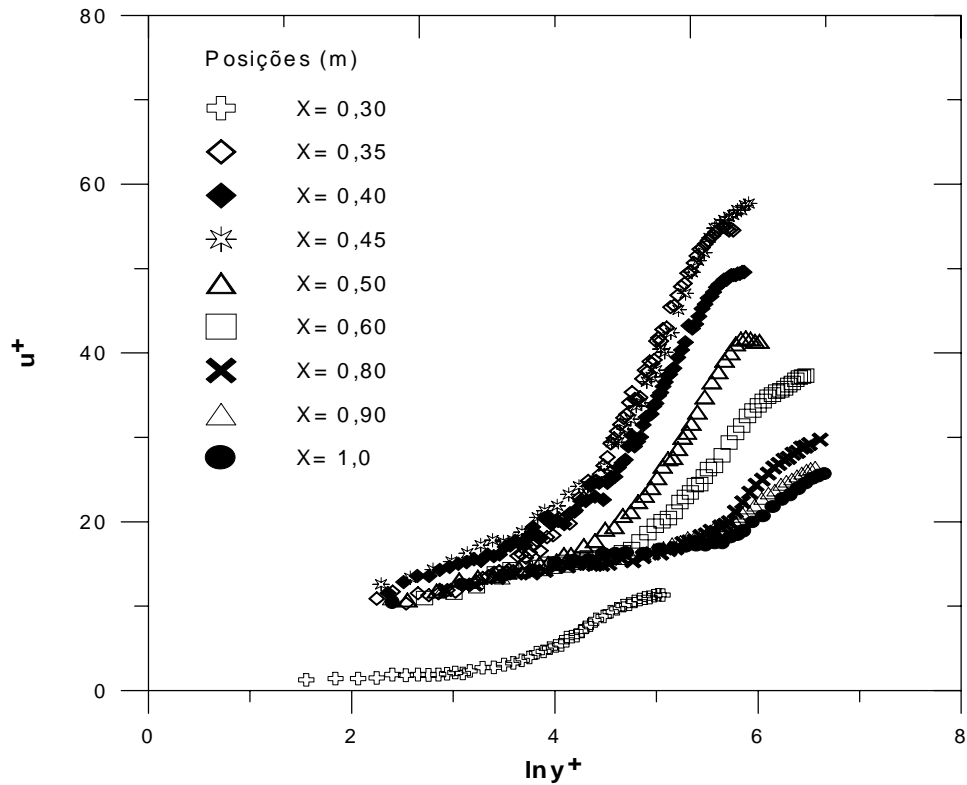
## 2. APARATO E METODOLOGIA EXPERIMENTAL

O protótipo de um degrau descendente de dimensões 0,05mx0,67mx1,0m foi construído para ser adaptado à seção de estabilização do túnel de vento. Sua utilização força o aparecimento das regiões de descolamento, recirculação, recolamento e redensolvimento do escoamento. Foi utilizado um túnel de vento de circuito aberto, de baixa velocidade e com intensidade turbulenta inferior a 2%. O túnel possui uma seção de teste de dimensões 0,67mx0,67mx3,0m e sua seção de teste é dividida em três seções de iguais dimensões. A geração do escoamento se faz à montante por uma seção ventiladora equipada com um filtro. A regulagem da velocidade do escoamento é controlada através de um conversor de frequência do motor. Antes de atingir a seção de estabilização, o escoamento atravessa o difusor e uma colméia, onde irregularidades espaciais do perfil de velocidades são atenuados. A seção de estabilização possui um metro e os dois metros seguintes são de seção de teste a qual possui superfícies lisas e um sistema de aquecimento. O túnel é todo constituído de madeira, na parte inferior há duas placas de alumínio de um metro cada, sob estas placas há um sistema de aquecimento; o teto do túnel é móvel a fim de compensar o desenvolvimento da camada limite e possui adaptação para tomadas de pressão. O teto do túnel foi ajustado para possuir um gradiente de pressão próximo ou igual a zero. O sistema de aquecimento da superfície interna em alumínio nos dois metros de seção de teste do túnel, é produzido por corrente elétrica. O controle de todas as funções do túnel é automático sendo comandado por microcomputador. Dois micro-processadores PENTIUM são utilizados para o controle da instrumentação, aquisição e tratamento dos dados experimentais obtidos durante os experimentos.

Os perfis de temperatura instantânea foram adquiridos usando três termopares tipo K, Níquel-Constantan, uma placa de aquisição de sinal e um programa computacional. Foram utilizados um tubo de Pitot e um programa para a calibração e controle da velocidade. Cada termopar foi ligado à placa de aquisição sendo esta conectada ao computador. O programa utilizado para a aquisição dos dados, fornece a temperatura obtida pelo termopar que está contido na haste, e a temperatura dos termopares fixados nas superfícies das placas. Os dados experimentais obtidos na medição da camada limite de velocidade, foram adquiridos pela anemometria de fio- quente. O sistema de aquisição era composto de um sensor a fio- quente simples da marca DISA, tipo 55P11, e um anemômetro KAURI. Os valores das medidas de velocidade média foram adquiridos por um programa computacional desenvolvido no Laboratório de Mecânica da Turbulência.

## 3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Os perfis de velocidade e de temperatura obtidos experimentalmente para a região à jusante do ponto de recolamento, são apresentados em coordenadas internas onde  $u^+ = u/u_\tau$ ,  $y^+ = u_\tau \cdot y/\nu$  e  $T^+ = (T_w - T)/T_\tau$ ,  $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ ,  $T_\tau = q_w / (C_p \rho u_\tau)$ ,  $T_w$  = temperatura na parede,  $\tau_w$  = Tensão de cisalhamento, de forma a caracterizar a existência de uma região logarítmica, localizada na região de escoamento completamente turbulento. Cada perfil de velocidade e temperatura é localizado a uma certa distância à frente do degrau, nas posições 30, 40, 45, 50, 60, 80, 90 e 100cm.



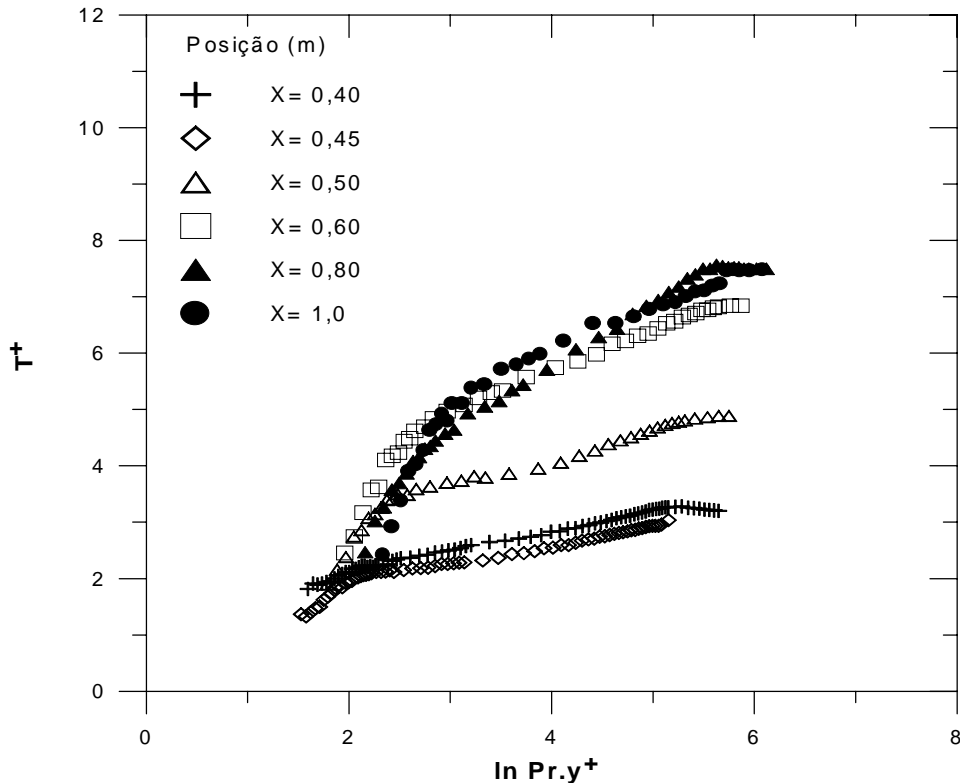
**Figura 2.** Perfis de velocidade em coordenadas internas.

É observado que o perfil de posição  $x=0,30\text{m}$ , localizado próximo ao ponto de recolamento, demonstra não atender a lei logarítmica mostrando assim que esta não é válida nesta região. Na região de separação o perfil de velocidade assume um perfil no qual a velocidade varia proporcionalmente a raiz quadrada da distância até a parede, isto ocorre principalmente devido a uma alteração no balanço de forças do escoamento próximo a parede quando comparado com o caso onde não há recolamento, causada pelo desaparecimento da tensão na parede.

Nos outros perfis medidos à jusante do ponto de recolamento, é observado que a medida que se afastam deste, vão apresentando uma região de solução logarítmica e a tendência a juntarem-se uma vez que o escoamento vai adquirindo características do comportamento de escoamento sobre placas planas, atendendo assim, a lei da parede clássica. Isto é observado nos perfis que vão de  $0,50$  à  $1,0\text{m}$ .

Na Figura 03 também foi observado a existência de uma região logarítmica nos perfis de temperatura, sendo que a tendência dos mesmos a juntarem-se ocorre mais lentamente a medida que se afastam da região de recolamento. Como no caso fluidodinâmico o escoamento na região de separação apresenta características diferentes do escoamento sobre placa plana sendo que neste caso, o perfil de temperatura varia de forma inversamente proporcional a raiz

quadrada da distância até a parede. Esta mudança é uma consequência das alterações que ocorrem no escoamento e que afetam diretamente o fenômeno da troca de calor na região de separação-recolamento.



**Figura 3.** Perfis de temperatura em coordenadas internas.

#### 4. CÁLCULO DA TENSÃO E FLUXO DE CALOR NA PAREDE

Para o cálculo da tensão cisalhante  $\tau_w$ , gradiente de pressão  $dP_w/dx$  e do fluxo de calor  $q_w$ , códigos computacionais foram desenvolvidos utilizando a Técnica do Problema Inverso. O objetivo do problema inverso é estimar uma ou mais variáveis desconhecidas utilizando medições conhecidas. A técnica utilizada para a solução do problema inverso foi o método de Levenberg–Marquardt através da minimização do resíduo da norma de mínimos quadrados, que é expressa pela equação (4.1). O método foi utilizado para minimizar as funções de velocidade e temperatura derivadas por Cruz e Silva Freire (1998)

$$S(P) = \sum_{i=1}^I [Y_i - T_i(P)]^2 \quad (4.1)$$

onde  $P^T \equiv [P_1, P_2, \dots, P_N]$  = vetor com os parâmetros a serem estimados  
 $T_i(P) \equiv T(P, t_i)$  = temperatura estimada no tempo  $t_i$   
 $Y_i \equiv Y(t_i)$  = temperatura medida no tempo  $t_i$   
 $N$  = número total de parâmetros que se deseja estimar  
 $I$  = número total de medidas

Os perfis de velocidade e de temperatura próximos à parede apresentam um comportamento logaritmo atendendo a conhecida Lei da Parede. Contudo, este

comportamento não é verdadeiro para a região de separação da camada limite. Com o objetivo de contornar estas dificuldades, Cruz e Silva Freire (1998) apresentaram novas formulações para as equações de velocidade e de temperatura, as quais são válidas em todas as regiões do escoamento. Para o caso hidrodinâmico, foi utilizada a equação (4.2), onde  $\tau_w$  representa a tensão na parede,  $dP_w/dx$  é o gradiente de pressão,  $\rho$  é a massa específica,  $k=0,41$  é a constante de von Kármán,  $u$  é a componente de velocidade na direção  $x$ , e  $C_1(x)$  é constante provinda da integração.

$$u = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} - \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} + C_1(x) \quad (4.2)$$

Esta equação é uma generalização da lei da parede clássica para escoamentos com separação. Representa o comportamento da lei da parede na região à jusante do deslocamento para o caso em que  $\tau_w/\rho \geq 0$ . Tratando matematicamente a equação (4.2) para quando  $\tau_w \gg y dP/dx$ , tem-se que:

$$u = \frac{2}{k} u_\tau + \frac{u_\tau}{k} \ln \frac{y}{4u_\tau^2 \rho} \frac{dP_w}{dx} + C_1(x) \quad (4.3)$$

A constante  $C_1(x)$  foi possível ser modelada através da utilização simultânea da equação (4.3) e da formulação clássica da lei da parede, das quais obteve-se:

$$C_1(x) = u_r \ln \frac{4u_\tau^3}{v dP_w / dx} \quad (4.4)$$

Onde a velocidade de atrito  $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ , e  $u_r$  é um parâmetro de escala proposto por Cruz e Silva Freire (1994) o qual pode ser empregado tanto na região de separação quanto longe desta, fornecendo uma estrutura assintótica que se adapta aos efeitos do processo de separação sendo descrito pela equação (4.5) apresentada abaixo.

$$u_r^3 - \frac{\tau_w}{\rho} u_r - v \frac{dP_w}{dx} = 0 \quad (4.5)$$

Na região interna do escoamento a expressão (4.6) é válida, e como  $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$  tem-se por consequência que a velocidade característica,  $u_r$ , é da ordem da velocidade de atrito  $u_\tau$

$$o(u_r^2) = o\left(\frac{\tau_w}{\rho}\right) \quad (4.6)$$

Substituindo a equação (4.4) na equação (4.2) obteve-se a forma final da equação de velocidade válida para a região completamente turbulenta, a qual foi utilizada no código computacional desenvolvido para estimar os valores da tensão de cisalhamento e o gradiente de pressão na parede. Analogamente ao caso fluidodinâmico, a equação para a lei da parede térmica utilizada neste trabalho é apresentada a seguir:

$$T = \frac{1}{k_t} \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p} \frac{1}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} \ln \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} - \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dP_w}{dx} y} + \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} + C_{t1}(x, Pr) \quad (4.7)$$

Onde  $T = T_w - T_f$ ,  $T_f$  e  $T_w$  representam as temperaturas do fluido e da parede respectivamente,  $c_p$  o calor específico, a constante térmica  $k_t = 0.45$ , e  $C_{t1}$  é constante provinda de integração.

Tratando matematicamente a equação (4.7) sabendo que  $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$  tem-se que:

$$T = \frac{1}{k_t} \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p} \frac{1}{u_\tau} \ln \frac{y}{4\rho u_\tau^2} \frac{dP_w}{dx} + C_{t1} \quad (4.8)$$

Fazendo uso do parâmetro de escala  $u_r$ , a constante  $C_{t1}$  obtida foi a seguinte:

$$C_{t1} = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p u_r} \left( \frac{1}{k_t} \ln \frac{4u_r^3}{v} \frac{dP_w}{dx} + AJ \right) \quad (4.9)$$

Onde  $AJ$  é uma modificação da função empírica de correlação proposta por Patankar e Spalding (1970) expressa por:

$$AJ = \left( \frac{0,9}{Pr} \right)^{0,25} \cdot \left[ \frac{0,9PI}{\text{sen}(PI) \sqrt{\frac{A}{0,41} \left( \frac{Pr}{0,9-1} \right)}} \right] \quad (4.10)$$

onde  $Pr = 0,7$ ;  $PI = \arctg(1)$ ;  $A = 26 ((\tau_w/\rho)^{1/2}/u_r)$

Substituindo  $C_{t1}$  na equação (4.7) obtém-se a forma final que foi implementada para a obtenção do fluxo de calor. A partir dos valores destes, foi possível obter o número de Stanton através da expressão (4.11), e com os valores da tensão o coeficiente de fricção foi encontrado pela expressão (4.12).

$$St = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p U_{oo} (T_w - T_{oo})} \quad ; \quad \frac{C_f}{2} = \left( \frac{u_\tau}{U_{oo}} \right)^2 \quad (4.11, 12)$$

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

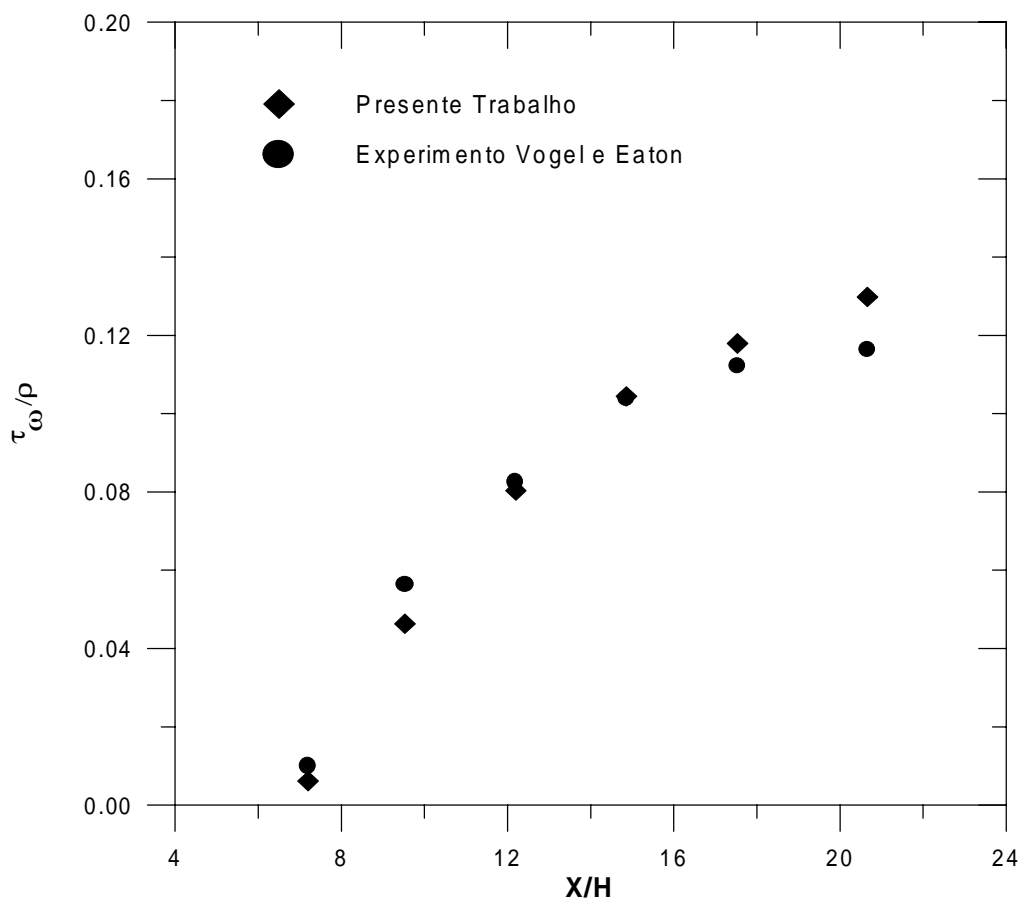
Os valores da tensão cisalhante e do gradiente de pressão são apresentados na Tabela 1. Foi observado que a tensão próximo ao ponto de recolamento, na estação 30cm, assume um valor próximo de zero e à jusante deste passa a assumir valores crescentes. Próximo ao recolamento um gradiente de pressão nulo já não é mais previsto como no caso de placas planas. Havendo próximo a esta região, um gradiente de pressão o qual é pequeno, mas não é zero, o que é observado nas estações 30, 40 e 45cm. Observando os valores dos gradientes de pressão obtidos para as estações de 50 a 100cm, estes vão assumindo valores pequenos bem próximos de zero, pois o redensolvimento após o recolamento, se comporta como o escoamento em placas planas. Portanto, os valores estimados estão em boa concordância com a configuração experimental adotada para as medições.



O código numérico desenvolvido para o cálculo da tensão cisalhante foi utilizado com os perfis de velocidade do trabalho de Vogel e Eaton (1984) para uma comparação da qual foi observado que os valores obtidos numericamente, através da técnica do problema inverso utilizando a equação (4.2), se aproximam bastante dos valores obtidos experimentalmente como visto na Figura 4.

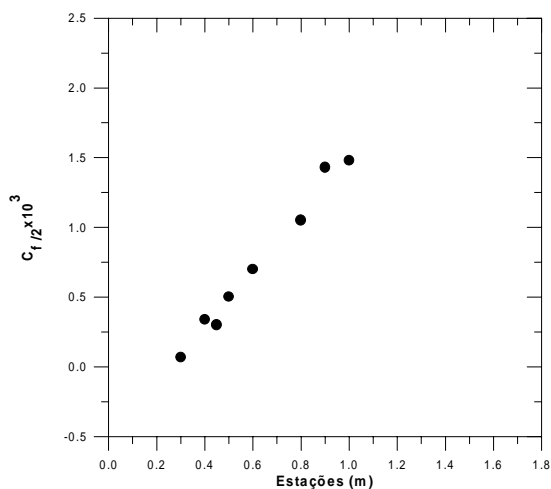
**Tabela 1.** Tensão cisalhante e gradiente de pressão estimados pelo código.

Estação	30cm	40cm	45cm	50cm	60cm	80cm	90cm	100cm
$C_f/2 \times 10^3$	0,0680	0,3400	0,3000	0,5000	0,7000	1,0500	1,4300	1,4800
$dP_w/dx$	0,4103	0,8818	1,0733	0,2146	0,0603	0,0055	0,0110	0,0165
$St \times 10^3$	8,8670	5,6300	5,7250	4,5450	3,5230	3,9770	3,1370	4,4720

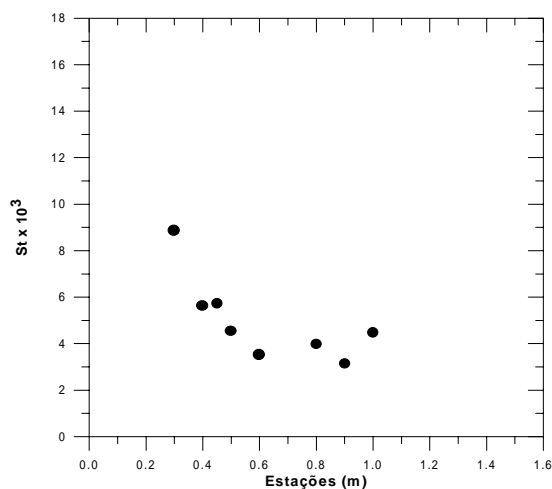


**Figura 4.** Comparação de resultados

Os gráficos do coeficiente de fricção e do número de Stanton, os quais demonstram que os valores obtidos estão de acordo com o comportamento físico típico destes parâmetros encontrados para a região depois do recolamento, são mostrados nas Figuras 5 e 6. Nota-se o crescimento do valor do coeficiente de fricção a partir do ponto de recolamento, no caso do número de Stanton observa-se uma acentuada diminuição a partir do ponto de descolamento seguida de uma diminuição dessa tendência. Isso ocorre devido a intensa flutuação turbulenta que ocorre na região de separação a qual promove uma intensificação no fluxo de calor nessa região.



**Figura 5.** Coeficiente de fricção.



**Figura 6.** Número de Stanton.

## 6. CONCLUSÃO

O comportamento do campo de velocidade e de temperatura à jusante da região do ponto de recolamento, foram estudados neste trabalho. Um novo procedimento para a obtenção do coeficiente de atrito e número de Stanton foi aplicado através da utilização da técnica do problema inverso em que foram implementadas as leis de parede fluidodinâmica e térmica propostas por Cruz e Silva Freire (1998). A técnica também foi utilizada com os perfis de velocidade obtidos por Vogel e Eaton (1984) em que os valores da tensão na parede estimados pelo código desenvolvido no presente trabalho, estão em boa concordância com os medidos experimentalmente por estes autores.

O experimento foi realizado em um túnel de vento de dimensões 0,67mx0,67mx3,0m e intensidade turbulenta de 2%. A anemometria de fio-quente foi utilizada para a obtenção dos perfis de velocidade média. Os perfis de temperatura instantânea foram obtidos por um termopar tipo K.

## 7. REFERÊNCIAS

- Adams, E.W. and Eaton, J. K., 1988, "An LDV Study of the Backward-Facing Steps Flow Including the Effects of Velocity Bias", *Trans. ASME J. Fluids Eng*, vol. 110, pp. 275-282.
- Cruz, D.O.A. and Silva Freire, A.P., 1998, "On Single Limits and Asymptotic Behaviour of Separating Turbulent Boundary Layers", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 41, No. 14, pp.2097-2111.
- Simpson, R.L., Chew, Y.T. and Shivaprasad, B.G., 1981, "The Structure of a Separating Turbulent Boundary Layer", Part 1, Mean Flow and Reynolds Stresses, *Journal Fluid Mechanics*, vol. 113, pp.23-51.

- Vogel, J.C. & Eaton, J.K., 1985, "Combined Heat Transfer and Fluid Dynamic Measurements Downstream of a Backward Facing Step", J. Heat Transfer, Transactions of ASME, vol.107, pp 922-929
- Vogel, J.C., 1984, "Heat Transfer and Fluid Mechanics Measurements in the Turbulent Reattaching Flow Behind a Backward Facing Step", PhG Thesis, Stanford Univ.
- Bradshaw, P. e Wong, F.Y.F., 1972, "The Reattachment and Relaxation of a Turbulent Shear Layer. Journal Fluid Mechanics", Vol. 52, pp.113-135.
- Castro, I.P. e Epik, E., 1998, "Boundary Layer Development after a Separated Region. Journal Fluid Mechanics", Vol.374, pp. 91-116.

# SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE MOTORES DE COMBUSTÃO INTERNA

**José Francisco de Castro Monteiro**

**João Roberto Barbosa**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Divisão de Engenharia Mecânica-Aeronáutica, Departamento de Energia, 12.228-901 São José dos Campos, SP, e-mail: barbosa@mec.ita.cta.br

## Resumo

A simulação do comportamento de máquinas em geral, e de motores de combustão interna em particular, é muito importante para que se possa prever seu funcionamento, mesmo antes da fabricação, e os problemas que possam prejudicar sua operação. Isto resulta em uma redução significativa nos custos no desenvolvimento e na antecipação do início da produção. Um modelo é apresentado para a simulação de motores de combustão interna operando nos ciclos Diesel ou Otto, de dois ou quatro tempos, naturalmente aspirados ou turboalimentados, com qualquer número de válvulas, dutos, junções e plenos. Para efeito de simulação, o motor é dividido em elementos: câmara de combustão, cárter, duto, carburador, junções, abafadores de ruído, etc. Para cada um desses elementos foi desenvolvido um modelo numérico. O desempenho do motor é obtido através da aplicação das leis de conservação a cada elemento e da compatibilização das propriedades do escoamento nas interfaces de elementos adjacentes, resolvidas através de um programa de computador escrito em C++. São apresentadas as simulações de desempenho de alguns motores, comparando-os com resultados obtidos com dados experimentais. Um motor disponível na literatura foi simulado utilizando-se o modelo desenvolvido, com boa concordância dos resultados

**Palavras-chave:** simulação numérica, motor a pistão, motor de combustão interna.

## 1. INTRODUÇÃO

Nos anos passados o desenvolvimento de motores estava direcionado à busca de maior potência. Hoje, maior atenção é dada à melhoria dos motores existentes conforme Takizawa (1982). Atualmente, os recursos computacionais são os mais utilizados nas fases iniciais de definições e na fase de projeto do motor. Só nas fases finais é que se utiliza recurso experimental para a confirmação dos resultados previstos conforme Heywood (1988).

Programas computacionais mais elaborados são limitados para análise completa da máquina, devido à capacidade computacional requerida. São quase impossíveis de serem utilizados no estudo de transitórios. São pacotes comerciais caros, tal como o FIRE conforme AVL (1996) e são utilizados para análise pormenorizada de regiões críticas do motor. Mais importante para a análise inicial das configurações pesquisadas são os programas baseados em modelos fluidodinâmicos unidimensionais e modelos termodinâmicos simples. Estes programas reduzem drasticamente o tempo de computação requerido e fornecem excelentes resultados. Mesmo no futuro pode ser previsto que modelos unidimensionais e termodinâmicos simples serão necessariamente incorporados na análise tridimensional, para definir as condições de contorno e diminuir o tempo de computação conforme Chen et al. (1992).

Componentes do motor tais como o cilindro, o cárter, as junções, os silenciadores, o turboalimentador, têm seu comportamento descrito através de modelos termodinâmicos simples, com correções empíricas. Os sistemas de admissão e exaustão são descritos pelo método de Lax-Wendroff (1960) de dois passos. Uma discussão detalhada da literatura pertinente pode ser encontrada em Monteiro (1999). Ressaltam-se os trabalhos de Poloni et al. (1987) que compararam os métodos das características com o método de Lax-Wendroff de dois passos; e os de Takizawa et al. (1982) e Chen et al. (1992) que descrevem os métodos aplicados na elaboração de programas computacionais para a análise de motores completos.

## 2. MODELOS E MÉTODOS DE SOLUÇÃO

O modelo desenvolvido aborda cada elemento do motor individualmente, como indicado na Fig. 1. Os elementos utilizados são modelados como o indicado a seguir.

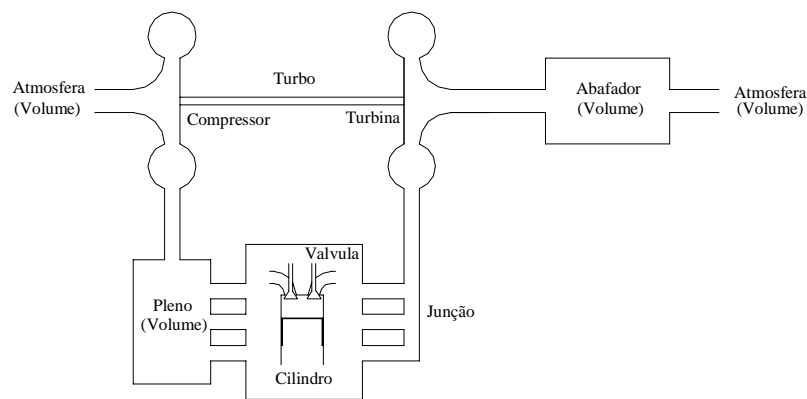


Figura 1 - Esquema dos elementos do motor

### 2.1. Dutos

A solução do escoamento é obtida numericamente pelo método de Lax-Wendroff de dois passos. Diferentes tratamentos foram dados para a região interna e as regiões das fronteiras, estas compreendidas pelo elemento de fronteira e pelo elemento interno adjacente ao elemento de fronteira.

#### 2.1.1. Região Interna

As equações utilizadas para escoamento unidimensional, na forma matricial, foram simplificadas e estão indicadas na Eq. 1.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + C = 0 \quad (1)$$

onde

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \\ \rho \phi \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u \left( e + \frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) \\ \rho u \phi \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u \left( e + \frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) \\ \rho u \phi \end{bmatrix} \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho g \\ -\rho q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

O método de Lax-Wendroff de dois passos conforme Poloni et al. (1987) considera os dois primeiros termos do desenvolvimento da função  $W$  em série de Taylor na direção  $t$ , com

a introdução de diferença central para o termo  $\partial F/\partial x$  e de um valor médio para o vetor  $W_{j+1/2}^n$ .

Tem-se, para o primeiro e o segundo passos, respectivamente:

$$\begin{aligned} W_{j+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(W_{j+1}^n + W_j^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{j+1}^n - F_j^n) - \frac{\Delta t}{4}(C_{j+1}^n + C_j^n) \\ W_j^{n+1} &= W_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1/2}^{n+1/2} - F_{j-1/2}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{2}(C_{j+1/2}^{n+1/2} + C_{j-1/2}^{n+1/2}) \end{aligned} \quad (3)$$

Para eliminar as oscilações numéricas produzidas é empregado o método de correção de fluxo (FCT - *Flux Corrected Transport*) na forma simples, em dois estágios: amortecimento e remoção do amortecimento nas regiões onde as oscilações não ocorrem. Para as equações de transporte, define-se o fluxo  $\Phi$  da função  $W$  e os fatores de difusão e anti-difusão conforme definidos por Bulaty e Niessner (1985) e detalhados por Monteiro (1999).

O método de solução apresentado é um esquema de diferenças finitas explícito que não segue as direções características e, portanto, o número CFL conforme Courant et al. (1967) precisa ser utilizado para garantir estabilidade numérica, fornecendo o intervalo de tempo que deve ser utilizado para todos os elementos do motor:

$$\text{CFL} = \frac{(c + |u|)\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (4)$$

Adotou-se o valor de  $\text{CFL} = 0,8$  que, segundo Chen et al. (1992), é um valor adequado entre a estabilidade da solução e a precisão da forma das ondas.

### 2.1.2. Região da Fronteira

O método para solução do escoamento nos dutos usa o esquema de diferenças finitas centradas, o que não pode ser aplicado para os nós da fronteira. Para esta região foi utilizado o método das características conforme Benson (1982), que apresenta uma solução simples, estável, e com boa precisão nos resultados. No desenvolvimento do método das características, é necessária a introdução da velocidade do som, para serem obtidas as equações que definem as linhas características de Mach e as linhas características da trajetória que são

$$\frac{dP}{dt} + \rho c \frac{du}{dt} + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0 \quad \frac{dP}{dt} - \rho c \frac{du}{dt} + \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 = 0 \quad \frac{dP}{dt} - c^2 \frac{d\rho}{dt} + \Delta_1 = 0$$

onde

$$\Delta_1 = -(\gamma - 1)(u\rho g + \rho q) \quad \Delta_2 = \rho u c^2 \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \quad \Delta_3 = c\rho g$$

Verificou-se que a solução explícita do elemento de fronteira se tornava instável quando os elementos externos, resolvidos por métodos implícitos, apresentavam uma variação acentuada nos valores das propriedades para um passo de tempo.

O procedimento adotado para evitar esta instabilidade consiste na aplicação de uma solução semi-implícita, para o passo no tempo, no ponto da fronteira. O ponto adjacente à fronteira é solucionado considerando-se a contribuição explícita do elemento interno ao duto e a contribuição semi-implícita do elemento da fronteira, mediante os seguintes passos sugeridos por Monteiro (1999):

1. Solução de todos os pontos internos do duto, à exceção do ponto adjacente à fronteira,
2. Avaliação da parcela de contribuição do método de diferenças finitas sobre os valores das propriedades do ponto adjacente à fronteira,
3. Solução das propriedades na fronteira, pelo método das características e por métodos específicos a cada condição de fronteira,
4. Solução do elemento externo ligado ao duto,

5. Avaliação da parcela de contribuição do elemento da fronteira sobre os valores das propriedades do ponto adjacente, considerando a avaliação semi-implícita na fronteira,
6. Solução dos valores das propriedades do ponto adjacente no instante  $(n+1)$ , a partir dos valores obtidos nos passos 2 e 5.
7. Repetição dos passos 3 a 6, até a convergência do processo.

Nos dutos podem ser encontrados escoamentos em regimes subsônico, sônico e supersônico, enquanto que a fronteira pode ser livre (saída dos dutos de exaustão), conter uma restrição de área (válvulas de admissão ou exaustão parcialmente abertas), estar totalmente bloqueada (válvulas fechadas), além do sentido do escoamento.

## 2.2. Junções

O modelo utilizado é o indicado por Bingham e Blair (1985) baseado em formas empíricas da equação da quantidade de movimento, incorporando coeficientes experimentais de perda de pressão. Dois modelos de junção foram desenvolvidos: Junções T, onde dois ramos estão alinhados e o terceiro está em ângulo reto em relação a estes; e Junções coletoras ou distribuidoras, onde o escoamento principal é o de coleta ou de fornecimento do fluxo de massa, respectivamente, por parte de um dos dutos da junção.

## 2.3. Volumes

Os volumes identificados em um motor alternativo são os dos silenciadores e os plenos, normalmente utilizados nos dutos de admissão. A atmosfera foi tratada como um volume com propriedades constantes.

## 2.4. Turboalimentador

As equações que descrevem o comportamento do compressor e da turbina, a partir de seus mapas característicos, são dadas por Cohen et al. (1996). Os mapas característicos de compressores e turbinas, aplicados em turboalimentadores, foram aproximados pelas equações:

$$\begin{aligned} \text{compressor: } r_p &= C_a + C_b \dot{m} + C_c \dot{m}^2 - e^{C_d + C_e \dot{m}} & \eta &= C_a + C_b \dot{m} + C_c \dot{m}^2 - e^{C_d + C_e \dot{m}} \\ \text{turbina: } \dot{m} &= C_a - C_b e^{C_c r_p} & \eta &= C_a - C_b r_p^2 - e^{C_c - C_d r_p} \end{aligned}$$

## 2.5. Câmara de Combustão e Cárter

A câmara de combustão é considerada como um sistema termodinâmico aberto, com as propriedades e a composição dos gases uniformes, e a variação destas grandezas devidas à transferência de calor, à transferência de trabalho, ao fluxo de massa através das suas fronteiras e do seu deslocamento. Utiliza-se o conceito de zonas para melhor simular os processos de combustão conforme Langeani (1995). Estes mesmos modelos, simplificados para processo adiabático, são empregados na descrição do cárter.

## 3. RESULTADOS

Diversos processos foram estudados com o intuito de certificação do modelo, tendo sido testados individualmente todos os componentes modelados, comparando-se os valores calculados com os disponíveis em literatura e com dados obtidos de soluções analíticas.

Motores foram simulados e os resultados comparados com os dados de literatura. Entretanto, não são publicados todos os detalhes dos motores, na quantidade e na profundidade exigidos pelo modelo utilizado. Por exemplo, as referências não indicam as curvas de levantamento das válvulas (comes), fator muito importante no desempenho do motor.

O trabalho apresentado por Chen et al. (1992) mostra resultados de ensaios de um motor de quatro cilindros, operando no ciclo Otto de quatro tempos, naturalmente aspirado. Esse motor foi simulado, baseando-se no esquema da Fig. 2 e nos dados abaixo:

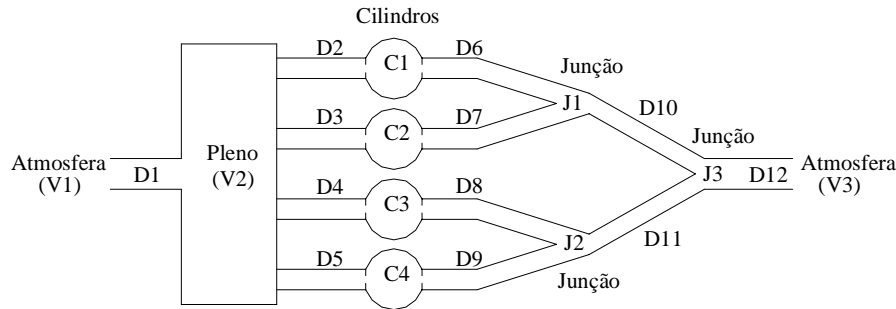


Figura 2 - Esquema para simulação do motor de quatro cilindros da literatura

Dados do motor:

Cilindro: Diâmetro = 0,0845 m      Curso = 0,0889 m      Número de válvulas = 02

Ordem de ignição: 1-3-4-2

Junções tipo coletoras:

J1      Duto principal: D10      Ângulo entre dutos: 150°

J2      Duto principal: D11      Ângulo entre dutos: 150°

J3      Duto principal: D12      Ângulo entre dutos: 150°

Volumes de propriedades constantes: V1 e V3

Volumes de propriedades variáveis: V2      Volume: 0,0016 m<sup>3</sup>

Duto	comprimento (m)	Diâmetro (m)	divisões	Duto	Comprimento (m)	diâmetro (m)	divisões
D1	0,100	0,065	10	D7	0,594	0,036	60
D2	0,338	0,042	40	D8	0,594	0,036	60
D3	0,338	0,042	40	D9	0,594	0,036	60
D4	0,338	0,042	40	D10	0,100	0,036	10
D5	0,338	0,042	40	D11	0,100	0,036	10
D6	0,594	0,036	60	D12	0,100	0,051	10

Os resultados obtidos (Figuras 3 e 4), comparados com os dados da literatura conforme Chen et al. (1992) não estão bem correlacionados. Diversos dados não disponíveis influenciam significativamente os resultados e podem ter causado as discrepâncias. Prováveis causas são a inadequação da curva de levantamento das válvulas, o instante de início de ignição, o período de queima do combustível, etc, que podem não ter sido adequadamente fixados. Para mostrar a influência destes parâmetros sobre o comportamento do motor foram feitas simulações com variações de alguns destes parâmetros.

Para o motor em questão, em que o evento total de movimentação das válvulas de exaustão abrange um ângulo de 244 graus, pode-se ter uma variação entre o ponto informado ao programa e sua efetiva operação, de até 22 graus, em função das folgas nas válvulas.

As Figuras 3 e 4 mostram os resultados obtidos, para uma variação no ponto de fechamento da válvula de exaustão de 10 e 20 graus, respectivamente, a partir dos dados originais. Verifica-se que esta variação impõe uma alteração significativa na potência



disponível, nas operações em rotações elevadas, porém as alterações na eficiência volumétrica são significativas em toda a faixa de operação.

Analisando os resultados da Figura 3 verifica-se que, na rotação de 4000 rpm, obteve-se um aumento considerável na eficiência volumétrica. Isto leva a se considerar a hipótese da ocorrência de uma sintonização nos dutos de exaustão. Procedeu-se então ao levantamento de novos resultados, impondo uma alteração no comprimento dos dutos primários de exaustão, com o intuito de alterar o efeito desta possível sintonização.

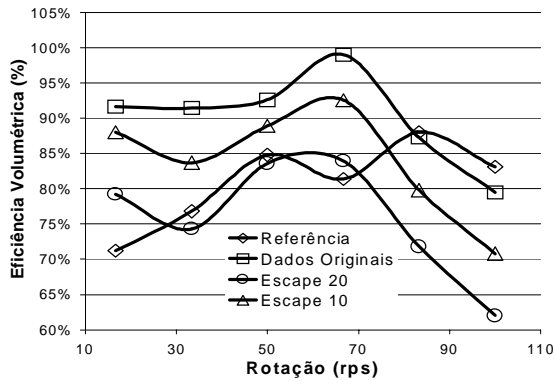


Figura 3 - Comportamento da eficiência volumétrica na variação do ponto de fechamento da válvula de exaustão

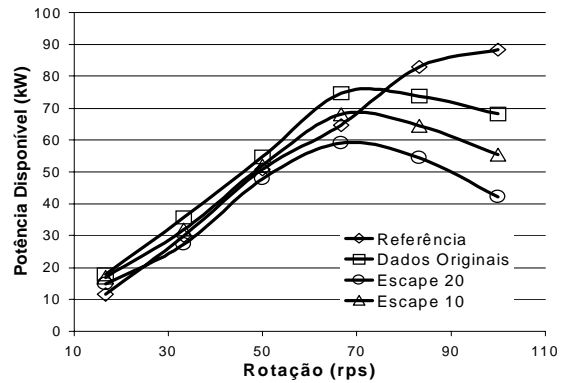


Figura 4 - Comportamento da potência disponível na variação do ponto de fechamento da válvula de exaustão

As Figuras 5 e 6 mostram os efeitos da alteração do comprimento dos dutos de exaustão. Verifica-se que uma variação significativa ocorreu tanto para a potência disponível como para a eficiência volumétrica, apenas na região localizada entre 3000 rpm e 4000 rpm, o que indica a possibilidade de existência de sintonização dos dutos nesta faixa.

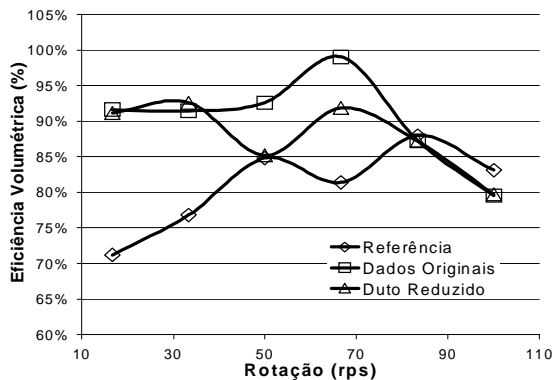


Figura 5 - Comportamento da eficiência volumétrica na variação do comprimento do duto de exaustão

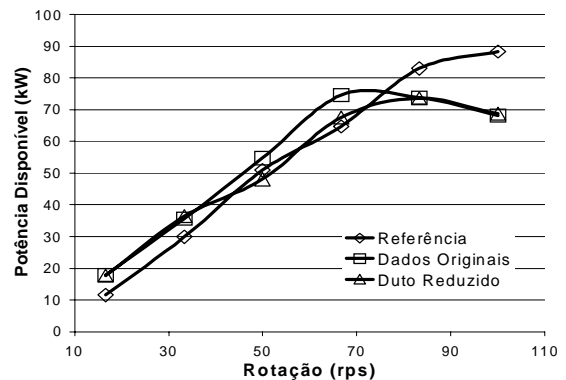


Figura 6 - Comportamento da potência disponível na variação do comprimento do duto de exaustão

Nestas simulações os critérios de convergência foram 0.5% de precisão para os parâmetros de desempenho do motor. A convergência para cada ponto foi atingida com 6 a 15 ciclos, conforme o caso, e tempo de CPU entre 3 e 25 minutos, em um computador PC com processador Pentium Pró de 200 MHz.

### 3.1 - Efeito da Turboalimentação

São apresentados os resultados obtidos da simulação do comportamento de um motor

ciclo Otto quatro tempos, com 4 cilindros, em versões naturalmente aspirado e turboalimentado, cujos modelos estão mostrados nas Figuras 7 e 8.

Dados do motor naturalmente aspirado:

Cilindro: Diâmetro = 0,0865 m      Curso = 0,0850 m      Número de válvulas = 02

Ordem de ignição: 1-3-4-2

Junção distribuidora: J1      Duto principal: D1

Ângulo entre dutos: D1-D2, D1-D5 = 120      D1-D3, D1-D4 = 150

Junção coletora: J2      Duto principal: D10      Ângulo entre dutos: 160

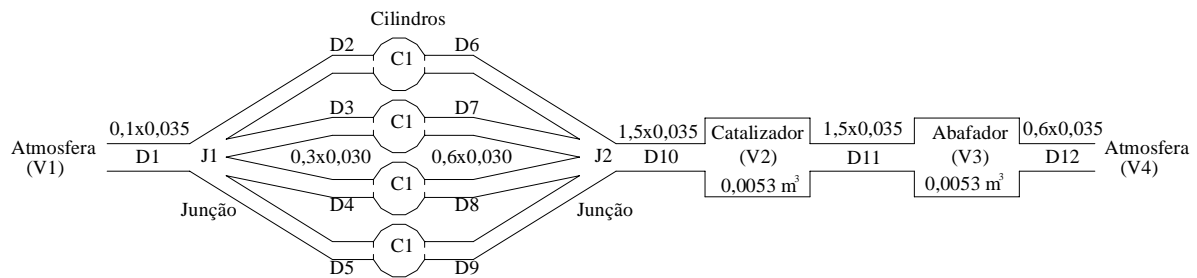


Figura 7 - Esquema de simulação, motor quatro cilindros naturalmente aspirado

Dados do motor turboalimentado:

São os mesmos do motor com aspiração natural, com a adição dos dados do turboalimentador e dos dutos necessários à interligação deste:

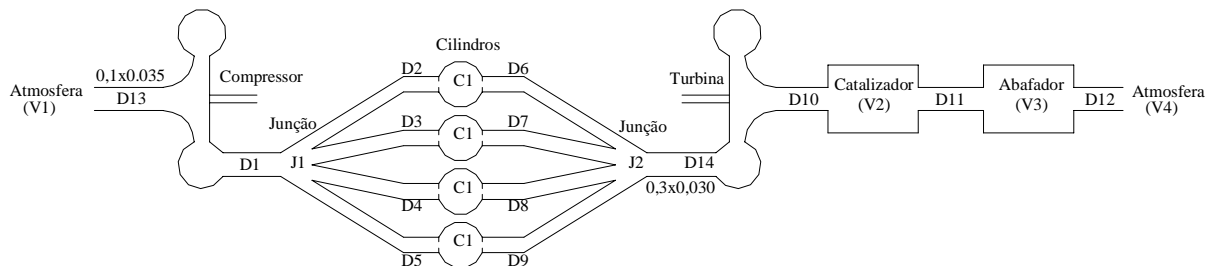


Figura 8 - Esquema de simulação, motor quatro cilindros turboalimentado

Os gráficos apresentados nas Figuras 9 e 10 mostram alguns parâmetros de comportamento desses motores. Não se buscou a otimização das dimensões e das características de operação dos diversos componentes do motor.

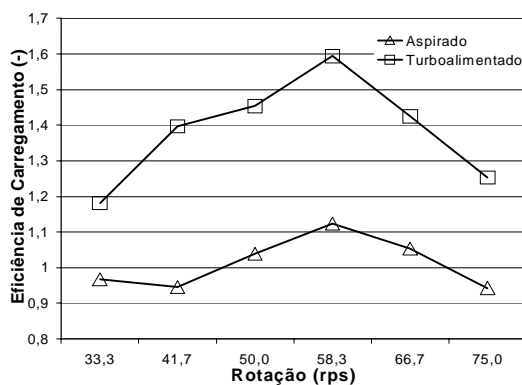


Figura 9 - Efeitos da turboalimentação, comportamento da eficiência de carregamento

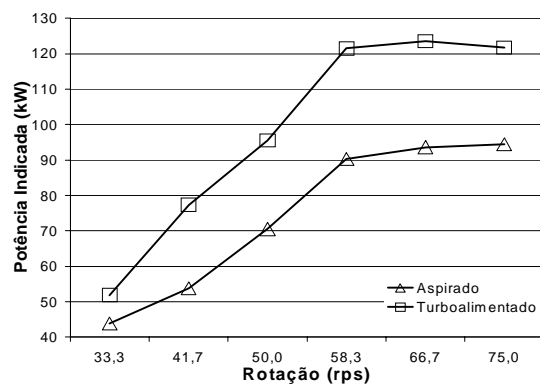


Figura 10 - Efeitos da turboalimentação, comportamento da potência indicada

Os gráficos apresentados, embora tenham a forma esperada, somente são válidos para uma análise qualitativa da operação do motor e uma demonstração do funcionamento geral do programa.

Nestas simulações os critérios de convergência foram 0.5% de precisão para os parâmetros de desempenho do motor. A convergência para cada ponto foi atingida com 7 a 12 ciclos, conforme o caso, e tempo médio de CPU de 10 minutos, em um computador PC com processador Pentium 133 MHz.

#### 4. CONCLUSÕES

O modelo desenvolvido mostrou-se adequado à simulação de motores de combustão interna, apresentando estabilidade na obtenção dos resultados numa ampla faixa de operação. Embora não estivessem disponíveis dados complementares dos motores analisados, os resultados obtidos são qualitativamente muito bons e quantitativamente aceitáveis, pois estão dentro da faixa de valores esperados. As discrepâncias encontradas foram justificadas. Futuros trabalhos nesta linha de estudos devem incluir, de forma obrigatória, o levantamento de dados experimentais para a certificação dos resultados obtidos pelo programa, para o motor e para seus componentes, uma vez que se poderão obter todas as informações geométricas do motor.

#### 5. REFERÊNCIAS

- AVL LIST GmbH, "FIRE version 6.2b – Reference Manual", AVL, 1996
- Benson, R. S., "The Thermodynamics and Gas Dynamics of Internal Combustion Engines", Clarendon Press, Vol. I, Oxford, 1982.
- Bingham, J. F. e Blair, G. P., "An Improved Branched Pipe Model for Multi-Cylinder Automotive Engine Calculations", Proc. I. Mech. Eng., Vol. 199, pp. 65-77, 1985.
- Bulaty, T., e Niessner, H., "Calculation of 1-D Unsteady Flows in Pipe Systems of I. C. Engines", Journal of Fluids Engineering, Vol. 107, September 1985.
- Chen, C., Veshagh, A., e Wallace, F. J., "A Comparison Between Alternative Methods for Gas Flow and Performance Prediction of Internal Combustion Engines", SAE Technical Paper 921734, 1992.
- Cohen, H., Rogers, G. F. C. e Saravanamutto, H. I. H., "Gas Turbine Theory", Longman Scientific & Technical, Fourth edition, Cingapura, 1996.
- Courant, R., Friedrichs, K., e Lewy, H., "On Partial Difference Equations for Mathematical Physics", I.B.M. Journal II, pg. 215-234, 1967.
- Heywood, J. B., "Internal Combustion Engine Fundamentals", McGraw-Hill Book Company, First edition, EUA, 1988.
- Langeani, M., "Motor Dois Tempos com Válvulas no Cabeçote: Um Estudo Termodinâmico", Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1995.
- Lax, P., e Wendroff, B., "Systems of Conservation Laws", Comm. Pure App. Math. Vol. 13, pp. 217-237, 1960.
- Monteiro, J. F. C., "Modelos Matemáticos e Computacionais para a Simulação do Escoamento em Motores de Combustão Interna", Tese de Mestrado, ITA, 1999.
- Poloni, M., Winterbone, D. E., e Nichols, J. R., "Comparison of Unsteady Flow Calculations in a Pipe by the Method of Characteristics and the Two Step Lax-Wendroff Method", International Journal Mechanical Science", Vol. 29, n° 5, 1987.
- Takizawa, M., Uno, T., Oue, T. e Yura, T., "A Study of Exchange Process Simulation of an Automotive Multi-Cylinder Internal Combustion Engine", SAE Technical Paper 820410, 1982.

## **CAMPO DE VELOCIDADE E TEMPERATURA EM MEIO HÍBRIDO FORMADO POR REGIÕES LIMPA E POROSA**

**Francisco D. Rocamora Jr.**

Depto. de Energia Nuclear, Instituto de Estudos Avançados - IEAv/CTA  
12231-970, São José dos Campos, SP, Brasil

**Marcelo J.S. de Lemos**

Depto. de Energia - IEME, Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA  
12228-900, São José dos Campos, SP, Brasil. E-mail: [delemos@mec.ita.br](mailto:delemos@mec.ita.br)

### **Resumo**

Neste trabalho são apresentados alguns resultados numéricos para problemas de escoamento e transferência de calor em meios híbridos (meio limpo/meio poroso). Todos os casos apresentados são para escoamento laminar e é considerada a hipótese de equilíbrio térmico entre a matriz porosa e o fluido. Resultados para escoamentos entre placas paralelas e dutos parcialmente preenchidos com um meio poroso são mostrados na forma de perfis de velocidade e temperatura. É feita uma análise da influência de vários parâmetros do escoamento e do meio poroso sobre os resultados obtidos.

**Palavras-chave:** meios porosos, transferência de calor, métodos numéricos.

### **1. INTRODUÇÃO**

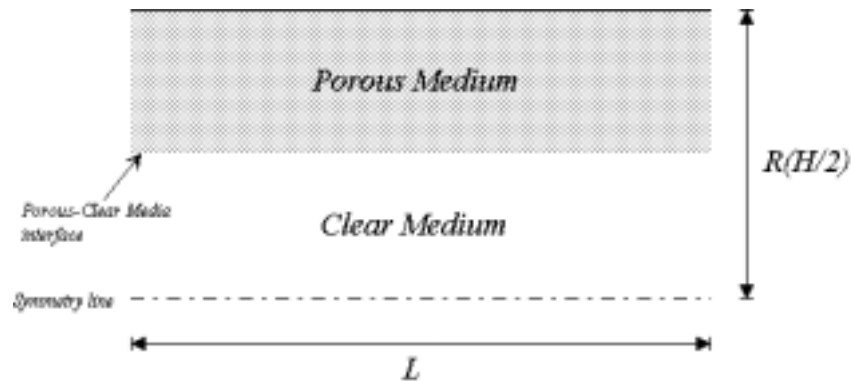
Meios porosos têm sido extensivamente estudados ultimamente, principalmente devido a sua grande aplicação tanto na indústria como na ciência. Estudos de contaminação de solo, combustão em matrizes porosas, recuperação de poços de petróleo e filtragem são apenas alguns exemplos de aplicação desta área.

Recentes trabalhos encontrados na literatura podem ser classificados basicamente em dois tipos : *a*) tratamento microscópico onde o meio poroso é modelado como um arranjo infinito de células unitárias e as equações do escoamento são resolvidas para uma célula, com condições de contorno periódicas, visando a obtenção de parâmetros integrais do escoamento, e *b*) tratamento macroscópico onde as propriedades de interesse são obtidas através da integração das mesmas num volume elementar representativo (*REV*), fornecendo, assim, as equações do escoamento para as variáveis médias superficiais. Exemplos do primeiro tipo podem ser encontrados em Kuwahara *et al.* (1998), Rocamora e de Lemos (1998), etc., enquanto que do segundo tipo podemos mencionar Pedras e de Lemos (1998), Anthohe e Lage (1997), entre outros.

Neste trabalho o tratamento macroscópico é utilizado na obtenção de soluções numéricas em regime permanente para um domínio híbrido, *i.e.*, meio poroso-meio limpo, para escoamentos laminares em dutos e entre placas planas preenchidas parcialmente com um meio

poroso homogêneo. Alguns trabalhos são encontrados na literatura que tratam do problema da interface entre um meio poroso e um meio limpo, como Vafai e Tien (1981) e Ochoa-Tapia e Whitaker (1995), entre outros. O modelo utilizado para o tratamento da interface segue o proposto por Ochoa-Tapia e Whitaker (1995) sem considerar ‘saltos’ na tensão na interface meio limpo-meio poroso. Na equação da energia é considerada a condição de equilíbrio térmico entre o fluido e a matriz porosa.

Um esboço da geometria considerada é mostrado na Figura 1, onde  $R$  é o raio no caso de dutos e  $H$  é a distância entre placas paralelas.



**Figura 1** - Geometria do problema

## 2. MODELAGEM MATEMÁTICA

### 2.1 Equações de Transporte e Constitutivas

A média intrínseca de uma propriedade do fluido  $\phi$  num volume elementar representativo (*REV*) do meio poroso é definida como:

$$\langle \phi \rangle^f = \frac{1}{V_f} \int \phi dV \quad (1)$$

Assim, a média superficial de  $\phi$  no “*REV*” é dada por :

$$\langle \phi \rangle^v = \frac{1}{V} \int \phi dV = \phi \langle \phi \rangle^f \quad (2)$$

onde  $\phi = V_f / V$ ,  $V$  é o volume do “*REV*” e  $V_f$  é o volume do fluido contido em  $V$  (meio poroso homogêneo saturado).

As equações de transporte para meios porosos, em termos da velocidade média superficial (velocidade de Darcy ou *seepage velocity*),  $\vec{u}_D$ , em regime permanente, podem ser escritas como :

a) Equação da Continuidade

$$\text{div}(\rho \vec{u}_D) = 0 \quad (3)$$

b) Equações de Momentum

$$\text{div}\left(\rho \frac{\vec{u}_D U_{D_i}}{\phi} - \vec{t}_i\right) = s_{u_i} \quad (4)$$

c) Equação da Energia

$$\text{div}\left(\rho \vec{u}_D T - \frac{k_{eff}}{c_{pf}} \text{grad}(T)\right) = s_T \quad (5)$$

Nas equações acima  $U_{D_i}$  é a componente da velocidade média superficial na direção  $i$ ,  $\phi$  é a porosidade do meio,  $s_{u_i}$  representa todos os termos fonte na direção  $i$  para a equação de momentum, incluindo o gradiente de pressão e os termos de Darcy-Forchheimer,  $T$  é a temperatura média superficial,  $c_{pf}$  é o calor específico do fluido,  $k_{eff}$  é a condutividade térmica efetiva do fluido e da matriz porosa e  $s_T$  representa os termos fonte para a equação da energia. O termo  $\vec{t}_i$  é expresso por :

$$\vec{t}_i = \tau_{ij} \vec{t}_j \quad (6)$$

e  $\tau_{ij}$  e  $s_{u_i}$  são dados por :

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial U_{D_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{D_j}}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

$$s_{u_i} = - \left( \frac{\partial \phi P^f}{\partial x_i} + \frac{\phi \mu}{K} U_{D_i} + \frac{\phi \rho c_F |\vec{u}_D|}{\sqrt{K}} U_{D_i} \right) \quad (8)$$

onde  $K$  é a permeabilidade do meio,  $c_F$  é o coeficiente de Forchheimer (*form-drag coefficient*) e  $P^f$  é a pressão média intrínseca do fluido num meio poroso saturado.

Na Eq. (5) o fluido e a matriz porosa são considerados em equilíbrio térmico. Para os casos considerados, a condutividade efetiva,  $k_{eff}$ , é calculada como :

$$k_{eff} = k_f \phi + k_s (1 - \phi) \quad (9)$$

onde  $k_f$  e  $k_s$  são as condutividades térmicas do fluido e da matriz porosa (sólido), respectivamente.

Vale notar que para o meio limpo, i.e., sem matriz porosa, as equações do escoamento são as mesmas com  $\phi=1$ , apenas removendo os termos de Darcy-Forchheimer da Eq. (8) e fazendo  $\vec{u}_D = \vec{u}$ , onde  $\vec{u}$  é a velocidade do fluido no meio limpo. O tratamento da interface

entre o meio poroso e o meio limpo (fluido) merece um pouco mais de atenção. A condição de continuidade da velocidade média superficial e da pressão média intrínseca na interface, *i.e.*,  $\vec{u}_{D, fluido} = \vec{u}_{D, meio poroso}$ ,  $P^f_{fluido} = P^f_{meio poroso}$ , requerem um tratamento diferenciado para as faces dos volumes de controle que fazem parte da interface.

A componente tangencial da condição de ‘salto’ na interface dada por Ochoa-Tapia e Whitaker (1995) pode ser expressa como :

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial U_{D//}}{\partial n} \Big|_{meio poroso} - \frac{\partial U_{D//}}{\partial n} \Big|_{meio lim po} = \frac{\beta}{\sqrt{K}} U_{D//, meio poroso} \quad (10)$$

onde  $U_{D//}$  representa a componente da velocidade média superficial paralela à interface,  $n$  é a coordenada normal à interface indo do meio poroso para o meio limpo e  $\beta$  é uma constante que define a intensidade do ‘salto de tensão’ na interface. Para os casos tratados neste trabalho o parâmetro  $\beta$  foi considerado nulo, *i.e.*,  $\beta=0$ , de modo que na interface temos as seguintes relações para a velocidade média superficial :

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial U_{D//}}{\partial n} \Big|_{meio poroso} - \frac{\partial U_{D//}}{\partial n} \Big|_{meio lim po} = 0 \quad (11)$$

$$\vec{u}_{D, meio poroso} = \vec{u}_{D, meio lim po} \quad (12)$$

A outra condição que deve ser observada é a da continuidade da pressão intrínseca do fluido na interface, expressa por :

$$P^f_{meio poroso} = P^f_{meio lim po} \quad (13)$$

Para a equação da energia, Eq.(5), não há necessidade de nenhuma condição especial na interface, uma vez que, para a hipótese de equilíbrio térmico, a continuidade da temperatura e do fluxo de calor são automaticamente satisfeitas na interface.

## 2.2 Método Numérico

O método numérico utilizado na resolução das equações acima é baseado na técnica de Volumes Finitos e no procedimento *SIMPLE* de Patankar (1980) para escoamentos incompressíveis. A interface é posicionada de modo a coincidir com a fronteira entre dois volumes de controle, gerando apenas volumes de controle do tipo ‘poroso’ ou ‘limpo’. As equações do escoamento são então resolvidas nas regiões porosa e limpa, respeitando as condições (11)-(13) na interface.

## 3. CASOS CONSIDERADOS

O modelo acima descrito foi utilizado na solução de alguns problemas envolvendo domínios híbridos, tais como escoamentos entre placas e em dutos parcialmente preenchidos com meios porosos. Foram investigados alguns parâmetros como por exemplo razão entre condutividades térmicas do sólido e do fluido ( $k_s/k_f$ ), número de Reynolds ( $Re$ ) e permeabilidade da matriz porosa ( $K$ ). Os resultados são apresentados nas figuras 2 a 7 e a Tabela 1 mostra os valores dos parâmetros utilizados nos diversos casos.

Para todos os casos estudados os seguintes parâmetros foram mantidos fixos: temperatura de entrada do fluido,  $T_{in}=50^{\circ}\text{C}$ ; temperatura da parede,  $T_w=100^{\circ}\text{C}$ ; porosidade,  $\phi=0.5$ ; raio do duto,  $R=0.01\text{m}$ , ou distância entre placas,  $H=0.02\text{m}$ ; espessura da camada porosa,  $s=R/2(H/4)$ . Apenas para o caso *i* foi utilizado  $c_F=0$ . Para os demais casos  $c_F=0.55$  foi utilizado. O fluido utilizado foi o ar.

**Tabela 1** – Parâmetros utilizados nos diversos casos.

Caso	$U_{in}(\text{m/s})$	$L/D$	$k_s/k_f$	$K(\text{m}^2)$	Geom.
<i>i</i>	0.10	20.	1.0	$1.0 \cdot 10^{-6}$	P.P.
<i>ii</i>	0.10	10.	--	$1.0 \cdot 10^{-6}$	Duto
<i>iii</i>	0.10	--	2.0	$1.0 \cdot 10^{-6}$	Duto
<i>iv</i>	--	10.	2.0	$1.0 \cdot 10^{-6}$	Duto
<i>v</i>	0.10	10.	1.0	--	Duto

*i*) Perfil de velocidade para um escoamento completamente desenvolvido entre placas paralelas.

Este caso foi utilizado como um caso teste para a validação do cálculo hidrodinâmico. Na Figura 2 são mostrados o perfil de velocidade obtido numericamente e o analítico obtido por Kuznetsov (1996). Como pode ser observado, o perfil obtido numericamente apresenta boa concordância com o perfil analítico, indicando a correta aplicação das condições na interface para o caso em que o ‘salto de tensão’ na interface é considerado nulo, *i.e.*,  $\beta=0$ . Para este caso a velocidade adimensional  $U$  mostrada na Figura 2 é dada por:

$$U = \frac{\mu u}{G H^2}, \text{ onde } G = -\frac{d P^f}{d x} \text{ é o gradiente de pressão na direção do escoamento.}$$

Para os casos seguintes a velocidade é adimensionalizada em relação ao maior valor do módulo da velocidade no escoamento.

*ii*) Efeito da razão  $k_s/k_f$  no perfil de temperatura em  $L/D=10$  para escoamento em um duto.

Os perfis de temperatura mostrados na Figura 3, embora não disponhamos de resultados analíticos ou numéricos para comparação, exibem um comportamento bastante coerente com o esperado quando se aumenta a razão entre as condutividades térmicas da matriz porosa e do fluido.

*iii*) Perfis de Temperatura ao longo do duto.

A Figura 5 mostra o desenvolvimento do perfil de temperatura ao longo do duto. Pode-se observar a influência do desenvolvimento do campo de velocidade, principalmente para  $L/D=1$ , no perfil de temperatura na região porosa.

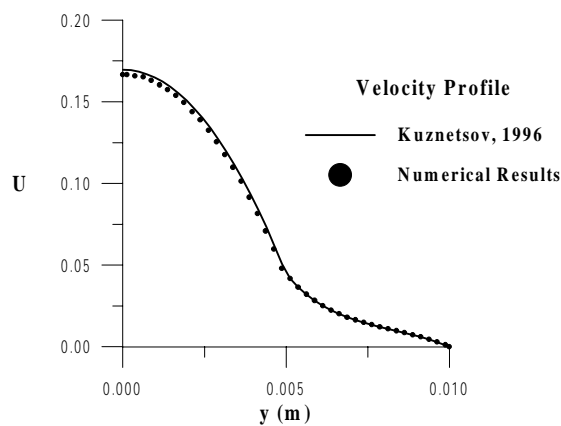
*iv*) Efeito da velocidade de entrada,  $U_{in}$ , no perfil de temperatura em  $L/D=10$  para escoamento em um duto.



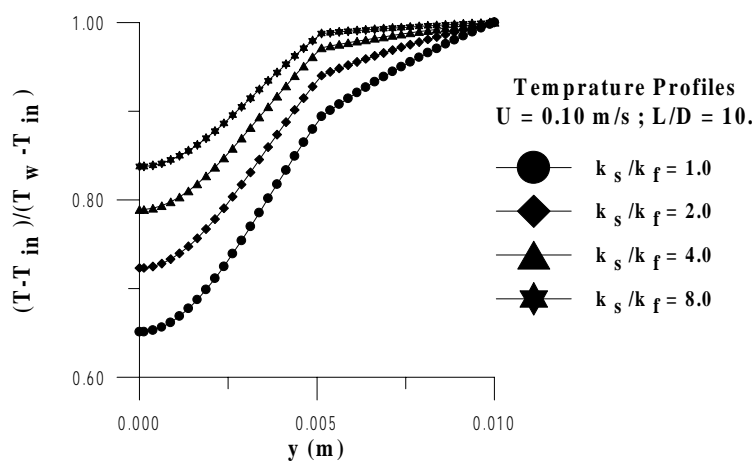
Como esperado, a Figura 4 mostra que o aumento da velocidade de entrada provoca um decréscimo na temperatura de saída do duto.

v) Efeito da permeabilidade,  $K$ , nos perfis de Velocidade e Temperatura em  $L/D=10$  para escoamento em um duto.

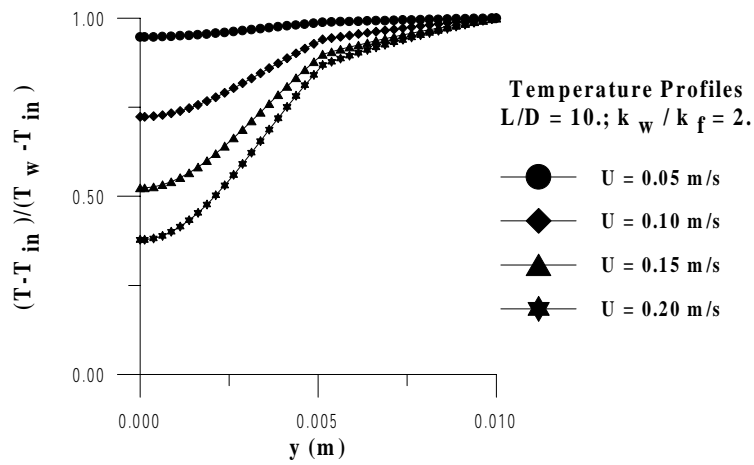
As Figuras 6 e 7 mostram a influência da permeabilidade da matriz porosa,  $K$ , nos perfis de velocidade e temperatura para  $L/D=10$ . Como pode ser observado, embora o perfil de velocidade seja afetado variando-se a permeabilidade, o perfil de temperatura apresenta mudanças bem menos expressivas na região porosa. Por outro lado, na região limpa nota-se uma influência maior da velocidade.



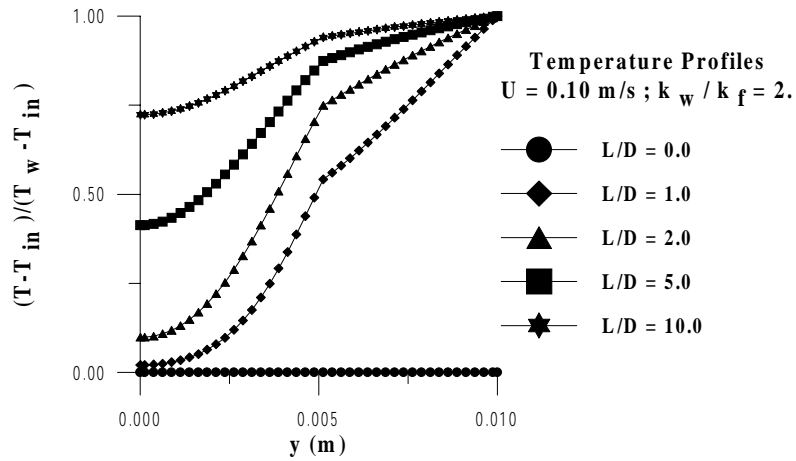
**Figura 2** - Perfil de Velocidade para o caso *i*



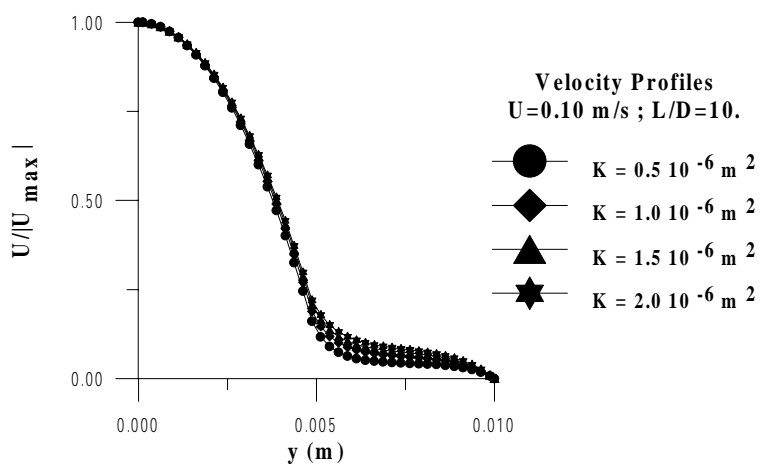
**Figura 3** - Perfis de Temperatura para o caso *ii*



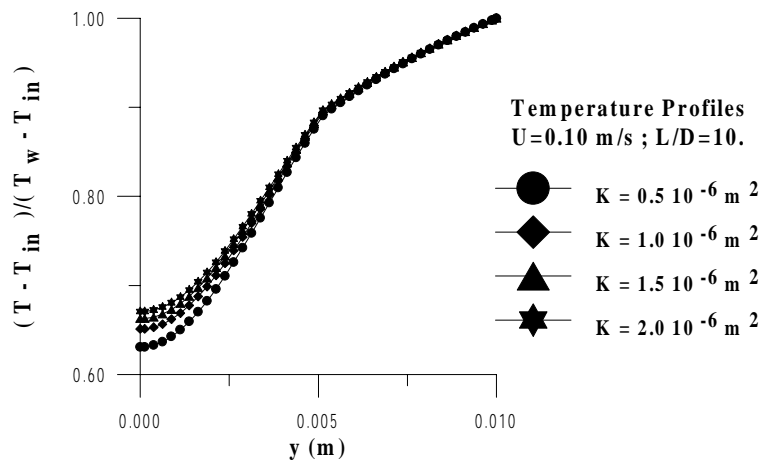
**Figura 4** - Perfis de Temperatura para o caso *iv*



**Figura 5** - Perfis de Temperatura para o caso *iii*



**Figura 6** - Perfis de Velocidade para o caso *v*



**Figura 7** - Perfis de Temperatura para o caso  $v$

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados resultados numéricos para escoamentos laminares em domínios híbridos com transferência de calor os quais envolvem interface entre a matriz porosa e o meio limpo. O método numérico utilizado possibilita o tratamento do meio poroso e do meio limpo em um único domínio de cálculo, respeitadas as condições de contorno na interface. Vários parâmetros de interesse foram analisados e os resultados apresentados mostraram-se bastante coerentes com o esperado.

#### 5. AGRADECIMENTOS

Os autores desejam expressar seu agradecimento a Marcos H. J. Pedras pela sua inestimável colaboração no desenvolvimento deste trabalho.

#### 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Antohe, B. V. ;Lage, J. L., 1997, “A general two-equation macroscopic turbulence model for incompressible flow in porous media”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 40, pp. 3013-3024.

Kuwahara, F., Kameyama, Y., Yamashita, S., e Nakayama, A., 1998, “Numerical Modeling of Turbulent Flow in Porous Media Using a Spatially Periodic Array”, *J. Porous Media*, vol. 1, pp. 47-55.

Kuznetsov, A. V., 1996, “Analytical investigation of the fluid flow in the interface region between a porous medium and a clear fluid in channels partially filled with a porous medium”, *Applied Scientific Research*, vol. 56, pp. 53-67.

Ochoa-Tapia, J. A.; Whitaker, S., 1995, “Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-I. Theoretical development.”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 38, pp. 2635-2646.

Patankar, S.V., 1980, NUMERICAL HEAT TRANSFER AND FLUID FLOW, Mc-Graw Hill.

Pedras, M.H.J.; de Lemos, M.J.S., 1998, "Resultados da Modelagem da Turbulência Macroscópica em Meios Porosos", *ENCIT98- Proc. of 7th Braz. Cong. Eng. Th. Sci.*, vol. 2, pp. 1272-1277, Rio de Janeiro, RJ, Nov. 3-6.

Rocamora, F. D. Jr., de Lemos, M. J. S., 1998, "Numerical Solution of Turbulent Flow in Porous Media using a Spatially Periodic Array and the  $K-\varepsilon$  Model", *ENCIT-98 - Proc. of 7th Braz. Cong. Eng. Th. Sci.*, vol. 2, pp. 1265-1271.

Vafai, K., Tien, C. L., 1981, "Boundary and Inertia Effects on Flow and Heat Transfer in Porous Media", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 24, pp. 195-203.

## **ABSTRACT**

*This work presents some numerical results for steady-state flow and heat transfer problems in a hybrid medium (clean fluid/porous medium). All the cases presented are for laminar flow and the thermal equilibrium hypothesis is considered. Flows between parallel plates and ducts partially filled with a porous medium are shown and commented upon.*

# SOLUÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO TURBULENTO EM MEIO POROSO USANDO UM ARRANJO ESPACIALMENTE PERIÓDICO E O MODELO $k-\varepsilon$ PARA BAIXOS REYNOLDS

**Marcos Heinzelmann Junqueira Pedras**

Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento IP&D, UNIVAP

12244-000, São José dos Campos, SP, Brasil. E-mail: *pedras@univap.br*

**Marcelo J.S. de Lemos**

Departamento de Energia - IEME

Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

12228-900, São José dos Campos, SP, Brasil. E-mail: *delemos@mec.ita.br*

## Resumo

Um arranjo espacialmente periódico foi utilizado para a simulação do campo de escoamento interno a um meio poroso, empregando para a turbulência o modelo  $k-\varepsilon$  para baixos Reynolds. Por simplicidade, apenas uma unidade estrutural bidimensional do meio poroso foi considerada, utilizando-se condições de contorno simétricas e espacialmente periódicas. Este arranjo foi utilizado para a análise de uma célula representativa do meio poroso, com o objetivo de se verificar o nível de turbulência em tais escoamentos. Foi empregado um sistema de coordenadas generalizadas para a geração da malha no domínio computacional e as equações do escoamento foram solucionadas através do método SIMPLE.

**Palavras-chave:** Meios porosos, Escoamento turbulento, Condições de contorno periódicas, Modelo  $k-\varepsilon$  para baixos Reynolds.

## 1. INTRODUÇÃO

Devido a sua grande aplicação na indústria e na ciência, o estudo do escoamento em meios porosos tem ganho grande atenção ultimamente. Sistemas de engenharia baseados na combustão em matrizes porosas inertes, recuperação suplementar de petróleo, descarte de materiais químicos em solo e reatores catalíticos químicos são alguns desses exemplos.

Tratamentos clássicos do escoamento em meios porosos (Darcy 1856, Forchheimer 1901, Brinkman 1947, Ward 1964, Slattery 1967, Whitaker 1969, Bear 1972, Vafai & Tien 1981, Hsu & Cheng 1990) utilizam a noção de volume elementar representativo (*Representative Elementary Volume*, REV, Figura 1) para o qual as equações governantes são escritas. Esses modelos baseados no ponto de vista macroscópico acabam encobrendo detalhes do escoamento interno ao REV e, juntamente com informações específicas, fornecessem características globais do escoamento.

O escoamento em meios porosos também pode ser analisado modelando-se a estrutura interna do meio poroso e resolver as equações do escoamento na fase líquida. Esse tipo de tratamento revela a visão microscópica do fenômeno e foi utilizado por Kuwahara *et al.* (1998), o qual modelou um meio poroso utilizando um arranjo espacialmente periódico de hastes quadradas. Uma discussão sobre as relações entre estes dois tipos de tratamento é encontrada em Pedras & de Lemos (1998a).

Devido a estes dois diferentes pontos de vista (macroscópico e microscópico), a existência ou não de turbulência em escoamentos em meios porosos ainda está em debate (Antohe & Lage 1997, Kuwahara *et al.* 1998, Pedras & de Lemos 1998b, Pedras & de Lemos 1999a, Pedras & de Lemos 1999b, Nakayama & Kuwahara 1999).

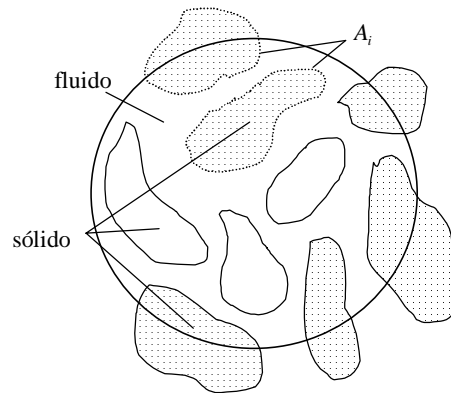


Figura 1. Volume elementar representativo (REV).

Tendo em mente de que a média volumétrica das equações microscópicas (visão macroscópica) é apenas a representação macroscópica de um fenômeno de fato microscópico (Pedras & de Lemos 1999b) e considerando os trabalhos experimentais que reportam a existência de turbulência em meios porosos (Macdonald *et al.* 1979, Kececiooglu & Jiang 1994, Takatsu & Masuoka 1998), este trabalho adota a abordagem microscópica a fim de verificar o nível de turbulência existente num meio poroso formado por haste cilíndricas com arranjo espacialmente periódico.

A estrutura do meio poroso foi representada por uma única célula (Figura 2), utilizando condições de contorno simétricas e periódicas. O escoamento turbulento foi calculado utilizando-se o modelo  $k-\varepsilon$  de baixos e altos Reynolds cobrindo uma faixa de  $10^4 \leq Re_H \leq 10^6$ .

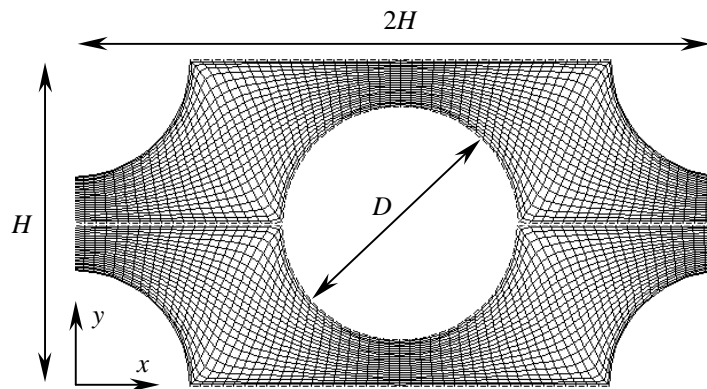


Figura 2. Célula periódica e malha gerada elipticamente.

## 2. EQUAÇÕES DE ESCOAMENTO E MODELO $K-\varepsilon$

No modelo numérico foram utilizadas as seguintes equações de transporte, onde as barras representam médias temporais e as linhas as flutuações temporais:

Equação de continuidade

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (1)$$

### Equação de momentum

$$\nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot \left\{ \mu [\nabla \bar{\mathbf{u}} + (\nabla \bar{\mathbf{u}})^T] - \rho \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'} \right\} \quad (2)$$

### Equação da energia cinética turbulenta

$$\nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} k) = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] - \rho \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'} : \nabla \bar{\mathbf{u}} - \rho \varepsilon \quad (3)$$

### Equação da dissipação da energia cinética turbulenta

$$\nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} \varepsilon) = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + [C_1 (-\rho \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'} : \nabla \bar{\mathbf{u}}) - C_2 f_2 \rho \varepsilon] \frac{\varepsilon}{k} \quad (4)$$

### Conceito de Boussinesq para as tensões de Reynolds

$$-\rho \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'} = \mu_t [\nabla \bar{\mathbf{u}} + (\nabla \bar{\mathbf{u}})^T] - \frac{2}{3} \rho k \mathbf{I} \quad (5)$$

### Modelo de duas equações para a viscosidade turbulenta

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k}{\varepsilon} \quad (6)$$

onde  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_\mu$  são constantes adimensionais, enquanto  $f_2$  e  $f_\mu$  são funções de amortecimento.

Neste trabalho foi adotado o modelo  $k$ - $\varepsilon$  de baixos e altos Reynolds. A utilização desses dois modelos é justificada pelo fato de que o escoamento turbulento em meios porosos ocorre, na prática, em números de Reynolds (baseados no poro) relativamente baixos. Para considerar os efeitos do baixo número de Reynolds foram adotadas as seguintes funções de amortecimento propostas por Abe *et al.* (1992),

$$f_2 = \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{(v\varepsilon)^{0.25} n}{3.1v} \right] \right\}^2 \left\{ 1 - 0.3 \exp \left[ -\left( \frac{(k^2/v\varepsilon)}{6.5} \right)^2 \right] \right\} \quad (7)$$

$$f_\mu = \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{(v\varepsilon)^{0.25} n}{14v} \right] \right\}^2 \left\{ 1 + \frac{5}{(k^2/v\varepsilon)^{0.75}} \exp \left[ -\left( \frac{(k^2/v\varepsilon)}{200} \right)^2 \right] \right\} \quad (8)$$

onde  $n$  é a coordenada normal à parede. E as seguintes constantes:

$$C_\mu = 0.09, \quad C_1 = 1.5, \quad C_2 = 1.9, \quad \sigma_k = 1.4, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3. \quad (9)$$

Para que a média volumétrica da velocidade,  $\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle^v$  (velocidade de Darcy), fosse unidirecional em  $x$ , as seguintes condições de contorno para a célula periódica (Figura 2) foram adotadas:

$$\text{nas paredes, } \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad k = 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon = v \frac{\partial^2 k}{\partial n^2}, \quad (10)$$

$$\text{em } y = 0 \quad \text{e} \quad y = H/2 \quad \text{linha de simetria,} \quad (11)$$

e nas condições de contorno periódicas ( $x = 0$  e  $x = 2H$ )

$$\bar{u}|_{x=0} = \bar{u}|_{x=2H}, \bar{v}|_{x=0} = \bar{v}|_{x=2H} = 0, \quad (12)$$

$$k|_{x=0} = k|_{x=2H}, \varepsilon|_{x=0} = \varepsilon|_{x=2H}, \quad (13)$$

onde  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  são as componentes de  $\bar{\mathbf{u}}$ .

### 3. MÉTODO NUMÉRICO

O método numérico adotado para a discretização das equações governantes foi o de volumes finitos (Patankar, 1980) e no acoplamento pressão-velocidade o método SIMPLE. O cálculo começa com a solução das duas equações de momentum. O campo de velocidade obtido é, então, corrigido (a fim de atender a equação de continuidade) através da solução da equação de pressão. Com o campo de velocidade corrigido resolve-se as equações do modelo de turbulência obtendo-se o campo de  $k$  e  $\varepsilon$ . As iterações são repetidas até que a convergência seja alcançada. Maiores detalhes sobre o processo de discretização podem ser encontrados em Rocamora & de Lemos (1998).

No modelo  $k$ - $\varepsilon$  de baixos Reynolds é aconselhável que os nós adjacentes às paredes tenham ( $u_\tau n/\nu \leq 1$ ). Tal exigência faz com que a malha tenha uma quantidade enorme de pontos. A fim de minimizar este problema todos os cálculos foram efetuados em meia célula periódica ( $2H \times H/2$ ), conforme a condição de contorno (Eq. 11), diminuindo o tamanho da malha para  $300 \times 200$  com um arranjo altamente não uniforme. O número de Reynolds baseado na velocidade de Darcy e no comprimento característico  $H$  ( $Re_H = |\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle^v| H/\nu$ ) foi variado de  $10^4$  à  $10^6$  e a porosidade  $\phi$  variada de 0.40 à 0.80. Todos os cálculos foram executados em um IBM SP2.

### 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Foram rodados um total de dezoito casos sendo seis em escoamento laminar seis com o modelo  $k$ - $\varepsilon$  de baixos Reynolds e seis com o modelo  $k$ - $\varepsilon$  padrão de altos Reynolds. A Tabela 1 apresenta um sumário dos casos com escoamento turbulento.

Tabela 1. Sumário dos resultados em escoamento turbulento ( $H$  e  $\nu$  constantes).

	$Re_H$	Modelo $k$ - $\varepsilon$	$ \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle^v $	$\langle k \rangle^i$	$\langle \varepsilon \rangle^i$
$\phi = 0.40$	1.20E+04	baixo	1.80E-01	7.31E-02	1.18E+00
	1.20E+05	baixo	1.80E+00	5.92E+00	9.93E+02
	1.20E+05	alto	1.80E+00	5.71E+00	9.65E+02
	1.20E+06	alto	1.80E+01	5.81E+02	9.31E+05
$\phi = 0.60$	1.20E+04	baixo	1.79E-01	3.50E-02	2.25E-01
	1.20E+05	baixo	1.79E+00	2.26E+00	1.56E+02
	1.20E+05	alto	1.79E+00	2.65E+00	1.77E+02
	1.20E+06	alto	1.79E+01	2.79E+02	1.81E+05
$\phi = 0.80$	1.20E+04	baixo	1.79E-01	1.36E-02	4.90E-02
	1.20E+05	baixo	1.79E+00	8.05E-01	3.19E+01
	1.20E+05	alto	1.79E+00	8.74E-01	3.28E+01
	1.20E+06	alto	1.79E+01	9.45E+01	3.49E+04

As Figuras 3 a 6 apresentam, respectivamente, os campos de velocidade, de pressão, de  $k$  e de  $\varepsilon$  para  $Re_H = 1.2 \times 10^5$  (modelo de baixo Reynolds) e  $\phi$  variando de 0.40 à 0.80. De



um modo geral, nos campos de velocidade, verifica-se que o escoamento acelera nas faces superior e inferior do cilindro, apresentando um descolamento na região traseira conforme a porosidade aumenta. Este descolamento pode ser explicado pela queda no nível de energia cinética turbulenta conforme a Tabela 1, na qual vemos que para uma velocidade de Darcy constante ( $Re_H$  constante), isto é uma vazão mássica constante, o nível de energia cinética turbulência cai com o aumento da porosidade.

Ou seja, o aumento da quantidade de movimento do fluido em espaços menores (aumento de velocidade para porosidade menor), implica em mais acentuados gradientes de velocidade e, conseqüentemente, uma maior produção de  $k$  (o termo de produção de  $k$  na equação (3) é proporcional aos gradientes de velocidade). Ainda, o incremento da velocidade próxima à parede do cilindro tende a postergar o início do descolamento. Este fato também foi verificado por Kuwahara *et al.* 1998 onde os autores consideram que o descolamento do escoamento está sendo restringido pela diminuição da porosidade.

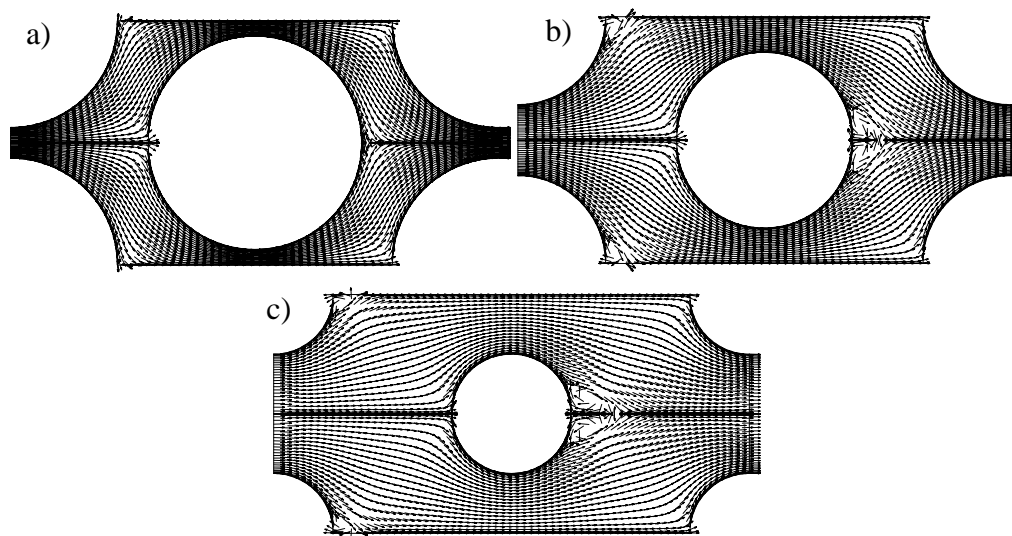


Figura 3. Campos de velocidade ( $Re_H = 1.2 \times 10^5$ ): a)  $\phi = 0.40$ , b)  $\phi = 0.60$  e c)  $\phi = 0.80$

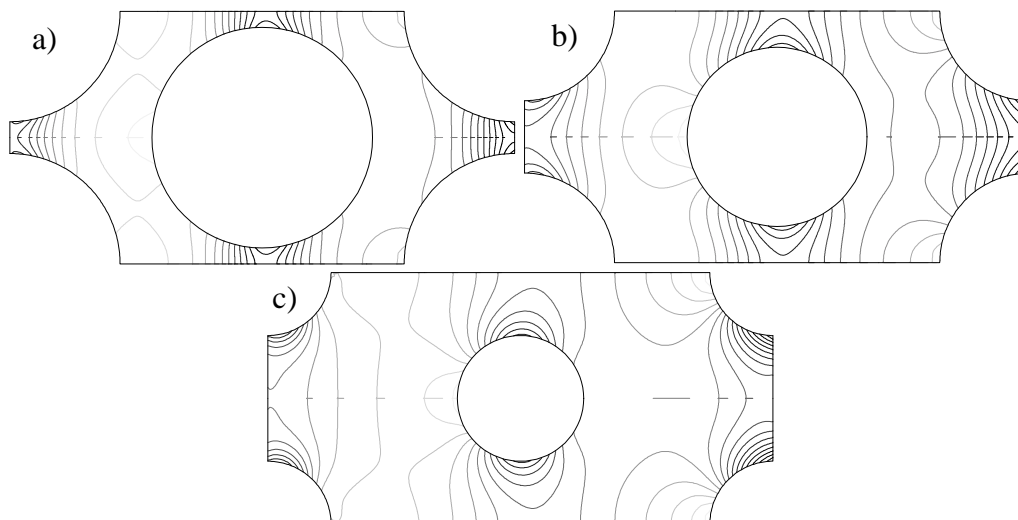


Figura 4. Campos de pressão ( $Re_H = 1.2 \times 10^5$ ): a)  $\phi = 0.40$ , b)  $\phi = 0.60$  e c)  $\phi = 0.80$

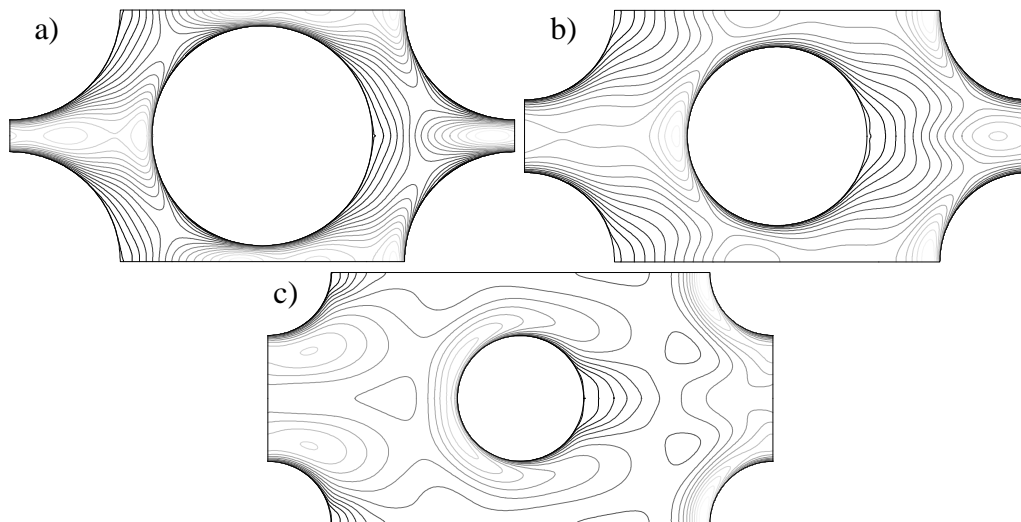


Figura 5. Campos de  $k$  ( $Re_H = 1.2 \times 10^5$ ): a)  $\phi = 0.40$ , b)  $\phi = 0.60$  e c)  $\phi = 0.80$

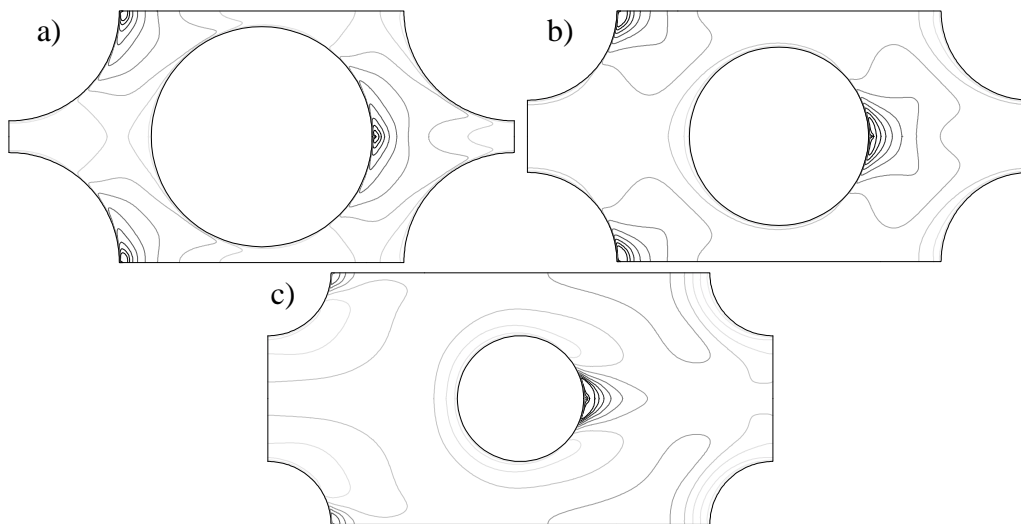


Figura 6. Campos de  $\epsilon$  ( $Re_H = 1.2 \times 10^5$ ): a)  $\phi = 0.40$ , b)  $\phi = 0.60$  e c)  $\phi = 0.80$

Nos demais campos, constata-se que a pressão aumenta na região frontal do cilindro, diminui nas regiões superior e inferior e recupera-se, em parte, na região traseira. A energia cinética turbulenta aumenta nas faces frontal, superior e inferior do cilindro, onde ocorre uma grande aceleração no escoamento, diminuindo na região traseira onde encontra-se o descolamento. A dissipação de energia cinética turbulenta apresenta, por sua vez, um comportamento semelhante ao da energia cinética turbulenta.

## 5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado uma análise do escoamento em meios porosos de um ponto de vista microscópico utilizando um arranjo espacialmente periódico de hastes cilíndricas. As equações de escoamento forma resolvidas para uma célula periódica utilizando-se o modelo  $k$ - $\epsilon$  de baixos e altos Reynolds.

Foi observado a existência de turbulência no escoamento estudado, confirmando trabalhos experimentais encontrados na literatura. E que numa mesma vazão mássica, a diminuição da porosidade, numa faixa de 0.80 à 0.40, aumenta o nível de turbulência no meio poroso em questão.

## 6. AGRADECIMENTOS

Os autores são especialmente gratos ao CNPq pelo suporte financeiro durante a preparação deste trabalho.

## 7. REFERÊNCIAS

- Abe, K., Nagano, Y., and Kondoh, T., 1992, “An Improved k- $\epsilon$  Model for Prediction of Turbulent Flows with Separation and Reattachment”, *Trans. JSME, Ser. B*, vol. 58, pp. 3003-3010.
- Antohe, B. V. and Lage, J. L., 1997, “A General Two-Equation Macroscopic Turbulence Model for Incompressible Flow in Porous Media”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 40, pp. 3013-3024.
- Bear, J., 1972, “Dynamics of Fluids in Porous Media”, American Elsevier Pub. Co., New York.
- Brinkman, H. C., 1947, “A Calculation of the Viscous Force Exerted by a Flowing Fluid on a Dense Swarm of Particles”, *Appl. Sci. Research, A 1*, pp. 27-34.
- Darcy, H., 1856, “Les Fontaines Publiques de la Vile de Dijon”, Victor Dalmond, Paris.
- Forchheimer, P., 1901, “Wasserbewegung Durch Boden”, *Z. Ver. Deutsch. Ing.*, vol. 45, pp. 1782-1788, 1901.
- Hsu, C. T. and Cheng, P., 1990, “Thermal Dispersion in a Porous Medium”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 33, pp. 1587-1597.
- Kececiooglu, I. and Jiang, Y., 1994, “Flow Through Porous Media of Packed Spheres Saturated with Water”, *J. Fluids Engineering*, vol. 116, pp. 164-170.
- Kuwahara, F., Kameyama, Y., Yamashita, S., and Nakayama, A., 1998, “Numerical Modeling of Turbulent Flow in Porous Media Using a Spatially Periodic Array”, *J. Porous Media*, vol. 1, pp. 47-55.
- Macdonald, I. F., El-Sayed, M. S., Mow, K., and Dullien, F. A. L., 1979, “Flow Through Porous Media: The Ergun Equation Revisited”, *Indust. Chem. Fundam.*, vol. 18, pp. 199-208.
- Nakayama, A. and Kuwahara, F., 1999, “A Macroscopic Turbulence Model for Flow in a Porous Medium”, *ASME Journal of Fluids Engineering*, vol. 121, pp. 427-433.
- Patankar, S. V., 1980, “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Hemisphere, New York.
- Pedras, M. H. J. & de Lemos, M. J. S., 1998a, “Análise dos Modelos de Escoamento em Meios Porosos Via Média Espacial das Equações de Navier-Stokes”, *Proc. of ENCIT98 7<sup>th</sup> Braz. Therm. Scienc. Meetg.*, November 3-6, Rio de Janeiro.
- Pedras, M. H. J. & de Lemos, M. J. S., 1998b, “Resultados da Modelagem da Turbulência Macroscópica em Meios Porosos”, *Proc. of ENCIT98 7<sup>th</sup> Braz. Therm. Scienc. Meetg.*, November 3-6, Rio de Janeiro.
- Pedras, M. H. J. and de Lemos, M. J. S., 1999a, “On Volume and Time Averaging of Transport Equations for Turbulent Flow in Porous Media”, *ASME-FED-vol. 248, Paper FEDSM99-7273, ISBN 0-7918-1961-2*.
- Pedras, M. H. J. & de Lemos, M. J. S., 1999b, “Modelagem Macroscópica do Escoamento Turbulento em Meios Porosos Saturados e Indeformáveis”, *Proc. of COBEM 99 15<sup>th</sup> Braz. Cong. of Mech. Eng.*, November 22-26, Águas de Lindóia.
- Rocamora Jr, F. D. and de Lemos, M. J. S., 1998, “Numerical Solution of Turbulent Flow in Porous Media Using a Spatially Periodic Array and the k- $\epsilon$  Model”, *Proc. of ENCIT98-7<sup>th</sup> Braz. Therm. Scienc. Meetg.*, November 3-6, Rio de Janeiro.

- Slattery, J. C., 1967, "Flow of Viscoelastic Fluids Through Porous Media", A.I.Ch.E. J., vol. 13, pp. 1066-1071.
- Takatsu, Y. and Masuoka, T., 1998, "Turbulent Phenomena in Flow Through Porous Media", J. Porous Media, vol. 3, pp. 243-251.
- Vafai, K. and Tien, C. L., 1981, "Boundary and Inertia Effects on Flow and Heat Transfer in Porous Media", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 24, pp. 195-203.
- Ward, J. C., 1964, Turbulent Flow in Porous Media, J. Hydraul. Div. ASCE, vol. 90 (HY5), pp. 1-12.
- Whitaker, S., 1969, "Advances in Theory of Fluid Motion in Porous Media", Indust. Engng. Chem., vol. 61, pp. 14-28.

# MULTIGRID NUMERICAL SOLUTIONS OF LAMINAR BACK STEP FLOW

**Maximilian S. Mesquita**

**Marcelo J.S. de Lemos**

Departamento de Energia - IEME

Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

12228-900 – São José dos Campos - SP, Brasil - E-mail: delemos@mec.ita.br

## **Abstract.**

This work investigates the efficiency of the multigrid numerical method when applied to solve the temperature field after a sudden expansion in a channel flow. The numerical method includes finite volume discretization with the flux blended deferred correction scheme on structured orthogonal regular meshes. The correction storage (CS) multigrid algorithm performance is compared for different inlet Reynolds numbers and the number of sweeps in each grid level. Up to four grids for both multigrid V- cycles are considered. Results indicate a better performance of the V-cycle and reduction in computational effort for larger Peclet numbers.

**Key-words:** Sudden Expansion, Multigrid, CFD, Numerical Methods

## **1. INTRODUCTION**

Convergence rates of single-grid calculations are greatest in the beginning of the process, slowing down as the iterative process goes on. This effect gets more pronounced as the grid becomes finer. Large grid sizes, however, are often needed when resolving small recirculating regions or detecting high heat transfer spots. The reason for this hard-to-converge behavior is that iterative methods can efficiently smooth out only those Fourier error components of wavelengths smaller than or comparable to the grid size. In contrast, multigrid methods aim at covering a broader range of wavelengths through relaxation on more than one grid.

The number of iterations and convergence criterion in each step along consecutive grid levels visited by the algorithm determines the cycling strategy, usually a V- or a W-cycle. Within each cycle, the intermediate solution is relaxed before (pre-) and after (post-smoothing) the transportation of values to coarser (restriction) or to finer (prolongation) grids (Brandt, 1977, Stüben and Trottenberg, 1982, Hackbusch, 1985).

Accordingly, multigrid methods can be roughly classified into two major categories. In the CS formulation, algebraic equations are solved for the corrections of the variables whereas, in the full approximation storage (FAS) scheme, the variables themselves are handled in all grid levels. It has been pointed out in the literature that the application of the CS formulation is recommended for the solution of linear problems being the FAS formulation more suitable to non-linear cases (Brandt, 1977, Stüben and Trottenberg, 1982, Hackbusch,

1985). An exception to this rule seems to be the work of Jiang, et al, 1991, who reported predictions for the Navier-Stokes equations successfully applying the multigrid CS formulation. In the literature, however, not too many attempts in solving non-linear problems with multigrid linear operators are found.

Acknowledging the advantages of using multiple grids, Rabi and de Lemos, 1998a, presented numerical computations applying this technique to recirculating flows in several geometries of engineering interest. There, the correction storage (CS) formulation was applied to non-linear problems. Later, Rabi and de Lemos, 1998b, analyzed the effect of Peclet number and the use of different solution cycles when solving the temperature field within flows with a given velocity distribution. In all those cases, the advantages in using more than one grid in iterative solution was confirmed. More recently, de Lemos and Mesquita, 1999, introduced the solution of the energy equation in their multigrid algorithm. Temperature distribution was calculated solving the whole equation set together with the flow field as well as uncoupling the momentum and energy equations. A study on optimal relaxation parameters was there reported.

The objective of this paper is to present further results applying the CS multigrid method to the solution of heat flows in a backward facing step. Up to four grids is used and a study on optimal relaxation parameters is presented. A schematic of the configuration analyzed is shown in Figure 1.

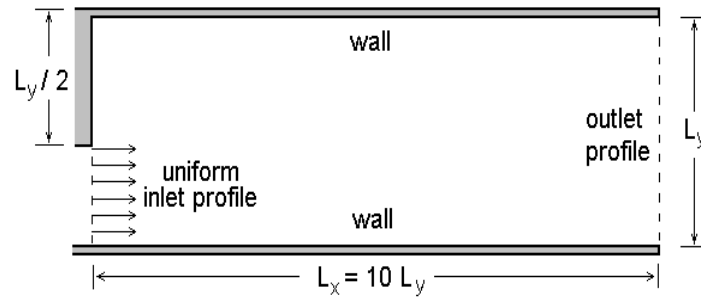


Figure 1 – Geometries and boundary conditions for back step heated flow

## 2. MATHEMATICAL MODEL AND NUMERICS

**2.1 Governing Equations and Numerics** Continuity, Navier-Stokes and energy equations describe fluid flow and heat transfer. They express mass, momentum and energy conservation principles respectively and, for a steady state condition in a two-dimension Cartesian coordinate frame, they are written as:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho VU) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho UV) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V^2) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho UT) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho VT) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4)$$

where  $\rho$  is the fluid density,  $U$  and  $V$  are the  $x$  and  $y$  velocity components, respectively,  $T$  is the temperature,  $\mu$  is the dynamic viscosity and  $Pr$  is the Prandtl number. In addition, in this work all fluid properties are held constant.

The solution domain is divided into a number of rectangular control volumes (CV), resulting in a structured orthogonal non-uniform mesh. Grid points are located according to a cell-centered scheme and velocities are stored in a collocated arrangement (Patankar, 1980). A typical CV with its main dimensions and internodal distances is sketched in Figure 2.

Writing equations (1)-(4) in terms of a general variable  $\phi = \{1, U, V, T\}$  with  $\Gamma_\phi = \left\{ 0, \mu, \mu, \frac{\mu}{Pr} \right\}$  and  $S_\phi = \left\{ 0, -\frac{\partial P}{\partial x}, -\frac{\partial P}{\partial y}, 0 \right\}$  one gets, after integrating it over the CV of Figure 2,

$$\int_{\delta v} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V \phi) \right] dv = \int_{\delta v} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dv + \int_{\delta v} S_\phi dv \quad (5)$$

Integration of the three terms in (5), namely: convection, diffusion and source, lead to a set of algebraic equations. These practices are described elsewhere (e.g. Patankar, 1980) and for this reason they are not repeated here. In summary, convective terms are discretized using the upwind differencing scheme, diffusive fluxes make use of the central differencing scheme and pressures, needed at cell faces, are approximated by a linear interpolation of neighboring point values.

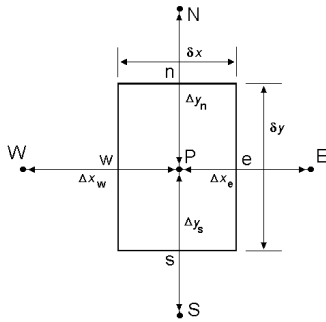


Figure 2 Control Volume

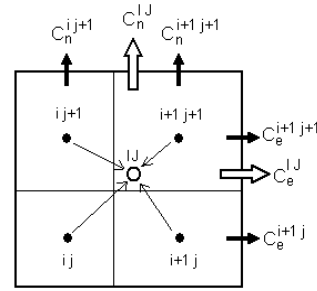


Figure 3 Mass flux and residue restriction summation.

Substitution of all approximate expressions for interface values and gradients into the integrated transport equation (5), gives the final discretization equation for grid node P

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (6)$$

with  $b = 0$  and the east face coefficient, for example, being defined as

$$a_E = \max[-C_e, 0] + D_e \quad (7)$$

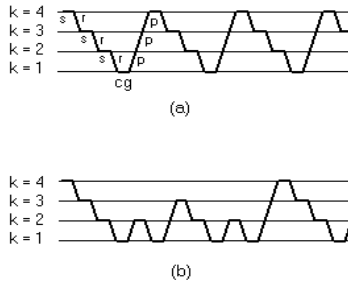


Figure 4 - Sequence of operations in a 4-grid iteration: (a) V-cycle;

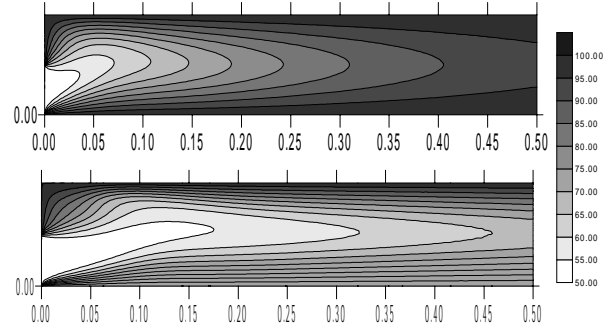


Figure 5 - Effect of  $Re_{in}$  on temperature pattern for backward facing step of Figure 1. From top to bottom:  $Re_{in}=100, 400$ .

In (7)  $D_e = \mu_e \delta y / \Delta x_e$  and  $C_e = (\rho U)_e \delta y$  are the diffusive and convective fluxes at the CV east face, respectively, and, as usual, the operator  $\max[a, b]$  returns the greater of a and b.

**2.2 Multigrid Technique.** Assembling equation (6) for each control volume of Figure 2 in the domain of Figure 1 defines a linear algebraic equation system of the form,

$$\mathbf{A}_k \mathbf{T}_k = \mathbf{b}_k \quad (8)$$

where  $A_k$  is the matrix of coefficients,  $T_k$  is the vector of unknowns and  $b_k$  is the vector accommodating source and extra terms. Subscript “k” refers to the grid level, with  $k=1$  corresponding to the coarsest grid and  $k=M$  to the finest mesh.

As mentioned, multigrid is here implemented in a correction storage formulation (CS) in which one seeks coarse grid approximations for the correction defined as  $\delta_k = \mathbf{T}_k - \mathbf{T}_k^*$  where  $\mathbf{T}_k^*$  is an intermediate value resulting from a small number of iterations applied to (8). For a linear problem, one shows that  $\delta_k$  is the solution of (Brandt, 1977, Stüben and Trottenberg, 1982, Hackbusch, 1985),

$$\mathbf{A}_k \delta_k = \mathbf{r}_k \quad (9)$$

where the residue is defined as

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{T}_k^* \quad (10)$$

Eq. (9) can be approximated by means of a coarse-grid equation,

$$\mathbf{A}_{k-1} \delta_{k-1} = \mathbf{r}_{k-1} \quad (11)$$

with the restriction operator  $I_k^{k-1}$  used to obtain

$$\mathbf{r}_{k-1} = I_k^{k-1} \mathbf{r}_k \quad (12)$$



The residue restriction is accomplished by summing up the residues corresponding to the four fine grid control volumes that compose the coarse grid cell. Thus, equation (12) can be rewritten with the help of Figure 3 as,

$$r_{k-1}^{IJ} = r_k^{ij} + r_k^{i,j+1} + r_k^{i+1,j} + r_k^{i+1,j+1} \quad (13)$$

Diffusive and convection coefficients in matrix  $A_k$  need also to be evaluated when changing grid level. Diffusive terms are recalculated since they depend upon neighbor grid node distances whereas coarse grid mass fluxes (convective terms) are simply added up at control volume faces. A schematic of this operation, commonly found in the literature (Peric, et al, 1989, Hortmann et al, 1990), is shown in Figure 3.

Once the coarse grid approximation for the correction  $\delta_{k-1}$  has been calculated, the prolongation operator  $I_{k-1}^k$  takes it back to the fine grid as

$$\delta_k = I_{k-1}^k \delta_{k-1} \quad (14)$$

in order to update the intermediate value

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_k^* + \delta_k \quad (15)$$

Figure 4 illustrates a 4-grid iteration scheme for both the V- and W-cycles where the different operations are: s=smoothing, r=restriction, cg=coarsest grid iteration and p=prolongation. Also, the number of domain sweeps before and after grid change is denoted by  $v^{pre}$  and  $v^{post}$ , respectively. In addition, at the coarsest k level ( $k=1$ ), the grid is swept  $v^{cg}$  times by the error smoothing operator.

### 3. RESULTS AND DISCUSSION

**3.1 Computational Details.** The computer code developed was run on a IBM PC machine with a Pentium III 500MHz processor. Grid independence studies were conducted such that the solutions presented herein are essentially grid independent. For both V- cycles, pre- and post-smoothing iterations were accomplished via the Gauss-Seidel algorithm while, at the coarsest-grid, the TDMA method has been applied (Patankar, 1980). Also, the geometry of Figure 1 was run with the finest grid having sizes of 144x48 and 218x74 grid points, respectively.

Results below are focused on the behavior of the energy equation subjected to multigrid numerical methods. Analysis of velocity and pressure convergence characteristics have already been reported (Rabi and de Lemos, 1998a, 1998b) and for that they are not repeated here.

**3.2 Temperature Field** Figure 5 shows non-dimensional temperature distribution patterns for flow in the sudden expansion flow of Figure 1. All walls are kept at the same temperature, higher than the incoming flow temperature. The figure indicates the effect of increasing the inlet Reynolds number,  $Re_{in} = \rho U_{in} L_{in} / \mu$ , where the subscript "in" refers to inlet values. One can clearly see the penetration of the cooler fluid as  $Re_{in}$  increases. Deformation of the isotherms close to the step, at the upper left region, indicates the increase of the recirculation bubble after the expansion. When designing heat transfer equipment, engineers may use such information for improving product reliability and performance.

**3.3 Residues.** The residue is normalized and calculated according to

$$R_T = \sqrt{\sum_{ij} (R_{ij}^2)}$$

$$\text{with } R_{ij} = A_p T_p - \left( \sum_{nb} A_{nb} T_{nb} \right)$$
(16)

where subscript  $ij$  identifies a given control volume on the finest grid and  $nb$  refers to its neighboring control volumes.

Figure 7 shows residue history for the energy equation. The solution follows a simultaneous approach in the sense that the temperature is always relaxed after the flow field, within the multigrid cycle. One can readily notice that for lower  $Re_{in}$ , regardless of the number of grids used, faster solutions are obtained. In this case, relative importance of diffusion terms favors the stability of the system of equations. Also, increasing the number of grids for the same Reynolds number is advantageous. This feature is what makes multigrid methods attractive, justifying their growing usage. On the other hand, refining the finest grid decelerates convergence, as expected, independent of the Reynolds number used.

**3.4 Relaxation Parameter.** In the work of Rabi and de Lemos, 1998b, a study was carried out to investigate optimal values for the parameters  $v^{pre}$ ,  $v^{post}$  and  $v^{cg}$ . Since the intermediate solutions, before and after grid changes, are not fully solved but are rather relaxed  $v^{pre}$  and  $v^{post}$  times, a question about their optimal values for increasing overall algorithm performance arises. Additional tests for finding optimal parameters were conducted by de Lemos and Mesquita, 1999. In this case, recirculating flows were investigated. For the geometry here studied, similar tests are performed.

For a fixed number of sweeps at the coarse grid ( $v^{cg}=1$ ), Figure 8 reproduces the necessary time to convergence when the number of pre- and post-smoothing iterations was allowed to vary, keeping the same value for  $v^{pre}=v^{post}$ . One can clearly detect an optimal value for those relaxation parameters. Additional sweeps past those values consume extra computing time. On the other hand, too few pre- and post-relaxation passes will demand also a higher computational effort.

In Figure 6 the number of pre- and post-smoothing iterations was fixed at  $v^{pre}=v^{post}=3$  whereas the number of coarsest-grid sweeps  $v^{cg}$  was free to vary. Results are quite spread and no optimal value seems to be detected.

Ultimately, both Figures 8 and 6 suggest a delicate balance between all parameters involved when minimum CPU consumption is sought. Most often, optimal parameters can not be easily determined a priori and adaptive strategies have been proposed in the literature. Generally, the ratio of residues after two successive sweeps is monitored and used as a criterion for switching grids. Hortmann et al, 1990 points out that this practice is preferred for single equation systems but, when solving the full equation set as done here, such practice is not easy to implement. In this case, most works in the literature specify a fixed number of sweeps, as in the cases here reported (Sathyamurthy and Patankar, 1994, Hutchinson et al 1988).

## 2.4 References

- Brandt, A., 1977, MULTI-LEVEL ADAPTIVE SOLUTIONS TO BOUNDARY-VALUE PROBLEMS, *Math. Comp.*, vol. 31, No. 138, pp. 333-390.

- Bai, L., Mitra, N.K., Fiebig, M.C., Kost, A., A multigrid method for predicting periodically fully developed flow, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 18, pp. 843-852, 1994.
- de Lemos, M.J.S., Mesquita, M.S., 1999, MULTIGRID NUMERICAL SOLUTIONS OF NON-ISOTHERMAL LAMINAR RECIRCULATING FLOWS, *Applications of Computational Heat Transfer*, ASME-HTD-vol. 364-3, ISSN: 0272-5673, ISBN: 0-7918-1656-7, Ed. L.C. White, pg. 323-330.
- Hackbusch, W., 1985, MULTIGRID METHODS AND APPLICATIONS, Springer-Verlag, Berlin.
- Hortmann, M., Peric, M., Scheuerer, G., 1990, FINITE VOLUME MULTIGRID PREDICTION OF LAMINAR CONVECTION: BENCH-MARK SOLUTIONS, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 11, pp. 189-207.
- Hutchinson, B.R., Galpin, P.F., Raithby, G.D., 1988, APPLICATION OF ADDITIVE CORRECTION MULTIGRID TO THE COUPLED FLUID FLOW EQUATIONS, *Num. Heat Transfer*, vol. 13, pp. 133-147.
- Joshi, D.S., Vanka, S.P., Multigrid calculation procedure for internal flows in complex geometries, *Num. Heat Transfer - Part B*, vol. 20, pp. 61-80, 1991.
- Jiang, Y., Chen, C.P., Tucker, P.K., 1991, Multigrid solutions of unsteady Navier-Stokes equations using a pressure method, *Num. Heat Transfer - part A*, vol. 20, pp. 81-93.
- Khosla, P.K., Rubin, S.G., 1974, A DIAGONALLY DOMINANT SECOND-ORDER ACCURATE IMPLICIT SCHEME, *TRANSFER AND FLUID FLOW*, Mc-Graw Hill.
- Peric, M., Rüger, M., Scheuerer, G., 1989, A FINITE VOLUME MULTIGRID METHOD FOR CALCULATING TURBULENT FLOWS, In: *Seventh Symposium on Turbulent Shear Flows*, pp. 7.3.1-7.3.6, *Standford Comput. Fluids*, vol. 2, No. 12, pp. 207.
- Patankar, S.V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Mc-Graw Hill:New York, 1980.
- Rabi, J.A., de Lemos, M.J.S., 1998a, MULTIGRID NUMERICAL SOLUTION OF INCOMPRESSIBLE LAMINAR RECIRCULATING FLOWS, *ENCIT98- Proc. of 7th Braz. Cong. Eng. Th. Sci.*, vol. 2, pp. 915-920, Rio de Janeiro, RJ, Nov. 3-6.
- Rabi, J.A., de Lemos, M.J.S., 1998b, THE EFFECTS OF PECLET NUMBER AND CYCLING STRATEGY ON MULTIGRID NUMERICAL SOLUTIONS OF CONVECTIVE-CONDUCTIVE PROBLEMS, *7th AIAA/ASME Jnt Thermcs & HT Conf*, Paper AIAA-98-2584, Albuquerque, New Mexico, USA, June 15-18.
- Raithby, G.D., Torrance, K.E., 1974, UPSTREAM-WEIGHTED DIFFERENCING SCHEMES AND THEIR APPLICATION TO ELLIPTIC PROBLEMS INVOLVING FLUID FLOW, *Comp. & Fluids*, vol. 2, pp. 191-206.
- Sathyamurthy, P.S., Patankar, S.V., 1994, BLOCK-CORRECTION-BASED MULTIGRID METHOD FOR FLUID FLOW PROBLEMS, *Numerical Heat Transfer - Part B*, vol. 25, pp. 375-394.
- Stüben, K., Trottenberg, U., 1982, MULTIGRID METHODS, In *Lect. Notes Math.*, vol. 960, pp. 1-76, Berlin
- Thompson, M.C., Ferziger, J.H., 1989, An adaptive multigrid technique for the incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comp. Phys.*, vol. 82, pp. 94-121.

- Vanka, S.P. 1986, Block-implicit multigrid calculation of two-dimensional recirculating flows, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 86, pp. 29-48.

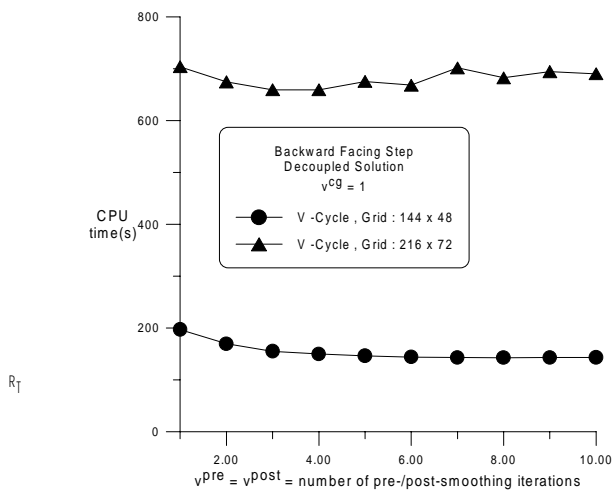
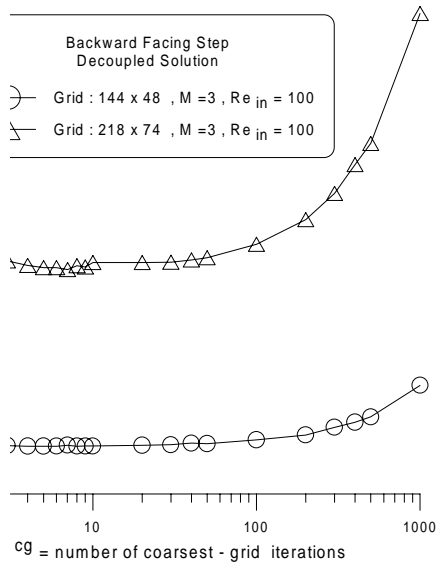


Figure 8 - Effect of grid size on residue history for  $T$ .



Figure 7 - Residue history for simultaneous solution with different number of grids and  $Re_{in}$  - V-cycle.



Effect of the number of coarsest-grid iterations on computational effort.

# SIMULAÇÃO NUMÉRICA APLICANDO UM MODELO DE TURBULÊNCIA $k-\varepsilon$ NÃO LINEAR EM COORDENADAS GENERALIZADAS

**Marcelo Assato**

**Marcelo J.S. de Lemos**

Departamento de Energia - IEME

Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

12228-900 - São José dos Campos - SP - Brasil

E-mail: [delemos@mec.ita.br](mailto:delemos@mec.ita.br)

## Resumo

Os modelos não lineares de turbulência tem mostrado uma melhor capacidade em simular alguns tipos de escoamento em relação aos modelos de difusividade turbulenta clássica ( $k-\varepsilon$  standard) mantendo, ainda, as mesmas vantagens numéricas apresentadas pelos  $k-\varepsilon$  standard. Os modelos isotrópicos mostram grandes imprecisões em simular escoamentos que apresentam uma acentuada curvatura em suas linhas de corrente (problemas envolvendo recirculação). No presente trabalho é mostrado uma melhora significativa na predição do escoamento com expansão abrupta (“backward-facing-step”) utilizando o modelo de viscosidade turbulenta  $k-\varepsilon$  não linear desenvolvido por Shih et al, 1993. Resultados indicam que o modelo  $k-\varepsilon$  standard subprediz o comprimento de separação em 25 a 30% com relação a dados experimentais, enquanto que o modelo não linear subprediz em torno de 3 a 5%. Detalhes dos resultados para o escoamento completamente desenvolvido num tubo, também, são apresentados.

**Palavras-chave:** Turbulência, Não Linear, Anisotropia, volumes finitos

## 1. INTRODUÇÃO

Entre os vários modelos de turbulência existentes, os modelos  $k-\varepsilon$  linear ( $k-\varepsilon$  standard) são os mais amplamente usados por cientistas e engenheiros para resolver problemas práticos. Porém, para alguns tipos de escoamento turbulento onde as diferenças das tensões de Reynolds desempenham um importante papel (como em escoamentos secundários em dutos de seção não circular), os modelos lineares, por sua característica isotrópica, fornecem consideráveis imprecisões. Para suprir estas deficiências, muitos esforços foram direcionados na inclusão de efeitos anisotrópicos na modelagem das tensões de Reynolds. Estes efeitos são tratados através de termos não lineares na relação tensão x taxa de deformação.

Os modelos de viscosidade turbulenta não lineares tiveram origem numa proposta geral feita por Pope, 1975. Porém, somente na década de 80 tais modelos tiveram grandes avanços com os trabalhos de Speziale, 1987, que desenvolveu uma expressão para as tensões de Reynolds contendo termos similares às tensões laminares de fluidos não Newtonianos (Rivlin, 1957). Os trabalhos de Yoshizawa, 1987, Rubinstein & Barton, 1990, Myong & Kasagi,

1990, Taubee, 1992, Shih et al, 1993 introduziram produtos quadráticos envolvendo os tensores taxa de deformação e vorticidade, com diferentes derivações e calibrações.

Neste trabalho, a fim de analisar os problemas que apresentam escoamentos com recirculação, são apresentados comparações entre os resultados para o escoamento com expansão abrupta (“backward facing step”), utilizando o modelo não linear de Shih et al, 1993 e o modelo  $k$ - $\varepsilon$  linear ( $k$ - $\varepsilon$  standard). Comparações também são feitas entre os modelos linear e não linear em relação a dados experimentais para o escoamento desenvolvido em tubo.

## 2. EQUAÇÕES DE TRANSPORTE E CONSTITUTIVA

As equações de conservação, de massa, momentum e escalar que descrevem o escoamento de fluidos, podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right)=0, \quad \operatorname{div}\left(\rho \vec{v} U_i - \vec{t}_i\right)=s_{u_i}, \quad \operatorname{div}\left(\rho \vec{v} \phi - \vec{q}_\phi\right)=s_\phi \quad (1)$$

Onde:  $\vec{t}_i$  contém a tensão agindo no direção- $i$ , e  $s_{u_i}$  representa todos os termos fonte, incluindo o termo de pressão e gravitacional. O símbolo  $\phi$  representa uma quantidade escalar,  $\vec{q}_\phi$  é seu fluxo difusivo e  $s_\phi$  representa a fonte ou sumidouro de  $\phi$ . As equações para  $\vec{t}_i$ ,  $\vec{q}_\phi$  e  $s_{u_i}$  são dadas, respectivamente, por:

$$\vec{t}_i = \tau_{ij} \cdot \vec{i}_j, \quad \vec{q}_\phi = \Gamma_\phi \operatorname{grad}\phi = \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y^j} \vec{i}_j \right), \quad s_{u_i} = -\frac{\partial P}{\partial y^i} \quad (2)$$

onde,  $P = p + \rho gh + \frac{2}{3} \rho k$ , e a expressão para a difusão tem sido usado com a ajuda do coeficiente de transporte  $\Gamma_\phi$ , formado pela viscosidade turbulenta  $\mu_t$ , dada por:

$$\mu_t = c_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3)$$

onde, na equação (3)  $k = \overline{u'_i u'_i} / 2$  é a energia cinética de turbulência por unidade de massa,  $\varepsilon$  a taxa de dissipação de  $k$ ,  $c_\mu$  é uma constante e  $\sigma_\phi$  o número de Prandtl/Schmidt para  $\phi$ . A equação (1) representa também a equação de transporte para  $k$  e  $\varepsilon$  quando  $\phi = k, \varepsilon$ . Para  $k$  o termo fonte é  $S_k = P_k - \rho \varepsilon$ , onde  $P_k$  é o termo de produção de turbulência dada por:

$$P_k = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (4)$$

A expressão das tensões de Reynolds apresentada por Shih et al, 1993 são escritas como:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = & -\left(\mu_t S_{ij}\right)^L + \left(c_{1NL} \mu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij}\right]\right)^{NL1} + \\ & \left(c_{2NL} \mu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[\Omega_{ik} S_{kj} + \Omega_{jk} S_{ki}\right]\right)^{NL2} + \left(c_{3NL} \mu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[\Omega_{lk} \Omega_{jk} - \frac{1}{3} \Omega_{lk} \Omega_{lk} \delta_{ij}\right]\right)^{NL3} \end{aligned} \quad (5)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, os sobrescritos na equação (5) indicam contribuições **L**inear e **N**ão **L**inear,  $S_{ij}$  e  $\Omega_{ij}$  representam os tensores de deformação e vorticidade, respectivamente, dados por:

$$S_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \Omega_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

No modelo de Shih et al, 1993 os valores de  $c_{1NL}$ ,  $c_{2NL}$  e  $c_{3NL}$  são calculados como:

$$c_{1NL} = \frac{0.75/c_\mu}{1000 + s^3} \quad c_{2NL} = \frac{3.8/c_\mu}{1000 + s^3} \quad c_{3NL} = \frac{4.8/c_\mu}{1000 + s^3} \quad (7)$$

onde, 
$$c_\mu = \frac{2/3}{1.25 + s + 0.9\Omega} \quad s = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad \Omega = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad (8)$$

## 2.1 Discretização das equações em coordenadas generalizadas

O método numérico empregado para a discretização das equações é o método dos volumes finitos num sistema de coordenadas não-ortogonal. O algoritmo SIMPLE é utilizado para correção do campo de pressão. A figura abaixo mostra um volume de controle genérico com suas notações, distâncias e índices usados na transformação das equações para o sistema de coordenadas  $\eta - \xi$ .

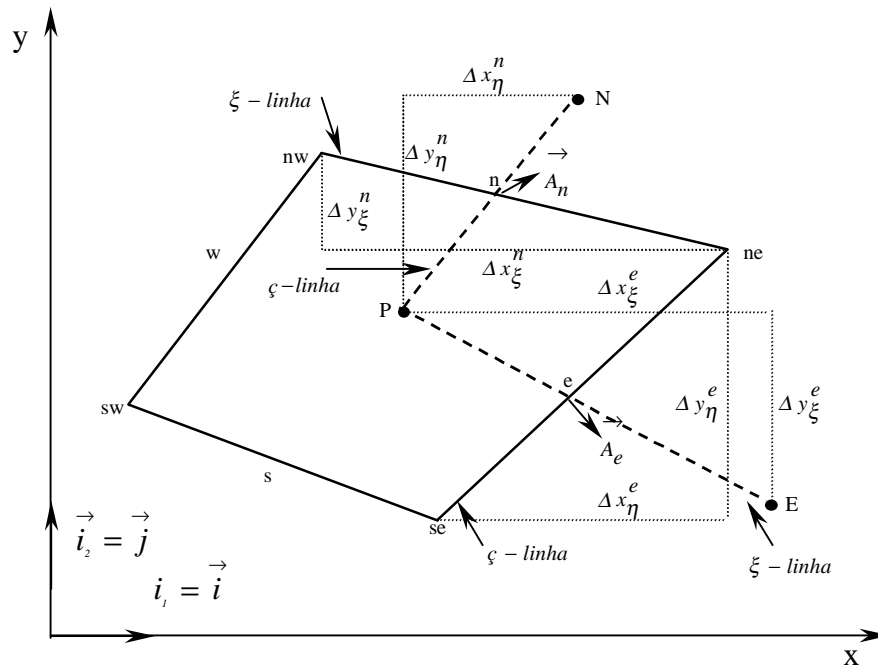


Figura (1) - Volume de controle e notações

Da Figura (1) é definido as seguintes distâncias geométricas usadas no processo de discretização:

$$\begin{aligned}\Delta x_{\eta}^e &= (x_{ne} - x_{se}), & \Delta x_{\xi}^e &= (x_E - x_P), & \Delta y_{\eta}^e &= (y_{ne} - y_{se}), & \Delta y_{\xi}^e &= (y_E - y_P), \\ \Delta x_{\xi}^n &= (x_{ne} - x_{nw}), & \Delta x_{\eta}^n &= (x_N - x_P), & \Delta y_{\xi}^n &= (y_{ne} - y_{nw}), & \Delta y_{\eta}^n &= (y_N - y_P) \\ \Delta x_{\xi}^P &= (x_e - x_w), & \Delta x_{\eta}^P &= (x_n - x_s), & \Delta y_{\xi}^P &= (y_e - y_w), & \Delta y_{\eta}^P &= (y_n - y_s).\end{aligned}\quad (9)$$

Todo o tratamento numérico e processo de discretização dos termos convectivo e difusivo linear e não linear, são mostrados em detalhes no trabalho feito por Assato & de Lemos, 1998. O tratamento numérico apresentado por Assato & de Lemos, 1998 para os termos difusivos não lineares referentes as equações de momento, foi totalmente explícito, determinados no termo fonte. Num subseqüente trabalho Assato & de Lemos, 1999 trataram os termos difusivos não lineares de forma implícita e explícita com a finalidade de melhorar a estabilidade numérica do código computacional.

Aplicando o modelo não linear, o termo de produção de turbulência  $P_k$ , na equação (4), também possui o termo linear acrescido dos termos não lineares:

$$P_k = (P_k)^L + (P_k)^{NL1} + (P_k)^{NL2} + (P_k)^{NL3} \quad (10)$$

O termo de produção de turbulência precisa ser discretizado no ponto central  $P$  do volume de controle. Assim, tem-se a seguinte forma final discretizada:

$$(P_k)^L = \frac{\mu_t^P}{(\Pi_P)^2} \left[ 2(\pi_a^P)^2 + 2(\pi_b^P)^2 + (\pi_c^P + \pi_d^P)^2 \right] \quad (11)$$

$$(P_k)^{NL1} = -c_{1NL} \mu_t^P \frac{k}{\varepsilon (\Pi_P)^3} \left\{ \frac{8}{5} (\pi_a^P)^3 + \frac{8}{3} (\pi_b^P)^3 + \frac{7}{3} (\pi_a^P + \pi_b^P) \left[ (\pi_c^P + \pi_d^P)^2 - \frac{4}{7} (\pi_c^P \pi_d^P) \right] \right\} \quad (12)$$

$$(P_k)^{NL2} = 0 \quad (13)$$

$$(P_k)^{NL3} = -c_{3NL} \mu_t^P \frac{k}{\varepsilon (\Pi_P)^3} \left[ \frac{1}{5} (\pi_a^P + \pi_b^P) (\pi_c^P - \pi_d^P)^2 \right] \quad (14)$$

onde,

$$\Pi_P = \Delta y_{\eta}^P \cdot \Delta x_{\xi}^P - \Delta y_{\xi}^P \cdot \Delta x_{\eta}^P$$

$$\pi_a^P = \Delta y_{\eta}^P (U_e - U_w) - \Delta y_{\xi}^P (U_n - U_s) \quad \pi_b^P = \Delta x_{\xi}^P (U_n - U_s) - \Delta x_{\eta}^P (U_e - U_w)$$

$$\pi_c^P = \Delta y_{\eta}^P (V_e - V_w) - \Delta y_{\xi}^P (V_n - V_s) \quad \pi_d^P = \Delta x_{\xi}^P (V_n - V_s) - \Delta x_{\eta}^P (V_e - V_w) \quad (15)$$

Os  $\Delta x^P$ 's e  $\Delta y^P$ 's são dados pela equação (9), e os  $c_{NL}$ 's não lineares do modelo de Shih et al, 1993 são calculados de acordo com as equações (7) e (8), sendo que as expressões discretizadas para  $s$  e  $\Omega$  são as seguintes:



$$s = \frac{k}{\varepsilon \Pi_p} \sqrt{2(\pi_a^P)^2 + 2(\pi_d^P)^2 + (\pi_b^P + \pi_c^P)^2}, \quad \Omega = \frac{k}{\varepsilon \Pi_p} (\pi_b^P - \pi_c^P) \quad (16)$$

### 3. RESULTADOS

#### 3.1 Escoamento turbulento em um canal com expansão abrupta

O escoamento turbulento num canal com expansão abrupta tem sido usado como um caso teste padrão para quantificar a performance de modelos de turbulência. Muitas vezes toma-se como referência a predição da localização do ponto de recolagem (“reattachment”) do escoamento após a expansão. A figura a seguir ilustra o tipo de escoamento.

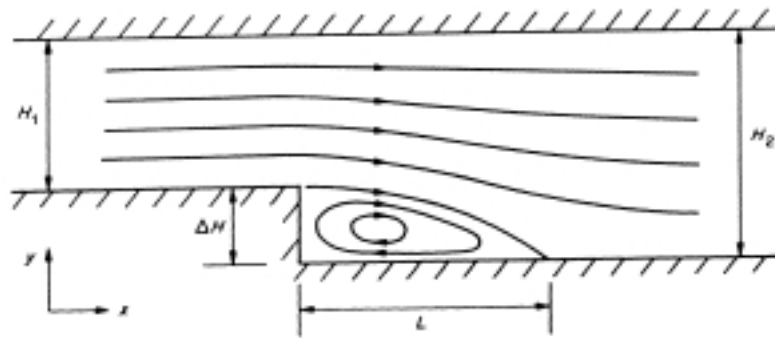


Figura (2) - Canal com expansão abrupta

Onde  $\Delta H = H_2 - H_1$  representa a altura do degrau e  $L$  é o comprimento de separação do escoamento. No presente trabalho, o número de Reynolds de entrada igual a 132000, e a taxa de expansão  $H_2 / H_1 = 1,5$  com  $H_2 = 3$  e  $H_1 = 2$ . Para todas as malhas utilizadas (malhas ortogonais: 120x30, 220x30 e uma malha não-ortogonal: 120x30) foi notado os mesmos resultados. O modelo  $k-\varepsilon$  linear produziu um comprimento de separação de  $L / \Delta H = 5,1$ , enquanto que o modelo  $k-\varepsilon$  não linear de Shih et al, 1993 forneceu um comprimento de separação de  $L / \Delta H = 6,8$ . Valores experimentais apresentados por Kim et al, 1980 indicam que  $L / \Delta H = 7$ . Nota-se, portanto, uma grande melhora, de 27% de desvio com modelo isotrópico para 3% com o modelo anisotrópico. A seguir é mostrado o campo da velocidade média  $\bar{U} / U_0$  em várias seções do canal. A velocidade  $U_0$  é a velocidade média de entrada.

Da Figura (3), pode-se notar também que ocorre uma melhor concordância do campo da velocidade média aplicando o modelo não linear. O mesmo ocorre para o campo da intensidade turbulenta adimensional  $(\overline{u'u'})^{1/2}$  mostrada na Figura (4).

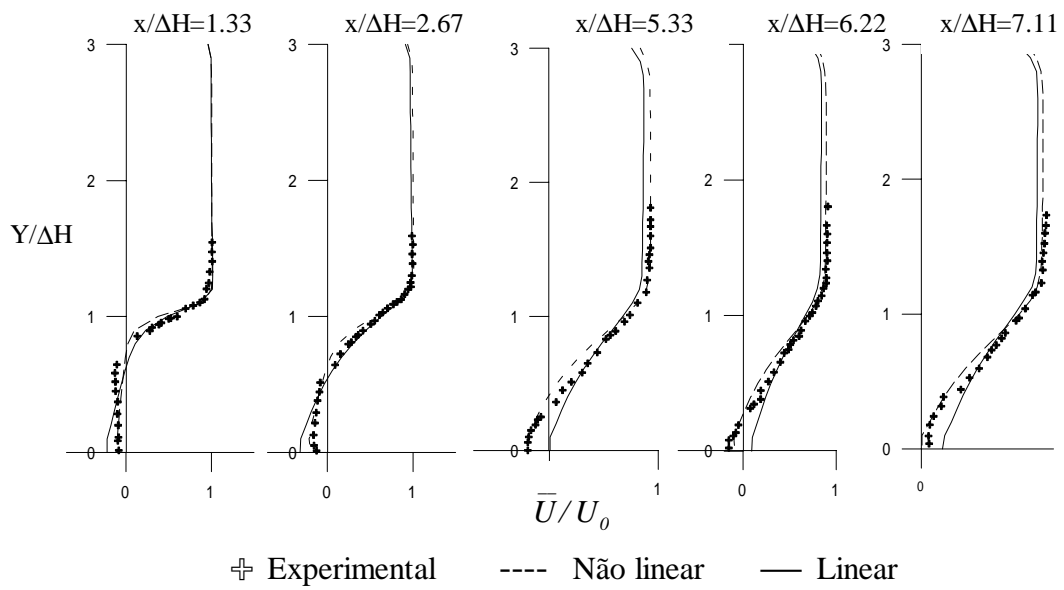


Figura (3) – Campo de velocidade média

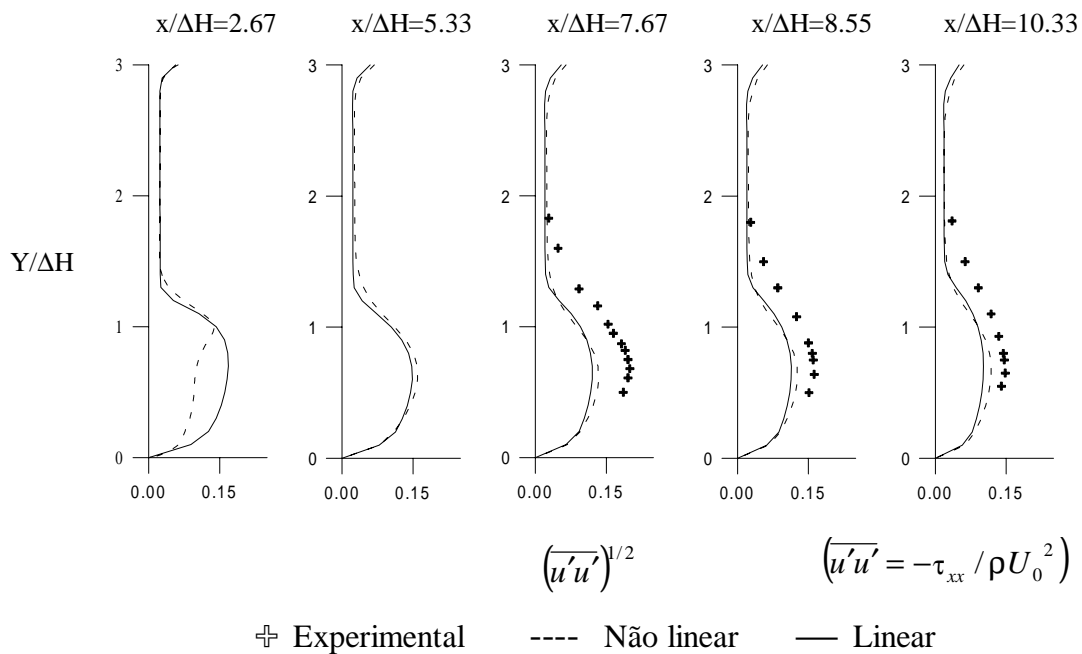


Figura (4) – Intensidade turbulenta adimensional

### 3.2 Escoamento turbulento completamente desenvolvido em tubo

Aqui o problema do escoamento completamente desenvolvido em tubo é analisado. As principais influências dos termos não lineares na predição de algumas características do escoamento são abordadas. Por exemplo, em escoamento completamente desenvolvido em tubo, o modelo linear prediz que as tensões de Reynolds são todas iguais, isto é:

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} , \quad (17)$$

o que contradiz o experimento de Laufer, 1951 que indica:

$$\frac{\|\tau_{yy} - \tau_{xx}\|}{\|\tau_{xx}\|} \approx 0.5, \quad \frac{\|\tau_{yy} - \tau_{xx}\|}{\|\tau_{xy}\|} \approx 2.5 \quad (18)$$

Tais erros no cálculo da diferença das tensões normais  $(\tau_{yy} - \tau_{xx})$  podem produzir altas imprecisões em escoamento com recirculação, e na incapacidade de simular escoamentos secundários presentes em dutos de seção não-circular. Na Figura (5) pode-se notar a comparação dos valores computados da diferença das tensões normais de Reynolds obtido do modelo não linear de Shih et al, 1993 com os dados experimentais de Laufer, 1951. É interessante ressaltar que o modelo  $k-\varepsilon$  standard prediz uma diferença das tensões normais de Reynolds nula.

Os resultados para este caso, foram obtidos considerando  $Re=50000$ ,  $L=165R$ , sendo  $L$  o comprimento do tubo e  $R=0.05$  o raio do tubo. A malha utilizada foi de  $165 \times 20$ .

A Figura (6)(a) mostra o campo da energia cinética turbulenta e a Figura (6)(b) o campo da taxa de dissipação da energia cinética turbulenta, ambas mostrando a comparação entre os valores calculados pelos modelos linear e não linear. Nota-se uma pequena melhora na predição na região central do tubo usando o modelo não linear, divergindo em relação aos dados experimentais próximo a parede.

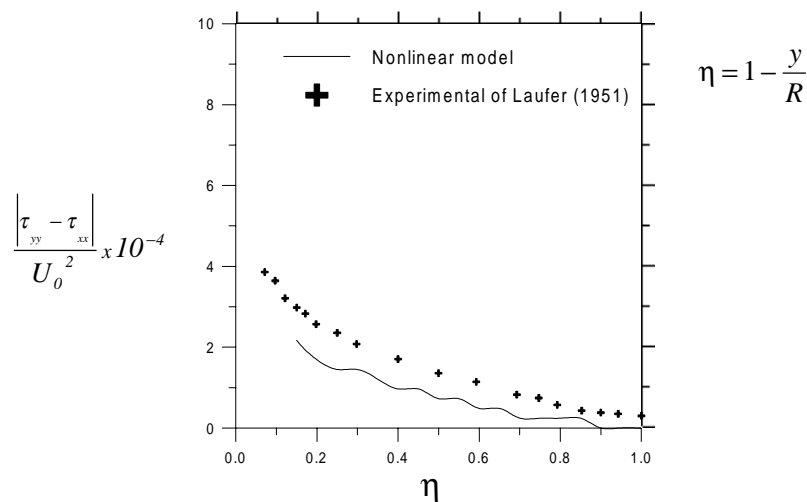


Figura (5): Diferença das tensões normais de Reynolds

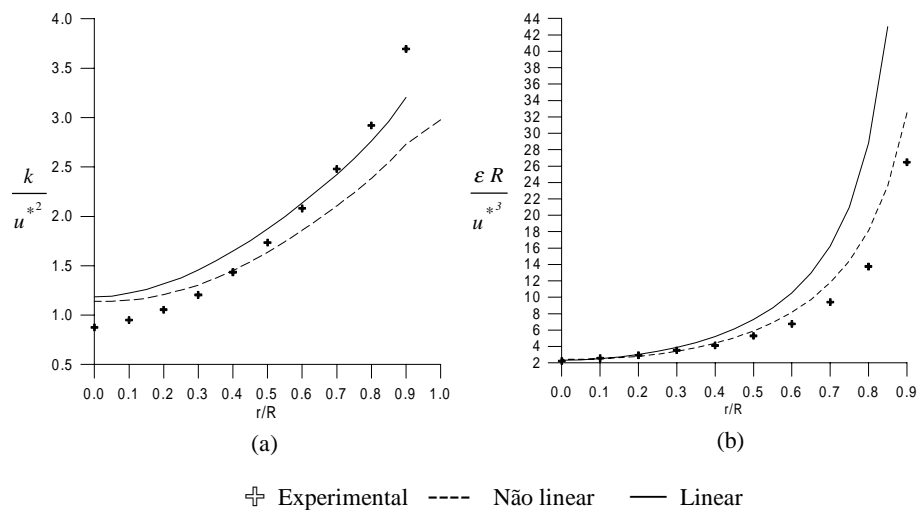


Figura (6): (a) Campo de  $k$  adimensional, (b) Campo de  $\varepsilon$  adimensional.

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado melhorias na predição de escoamentos turbulentos onde as tensões normais de Reynolds desempenham um importante papel, como o caso do back-step analisado utilizando um modelo de turbulência não linear. Foi notado que o modelo não linear de Shih et al, 1993, prediz o ponto de separação com um desvio em torno de 3% em relação a dados experimentais de Kim et al, 1980, enquanto que o modelo linear apresenta um desvio em torno de 25 a 30%. Também foi notado uma melhor concordância dos resultados em relação ao experimental, para o escoamento completamente desenvolvido em tubo, usando o modelo não linear, sendo possível determinar a diferença das tensões normais de Reynolds.

#### Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq a ajuda financeira durante a preparação deste trabalho.

#### 5. REFERÊNCIAS

- Assato, M. & de Lemos, M.J.S., 1998, “Development of a non-linear turbulence model for recirculating flows using generalized coordinates”, 7<sup>th</sup> Encit – Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences, vol. 2, Rio de Janeiro, pp. 1386-1391.
- Assato, M. & de Lemos, M.J.S., 1999, “Tratamento Numérico Implícito para a Implementação de um Modelo Não Linear de Turbulência em Coordenadas Generalizadas”, XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Águas de Lindóia, SP.
- Kim, J., Kline, S.J. & Johnston, J.P., 1980, “Investigation of a reattaching turbulent shear layer: flow over a backward-facing step”, ASME J.Fluids Engng, 102, pp. 302-308.
- Laufer, J., 1951, “Investigation of turbulent flow in two-dimensional channel”, NACA TN 1053.

- Myong, H.K. & Kasagi, N., 1990, "Prediction of anisotropy of the near wall turbulence with an anisotropic low-Reynolds-number  $K-\varepsilon$  turbulence model", J. Fluids Eng., 112, pp. 512-524.
- Pope, S. B., 1975, "A more general effective-viscosity hypothesis", J. Fluid Mech., 72, pp.331-340.
- Rivlin, R.S., 1957, "The relation between the flow of non-Newtonian fluids and turbulent Newtonian fluids", Q. Appl. Maths 15, 212.
- Rubinstein, R. & Barton, J.M., 1990, "Renormalization group analysis of the stress transport equation", Phys Fluids A 2, pp. 1472.
- Shih, T.H., Zhu, J. & Lumley, J.L., 1993, "A realisable Reynolds stress algebraic equation model", NASA TM-105993.
- Speziale, C.G., 1987, "On nonlinear  $k-l$  and  $k-\varepsilon$  models of turbulence", J. Fluid Mech., vol. 176, pp. 459-475.
- Taubee, D.B., 1992, "An improved algebraic Reynolds stress model and corresponding nonlinear stress model", Phys. Fluids A 4, pp. 2555-2561.
- Yoshizawa, A., 1987, "Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy viscosity representation", Phys. Fluids, 27, pp. 1377-1387.

**Abstract:**

This work presents numerical results for simulating turbulent recirculating flows. The so-called non-linear models are used as they perform better than the eddy-diffusivity models. Flow over a backward-facing step is chosen for comparing different cases. Results with the standard  $k-\varepsilon$  model underestimates the reattachment length in about 25 to 30%. The non-linear model reduces such uncertainty to less than 5%. Detailed results for fully developed flow in a circular pipe are also reported.

# MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION OF OIL SPILL TRAJECTORIES ON THE SEA

**Emilio Ernesto Paladino**<sup>#</sup>

**Clovis Raimundo Maliska**<sup>\*</sup>

Computational Fluid Dynamics Laboratory - SINMEC - Federal University of Santa Catarina  
88040-900 – Florianopolis – SC – BRAZIL

<sup>#</sup> [emilio@sinmec.ufsc.br](mailto:emilio@sinmec.ufsc.br)

<sup>\*</sup> [maliska@sinmec.ufsc.br](mailto:maliska@sinmec.ufsc.br)

## **Abstract**

The aim of this paper is to present a mathematical model and its numerical treatment to forecast oil spills trajectories in the sea. The knowledge of the trajectory followed by an oil slick spilled on the sea is of fundamental importance in the estimation of potential risks and in combating the pollution using floating barriers, detergents, etc. In order to estimate these slicks trajectories a new model, based on mass and momentum conservation equations, is presented. This model considers the spreading in the regime when the inertial and viscous forces counterbalance gravity and takes into account the effects of winds and water currents. The mass loss caused by oil evaporation is also considered. The numerical model is developed in generalized coordinates, making the model easily applicable to complex coastal geographies.

**Key Words:** Environmental Flows - Oil Spill - Numerical Simulation - Generalized Coordinates

## **1 INTRODUCTION**

The environment is today one of the main preoccupations of the potential pollutant industries and government authorities. This is particularly true in the petroleum branch, due to its high environmental risk. In the case of Brazil, the major petroleum exploitation is offshore, increasing considerably the risks of occurring oil spills in operation and transport tasks. These spills are much more damaging when they occur near shorelines because, besides the environmental impacts, the economical damages ranges reach from fishing to tourism. The recent oil spill in the Guanabara Bay is a strong example of this broad impact. The detailed knowledge of the spilled oil position and the area covered by the slick is of fundamental importance to take appropriate actions against pollution, like use of floating barriers, detergents, dispersants, etc. It is also important the estimation of potential risks in selecting pipeline routes, locating shoreline tanks and petrochemical industries. Therefore, a model to forecast the time-space evolution of the oil slick should make part of any environmental program that has the purpose of oil pollution combat.

The first studies attempting to model the movement of oil slicks (Fay (1969,1971), Fanelop and Waldmann (1971), Hoult (1972), Buckmaster (1973), etc.) consider the spreading as one-dimensional or axi-symmetric. These models consider the spreading of the oil in calm waters, where a slick, initially circular, will remains circular, just increasing its diameter. Considering the forces that governs the spreading process, Fay (1969), characterized the spreading by dividing it in three phases: Initially, when the thickness of the slick is big and

so are the inertial forces, the gravity acts as the active force counterbalanced by inertial forces; this is called the gravity-inertial spreading regime. When the mean thickness of the slick begins to decrease, and the viscous forces exerted by the water boundary layer will eventually outweigh the inertia as the retarding force, it constitutes the gravity-viscous spreading. In the final instances, the slick will be so thin that the imbalances of surface tensions between air-water, air-oil and water-oil will substitute the gravity as active force, maintaining the tension exerted by the water as retarding force. This last regime is called viscous-surface tension spreading. For big spills ( $>10^4 \text{ m}^3$ ), these regimes last for 1 to 4 hours, four to ten days and several months, respectively.

Further models has tried to simulate more realistically the trajectories by including other process like dispersion caused by winds and water currents, and those process which represents mass exchanges between different environmental compartments (called fate processes) like evaporation, dissolution, emulsification, etc.

Two approaches for computing oil spills trajectories are commonly encountered in the literature; Lagrangian models and Eulerian models. The Lagrangian models (Shen e Yapa (1988)) consist basically in representing the oil slick by an ensemble of a large number of small parcels which are advected by a velocity which results from a combination of the action of winds and currents. Then, the slick is divided into pie shaped segments or strips, depending if the form of the slick is nearly circular or elongated. Fay (1969) spreading formulas are then applied to each segment. For the Eulerian approach, two model are usually encountered, those based in the mass and momentum equations applied to the oil slick (Hess and Kerr (1979), Benqué et. alii. (1982)), and those based on a convection-diffusion equation (Venkatesh (1988) among others), in which the diffusive part of the equation represents de spreading of oil by itself and the convective terms represents the advection of oil by currents and winds. The model presented in this paper belongs to the second category of Eulerian models and it is based on the integration of mass and momentum equation over the thickness of the oil slick.

## 2 MATHEMATICAL MODEL

This model is based on the integration of the mass and momentum equations along the thickness of the slick. Therefore, it takes into account the spreading of oil by itself and the transport caused by winds and water currents. As the surface tension is neglected and, therefore, only the first and second spreading regimes, i.e. gravity-inertial and gravity-viscous spreading are considered, the model is applicable up to about ten days after the spill, depending on its magnitude. The evaporation is considered through a logarithmic decay model presented by Stiver and Mackay (1984).

Following, it will be shown how the mathematical model for the motion of oil is obtained.

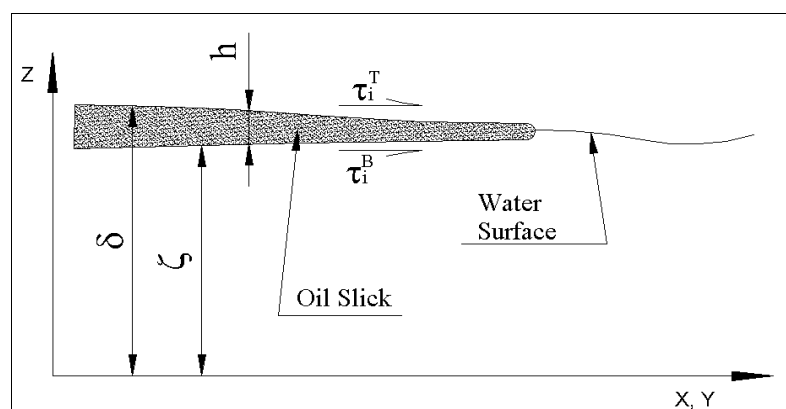


Figure 1. Variables considered in the vertical integration of governing equations

Fig. 1 shows schematically an oil slick being transported by the shear stresses exerted by water currents and winds. The oil flow is governed by mass and momentum equations for incompressible flows. These equations are:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\tau_{ij})}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (2)$$

Following Hoult (1972), we can consider that the oil viscosity is much large than the water viscosity. Thus, the vertical velocity gradients within the oil are much less than these gradients in the water or in the wind. It is, therefore, a good approximation to consider that the flow parameters (velocity and pressure) do not vary across the thickness of the slick. Integrating the governing equations, Eqs. ( 1 ) and ( 2 ), across the slick thickness as shown in Fig. 1, considering hydrostatic pressure distribution within the oil, we obtain

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\mathbf{u}}_i h)}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{\mathbf{u}}_i h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{\mathbf{u}}_i \bar{\mathbf{u}}_j h)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( h \mu \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_i}{\partial x_j} \right) + \tau_i^T - \tau_i^B - \rho g h \Delta \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (4)$$

Where the bar variables represent vertical integral averages,  $h$  is the oil slick thickness and  $\Delta$  is a parameter which relates the oil and water densities  $\Delta = (\rho_o - \rho_w) / \rho_w$ . The terms  $\tau$  represent the shear stresses on top and bottom of the slick exerted by winds and water currents, respectively. These stresses were calculated as (Benque *et. alii.* (1982), Cuesta *et. alii.* (1990)),

$$\tau_i^T = C_f^{wind} \mathbf{u}_i^{wind} \quad (5)$$

$$\tau_i^B = C_f^{water} (\mathbf{u}_i^{oil} - \mathbf{V}_i^{water}) \quad (6)$$

where,  $C_f^{wind}$  e  $C_f^{water}$  were made  $3 \times 10^{-5}$  and  $1 \times 10^{-6}$  respectively. Those constant values are commonly used in these models (Idelfonso Cuesta, personal communication). The  $C_f^{water}$  value is an empirically adjusted value, while  $C_f^{wind}$  value is calculated in such way that the final velocity of the slick mass center be about 3 % of wind velocity (3% rule).

### 3 NUMERICAL SOLUTION

Due the similarity of the governing equations with those used in Shallow Waters Flows, an adaptation of the semi-implicit method presented by Casulli and Cheng (1992) is used here for generalized coordinates, a finite volume procedure and co-located variables. This fact makes the model easily applicable to complex coastal geographies. Transforming Eqs. (3) and (4) to generalized coordinates following the procedure described in details in Maliska (1995), we obtain



$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho h}{J} \right) + \frac{\partial(\rho h \tilde{U})}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho h \tilde{V})}{\partial \eta} = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho h u}{J} \right) + \frac{\partial(\rho h \tilde{U} u)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho h \tilde{V} u)}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( h \mu J \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - h \mu J \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( h \mu J \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - h \mu J \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\tau_y^T}{J} - \frac{\tau_y^B}{J} + \frac{\rho g h \Delta}{J} \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho h v}{J} \right) + \frac{\partial(\rho h \tilde{U} v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho h \tilde{V} v)}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( h \mu J \alpha \frac{\partial v}{\partial \xi} - h \mu J \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( h \mu J \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} - h \mu J \beta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\tau_y^T}{J} - \frac{\tau_y^B}{J} + \frac{\rho g h \Delta}{J} \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

The variables  $\xi$  and  $\eta$  are the coordinates in the generalized coordinate system,  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  are the components of the covariant metric tensor,  $J$  is the Jacobian of the transformation and  $\tilde{U}$  and  $\tilde{V}$  are the contravariant velocities defined as

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= (y_\eta u - x_\eta v) \\ \tilde{V} &= (x_\xi v - y_\xi u) \end{aligned} \quad (10)$$

These equations were discretized using a finite volume approach, the time variation was considered explicitly in momentum equations and implicitly for the mass conservation equation used to calculate the oil thickness distribution. Fig. 2 shows a control volume in the computational domain used for the equations discretization.

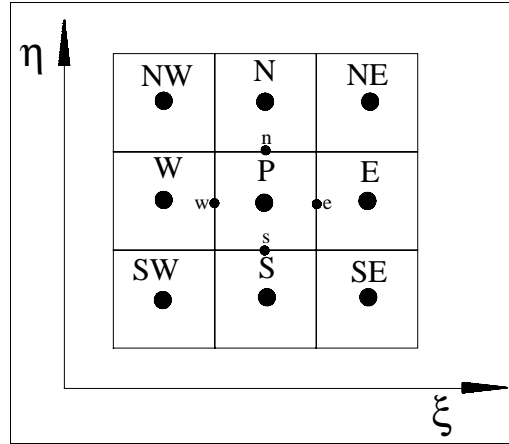


Figure 1: Control Volume on the Computational Domain

Using WUDS (Raithby & Torrance (1979)) as interpolation function and evaluating explicitly the time derivative, we have, taking the east face as example, the velocities at this face given by

$$u_e = F[u]_e^0 - \frac{\rho \Delta t g \Delta h_e}{M_e} \left[ \frac{\xi_x}{J|_e} \frac{(h_E - h_P)}{\Delta \xi} + \frac{\eta_x}{J|_e} \frac{(h_{NE} + h_N - h_{SE} - h_S)}{4 \Delta \eta} \right] \quad (11)$$

$$v_e = F[v]_e^0 - \frac{\rho \Delta t g \Delta h_e}{M_e} \left[ \frac{\xi_y}{J}_e \frac{(h_E - h_P)}{\Delta \xi} + \frac{\eta_y}{J}_e \frac{(h_{NE} + h_N - h_{SE} - h_S)}{4 \Delta \eta} \right] \quad (12)$$

where  $F[ ]$  is an explicit convective-diffusive finite volume operator<sup>1</sup> and represents the explicit convection-diffusion balance of the variable for a control volume. It is expressed for a generic variable  $\phi$  as,

$$F[\phi_P] = \frac{\Delta t}{M_P} \left[ \phi_P^0 \left( \frac{M_P^0}{\Delta t} - A_P \right) + \sum A_{nb} \phi_{NB}^0 + \hat{S} \Delta V \right] \quad (13)$$

The mass balance in the volume  $P$  which is obtained by the discretization of Eq. ( 7 ), is given by,

$$h_P = h_P^0 - \rho J_P \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left[ \left[ h^0 \tilde{U} \Big|_e - h^0 \tilde{U} \Big|_w \right] \right] - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left[ \left[ h^0 \tilde{V} \Big|_n - h^0 \tilde{V} \Big|_s \right] \right] \quad (14)$$

Substituting the Cartesian velocities into the expressions for the contravariant velocities, and then into the mass equation, we obtain an equation for the oil thickness as<sup>2</sup>:

$$A_P h_P = A_w h_W + A_n h_N + A_s h_S + A_{nw} h_{NW} + A_{sw} h_{SW} + B \quad (15)$$

This equation is solved using the Gauss-Seidel method. Note that for the momentum equations no linear system of equations has to be solved. The solution procedure for the coupled system is:

1. Initialize all variables at  $t=0$ . The thickness of the oil for the whole domain is initialized with a small value (say  $1 \times 10^{-15}$ ) to avoid division by zero. Define the region and the thickness of the oil spill.
2. Calculate the coefficient of the momentum equations. Determine the velocity field explicitly, i.e. no linear system has to be solved here.
3. With the most recent velocities, calculate the coefficients of the momentum equation. Compute the convective-diffusive operator to enter the evaluation of the source term of the mass equation.
4. Calculates the coefficients and source term of the mass equation and solve the oil thickness.
5. Recalculate the oil thickness field taking into account the mass transfer processes like evaporation, sinking, etc.
6. Advance a time step, update all fields and cycle back to step one.

Two type boundary conditions were used<sup>3</sup>. Where the domain coincides with shorelines no mass flux was prescribed and at the open sea locally parabolic conditions were assumed. This allows the slick to leave the computational domain without affecting the thickness distribution of the slick inside the domain.

---

<sup>1,2,3</sup> Further details could be seen in Paladino (2000)

These conditions were applied as suggested in Maliska (1981) and Van Doormaal and Raithby (1984). For the impermeable frontier, the velocity components are zero (taking in account the no-slip condition) and, in those frontiers in which locally parabolic flux is considered, the velocities derivatives in a normal direction to the frontier are zero.

#### 4 MODEL VALIDATION AND RESULTS

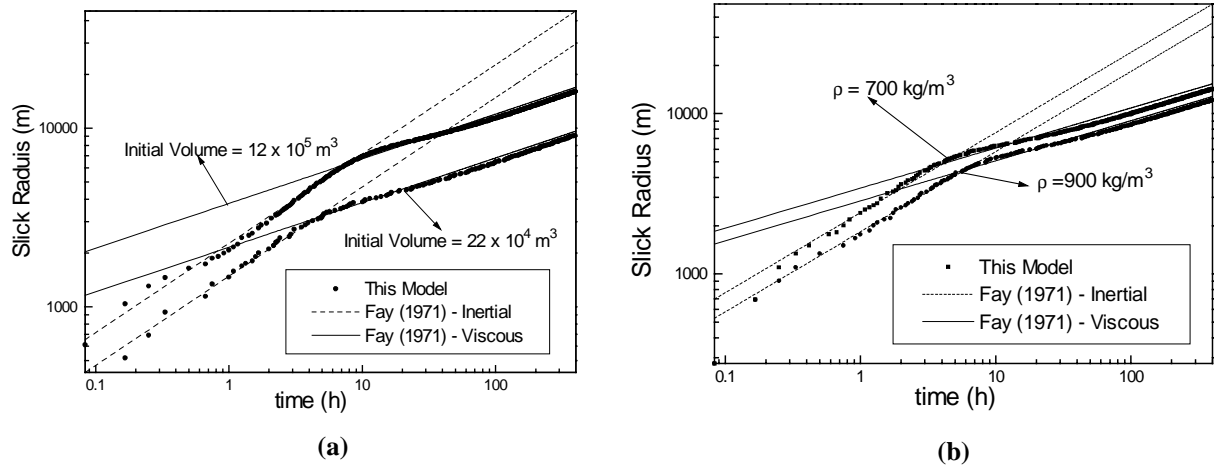
The first step in validating a numerical model is to compare with available analytical solutions. For this problem the semi-analytical solution of Fay (1971) are adequate. Physical validation requires field measurements. As was already mentioned, Fay's results describe the spreading of an instantaneous spill in calm waters. The results for the gravity-inertial and gravity-viscous spreading regimes are, respectively

$$R = K_{g-i} (\Delta g V t^2)^{1/4} \quad (16)$$

$$R = K_{g-v} \left( \frac{\Delta g V^2 t^{3/2}}{\nu^{1/2}} \right)^{1/6} \quad (17)$$

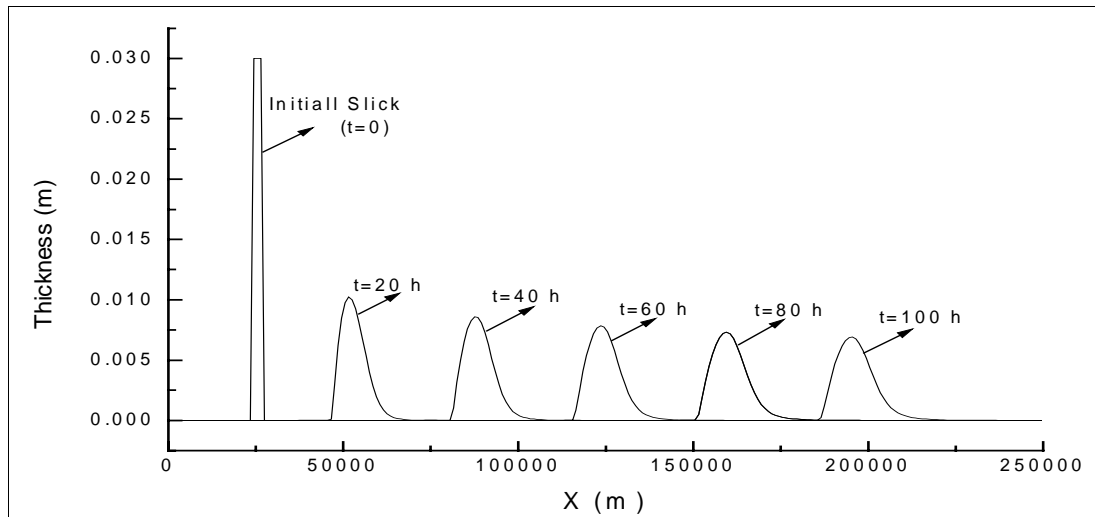
In the above equations R is the slick radius (in calm waters the spreading is axis-symmetric) as a function of elapsed time after the spill.

The following figures shows the results for the two spreading regimes considered by the model, for different oil densities and different initial spills.



**Figure 2: Comparison of theoretical (Fay (1971)) and numerical solutions for axis-symmetric spreading in calm water, for (a) different volumes spilled and (b) different oil densities.**

In the first problem, the water body was considered initially quiescent, with the water movement induced by the oil movement. The next figure shows the one-dimensional evolution of an oil slick, considering an instantaneous spill, in the case that the water is moving. In this case, it was considered a spatially and temporally constant current of magnitude of 0.5 m/s in the x-direction.

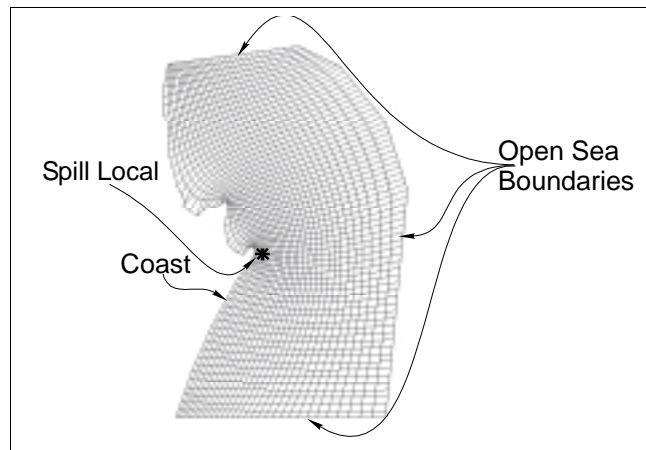


**Figure 3: One-dimensional evolution of an slick subjected to a constant water current of 0.5 m/s. Note that the scales are distorted, the maximum thickness is 30 mm and the whole domain has 250 km.**

As it was expected, after a period of time in which the slick accelerates, the mass center of the slick moves with the water velocity.

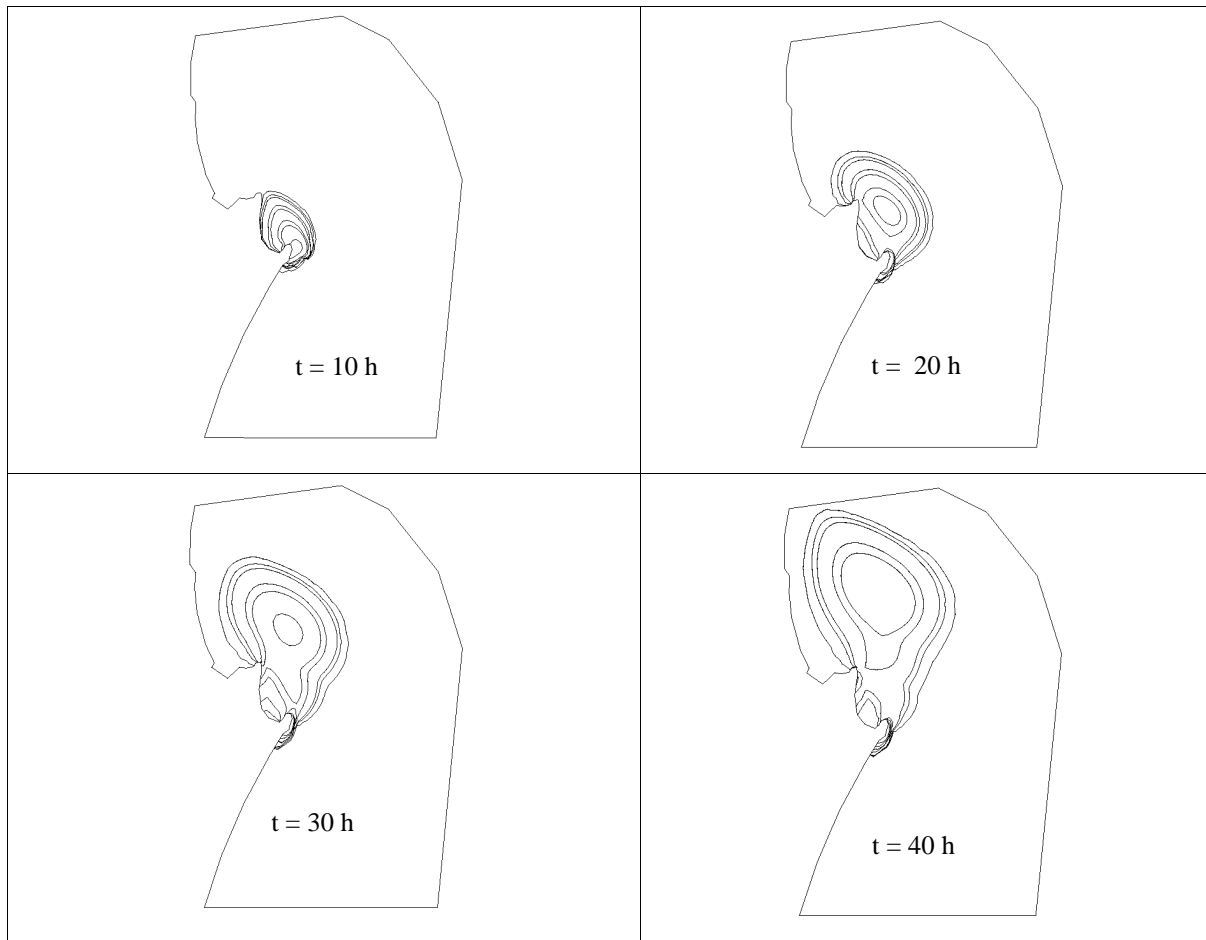
Finally, to show the model features, it was applied to simulate an eventual spill at the vicinity of the harbor at São Francisco do Sul, Santa Catarina, where there is an oil charge/discharge point at 9 km. off shore. Therefore, this is a local with high spill risk which could be caused by pipeline rupture or failure in charge/discharge operations.

The following figure shows the generalized grid used in the simulations. The line  $\xi = 1$  represents the coast in the region of São Francisco do Sul. The domain has been extended into the sea just to cover the region of interest, reminding that, due to the locally parabolic condition far from the shoreline, if the slick passes through these boundaries, this does not affect the slick position inside the domain.



**Figure 4: Generalized grid used in the simulations at the port of São Francisco do Sul.**

As this simulation has the only purpose to show the generality of the model to a coastal spill, and not to simulate accurately a real problem, the current field was considered spatially constant and variable as a sine function of time, trying to represent approximately the tidal currents. Reports of experimental measurements at the region show predominantly south-southwest currents with residual currents of approximately 0.05 m/s and maximum tidal currents of 0.16 m/s. The wind was considered from south-southeast blowing at 30 km/h.



**Figure 5: Temporal-spatial evolution of an oil slick spilled at the harbor of São Franico do Sul**

Due to the periodic behavior of the tidal currents, the movement of the slick is caused primarily by the action of the residual currents. Since they are small, the slick movement is also small.

## 5 Conclusions

This paper presented a mathematical and numerical model to predict oil spill movements in the sea. Results for the spreading in the calm water were compared with semi-analytical solutions and the agreement was good. Although there are no benchmark solutions available for the case where the water moves, the results for a general problem, where the water moves periodically in time, follow the expected physical trends and the mass center of the slick moves with the water current velocity.

The model can be used to simulate *in situ* oil spills in order to assist pollution combat tasks, so it is an important tool in any oil spill contingency plan. It can be also used to estimate potential risks in decision support for tankers and oil ducts route selection, distilleries and ground tanks location, among other oil storing tasks.

## 6 Bibliography

- Benqué, J. P., Hauguel, A., and Viollet, P. L. (1982) “Engineering Application of Computational Hydraulics”, II, Pitman Advanced Publishing Program, London, pp. 57-63.
- Buckmaster, J. (1973), “Viscous-Gravity spreading of an oil slick”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 59, No. 3, pp. 481 – 491.

- Casulli V. and Cheng R. T. (1992) “Semi-Implicit Finite Difference Methods for Three Dimensional Shallow Water Flow”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 15, pp. 629-648.
- Cuesta, I., Grau, F. X., Giralt, F. (1990) “Numerical Simulation of Oil Spills in a Generalized Domain”, *Oil and Chemical Pollution*, 7, pp. 143 – 159.
- Fanelop, T. K, Waldman, G. D. (1971) “Dynamics of Oil Slicks”, *AIAA Journal*, Vol. 10, No. 4, pp. 506 – 510.
- Fay, J. A. (1969) “The spread of oil slicks on a calm sea”, *Oil on the sea* Plenum, New York, pp. 53 – 64.
- Fay, J. A. (1971) “Physical Processes in the Spread of Oil on a Water Surface”, *Proceedings of the Joint Conference on Prevention and Control of Oil Spills*, American Petroleum Institute, Washington D. C., pp 463-467.
- Hess, K. W. and Kerr, C. L. (1979) “A Model to Forecast the Motion of Oil on the Sea”, *Proceedings of the Oil Spill Conference*, pp 653-663.
- Houtt, D. P.(1972). “Oil Spreading on the Sea”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, pp. 341 – 367.
- Maliska, C. R. (1981), “A Solution Method for Three–Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates”, PhD. Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.
- Maliska, C. R. (1995), “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional” *Livros Técnicos e Científicos Editora*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Paladino, E. E.(2000), “Modelagem Matemática e Simulação Numérica de Derrames de Petróleo no Mar”, MSc. Thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC.
- Raithby & Torrance (1979), “Upstream Weighted Differencing Schemes and Their Applications to Elliptic Problems Involving Fluid Flow”, *Computers and Fluids*, Vol.2, pp. 191-206.
- Shen, H. T. e Yapa, P. D. (1988) “Oil Slick Transport in Rivers”, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 114, N<sup>o</sup> 5, pp 529-543.
- Stiver, W. And Mackay, D. (1984) “Evaporation Rate of Spills of Hidrocarbons and Petroleum Mixtures”, *Envir. Sci. Tecnol*, Vol. 18, pp 834-840.
- Van Doormaal, J. P. And Raithby, G. D. (1984), “Enhancements of the SIMPLE Method for predicting Ingressible Fluid Frow, *Numerical Heat Trasfer*, vol. 7, pp. 147-163.
- Venkatesh (1988) “The Oil Spill Behavior Model of the Canadian Atmospheric Environment Service”, Part 1, *ATMOSPHERE–OCEAN*, Vol. 26, pp 93-108.

# ANÁLISE DE UM MÉTODO EM VOLUMES FINITOS COM SISTEMA DE COORDENADAS LOCAIS PARA A SOLUÇÃO ACOPLADA DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Jeferson Avila Souza

Clóvis Raimundo Maliska

Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. SINMEC – Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor Computacional. 88040-900, Florianópolis, SC, Brasil, e-mail souza@sinmec.ufsc.br

## RESUMO

A solução acoplada das equações de Navier-Stokes e conservação da massa vem tornando-se uma alternativa atraente e cada vez mais viável em função do aumento exponencial da capacidade de processamento e armazenamento dos computadores modernos. A metodologia discutida neste trabalho é um método da classe de volumes finitos desenvolvido por Raw (1985) e conhecido por FIELDS, que além de resolver as equações de forma acoplada possui algumas características interessantes com relação a função de interpolação e montagem das equações, assuntos que serão explorados neste trabalho.

**Palavras-chave:** *Control-Volume*, funções de interpolação, solução simultânea.

## 1. INTRODUÇÃO

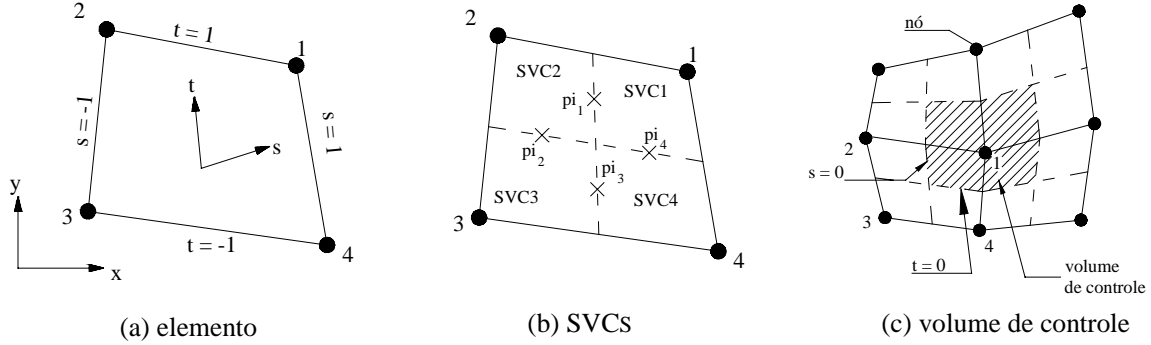
O método FIELDS (*FInite ELement Differential Scheme*) é uma metodologia para a solução de problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor que combina a conservação da propriedade dentro do volume de controle, característica fundamental dos métodos de volumes finitos, com a flexibilidade de um sistema de coordenadas local, característica herdada de elementos finitos, e que é uma ferramenta muito apropriada para a discretização de geometrias complexas através de malhas não estruturadas.

O FIELDS também possui outras características importantes; uma delas é utilizar como função de interpolação as próprias equações do movimento, em sua forma completa discretizada. Isto dá ao método a capacidade de incorporar todos os detalhes da física envolvida no problema, propicia um forte acoplamento  $p$ - $v$  e estabilidade durante a solução. Outra importante característica está associada a utilização de um esquema de interpolação para o termo convectivo da função de interpolação, que envolve ao mesmo tempo, as variáveis armazenadas nos nós e nos pontos de interpolação. O terceiro ponto importante é a maneira como o termo difusivo é discretizado, no qual não é simplificado o divergente do campo de velocidades mesmo em escoamentos incompressíveis.

Neste trabalho o método FIELDS será brevemente descrito e duas de suas características importantes serão exploradas. A primeira é a análise de três formas possíveis para a aplicação de um esquema *skew upwind* para o termo convectivo das funções de interpolação as quais serão então comparados com relação a taxa de convergência e o tempo de CPU utilizado para o cálculo dos coeficientes. A seguir a influência do divergente do campo de velocidades adicionado à parcela com os termos difusivos também será analisada.

## 2. REVISÃO DO MÉTODO

Neste método o domínio de cálculo é subdividido em elementos que posteriormente irão contribuir para a formação dos volumes de controle. O método utiliza-se de quadriláteros como elementos finitos os quais são formados pela união de quatro nós, onde todas as variáveis são armazenadas, constituindo assim em um arranjo co-localizado. Cada elemento deve ser tratado isoladamente através da utilização de um sistema de coordenadas local. O domínio deste sistema  $(s, t)$  varia de  $-1$  à  $+1$  conforme mostra a Figura 1a



**Figura 1:** Características geométricas

Deve ser observado na Figura 1a que o sistema de coordenadas local não é ortogonal e que as linhas que unem dois nós são sempre linhas de  $s$  ou  $t$  constantes. Cada elemento está ainda dividido em quatro entes menores chamados de sub-volumes de controle (SVC), como mostra a Figura 1b. Esta mesma figura mostra também os pontos onde as propriedades devem ser integradas os quais são denominados de pontos de integração ou simplesmente  $pi_s$ .

Todas as propriedades, físicas ou geométricas, devem ser interpoladas para qualquer ponto dentro do elemento somente em função das propriedades armazenadas nos nós. Isto é conseguido através de uma transformação de coordenadas do sistema global  $(x, y)$  para o sistema local  $(s, t)$ . Assim uma propriedade qualquer  $\phi$  pode ser determinada em qualquer posição no interior do elemento através da expressão

$$\phi_{(s,t)} = 0.25[(1+s)(1+t)\phi_1 + (1-s)(1+t)\phi_2 + (1-s)(1-t)\phi_3 + (1+s)(1-t)\phi_4] \quad (1)$$

Finalmente, o volume de controle, mostrado Figura 1c, é criado em torno dos nós e recebe contribuições de quatro elementos diferentes.

A discretização completa das equações pode ser encontrada em Schneider (1987), porém uma versão resumida será mostrada. Por exemplo a equação de Navier-Stokes para  $u$  é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \right] + S_u \quad (2)$$

Através da integração sobre o volume de controle, e da definição de um vetor normal a superfície do mesmo dado por  $dn_j = -dx + dy$ , a Eq. (2) resulta

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) dV + \int_S (\rho u_j u) dn_j - \int_S \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dn_j + \int_S p dy - \int_V S_u dV = 0 \quad (3)$$



Para o SVC1, o termo convectivo deve ser avaliado nos pontos de integração  $\pi_1$  e  $\pi_4$ . Desta forma as integrais sobre as superfícies que contém estes pontos podem ser aproximadas por

$$\int_{\pi_1/\pi_4} (\rho u_j^0) dn_j = \rho u_1^0 \Delta y_1 - \rho v_1^0 \Delta x_1 + \rho u_4^0 \Delta y_4 - \rho v_4^0 \Delta x_4 = \sum_{j=1}^4 a_{1,j}^{uc} u_j \quad (4)$$

No termo convectivo, tanto o coeficiente “ $a$ ” como a variável “ $u$ ” são escritos em letras minúsculas. Isto indica que o subíndice  $j$  refere-se aos pontos de integração e não aos nós.

Exatamente como o termo convectivo, o termo difusivo será avaliado sobre as mesmas superfícies. A parcela difusiva da Eq. (3) pode ser então escrita na forma

$$-\int_{\pi_1/\pi_4} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dn_j = -2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\pi_1} \Delta y_1 + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{\pi_1} \Delta x_1 \quad (5)$$

Procedendo de maneira idêntica para o ponto de integração 4 e com o auxílio da Eq. (1) para a avaliação das derivadas, obtém-se uma forma compacta

$$-\int_{\pi_1/\pi_4} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dn_j = \sum_{j=1}^4 A_{1,j}^{ud} U_j + \sum_{j=1}^4 A_{1,j}^{vd} V_j \quad (6)$$

Os termos transiente, de pressão e fonte podem ser facilmente discretizados como

$$\int_{SVC1} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) da = \rho J_1 \left( \frac{U_1 - U_1^0}{\Delta t} \right) = \sum_{j=1}^4 A_{1,j}^{ut} U_j - B_1^{ut} \quad (7)$$

$$\int_{\pi_1/\pi_4} p dy = p_1 \Delta y_1 + p_4 \Delta y_4 = \sum_{j=1}^4 a_{1,j}^p p_j \quad (8)$$

$$-\int_{SVC1} S_u da = -S_u \Big|_{(y_2, y_2)} J_1 = -B_1^s \quad (9)$$

onde  $J$  é o Jacobiano da transformação.

Com todos os termos discretizados é possível dar a forma final para a equação da quantidade de movimento para a velocidade  $u$ , por

$$\sum_{j=1}^4 (A_{1,j}^{ut} + A_{1,j}^{ud}) U_j + \sum_{j=1}^4 A_{1,j}^{vd} V_j + \sum_{j=1}^4 a_{1,j}^{uc} u_j + \sum_{j=1}^4 a_{1,j}^p p_j = B_1^t + B_1^s \quad (10)$$

onde os “ $A_s$ ” e os “ $a_s$ ” são matrizes 4x4 em que as linhas representam os sub-volumes e as colunas representam as contribuições de cada nó ou ponto de integração para o sub-volume da linha em questão. As letras maiúsculas referem-se aos nós enquanto que as minúscula aos pontos de integração. Os superíndices  $c$ ,  $d$ ,  $p$ ,  $s$  e  $t$  indicam respectivamente convectivo, difusivo, pressão, fonte e tempo, enquanto que  $u$  e  $v$  indicam se o coeficiente multiplica a velocidade  $U$  ou  $V$ .

O vetor  $u_j$  representa o valor das propriedades nos quatro pontos de integração. Para a avaliação deste vetor faz-se necessário a utilização da função de interpolação que no método FIELDS acaba por ser a equação da quantidade do movimento discretizada de forma quase idêntica A Eq. (10). Como este trabalho propõe-se a explorar apenas os termos convectivos desta função de interpolação, apenas este termo será discretizado no item seguinte.

### 3. FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO PARA O TERMO CONVECTIVO

Nesta secção três forma de interpolação para o termo convectivo serão abordadas: duas apresentadas por Raw (1985) e um terceira proposta neste trabalho.

Antes da apresentação dos três esquema de interpolação, uma breve introdução aos já conhecidos esquemas *skew*, é cabível de ser apresentada.

A Figura 2a mostra um elemento com seus quatro pontos de integração e quatro nós. É também mostrada a direção  $\eta$  do fluxo a qual está alinhada com o vetor velocidade  $V$ .

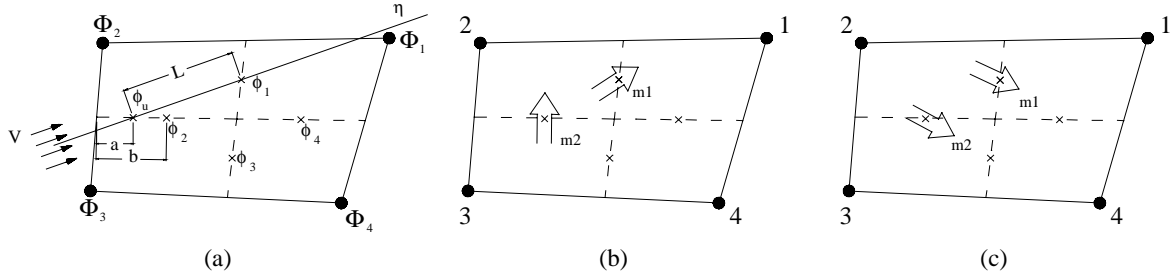


Figura 2: Esquemas de interpolação

O termo convectivo

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (11)$$

pode ser aproximado para o ponto de integração 1 por

$$\rho V \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \rho V \frac{(\phi_1 - \phi_u)}{L} \quad (12)$$

onde  $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $\phi_u$  é a aproximação para  $\phi_1$  e  $L$  é o um comprimento.

A forma como será interpolado  $\phi_u$  irá determinar o tipo de esquema de interpolação.

#### 3.1. Skew Upstream differential Scheme (*suds*)

Este primeiro esquema apresentado é o mais completo de todos, pois utiliza para a interpolação de  $\phi_u$  tanto as variáveis armazenadas nos nós como nos pontos de integração.

Referindo-se novamente a Figura 2a pode ser observado que a linha de corrente  $\eta$  intersecta o SVC2 em um ponto entre  $\phi_2$  e o ponto médio entre  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$ , então  $\phi_u$  deve ser interpolado em função de  $\phi_2$ ,  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$  e pode ser expresso por

$$\phi_u = \frac{a}{b} \phi_2 + \left(1 - \frac{a}{b}\right) \left(\frac{\Phi_2 + \Phi_3}{2}\right) \quad (13)$$

Desta forma, englobando todas as possibilidades de interseção da linha de corrente do escoamento com as bordas dos SVC2 ou do SVC1, a avaliação do termo convectivo para este esquema acaba envolvendo oito variáveis: quatro nos pontos de integração e quatro nos nós. O termo convectivo pode então ser expresso para um elemento como

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (c_{i,j} \phi_{i,j} + C_{i,j} \Phi_{i,j}) \quad (14)$$

onde  $i$  indica o SVC e  $j$  o ponto de integração, para os coeficientes em letras minúsculas, e o nó para os coeficientes em letras maiúsculas.

Para a criação das funções de interpolação é preciso isolar a variável  $u$ , o que torna necessário a inversão da matriz de coeficientes  $c_{i,j}$ . Mesmo sabendo-se que a maioria dos seus coeficientes são zeros, é impossível determinar quais não são, tornando-se necessário que um método geral de inversão de matrizes seja utilizado. Os métodos que operam com todos os termos da matriz executam sempre o mesmo número de operações, não interessando a quantidade de termos nulos.

### 3.2. Skew upstream differential scheme-node (*suds-no*)

Este é o esquema proposto neste trabalho o qual é uma simplificação do esquema anterior, onde apenas as variáveis armazenadas nos nós são utilizadas na interpolação de  $\phi_u$ . O procedimento é idêntico ao anterior, porém  $\phi_u$  é interpolado em um ponto situado na borda do elemento, ao invés da borda do SVC, como no esquema *suds*.

No escoamento mostrado na Figura 2a, agora a discretização de  $\phi_u$  torna-se

$$\phi_u = \frac{a}{b}\Phi_2 + \left(1 - \frac{a}{b}\right)\Phi_3 \quad (15)$$

Esta formulação é mais simples do que a *suds*, pois agora existem menos formas de interpolar  $\phi_u$  bem como apenas quatro variáveis estão envolvidas.

A motivação para a criação deste esquema de interpolação foi dada pelo fato que a inversão de uma matriz 4x4 com a maior parte de seus coeficientes iguais a zero, implica em um gasto de tempo de processamento e armazenagem de dados desnecessário. Usando apenas os valores nos nós para interpolar  $\phi_u$ , a matriz  $c_{i,j}$  torna-se uma matriz diagonal, fazendo com que a operação de inversão desta matriz resulte em apenas quatro operações de divisão.

### 3.3. Skewed upstream weighted differential scheme (*suwds*)

A última forma de interpolação (Schneider (1986)) é construída em função da observação dos fluxos de massa que entram e saem de um determinado SVC, e possui a vantagem de gerar apenas coeficientes positivos.

A Figura 2b mostra o fluxo de massa  $m_1$  saindo do SVC2, e o fluxo de massa  $m_2$  entrando, conseqüentemente  $m_1$  e  $m_2$  possuem sinais diferentes. Se  $|m_2| > |m_1|$  é correto dizer que a variável no ponto de integração 1, ( $\phi_1$ ) depende apenas da variável no ponto de integração 2. Neste caso  $\phi_1$  deve depender apenas de  $\phi_2$ .

Olhando agora para Figura 2c onde tanto  $m_1$  quanto  $m_2$  estão saindo do SVC2, neste caso o fluxo de massa que deixa o SVC2 precisa vir de dentro do SVC, ao invés de  $m_2$ , então agora  $\phi_2$  deve depender apenas de  $\Phi_2$ .

A última possibilidade é quando  $m_1$  está saindo e  $m_2$  entrando no SVC2 (Figura 2b), mas  $|m_2| < |m_1|$ . Neste caso, como o fluxo de massa  $m_1$  que deixa o SVC2 é maior do que o fluxo  $m_2$  que entra, parte da massa que sai por  $m_1$  precisa vir do interior do volume, assim  $\phi_1$  deve depender tanto de  $\phi_2$  quanto de  $\Phi_2$ .

As três possibilidades acima podem ser resumidas em uma única expressão

$$\phi_u = s\phi_2 + (1+s)\Phi_2 \quad \text{onde} \quad s = \max\left[\min\left(-\frac{m_2}{m_1}, 1\right), 0\right] \quad (16)$$

Este esquema, assim como o *suds* também se utiliza da matriz  $c_{i,j}$ .

## 4. DIVERGENTE DO CAMPO DE VELOCIDADES

É sabido que para escoamentos incompressíveis onde a massa específica ( $\rho$ ) não varia ao longo do escoamento, os termos difusivos podem ser simplificados. Relembrando a equação

de Navier-Stokes para a velocidade  $u$  na sua forma mais geral, a parcela com os termos viscosos é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (17)$$

Se  $\mu$  for considerado constante e o termo com o divergente (equação da massa na qual  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ ) for simplificado, através de algumas operações algébricas a Eq. (17) pode ser escrita como

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (18)$$

É neste ponto que para escoamentos incompressíveis, o divergente de velocidade é novamente feito igual a zero e a Eq. (18) toma a forma usualmente utilizada. Porém o método FIELDS não faz esta simplificação. Na busca de soluções analíticas as simplificações são bem vindas, enquanto que a manutenção de termos são artifícios usados em soluções numéricas. A inclusão deste termo, modifica a matriz dos coeficientes e aparentemente proporciona um maior acoplamento entre as equações, melhorando a estabilidade e taxa de convergência do método.

## 5. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Uma das características mais importantes do método FIELDS está relacionado com a forma de aproximação do termo convectivo na função de interpolação. No item 3 foram mostradas três formas possíveis para estas aproximações. Aqui será feita uma breve comparação entre o desempenho destes esquemas de interpolação.

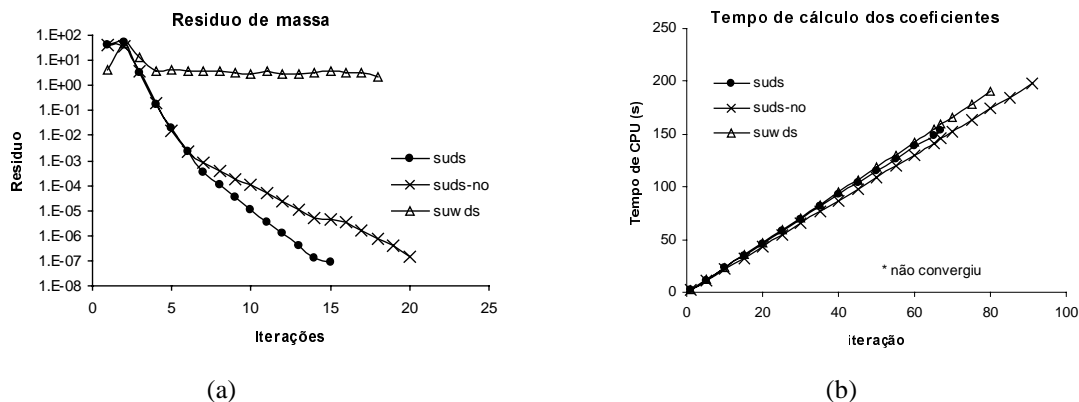
O problema aqui utilizado para tanto é o da cavidade quadrada com tampa móvel. Este problema foi escolhido pois apresenta as principais dificuldades encontradas na solução numérica de problemas de mecânica dos fluidos, que são o forte acoplamento entre os campos de velocidade e pressão e as não-linearidades do termo convectivo. Este problema foi testado e os resultados comparados com os obtidos por Guia *et al.* (1975). Como o objetivo deste trabalho não é a validação da metodologia FIELDS, mas sim o estudo de algumas características do método, estes resultados não são mostrados.

O primeiro parâmetro utilizado para a comparação é a taxa de convergência. A Figura 3a mostra os resíduos para o problema da cavidade com  $Re = 1000$ , malha cartesiana  $31 \times 31$  volumes e  $\Delta t = 1$ .

Dos três esquemas de interpolação estudados o que apresentou o melhor desempenho foi o *suds*. Em comparação ao esquema *suds-no*, este melhor desempenho pode ser explicado por dois fatores: o primeiro é relacionado com a proximidade a qual a informação do escoamento é captada. No *suds*,  $\phi_u$  é interpolado na intersecção da linha de corrente do escoamento com a borda do sub-volume, ao invés da borda do elemento, como ocorre no esquema *suds-no*. Isto torna o termo convectivo mais significativo na função de interpolação, algo sempre desejado na solução de problemas predominantemente convectivos. O segundo fator está relacionado com a forte ligação entre as variáveis dos pontos de integração dentro do elemento. A matriz para os pontos de integração ( $c_{i,j}$ ) é na realidade um sistema de equações que relaciona os quatro pontos de integração de cada elemento. Com a solução deste sistema, na realidade estão sendo encontrados valores para as variáveis nos pontos de integração que ao mesmo tempo satisfazem as necessidades do escoamento em quatro posições diferentes dentro do mesmo elemento. Como cada elemento contribui para a formação dos coeficientes de quatro volumes

diferentes, este esquema acaba por também criar uma certa conectividade entre os quatro volumes adjacentes.

É estranho porém o comportamento do esquema *suwds*, que funciona perfeitamente para problemas convectivos/difusivos onde o campo de velocidades é conhecido, como pode ser verificado em Schneider (1986). Porém, para o problema da cavidade, onde o campo de velocidades não é conhecido, este esquema funcionou bem apenas para baixos números de Reynolds. Muitas são as citações destes esquema de interpolação na literatura, mas em nenhum dos trabalhos verificados, foi encontrado sua aplicação em algum problema semelhante. Aparentemente a forma “pobre” pela qual este esquema calcula os termos convectivos onde a variável no ponto de integração é aproximada em função de no máximo dois pontos (um nó e um ponto de integração) não consegue captar corretamente as direções preferenciais do escoamento, interferindo de tal forma a não permitir a convergência.



**Figura 3**– Comparação entre os esquemas de interpolação para  $Re = 1000$

As observações feitas a respeito do esquema *suwds* não são conclusivas. Embora os algoritmos utilizados para todos os três esquemas de interpolação sejam todos derivados do criado para o esquema *suds*, sempre há a possibilidade de que exista algum engano, o qual não foi identificado, e que pode estar causando este comportamento inesperado. Talvez a dúvida sobre este esquema de interpolação só poderá ser eliminada com a repetição do trabalho de Schneider (1986), confirmando sua correta implementação, e então através deste algoritmo utilizá-lo para a solução dos problemas propostos neste trabalho.

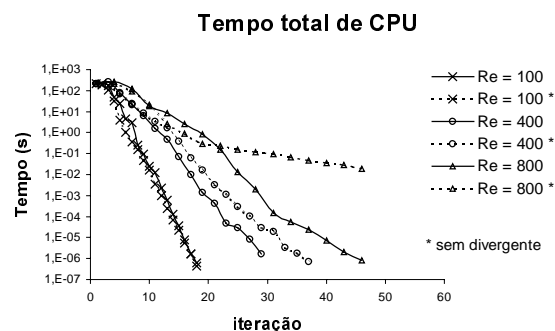
A principal motivação para a criação do esquema *suds-no* foi a possibilidade de redução do tempo de cálculo dos coeficientes. Como o esquema *suds-no* é muito semelhante ao esquema *suds*, sua rotina de cálculo foi criada a partir da rotina do esquema *suds* onde pequenas adaptações foram feitas para que as interpolações pudessem ser realizadas não mais nos contornos do sub-volume, mas sim do elemento. Tendo em vista estes fatores, é possível a comparação dos tempos de CPU para o cálculo dos coeficientes entre os esquemas. A Figura 3b mostra os tempos de CPU para o cálculo dos coeficientes.

As curvas da Figura 3b, mostram que o esquema *suds-no* consome menos tempo de CPU para o cálculo dos coeficientes, porém esta superioridade é pequena e como a convergência é mais lenta, o número excedente de iterações para se alcançar um determinado resíduo ( $1 \times 10^{-6}$  neste problema) acaba por tornar o tempo total de CPU maior. Como o tempo gasto com o cálculo dos coeficientes depende somente do esquema de interpolação e do número de elementos (geometria), os resultados observados no gráfico da Figura 3b não restringem-se somente ao problema da cavidade e servem como um parâmetro de comparação geral entre os três esquemas.

Os testes apresentados neste trabalho mostram que o esquema *suds* realmente é o mais eficiente, tanto na taxa de convergência quanto no tempo final de CPU. Por outro lado, embora o esquema *suds-no*, mesmo com o seu ganho em tempo para o cálculo dos

coeficientes não consiga diminuir o tempo total de CPU, o seu ganho com a economia de memória é significativo, pois ao invés de 4x4 elementos da matriz  $c_{i,j}$ , apenas 4 precisam ser armazenados. Para uma versão tridimensional, as pequenas vantagens do esquema *suds-no* aparentemente deverão ampliar-se geometricamente, pois a matriz  $c_{i,j}$  passaria a ter 12x12 termos, tornando sua inversão inviável, e o número de termos armazenados seriam apenas 12 ao invés dos 144 nos esquemas *suds* e *suwds*.

O último ponto estudado é com relação a não simplificação do divergente do campo de velocidades no termo difusivo. Em primeira análise, é esperado que esta inclusão no máximo melhore a convergência, mas como é mostrado na Figura 4 esta é decisiva. O problema utilizado foi o da cavidade com malha cartesiana de 31x31 volumes e  $\Delta t = 1$



**Figura 4**– Influência do divergente de velocidade na convergência do método

Nos problemas com Reynolds baixo a influência não é sentida, porém com o aumento do número de Reynolds esta passa a ser decisiva. A melhor performance do método com a inclusão do divergente nos termos difusivos talvez possa ser explicada através de uma análise numérica. A inclusão do divergente nos termos difusivos modifica a matriz dos coeficientes que começa a tornar-se mais irregular e difícil de convergir, o que influi diretamente na solução do sistema linear. A inclusão deste termo extra nas equações do movimento cria um acoplamento entre os campos de  $u$  e  $v$ , facilitando a convergência do problema.

## 6. AGRADECIMENTOS

Agradecimentos são feitos ao CAPES, POSMEC/UFSC e SINMEC/UFSC pelos apoios financeiros e de infra-estrutura.

## 7. REFERÊNCIAS

- Guia, U., Guia K. N. e Shin, C. T., (1982) “High-Re solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method”, *Journal of Computational Physics*, n° 48, pp. 387-411.
- Raw, M.J., 1985, “A New Control Volume finite Element Procedure for the Numerical Solution of the fluid Flow and Scalar Transport Equations”, PhD Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.
- Scheneider, G.E., e Raw, M.J., 1986, “A Skewed, Positive Influence Coefficient Upwinding Procedure for Control-Volume-Based Finite-Element convection-diffusion Computation”, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 9, n° 1, pp. 1-26.
- Scheneider, G.E., e Raw, M.J., 1987, “Control Volume Finite Element Procedure for Heat Transfer and Fluid Flow Using Collocated Variables – 1. Computational Procedure”, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 11, n° 4, pp. 363-390.

# COMPORTAMENTO REOLÓGICO DE FORMULAÇÕES PARA DENTIFRÍCIOS

**Marcelo Vaqueiro de Souza e Silva**

**Roberto Guimarães Pereira**

Universidade Federal Fluminense, Departamento de Engenharia Mecânica

Rua Passos da Pátria, nº 156 – São Domingos – Niterói – RJ – Brasil – CEP:24210-240

Telefone: (0xx21) 620-7070 – Ramal: 303

E-mail: mvaqueiro@bol.com.br

## Resumo

Este trabalho refere-se ao estudo da caracterização reológica de formulações para dentifrícios. Em uma primeira abordagem foram estudados dois tipos: creme dental e gel dental. O quais nos classificamos de pastas de dentes. A composição básica desses dois tipos de dentifrícios consta de: abrasivos, umectantes, agentes de ligação, sulfatantes, espessantes, tensioativos, adoçantes, conservantes, corantes, condimentos e ingredientes ativos especiais. Investigou-se a importância de cada um destes componentes na formulação do produto, como também, a influência deles nas propriedades reológicas do produto final.

Para verificar o comportamento reológico dos dentifrícios utilizou-se um reômetro rotativo HAAKE RS-50, tendo sido realizados diversos testes, obtendo-se curvas de escoamento para o creme dental e para o gel dental, avaliando-se a tixotropia e a tensão de escoamento dos materiais.

Este tipo de análise permite o desenvolvimento novas formulações com maior rapidez e além de possibilitar a avaliação dos produtos já existentes no mercado, no que se refere a estabilidade, liberação do princípio ativo, tempo de cura, entre outros parâmetros.

**Palavras – chave:** Reologia, Dentifrícios e Formulações.

## 1. INTRODUÇÃO

Reologia é a ciência que estuda o escoamento e a deformação da matéria.

Estudos reológicos são importantes na manufatura e aplicações de materiais plásticos, materiais lubrificantes, tintas, adesivos, comida, materiais farmacêuticos e cosméticos.

Em todas as áreas da odontologia e da tecnologia dental um progresso contínuo tem sido realizado, devido ao desenvolvimento de novos materiais, como por exemplo, as pastas de dentes usadas na ortodontia.

Medições reológicas são um rápido e seguro método para a investigação das pastas de dentes com respeito a sua estabilidade, seu processamento e quanto as previsões de seu comportamento final. (Dekker, M., 1993<sup>a</sup>).

Diversos tipos de viscosímetros são usados para a determinação das propriedades viscoelásticas das pastas de dentes. Através de testes adequados pode-se avaliar as propriedades reológicas dos materiais, contribuindo para o desenvolvimento de produtos mais adequados para o uso.

## 2. EQUIPAMENTO

Neste trabalho utilizou-se, para executar os testes reológicos, o reômetro rotativo RheoStress 50 da HAAKE, juntamente com o banho termostático K 20 DC 5 da HAAKE.

Para a realização dos testes foram utilizados para os sistemas cone/placa de 35/1 ° e 35/4 °, cujas as especificações encontram-se na tabela 01.

**Tabela 01.** Especificações dos Sistemas Cone/Placa Utilizados

CONE/PLACA 35/1 °	CONE/PLACA 35/4 °
Diâmetro (A): 34,998 mm	Diâmetro (A): 35,003 mm
Ângulo (B): 0,987 °	Ângulo (B): 3,987 °
Truncamento (C): 0,050 mm	Truncamento (C): 0,142 mm

### 3. FORMULAÇÕES DAS PASTAS DE DENTES

Pastas de dentes são produtos viscoelásticos.

Seus componentes principais são abrasivos, umectantes, agentes de ligação, surfatantes, adoçantes, conservantes, tensioativos, espessantes, colorantes, condimentos e ingredientes ativos especiais. (Kutschmann, E.M. e Petri, H.M., 1999). Como abrasivos são usados frequentemente hidróxidos, carbonetos, fosfatos ou silicatos para suporte do efeito mecânico de limpeza da escova de dente. (Dekker, M., 1993<sup>b</sup>).

Umectantes como glicerina, sorbitol, linhita ou polietilenoglicol previnem o ressecamento da pasta de dente; ao mesmo tempo eles aumentam a estabilidade para baixa temperatura e tem um efeito de textura construtiva.

Agentes de ligação e espessantes dão a pasta de dente a textura desejada e previnem uma fase de separação entre o fluido e o sólido. Como agentes de ligação, principalmente hidrocolóides são usados como Alginato, Carragenam, Metilcelulose ou Xantana. Um agente espessante frequentemente usado é o dióxido de silício de alta dispersão ou bentonita.

Surfatantes decrescem a tensão superficial melhorando a distribuição da pasta de dente na boca. No cuidado dental apenas ânions de surfatantes não tóxicos, sem sabor, são adequados como sulfato de sódio lauryl, ou sulfonato monoglicerídico alifático de coco.

Adoçantes assim como saborizantes servem como corretivos de sabor.

Preservativos são necessários como proteção para decomposição microbiana.

Tensioativos estão relacionados com a quantidade de espuma a ser produzida durante a escovação.

Corantes e pigmentos são finalmente usados para coloração de pastas de dentes com listras. Ao lado disso, pode haver ingredientes ativos como proteção contra cáries, ou para o cuidado de gengivas e dentes sensíveis.

A produção da pasta de dente pode ser feita num misturador a vácuo *batch-wise* ou em um processo de produção contínua, evitando a presença de bolhas no produto final e a produção de espuma.

Neste trabalho foram estudados dois tipos de pasta de dente: o creme dental e o gel dental. Na tabela 02, tem-se as formulações das pastas de dentes estudadas, que referem-se a produtos comerciais.



**Tabela 02.** Formulações das Pastas de Dentes

<b>CREME DENTAL</b>	<b>GEL DENTAL</b>
Fluoreto de Sódio	Fluoreto de Sódio
Pirofosfato de Sódio	Polietilenoglicol
Sorbitol	Sorbitol
Glicerina	Corante Azul (CI 42090)
Sacarina Sódica	Sacarina Sódica
Goma Espessante	Carboximetilcelulose
Sal Sódico de Gantrez	Água
Dióxido de Silício	Dióxido de Silício
Lauril Sulfato de Sódio	Lauril Sulfato de Sódio
Composição Aromática	Composição Aromática
Água	-----

#### **4. EXPERIMENTO**

Pastas de dentes apresentam um comportamento de fluido plástico. O início na curva de escoamento é usualmente obtida com medições controladas de taxa de cisalhamento permitindo uma ótima determinação das propriedades do produto em muitas baixas taxas de cisalhamento. Além disso o ponto de escoamento  $\tau_0$  de pastas de dentes pode ser determinado com exatidão e reprodutibilidade com rampas de tensão de cisalhamento. (Kutschmann, E.M. e Petri, H.P., 1999).

No presente trabalho foram realizados experimentos objetivando determinar a tixotropia e a tensão de escoamento do creme dental e do gel dental, conforme detalhado a seguir:

##### **4.1. TIXOTROPIA**

A tixotropia consiste num teste de taxa de cisalhamento controlada na faixa de utilização do produto. Ou seja, é feita uma curva de viscosidade em dois sentidos, indo da taxa mais baixa para a mais alta e logo de pois vice-versa.

Quando um material é cisalhado, a orientação ou disposição das moléculas ou partículas, é mudada. A estrutura em rede se quebra, e a viscosidade do sistema diminui. Quando a força de cisalhamento é removida, as condições iniciais serão restabelecidas em um curto período de tempo. Esse comportamento pode ser descrito traçando a curva de escoamento em função da taxa de cisalhamento crescente (curva ascendente) e depois, em função da taxa de cisalhamento decrescente (curva descendente). Na medida em que a taxa de cisalhamento diminui, a estrutura restabelece e a viscosidade retorna ao seu valor inicial. Se o restabelecimento for rápido, assim como em muitos sistemas baseados em água, a curva descendente será sobreposta à curva ascendente. Se o restabelecimento do sistema for lento, assim como em muitos sistemas baseados em solventes orgânicos, poderá levar algum tempo para o fluido retomar suas propriedades iniciais após o cisalhamento, e assim a curva descendente estará abaixo da curva ascendente. Tixotropia é definida pela habilidade de o sistema exibir baixa viscosidade em função do cisalhamento, e sua habilidade de ter sua estrutura restabelecida em um curto período de tempo. A Tixotropia só é observada após o cisalhamento do material, seguindo seu restabelecimento em função da taxa de cisalhamento decrescente.

Quando a tensão de cisalhamento é dada em função da taxa de cisalhamento, a área entre a curva superior e a inferior, define a energia requerida para se quebrar a estrutura em rede do material:

$$A = \int \tau d\dot{\gamma}(\textit{ascendente}) - \int \tau d\dot{\gamma}(\textit{descendente}) \quad (1)$$

Está área é denominada de área de histerese, e está relacionada com a liberação do princípio ativo (liberação do flúor, medicamentos, entre outros), ou seja quanto maior a área de histerese maior a liberação do princípio ativo.

## 4.2. TENSÃO DE ESCOAMENTO

Com o passar dos anos as propriedades reológicas ganharam mais e mais importância dentro de formulações e controle qualitativo de cosméticos. Uma das propriedades reológicas mais frequentemente usadas para a caracterização é o ponto ou tensão de escoamento.

A estabilidade dos produtos, o projeto de bombeamento, desenvolvimento de embalagens e comportamento do escoamento depois da aplicação são fortemente influenciados pela tensão de escoamento.

Define-se tensão de escoamento como sendo: “a mínima tensão cisalhante necessária para iniciar um estado constante de escoamento”. Quando uma tensão cisalhante é aplicada abaixo do ponto de escoamento a substância age como um corpo elástico. Estruturas dentro das substâncias não serão destruídas, a deformação das amostras são reversíveis; assim que a tensão cisalhante volta a zero, a amostra recupera sua forma original. Tensões cisalhantes acima do ponto de escoamento destruirão a estrutura dentro da substância e a deformação aumentará consideravelmente conduzindo a um estado de escoamento constante.

A tensão de escoamento pode ser obtida a partir de um teste no qual obtêm-se a deformação em função da tensão para uma dada amostra. O resultado do teste expresso em escala logarítmica apresenta a deformação no eixo dos “y” e a tensão cisalhante no eixo dos “x”. Utilizou-se então duas regressões, uma na região de baixa tensão acompanhando a curva de inclinação constante e a Segunda ao longo da outra parte da curva de inclinação constante. O valor da tensão na interseção é tido como a tensão de escoamento do material. (Petri, H.M., 1999).

## 5. RESULTADOS

As figuras 1 e 2 mostram os valores da tensão e da viscosidade de um creme dental e um gel dental, respectivamente, para taxas de cisalhamento crescente e decrescente numa temperatura aproximadamente de 25 °C.

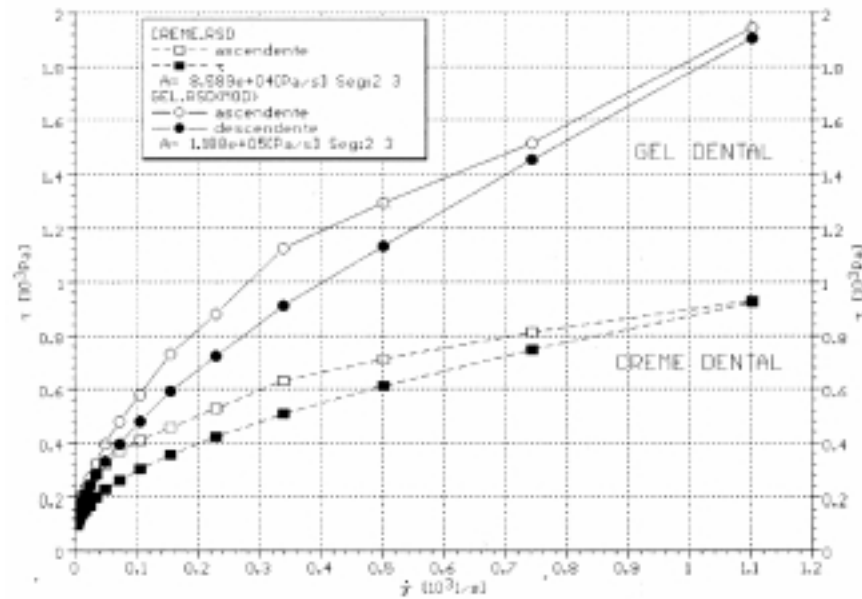
Na figura 1 observou-se que a histerese do gel dental ( $A = 1,188 \times 10^5$  Pa/s) é maior que a do creme dental ( $A = 8,589 \times 10^4$  Pa/s), evidenciando a melhor adequabilidade do gel dental no que se refere a liberação do princípio ativo (flúor, medicamentos, etc).

Com base nos resultados apresentados na figura 2, observa-se que a recuperação da estrutura do gel dental é mais rápida do que no creme dental, evidenciado pela superposição da viscosidade na faixa de baixa taxa de cisalhamento. Este fato mostra que o gel apresenta uma melhor consistência ao ser aplicado sobre a escova de dente minimizando o escoamento do produto pelas cerdas, comparativamente ao creme dental.

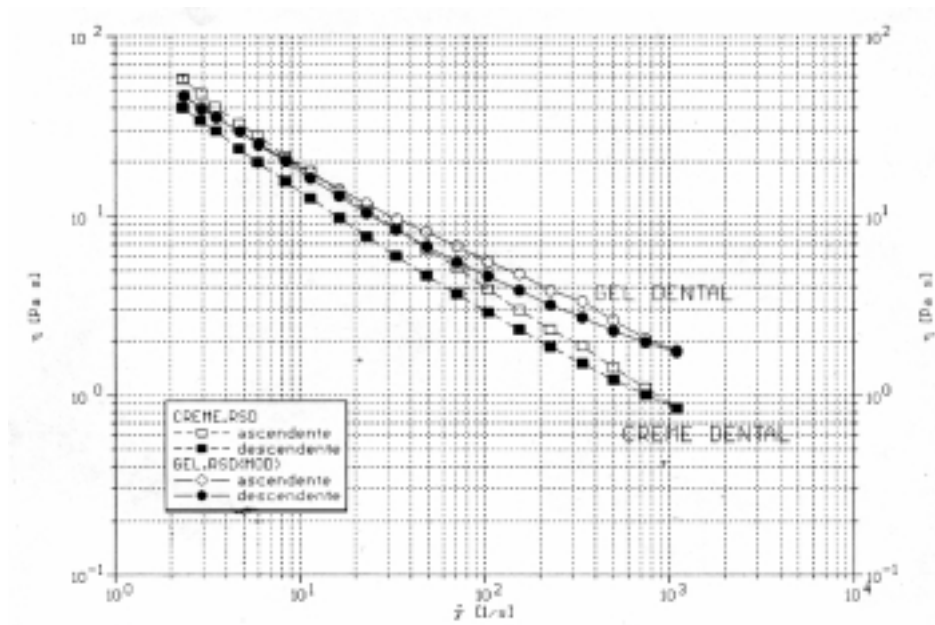
A determinação da tensão de escoamento do creme dental e do gel dental, é feita com o auxílio de um gráfico de tensão contra deformação, conforme evidenciado nas figuras 3 e 4.

No presente trabalho obteve-se um valor de tensão de escoamento de 103,2 Pa para o creme dental e de 84,74 Pa para o gel dental; para uma temperatura de 25 °C, evidenciando a

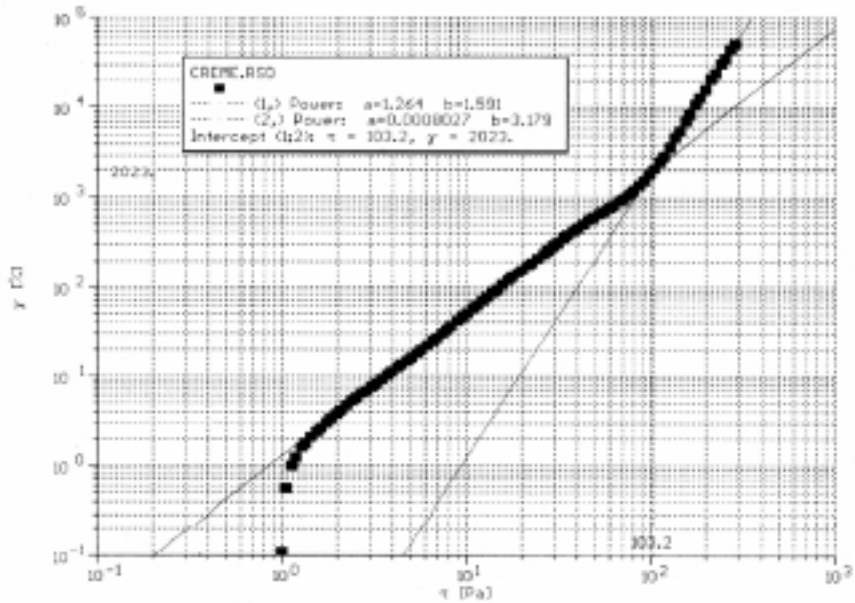
maior facilidade do gel dental no que se refere a sua extrusão da embalagem condicionadora do produto.



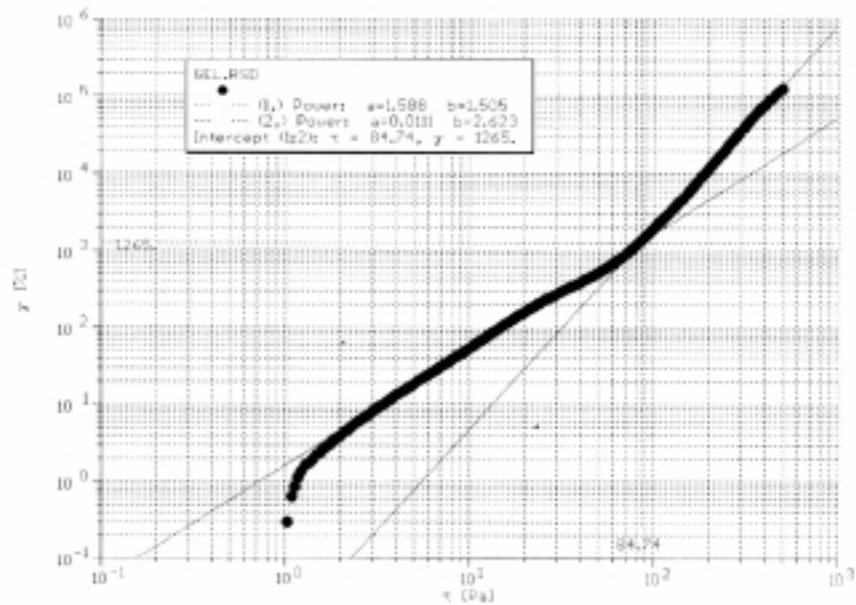
**Figura 1.** Tixotropia do Creme Dental e do Gel Dental à 25 °C



**Figura 2.** Viscosidade do Creme Dental e do Gel Dental à 25 °C



**Figura 3.** Determinação da Tensão de Escoamento para o Creme Dental à 25 °C



**Figura 4.** Determinação da Tensão de Escoamento para o Gel Dental à 25 °C

## 6. CONCLUSÃO

Os resultados obtidos para as duas formulações comerciais de dentifrícios evidenciaram que o gel dental apresenta tensão de escoamento menor que a do creme dental, o que facilita a sua extrusão do recipiente condicionador. Além disso, o gel dental apresenta uma histerese maior em relação ao do creme dental facilitando portanto a liberação do princípio ativo contido no gel, e apresenta também uma recuperação mais rápida da viscosidade evitando o escoamento do produto pelas cerdas da escova de dente.

Este tipo de análise permite o desenvolvimento de novas formulações com maior rapidez, em relação a tixotropia e a tensão de escoamento. Além de possibilitar a avaliação dos

produtos já existentes no mercado, como por exemplo a mistura do gel dental e do creme dental em um só produto.

## **7. AGRADECIMENTOS**

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, pelo suporte financeiro recebido.

## **8. REFERÊNCIAS**

- Dekker, M., 1993<sup>a</sup>, “Oral Hygiene Products and Practice”, Edited by Dennis Laba.
- Dekker, M., 1993<sup>b</sup>, “Rheological Properties of Cosmetics and Toiletries”, Edited by Dennis Laba, Volume 13.
- Kutschmann, F.M. e Petri, H.M., 1999, “Rheological Characterization os Tooth Paste”, HAAKE-Aplplicationreport V97-142E.
- Petri, H.M., 1999, “Detrmination on Cosmetic Products using a Controlled Stress Rheometer”, HAAKE-Applicationreport V97-137E.

# GERADOR DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS BIDIMENSIONAIS: MALHAS COM SUB-REGIÕES, MISTAS E ANISOTRÓPICAS

Paulo R. M. Lyra<sup>1</sup>

Darlan K. E. de Carvalho<sup>2</sup>

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Pernambuco,  
Recife/PE, 50740-530, Brasil. E-MAILS: <sup>1</sup>*prmlyra@demec.ufpe.br* <sup>2</sup> *darlan@demec.ufpe.br*

## Resumo

Neste trabalho são descritos diversas estratégias que visam ampliar as flexibilidades de um gerador de malhas, triangulares e/ou quadrilaterais não-estruturadas, bidimensional. Dentre estas estratégias descreveremos: 1) Os procedimentos adotados para incorporar a possibilidade de definição de subregiões, bem como, de malhas mistas com elementos triangulares e quadrilaterais em subregiões distintas; 2) Os procedimentos necessários para a obtenção de malhas triangulares ou quadrilaterais com alongamento direcional dos elementos, i.e. malhas anisotrópicas, em função das características da função representada na malha; 3) Outros aspectos que dizem respeito ao acoplamento entre os módulos de geração de malhas, análise via método dos elementos finitos e análise de erros/adaptação. Finalmente, são apresentados alguns exemplos para demonstrar as flexibilidades do sistema de geração de malhas descrito, bem como, a qualidade dos elementos obtidos nas malhas.

**Palavras-Chave:** Geração de Malhas, Malhas Mistas e Anisotrópicas, Adaptação de Malhas

## 1. INTRODUÇÃO

Nos últimos tempos observa-se uma tendência cada vez maior de se utilizar métodos numéricos adequados para o uso de malhas quaisquer (estruturadas ou não), tais como o método dos elementos finitos (MEF) ou o método dos volumes finitos (MVF)(AGARD, 1992). As principais vantagens da utilização de procedimentos adequados ao uso de malhas não-estruturadas são: flexibilidade para lidar com geometrias complexas e o fato destas se apresentarem como a forma natural para a incorporação da adaptatividade de malhas, que representa talvez a única esperança de resolução adequada de fenômenos de pequena escala (por ex. camada limite, propagação de ondas de choque, turbulência, etc.) em geometrias complexas. O primeiro passo para uma simulação computacional, após a etapa de modelagem geométrica, é a geração de malhas, e a qualidade das soluções obtidas está diretamente relacionada com a qualidade da malha empregada na análise. Em problemas típicos da dinâmica dos fluidos, usam-se malhas com dezenas e até centenas de milhares de elementos, o que, claramente, torna a geração manual de elementos totalmente inviável. Em geral se utilizam malhas triangulares devido ao baixo custo e flexibilidade geométrica destes elementos, porém determinadas formulações do método dos elementos finitos requerem e/ou apresentam melhor desempenho com o uso de elementos quadrilaterais e, em situações específicas (por ex. problemas acoplados, ou em problemas com certos fenômenos essencialmente unidimensionais), com o uso de malhas mistas. A melhoria da qualidade da solução encontrada através da análise numérica, pode ser alcançada através de estratégias que

refinam as malhas automaticamente nas regiões onde a solução apresenta grandes erros de discretização (aproximações grosseiras) e desrefinam em regiões onde os erros estão muito abaixo da precisão estabelecida. Ao lidarmos com fenômenos cujo comportamento apresenta uma direção preferencial, a estratégia de geração/adaptação de malhas se torna mais eficiente quando da possibilidade de se obter malhas com alongamento direcional (i.e. anisotrópicas). O desenvolvimento de um sistema computacional robusto e flexível de geração e adaptação de malhas bidimensionais resulta em uma ferramenta muito valiosa para simulação de problemas reais de interesse das Engenharias e Ciências.

Neste trabalho descrevemos algumas estratégias implementadas num sistema de geração de malhas triangulares e/ou quadrilaterais não-estruturadas bidimensional (Lyra *et al.*, 1998a; Lyra *et al.*, 1998b) visando ampliar as suas flexibilidades para lidar com sub-regiões, malhas mistas, malhas anisotrópicas, assim como apresentamos o procedimento adotado para o acoplamento do programa de análise com o de geração/adaptação de malhas via *remeshing*. Estes e outros pontos são ilustrados através de diversos exemplos.

## 2. GERADOR DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS BIDIMENSIONAIS

O processo de geração de malhas consiste basicamente na subdivisão do domínio de interesse em um conjunto consistente de sub-domínios (“ou elementos”). A consistência fica garantida uma vez que os elementos gerados cobrem todo o domínio, sendo as interseções entre os elementos apenas em pontos ou lados comuns.

### 2.1 Geração de Malhas Triangulares

O gerador de malhas triangulares, desenvolvido por Peraire *et al* (1987), e que se baseia na técnica do avanço de frente (*advancing front*), foi utilizado para efetuar as triangulações dos domínios apresentados neste trabalho. Este gerador permite um controle da densidade e gradação da malha e da forma dos elementos. Algumas modificações, que serão descritas no transcorrer deste artigo, foram efetuadas neste programa para permitir a incorporação da flexibilidade para lidar com sub-regiões, assim como para possibilitar que o módulo de geração de malhas quadrilaterais gere também malhas mistas e para auxiliar na definição automática de sub-regiões com malhas anisotrópicas quadrilaterais.

### 2.2 Geração de Malhas Quadrilaterais

O nosso gerador de malhas quadrilaterais não-estruturadas baseia-se na conversão de uma triangulação prévia do domínio de interesse (Lyra *et al.*, 1998a; Lyra *et al.*, 1998b). O procedimento consiste basicamente de três etapas: 1) União de dois triângulos adjacentes através da remoção criteriosa da aresta comum, levando a uma malha mista intermediária; 2) Obtenção de uma malha totalmente quadrilateral através da subdivisão da malha intermediária (subdividir triângulos remanescentes em três e quadriláteros em quatro quadriláteros respectivamente (ver figuras 7 e 8); 3) Otimização da malha através de estratégias que modificam a topologia ou a geometria da malha visando uma melhor qualidade dos elementos gerados. Uma síntese desta estratégia de geração de malhas quadrilaterais pode ser visto nas figuras 1 a 4.

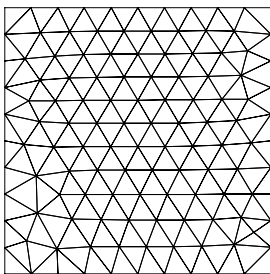


Figura 1: Triangulação inicial

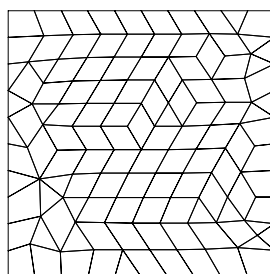


Figura 2: Malha intermediária

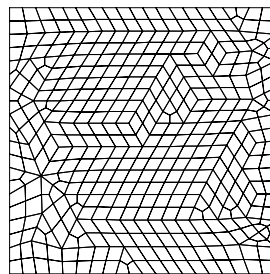


Figura 3: Malha sem otimização

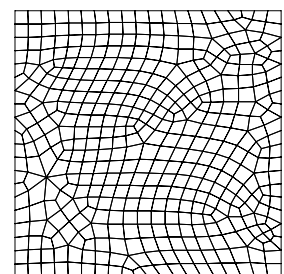


Figura 4: Malha quadrilateral final

As estratégias de otimização da malha adotadas são: (a) permutação de diagonais, (b) regularização Laplaciana, e (c) eliminação de nós com apenas três elementos conectados. A permutação de diagonais pode ser feita com dois objetivos: (a.1) visando um equilíbrio do número de elementos que ocorrem em cada nó da malha ou (a.2) visando a formação dos elementos com melhor qualidade (i.e. menor distorção). A otimização é então feita tomando-se a seguinte seqüência de estratégias: (a.1), (b), (c), (b) e (a.2). Para maiores detalhes em relação a estas estratégias ver (Lee & Lo., 1994) e (Lyra *et al.*, 1998a).

Uma idéia da qualidade das malhas triangulares e quadrilaterais típicas obtidas com o nosso sistema de geração de malhas (Lyra *et al.*, 1998b) pode ser vista nas figuras 5 e 6. Nestas figuras tem-se a triangulação inicial e malha quadrilateral correspondente do domínio que representa um protótipo da região frontal de um avião civil, cuja geometria foi modelada por funções *splines* cúbicas. Nestas figuras pode ser apreciada a boa qualidade dos elementos gerados.

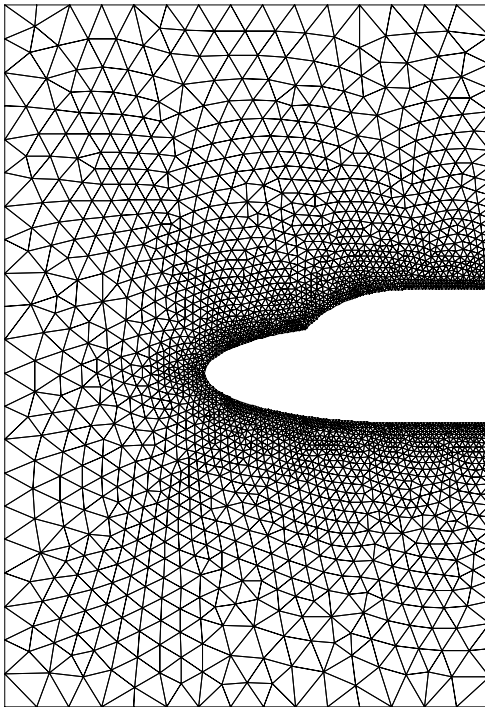


Figura 5: Malha Triangular

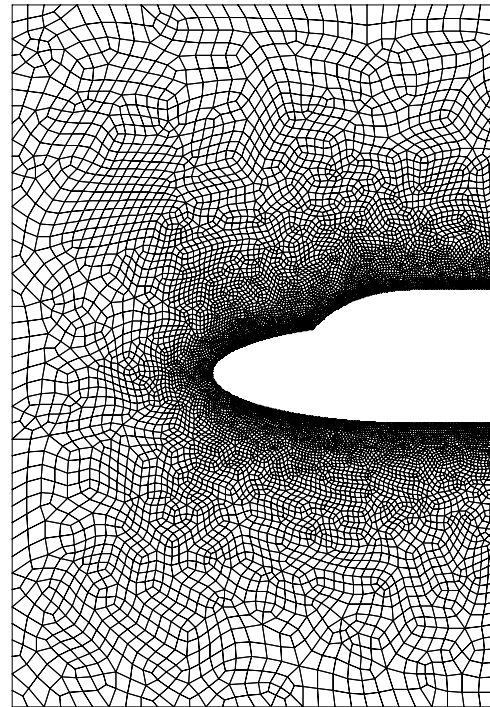


Figura 6: Malha Quadrilateral

Vale ressaltar que o tamanho dos elementos da triangulação inicial do domínio deve ser aproximadamente o dobro daquele desejado para os elementos quadrilaterais da malha final. A opção pela conversão de triângulos é extremamente atraente pois as malhas quadrilaterais geradas podem herdar as propriedades das malhas triangulares originais, as quais são obtidas através de qualquer técnica de triangularização já consolidada na literatura.

### 3. FLEXIBILIDADES INCORPORADAS AO SISTEMA DE GERAÇÃO

#### 3.1 Considerações Iniciais

Para a implementação do procedimento de conversão de triângulos em quadriláteros se faz necessário a definição de algumas matrizes inteiras que fornecem os dados topológicos utilizados nos algoritmos, sem a necessidade de buscas constantes (ver detalhes em Lyra *et al* (1998a)). Quando desejamos gerar malhas mistas ou com sub-regiões, anisotrópicas ou não, utilizamos algumas estratégias e informações específicas do nosso gerador de malhas triangulares, que não são em geral encontradas em um programa de geração de malhas triangulares.



### 3.2 Subregiões

Quando, por exemplo, da análise de problemas da dinâmica dos fluidos tais como escoamentos multi-fásicos e não-miscíveis ou da análise de problema da mecânica dos sólidos envolvendo materiais com diferentes propriedades mecânicas em diferentes porções do domínio de interesse, tem-se a necessidade de malhas adequadas para cada sub-domínio (ou sub-região) consistentes entre si. Na geração de malhas triangulares consideramos cada sub-região independentemente com a definição topológica das sub-regiões e descrição da geometria do contorno, incluindo a interface entre sub-regiões. No processo de triangulação, através da técnica do avanço de frente, obtemos primeiramente a numeração dos nós do contorno e em seguida a geração de nós e triângulos simultaneamente em cada sub-região independentemente, porém os dados topológicos da malha final (numeração dos nós, elementos, arestas e faces do contorno) são consistentes e possuem uma numeração seqüencial. Isto é feito utilizando-se um vetor que informa os segmentos que descrevem cada região e um outro que fornece os nós pertencentes a cada segmento, quando este já foi discretizado. Tem-se desta forma malhas totalmente triangulares, consistentes e por sub-regiões. Para obter malhas totalmente quadrilaterais e por sub-regiões procedemos a quadrilateralização do domínio completo, conforme é feito no caso de uma única região, isto já garante ao final a consistência entre regiões sem a necessidade de tratá-las independentemente.

### 3.3 Malhas Mistas

Como conseqüência da flexibilidade da definição de sub-regiões com malhas consistentes entre si, tem-se a possibilidade de se gerar malhas com tipos de elementos distintos em cada sub-região. A definição do tipo de elemento para cada região pode ser feita apriori nos dados fornecidos ao gerador. Na matriz auxiliar denominada "ISIDE" (utilizada tanto no módulo de geração triangular como quadrilateral), e que originalmente listava o primeiro e último nó, assim como o elemento a direita e o elemento a esquerda de cada aresta da malha (com zero para o número do elemento correspondente no caso de arestas sobre o contorno), foi necessário acrescentar uma quinta informação com o número da região que contém a aresta ou zero no caso da aresta pertencer à interface entre duas sub-regiões. Assim como na geração de malhas quadrilaterais, a geração de malhas mistas segue três etapas: 1) União de dois triângulos adjacentes apenas nas regiões pré-definidas como quadrilaterais; 2) Subdivisão da malha intermediária obtida nas sub-regiões quadrilaterais conforme descrito no item 2.2 (figuras 7 e 8 e subdivisão das sub-regiões triangulares dividindo cada triângulo em quatro novos triângulos conforme figura 9, garantindo-se assim a consistência na interface entre sub-regiões; 3) Otimização das malhas nas sub-regiões quadrilaterais (Lyra *et al.*, 1998a; Lyra *et al.*, 1998b). Como os novos triângulos obtidos através do processo de subdivisão nas regiões triangulares herdam as características do triângulo original, que já passaram por um processo de otimização durante a triangulação inicial do domínio, a utilização de uma nova otimização não representa grandes melhorias na qualidade dos elementos e não foi efetivado.

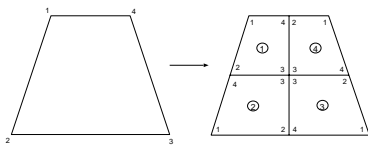


Figura 7: Subdivisão em sub-região quadrilateral

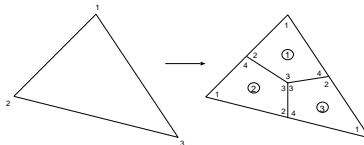


Figura 8: Subdivisão em sub-região quadrilateral

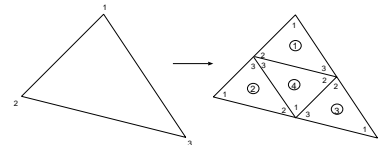


Figura 9: Subdivisão em sub-região triangular

Alguns exemplos, puramente acadêmicos, visando ilustrar a possibilidade de lidarmos com domínios onde tem-se sub-regiões distintas, podem ser vistos nas figuras 10 a 13. Nestas figuras temos malhas triangulares (figura 10), quadrilaterais (figura 11) ou mistas (figuras 12 e 13), todas malhas uniformes e com garantia da consistência entre diferentes sub-regiões.

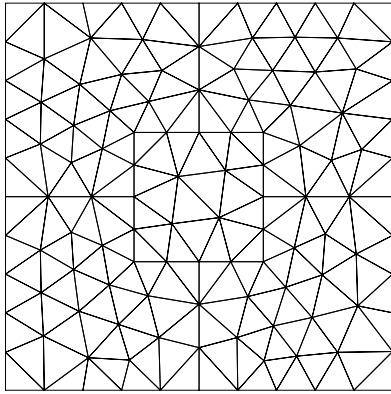


Figura 10: Subregião - malha triangular

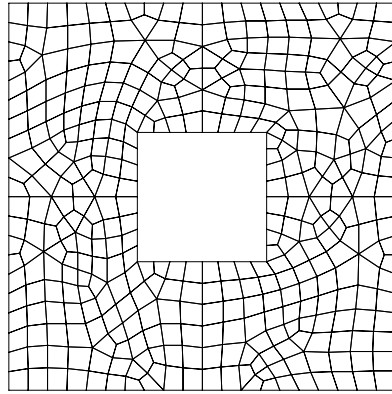


Figura 11: Subregião - malha quadrilateral

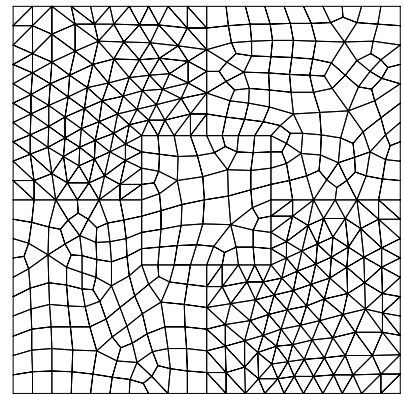


Figura 12: Subregião - malha mista

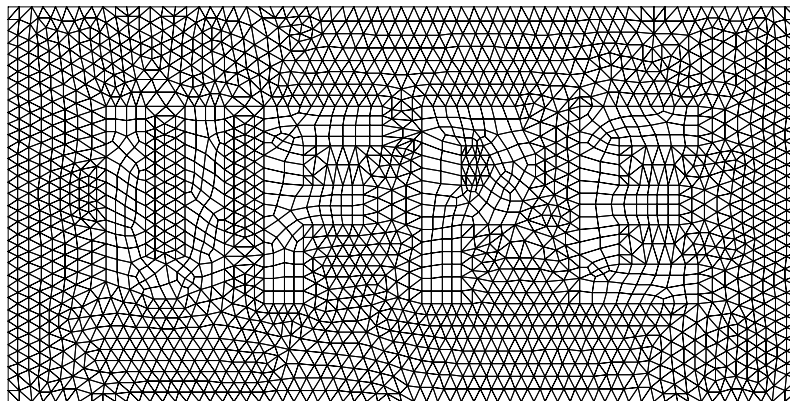


Figura 13: Subregião - malha mista

### 3.4 Alongamento Direcional

Na solução de problemas que envolvem fenômenos onde em certas regiões do domínio tem-se um comportamento eminentemente unidimensional (i.e. em apenas uma direção tem-se variações acentuadas do comportamento da solução do problema) torna-se pouco eficiente a utilização de malhas com elemento equilaterais e sem direção preferencial, i.e. malhas isotrópicas. Nestes casos é de extrema importância a possibilidade de se definir uma direção e fator de alongamento para os elementos nas proximidades das referidas regiões, levando-se assim a obtenção de malhas anisotrópicas. Tem-se desta forma uma maior eficiência já que concentramos graus de liberdade ao longo das direções com variação acentuada da solução representada pela malha. Aliadas a isto, existem evidências numéricas e matemáticas (Rippa, 1992) de que, pelo menos para elementos triangulares lineares, tem-se uma melhor aproximação da solução.

No gerador de malhas triangulares utilizado temos a flexibilidade de gerarmos malhas anisotrópicas fornecendo-se a direção e o fator de alongamento em cada nó da malha de fundo (ou *background*) (ver Peraire *et al* (1987)). Visando uma automatização necessária no processo de geração/adaptação (via *remeshing*) de malhas anisotrópicas em determinadas sub-regiões, procedemos da seguinte forma: 1) Definimos uma razão de alongamento, ou *stretching ratio*, ( $St_{min}$ ) a partir da qual os triângulos são considerados “alongados”, definimos ainda um percentual mínimo ( $P_{min}$ ) de triângulos com fator de alongamento superior a  $St_{min}$  para que consideremos a sub-região como anisotrópica; 2) calculamos a razão de alongamento (maior lado sobre altura correspondente) de cada triângulo pertencente à sub-região, e o percentual de triângulos “alongados” ( $Pe_{lem}$ ), considerando que a sub-região é anisotrópica sempre que  $Pe_{lem} > P_{min}$ .

Na estratégia de obtenção de malhas quadrilaterais pelo processo de conversão de malhas

triangulares tem-se que os quadriláteros herdam certas características dos triângulos da malha inicial. Além disto, num quadrilátero qualquer não é tão evidente definir se este é ou não alongado. Diante deste fato, a informação, se devemos ter malha quadrilateral anisotrópica numa dada sub-região, é determinada na malha triangular inicial, conforme descrito no parágrafo anterior.

Quando do processo de conversão da malha triangular inicial, na etapa de união de dois triângulos adjacentes através da remoção da aresta comum para formar a malha intermediária, utilizamos normalmente um critério que só permite remover a aresta caso o quadrilátero a ser formado satisfaça critérios que garantam uma boa qualidade do mesmo (Lyra *et al.*, 1998a). Já no caso de malhas anisotrópicas, só removemos uma aresta caso esta seja simultaneamente o maior lado dos dois triângulos adjacentes à mesma, isto claro desde que o quadrilátero a ser formado satisfaça critérios mínimos de qualidade. A etapa de subdivisão dos elementos é a mesma tanto para malhas isotrópicas como anisotrópicas. A terceira etapa, tanto no caso de triângulos como quadriláteros, é feita com uma otimização seletiva da malha, i.e. nas regiões anisotrópicas apenas a estratégia de eliminação de nós onde concorrem três elementos é adotada. A utilização das estratégias de regularização Laplaciana e da permutação de diagonais formada por dois elementos adjacentes levariam a destruir a natureza anisotrópica da malha e só podem ser usadas nas sub-regiões isotrópicas. Na figura 14(a) temos uma malha triangular com direção preferencial ( $30^\circ$ ) e fator de alongamento (8). Na figura 14(b) temos a malha quadrilateral correspondente, onde os quadriláteros são alongados na direção desejada. Não temos, no entanto, um controle muito bom da qualidade dos elementos uma vez que não podemos utilizar de todas as estratégias de otimização da malha. Este problema pode ser minimizado com o uso de malhas mistas.

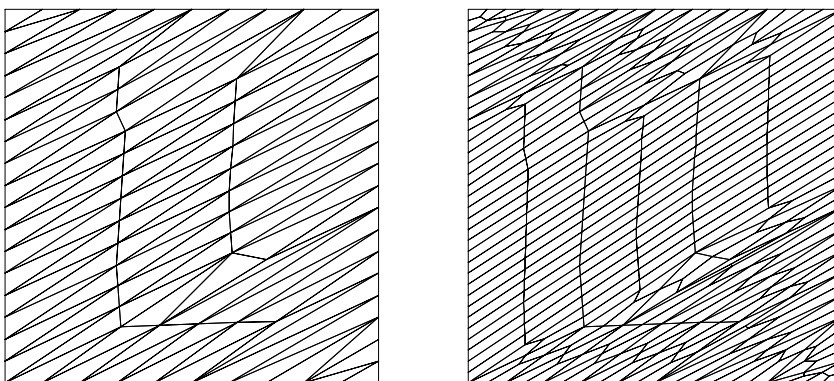


Figura 14: Malhas anisotrópicas com alongamento: a) Triangular; b) Quadrilateral

Na figura 15 o domínio considerado foi utilizado na simulação de um escoamento compressível e não-viscoso, regido pelo sistema de equações de Euler, onde temos um escoamento supersônico ( $M= 2.0$ ) incidindo numa parede sólida horizontal, com ângulo de ataque de  $10^\circ$  (Lyra & Almeida, 2000). Na solução deste problema tem-se a formação de um choque oblíquo, cujo ângulo teórico é de  $29,3^\circ$ . A malha apresentada foi obtida fazendo uso do conhecimento teórico da solução. Uma idéia da solução deste problema, em termos da distribuição da densidade, encontrada utilizando-se a formulação estabilizada do MEF denominada de CAU (Almeida *et al.*, 2000), pode ser vista na figura 16. Um estudo detalhado do desempenho da formulação CAU na solução de problemas da dinâmica dos fluidos, utilizando-se malhas não-estruturadas triangulares, quadrilaterais e mistas, com ou sem direção e alongamento, será apresentado no trabalho de Lyra e Almeida (2000).

### 3.5 Acoplamento dos Módulos de Geração/Adaptação e Análise

A adaptação de malhas é imprescindível quando da simulação de problemas complexos e de grande porte. O procedimento para adaptação de malhas triangulares via *remeshing* que havia sido estendido para malhas quadrilaterais via uma estratégia em três etapas (Lyra *et al.*, 1998a) é inteiramente válido também para malhas com sub-regiões e mistas. Em linhas gerais a estratégia consiste em: 1) Transformar as sub-regiões quadrilaterais do domínio em malhas triangulares, subdividindo cada elemento em dois através de uma diagonal; 2) Gerar nova malha triangular

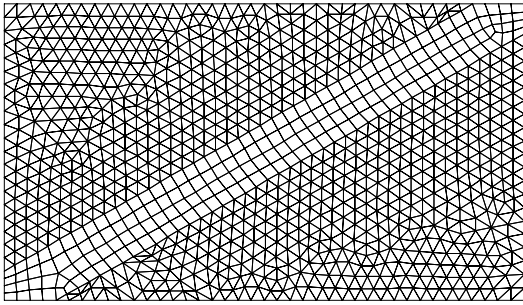


Figura 15: Malha Mista direcional e sem Alongamento

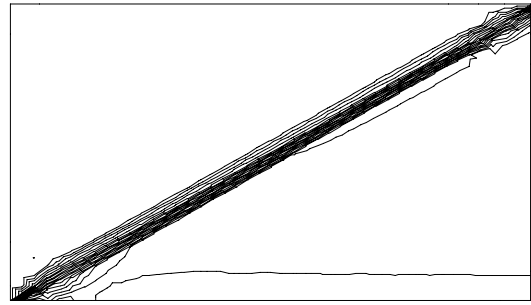


Figura 16: Isolinhas de densidade, obtidas utilizando-se a formulação CAU

de acordo com parâmetros ditados pela análise de erros; 3) Converter a malha triangular em malha quadrilateral nas sub-regiões correspondentes e subdivisão dos triângulos em quatro nas regiões triangulares. Na análise adaptativa via MEF utilizando-se *remeshing* tem-se um módulo de análise de erros que fornece ao módulo de geração/adaptação de malhas indicadores de erros e estimativas da densidade de malha, direção e taxa de alongamento desejada para os elementos em cada porção do domínio em estudo. O módulo de geração/adaptação fornece então uma nova malha para o módulo da análise, que consiste dos dados topológicos da malha e coordenadas dos nós da mesma. Isto, no entanto, não é suficiente, devemos garantir que as malhas adaptadas representem de forma adequada o problema em questão, i.e. a geometria, os carregamentos e condições de contorno necessárias ao programa de análise. No nosso gerador de malhas associamos todas as entidades topológicas da malha (nós, arestas, elementos) ao tipo e número da entidade geométrica (ponto, curva ou sub-região) a que pertence ( ver tabela 1). Isto representa uma estrutura adequada para que a geometria, os carregamentos e condições de contorno, que são normalmente associados diretamente às entidades topológicas da malha fiquem indiretamente associados ao modelo geométrico do problema em estudo e não à malha inicial adotada. Utilizando-se das informações fornecidas, conforme descrito, o módulo de adaptação pode fornecer um novo modelo do MEF consistente com o modelo original.

Tabela 1: Relação entre entidades topológicas da malha e entidades geométricas do domínio

Entidade da malha	Entidade Geométrica Associada
Nó	Ponto
	Curva
	Sub-região
Aresta	Curva
	Sub-região
Elemento	Sub-região

Uma etapa fundamental no procedimento adaptativo via *remeshing* se refere à interpolação dos dados entre duas malhas não-estruturadas. Para tal precisamos de um algoritmo de busca eficiente para descobrir em que elemento da malha antiga se encontra cada nó da nova malha. Em seguida efetuamos a interpolação utilizando os valores da solução nos nós deste elemento para obter o valor no novo nó. Foi utilizado um algoritmo de busca baseado em uma estrutura de dados em árvore binária (Bonet & Peraire, 1990), que foi adequado para malhas triangulares, quadrilaterais e mistas. Associado à interpolação temos um erro que pode vir a desqualificar a solução principalmente no caso de análise adaptativa transiente onde o número de malhas geradas é portanto o número de interpolações entre malhas é muito grande. Diante disto, estendemos para quadriláteros lineares a possibilidade de se interpolar não apenas linearmente mas quadraticamente conforme descrito em De Sampaio *et al* (1993), para triângulos lineares.

## 4. CONCLUSÕES

O sistema computacional para geração de malhas apresentado é robusto e versátil permitindo lidar malhas triangulares, quadrilaterais ou mistas consistentes e em geometrias quaisquer. A geração de malhas quadrilaterais e mistas herda todas as flexibilidades da técnica de triangulação via avanço de frente, possibilitando um controle da densidade, gradação, forma dos elementos, assim como da direção e do fator de alongamento quando malhas anisotrópicas forem indicadas. O módulo de geração pode ser acoplado a um módulo de análise de erros permitindo assim uma redefinição automática da malha e do modelo do MEF. No presente, encontra-se em fase de desenvolvimento a incorporação da flexibilidade da definição automática de sub-regiões para possibilitar adaptação de malhas via *remeshing* local, i.e. sem a necessidade de geração de nova malha sobre todo o domínio, quando os parâmetros da malha só se modificarem apreciavelmente em sub-regiões do domínio. Este aspecto pode representar grande economia na simulação adaptativa de problemas transientes, bem como reduzir o erro de interpolação da solução entre malhas que é inerente a este processo adaptativo.

## 5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem: O. Hassan, K. Morgan and J. Peraire por disponibilizarem o gerador de malhas triangular utilizado. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) (processo 305263/88-9(RE)) e pela Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) através do contrato 77.97.0469.00.

## 6. REFERÊNCIAS

AGARD. 1992. *Special Course on Unstructured Grid Methods for Advection Dominated Flows*. Tech. rept. 787. AGARD, France.

ALMEIDA, R. C., FEIJÓO, R., GALEÃO, A. C., PRATA, C., & SILVA, R. S. 2000. Adaptive Finite Element Computational Fluid Dynamics Using an Anisotropic Error Estimator. *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, **182**, 379–400.

BONET, J., & PERAIRE, J. 1990. An Alternating Digital Tree (ADT) Algorithm for 3–D Geometric Searching and Intersection Problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **31**, 1–17.

DE SAMPAIO, P. A. B., LYRA, P. R. M., MORGAN, K., & WEATHERILL, N. P. 1993. Petrov–Galerkin Solutions of Incompressible Navier–Stokes Equations in Primitive Variables with Adaptive Remeshing. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **106**, 143–178.

LEE, C. K., & LO., S. H. 1994. A New Scheme for the Generation of Graded Quadrilateral Mesh. *Computers and Structures*, **52**, 847–857.

LYRA, P. R. M., & ALMEIDA, R. C. 2000. A Preliminary Study on the Performance of Stabilized Finite Element CFD Methods on Triangular, Quadrilateral and Mixed Unstructured Meshes. In: *Finite Elements in Flow Problems 2000 (FEF 2000)*. Trabalho aceito e a ser apresentado.

LYRA, P. R. M., DE CARVALHO, D. K. E., & WILLMERSDORF. 1998a. Adaptive Triangular, Quadrilateral and Hybrid Unstructured Mesh Generation with Classical Resequencing Techniques. In: *Proc. of the 4th World Conference on Comput. Mechanics (WCCM'98)*. In CD rom.

LYRA, P. R. M., DE CARVALHO, D. K. E., & WILLMERSDORF. 1998b. Geração de Malhas Não-Estruturadas Triangulares, Quadrilaterais e Mistas com a Incorporação de Técnicas de Re-Ordeção Clássicas. *Pages 19–16 of: Anais do V Congresso de Engenharia Mecânica do Norte-Nordeste (V CEM-NNE/98)*, vol. 3.

PERAIRE, J., VAHDATI, M., MORGAN, K., & ZIENKIEWICZ, O. C. 1987. Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations. *J. Comp. Phys.*, **72**, 449–466.

RIPPA, S. 1992. Long and Thin Triangles Can Be Good for Linear Interpolation. *SIAM J. Numer. Anal.*, **29**, 257–270.

A NOTE ON THE FLOW OF VISCOPLASTIC MATERIALS THROUGH  
COMPLEX GEOMETRIES

**P. R. Souza Mendes**

**M. F. Naccache**

**H. T. M. Vinagre**

**M. Bosscher**

Department of Mechanical Engineering

Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, RJ 22453-900 — Brazil

**Abstract**

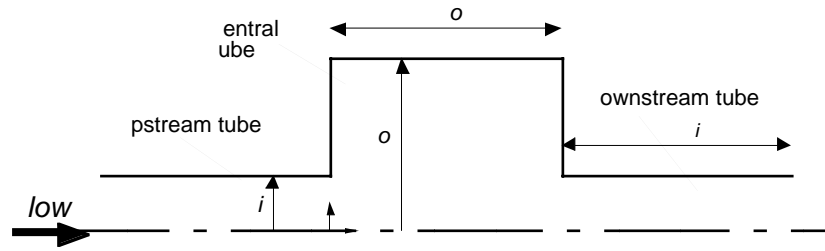
The inertialess flow of viscoplastic materials through an axisymmetric channel formed by an abrupt expansion followed by a contraction is studied. Flow visualization experiments were performed with a Carbopol aqueous solution. The rheological behavior of the solution was determined with the aid of a rotational rheometer, and it was observed that the viscosity function is well represented by the Herschel-Bulkley equation. Numerical solutions of the mass and momentum balance equations were also obtained. In these solutions it was assumed that the materials behave like a Generalized Newtonian Liquid with a biviscosity function, which mimics closely the Herschel-Bulkley equation but allows deformation below the yield stress limit. The flow visualization results showed that flow is observed only in an inner axisymmetric region whose diameter is approximately twice the one of the inlet and outlet tubes. Outside this region the flow is stagnant, and a fracture between these two regions is observed. The corresponding numerical solutions are not capable of predicting the observed flow pattern.

**Keywords:** Expansion flows, Contraction flows, Viscoplastic materials.

1. INTRODUCTION

This work analyzes the flow of viscoplastic materials through an abrupt axisymmetric expansion followed by an abrupt contraction, as shown in Fig. 1. Expansion and contraction flows are found in some common engineering situations, such as extrusion processes, multi-size tube flows, and other. Viscoplastic materials are present in many industrial processes. Examples of viscoplastic materials are grease, butter, paints, drilling muds, mustard, among others. The main characteristic of these materials is the presence of an yield stress. Above the yield stress the material behaves as a liquid, and, below it, as a solid. This behavior leads to an apparent fracture of the material in some complex geometries, which may have strong influence in pressure drop and heat transfer results.

The mechanical behavior of viscoplastic materials is commonly given by the Generalized Newtonian (GNL) constitutive equation (Bird et al., 1987), namely,  $\boldsymbol{\tau} = \eta(\dot{\boldsymbol{\gamma}})\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  where  $\boldsymbol{\tau}$  is the extra-stress tensor,  $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$  is the rate-of-deformation tensor, defined as  $\text{grad}\mathbf{v} + (\text{grad}\mathbf{v})^T$ ,  $\mathbf{v}$  being



Figurã : The geometry

the velocity vector and  $\cdot$  is the viscosity function, given by the Herschel-Bulkley equation (Bird et al., 1987).

### 1.1 Literature review

An overview of the rheology and flow of viscoplastic materials was presented by Bird et al. (1983), where some simple flow situations were analyzed. The flow of Bingham materials through tubes was analyzed in the literature by some authors (Bird et al., 1987, Vradis et al., 1992). In the core region of the tube the stress is lower than the yield value. Inside this region, called plug flow region, the fluid behaves as a solid material. The flow of Bingham materials through an  $1 \times 2$  abrupt expansion was analyzed numerically by Vradis and Ötügen (1997). It was observed that the reattachment length decrease with yield stress and increase with Reynolds number. Naccache and Souza Mendes (1997) analyzed numerically the flow pattern of Bingham materials through abrupt expansions as a function of Reynolds number, yield stress and expansion ratio. It was noted that the reattachment length increases with Reynolds number, decreases with yield stress and is practically independent of the expansion ratio. An experimental study of the flow through axisymmetric expansions was performed by Pak et al (1990). This work analyzes the influence of Reynolds number on separation zones and reattachment length of Newtonian, purely viscous and viscoelastic fluids in  $1 \times 2$  and  $1 \times 2.7$  abrupt axisymmetric expansions. It was observed that the reattachment length for purely viscous fluids is almost the same as for Newtonian fluids. For laminar flows the effect of elasticity is to decrease the reattachment length, while in turbulent flows the opposite trend is observed.

One important discussion in the literature of viscoplastic materials is the numerical difficulty in using the von Mises yield criterion in the viscosity function. Essentially two types of modification of the Bingham viscosity function have been proposed to handle this, namely, the bi-viscosity model (Lipscomb and Denn, 1984, Gartling and Phan-Thien, 1984, O'Donovan and Tanner, 1984), and Papanastasiou's model (Papanastasiou, 1987). Both modifications have been used successfully in numerical simulations of different complex flows (e.g., Ellwood et al., 1990, Abdali et al., 1992, Beverly and Tanner, 1992, Wilson, 1993, Wilson and Taylor, 1996, Piau, 1996). Similar equations for Herschel-Bulkley viscosity function can be obtained (Macosko, 1994).

Moreover, Lipscomb and Denn (1984) observed that yielding and flow must occur everywhere in complex flows in confined geometries, which is generally inconsistent with the classic Bingham plastic model. Wilson (1983) showed that, for suitably large yield stresses, yield surfaces can exist in confined complex geometries if the biviscosity law is employed, even when the Bingham plastic limit is approached. Piau (1996) explained that, if some deformation in the plug-flow region is allowed (either elastic or viscous), yield surfaces are possible whenever there are regions of deformation (or deformation rate) low enough as to require stress levels below the yield stress to be realized.

Recently, Barnes (1999a, 1999b) performed a comprehensive review about yield stress materials, reviving the argument that yield stress actually does not exist. He shows, for a large number of materials typically classified as viscoplastic, that when careful measurements are performed below the “yield stress”, it is found that flow actually takes place, and the viscosity function looks like the bi-viscosity model. However, an apparent yield stress can exist as a useful mathematical description of limited data, over a given range of flow conditions.

The present work analyzes numerically and experimentally the inertialess flow of a viscoplastic material through an axisymmetric sudden expansion and contraction. The main goal is to evaluate the performance of the GNL constitutive equation for the flow of viscoplastic materials in this complex flow situation, by comparing the numerical predictions with flow visualization results. In the numerical simulation, the governing equations were discretized with the aid of the finite volume method. A modified bi-viscosity model was used to avoid the numerical difficulty of the Von Mises criterion. Velocity and pressure fields were obtained numerically. In the experimental study, flow visualizations for two values of the geometrical parameter are performed, for a 0.5% Carbopol aqueous solution.

## 2. NUMERICAL MODELING

The flow studied is steady and axisymmetric and enters the large tube with a developed velocity profile. The fluid is modeled by the GNL constitutive equation and the viscosity function is given by the Herschel-Bulkley model (Bird et al., 1987).

For the steady flow of a viscoplastic material through a duct, the dimensionless mass and momentum equations are:

$$\text{div}^0 \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\text{grad}^0 \phi^0 = -\text{grad}^0 p^0 + \frac{2\eta^0}{Re} \text{div}^0 (\text{grad}^0 \mathbf{v}^0) \quad (2)$$

where  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{v} = R_{i,c} \mathbf{e}_i$  and  $p^0 = p = \frac{\rho}{2} (R_{i,c})^2$ . The dimensionless coordinates are  $x^0 = x = R_i$  and  $r^0 = r = R_i$ . The characteristic shear rate  $\dot{\gamma}_c$  is taken as equal to the developed value of the shear rate at tube wall at the upstream tube, given by (Soares et al., 1997):

$$\dot{\gamma}_c = \frac{\dot{\gamma}_{R_i, \text{fil}}}{K} = \frac{\eta}{R_i} \frac{n+1}{2n} \left[ \frac{1}{2} (1 + r_0^0) + \frac{n}{2n+1} r_0^0 (1 + r_0^0)^2 + \frac{n}{3n+1} (1 + r_0^0)^3 \right]^{1/n} \quad (3)$$

In this equation  $r_0^0 = \dot{\gamma}_0^0 = \dot{\gamma}_0 = \dot{\gamma}_{R_i}$  is the dimensionless yield stress. The quantities  $\dot{\gamma}_{R_i}$ ,  $\eta$  and  $R_i$  are the shear stress at wall, mean velocity and radius of the smaller tube (radius  $R_i$ ), respectively. The characteristic viscosity is chosen as the viscosity at the characteristic shear rate,  $\eta_c = \eta(\dot{\gamma}_c)$  and the Reynolds number is defined as  $Re = \frac{2\eta_c R_i}{\rho \dot{\gamma}_c}$ .

The boundary conditions are the usual no-slip condition at walls, the symmetry condition at the centerline and locally parabolic flow at the outlet. The flow was solved only for the central and the downstream tubes. At the inlet of the central tube, the flow was considered hydrodynamically developed and the velocity profile is given by:

$$u_{R_i, \text{fil}}^0(r^0) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} \left[ \frac{1}{1+r_0^0} + \frac{1-n}{1+r_0^0} \left( \frac{r^0}{1+r_0^0} \right)^{n+1} \right] & \text{if } r^0 > r_0^0 \\ \frac{n}{n+1} (1+r_0^0) & \text{if } r^0 < r_0^0 \end{cases} \quad (4)$$

As discussed previously, a modified bi-viscosity model was used for the viscosity function:



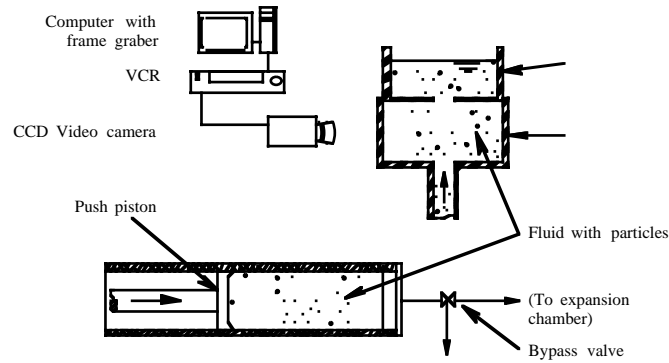


Figure 2: Schematic of the experimental apparatus

$$\mu_0 = \begin{cases} \frac{\dot{\gamma}_0^0}{\dot{\gamma}_{large}^0} + (1 - \frac{\dot{\gamma}_0^0}{\dot{\gamma}_{large}^0})^{-n_i - 1} & \text{if } \dot{\gamma}_0^0 > \dot{\gamma}_{small}^0 \\ \dot{\gamma}_{large}^0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

where  $\dot{\gamma}_0^0 = \dot{\gamma}_c$ ,  $\dot{\gamma}_{large}^0 = \dot{\gamma}_c$  and  $\dot{\gamma}_{small}^0 = \dot{\gamma}_{R_i}$  are the dimensionless shear rate, viscosity and yield stress, respectively. We adopted  $\dot{\gamma}_{large}^0 = 1000$  (Beverly and Tanner, 1992). Then,  $\dot{\gamma}_{small}^0 = \dot{\gamma}_0^0 (1 - \frac{\dot{\gamma}_0^0}{\dot{\gamma}_{large}^0})^{n_i - 1}$ ,  $\dot{\gamma}_0^0 = 1000$

## 2.1 Numerical solution

The conservation equations of mass and momentum are discretized by the finite-volume method described by Patankar (1980). Although the Reynolds number values were kept below 0.01 for all cases, the inertia terms were kept in the momentum equations. Staggered velocity components are employed to avoid unrealistic pressure fields. The SIMPLE algorithm (Patankar, 1980) was used, in order to couple the pressure and velocity. The resulting algebraic system is solved by the TDMA line-by-line algorithm (Patankar, 1980) with the block correction algorithm (Settari and Aziz, 1973) to increase the convergence rate.

The mesh utilized is uniform per zones in the axial and radial directions. For the cases with  $L_0 = D_0 = 0.5$ , a  $102 \times 82$  mesh was used and for the other cases the mesh used was equal to  $122 \times 82$ . The downstream tube length was fixed equal to  $10R_i$ , in order to avoid the influence of the outlet boundary on the flow. To validate the numerical solution, some tests are performed. The error obtained for the product of the friction factor and the Reynolds number with respect to the exact value ( $fRe = 8 - D = \gamma$ ), for a fully developed Newtonian flow at the downstream tube was equal to 5%, while for the Herschel-Bulkley material the error was always less than 2%.

## 3. EXPERIMENTAL APPARATUS

A schematic view of the experimental apparatus is shown in Fig. 2. A single-piston/cylinder pump was used to drive the flow through the transparent plexiglas-made expansion/contraction. The transparent fluid was mixed with light reflective particles to allow the flow visualization. The flow of the particle-laden fluid was recorded. Afterwards, the movie was digitized and the images processed with a computer. The particles were highlighted and the background removed with software to obtain the streamlines.

The pumping system consists of an actuator that pushes a piston in a cylinder. The two Aluminum cylinders used are 600 mm long and have diameters of 57.3 mm and 12.7 mm. The corresponding flow rates are respectively  $361 \text{ mm}^3/\text{s}$  for the viscoplastic fluid and  $17.7 \text{ mm}^3/\text{s}$  for the Newtonian case. The Reynolds number of the flow was kept below 0.01 for all cases, to assure no inertial effects. A bypass valve was used to remove air bubbles from the transparent

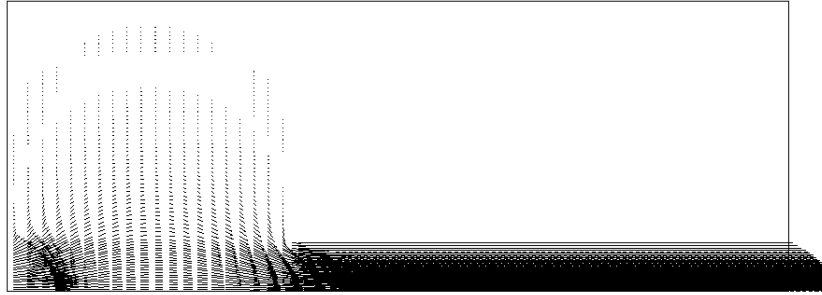


Figure 3: Velocity vectors  $\tau_0^0 = 0$  (Newtonian)  $L_0/D_0 = 0.5$

manifold before starting the videotape.

The expansion/contraction chamber was made of 57.7 mm diameter transparent plexiglas tube and has an overflow chamber on top to hold the fluid. The flow was vertical and upwards. We used a black and white CCD camera, model KP-M1 (Hitachi Denshi, Ltda.), coupled to either a 12.5-75 mm /f1.8 (Toyo Optics, Japan) or a 18-108mm/f2.5 (Computar, Japan) zoom lens, connected to a good quality standard VCR. The light source is a 300 W Kodak Ecktagraphic IIIE-plus slide projector (Kodak Company, USA). In the projector slide chamber, an Aluminum slide 1.6 mm thick and having a 1.1 mm wide vertical slot was used to create a plane of light about 2 mm wide. The camera was positioned perpendicular to this plane of light. The videotape was digitized with a Power Mac 8500/120 (Apple Computer Inc.) and the public domain NIH Image v. 1.6.1 program (National Institutes of Health USA).

### 3.1 Fluids

The measurements were done for two different fluids, a polymeric aqueous solution (viscoplastic) and a polyethylene glycol (Newtonian). All concentrations were measured by weight. The 0.5% Carbopol 676 (B. F. Goodrich Chemical Co., USA) aqueous solution was neutralized with 0.04% Sodium Hydroxide (Rhos Ltda., Brazil). The viscosity of this solution is highly dependent on its pH, which was kept at a value of 6.0. The viscosity for this solution was observed to decrease sharply with increasing shear rate. For the Carbopol solution both the viscosity and shear stress fit well to a Herschel-Bulkley model. The rheological properties obtained using a rotational rheometer (Physica UDS 200) are  $\tau_0 = 78.3 \text{ Pa}$  and  $K = 111 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  and  $n = 0.4$ . The fluid density is essentially equal to that of water, i.e.,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . For the Newtonian fluid we used an aqueous solution of 55% polyethylene glycol (Polietileno glicol 6000, Vetec Ltda., Brazil). This concentration is close to the saturation point at room temperature. We measured the viscosity of this solution and found a constant value for a wide range of shear rates. The density was found to be  $1090 \text{ kg/m}^3$  for this Newtonian solution. Both solutions were transparent, and the visualization was possible by mixing light reflecting Pliolite particles (GoodYear Inc, USA) in the solutions. The particle diameters were between 149 and 250  $\mu\text{m}$  and the concentrations in the solutions ranged between 0.08 and 0.12%.

## 4. RESULTS AND DISCUSSION

As stated earlier, all the numerical and experimental results obtained pertain to negligible inertia ( $Re = \rho \gamma D_c / \eta < 1 \times 10^2$ ). Two different values of the ratio  $L_0/D_0$  were analyzed, viz.  $L_0/D_0 = 0.5$  and 1. The results for larger values of  $L_0/D_0$  are qualitatively similar to the ones obtained for  $L_0/D_0 = 1$ .

Figures 3–5 show the velocity vectors obtained numerically for  $L_0/D_0 = 0.5$  and for  $\tau_0^0 = 0$  (Newtonian) 0.4 and 0.7. The flow patterns observed show an interesting structure. In the downstream tube (radius  $R_i$ ), the core region is the region of lowest velocity gradients, and hence

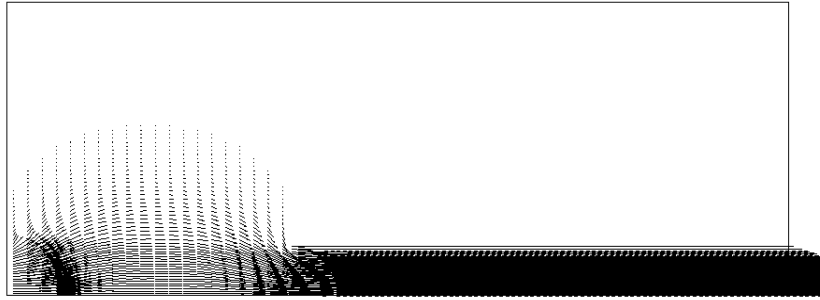


Figure 4: Velocity vectors  $\alpha_0^0 = 0.14; L/D = 0.5$

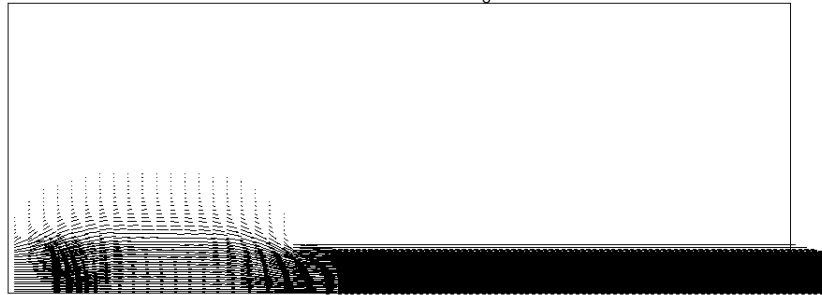


Figure 5: Velocity vectors  $\alpha_0^0 = 0.7; L/D = 0.5$

of lowest stresses. Near the wall, the velocity gradient is larger, and so is the stress. Therefore, the centerline region is a region where the stress is lower than the yield stress, and the material move as a solid body. This region is called the plug flow region. The plug flow region increases with the yield stress, as it can be seen in Figs. 3–5 and 7–9. In the large duct (radius  $R_o$ ), the plug region close to the centerline is also present, except close to the expansion and contraction planes, where the velocity gradients are high. Away from the centerline and adjacent to the tube wall, there is a region where the velocities are rather small, leading to small velocity gradients and stresses lower than the yield stress. The non-zero but small velocities in this region is consistent with the bi-viscosity model. It can be noted that the nearly-stagnant region increases with the yield stress, as expected. For the Newtonian case, negative values of the velocity indicate a slow recirculating flow in this region.

Flow visualizations for the viscoplastic material for  $L_o=D_o = 0.5$  and 1 are shown in Fig. 6. It can be observed that there is no flow in a large region adjacent to the wall for  $L_o=D_o = 0.5$  (left picture). Furthermore, from the movie it can be observed that the velocity profile is rather flat the core region, with a steep decrease to zero towards the stagnant region. Within our limited observations, it looks like the velocity profile is discontinuous, i.e., as if internal slip occurs. This behavior is qualitatively different from that one inferred from the numerical solution, where the velocity smoothly decreases to zero near this limiting region. Moreover, the stagnant region observed experimentally is significantly larger than the one predicted by the numerical approach. For the Newtonian liquid, we have been facing problems of operational nature, and flow visualization results are not yet available.



Figure 6: Experimental streamlines for the viscoplastic liquid  $\alpha_0^0 = 0.14; L/D = 0.5$  and 1

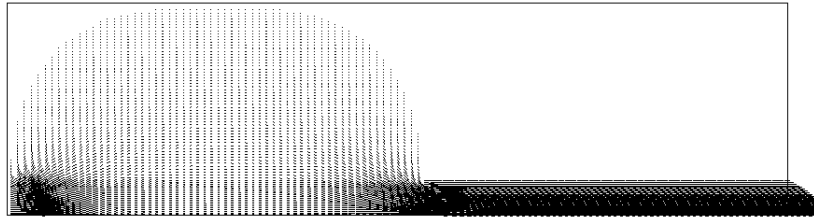


Figure 7: Velocity vectors  $r_0^0 = 0$  (Newtonian);  $L=D = 1$

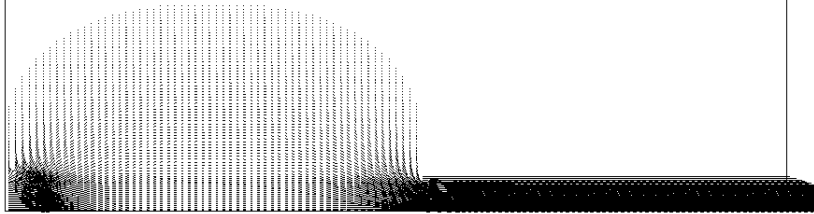


Figure 8: Velocity vectors  $r_0^0 = 0.14$ ;  $L=D = 1$

The velocity vectors for  $L_0=D_0 = 1$  and for  $r_0^0 = 0$  (Newtonian), 0.14 and 0.7 are shown in Figs. 7–9. Flow patterns obtained experimentally for the viscoplastic material and  $L_0=D_0 = 1$  is shown in Fig. 6. It can be observed that the flow patterns are different from that ones obtained for  $L_0=D_0 = 0.5$ . In these cases, all the fluids flow in similar patterns, with no stagnant region, not even for the viscoplastic materials. For this case, the numerical and experimental observations are in good agreement.

## 5. CONCLUSIONS

This paper investigates the performance of the GNL constitutive equation for the flow of viscoplastic materials in a complex geometry, namely, an axisymmetric duct consisting of an expansion followed by a contraction. The governing equations of mass and momentum are solved numerically via a finite-volume technique. The numerical solution gives the velocity, viscosity and pressure fields. The flow pattern was also obtained experimentally.

It is observed that the flow pattern obtained numerically with the bi-viscosity model agree well with the experimental ones only for larger values of  $L_0=D_0$ . Experimental observations indicate that there is a flow pattern transition for  $L_0=D_0 < 1$ . Below this value, the viscoplastic material starts to fracture near the core region of the flow. The numerical solution was not able to predict this behavior. The results obtained numerically give a smooth velocity profile through the radius of the duct. For  $L_0=D_0 > 1$  all the materials yield the same qualitative flow pattern, no fracture being observed. The numerical predictions for this case are in good agreement with the experimental observations.

## ACKNOWLEDGEMENTS

Financial support for the present research was provided by CNPq and MCT.

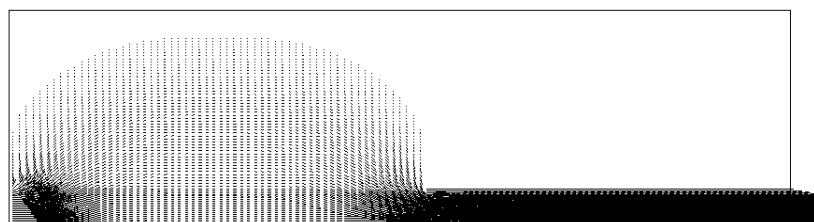


Figure 9: Velocity vectors  $r_0^0 = 0.7$ ;  $L=D = 1$

## REFERENCES

- † Abdali, S.S., Mitsoulis, E. and Markatos, N.C., 1992, “Entry and exit flows of Bingham fluids”, *J. Rheology*, V. 36, pp. 389.
- † Barnes, H.A., 1999a, “A brief history of the yield stress”, *Appl. Rheol.*, V. 9 (6), pp. 262–266.
- † Barnes, H.A., 1999b, “Yield stress – a review, or ...fi 3 çfi%† – everything flows?”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, V. 81, pp. 133.
- † Bird, R.B., Armstrong, R.C. and Hassager, O., 1987, “Dynamics of Polymeric Liquids”, Ed. Wiley.
- † Bird, R.B., Dai, G.C. and Yarusso, B.J., 1983, “The rheology of flows of viscoplastic materials”, *Rev. Chem. Eng.*, V. 1, pp.1–70.
- † Beverly, C.R. and Tanner, R.I., 1992, “Numerical analysis of three-dimensional Bingham plastic flow”, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics* , V. 42, pp.85–115.
- † Ellwood, K.R.J., Georgiou, G.C., Papanastasiou, C.J. and Wilkes, J.O., 1990, “Laminar jets of Bingham-plastic liquids”, *J. Rheol.*, V. 34, pp.787–812.
- † Gartling, D.K. and Phan-Thien, N., 1984, “A numerical simulation of a plastic fluid in a parallel-plate plastometer”, *J. Non-Newt. Fluid Mech.* , V. 14, pp.347–360.
- † Lipscomb, G.G. and Denn, M.M., 1984, “Flow of Bingham fluids in complex geometries”, *J. Non-Newt. Fluid Mech.* , V. 14, pp.337–346.
- † Macosko, C.W., 1994, “Rheology: Principles, Measurements, and Applications”, Ed. VCH.
- † Naccache, M.F. and Souza Mendes, P.R., 1997, “Abrupt Expansion Flows of Bingham Materials”, XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, CDROM.
- † O’Donovan, E.J. and Tanner, R.I., 1984, “Numerical study of the Bingham squeeze film problem”, *J. Non-Newt. Fluid Mech.* , V. 15, pp.75–83.
- † Pak, B., Cho, Y.I. and Choi, S.U.S., 1990, “Separation & Reattachment of Non-Newtonian Fluid Flows in a Sudden Expansion Pipe”, *J. Non-Newt. Fluid Mech.* , V. 37, pp.175–199.
- † Papanastasiou, T.C., 1987, “Flows of materials with yield”, *J. Rheol.* , V. 31, pp.385–404.
- † Patankar, S. V., 1980, “Numerical Heat Transfer & Fluid Flow”, Hemisphere Pub. Corp..
- † Piau, J.M., 1996, “Flow of a yield stress fluid in a long domain. Application to flow on an inclined plane”, *J. Rheol.* , V. 40, pp.711–723.
- † Settari, S. and Aziz, K. , 1973, “A Generalization of the Additive Correction Methods for the Iterative Solution of Matrix Equations”, *SIAM J. Num. Anal.* , V. 10, pp.506–521.
- † Soares, M., Souza Mendes, P.R. and Naccache, M.F., 1997, “Heat Transfer to Viscoplastic Fluids in Laminar Flow Through Isothermal Short Tubes”, *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, V. XIX (1), pp.1–14.
- † Vradis, G. C., Dougher, J. and Kumar, S., 1992, “Entrance pipe flow and heat transfer for a Bingham plastic”, *Int. J. Heat Mass Transfer* , V. 35, pp.543–552.
- † Vradis, G. C. and Ötügen, M. V., 1997, “The Axisymmetric Sudden Expansion Flow of a Non-Newtonian Viscoplastic Fluid”, *J. of Fluids Engineering* , V. 110, pp.193–200.
- † Wilson, S.D.R., 1993, “Squeezing flow of a yield-stress fluid in a wedge of slowly-varying angle”, *J. Non-Newt. Fluid Mech.* , V. 50, pp.45–63.
- † Wilson, S. D. R. and Taylor, A. J. , 1996, “The channel entry problem for a yield stress fluid”, *J. Non-Newt. Fluid Mech.* , V. 65, pp.165–176.

# UMA COMPARAÇÃO ENTRE DUAS METODOLOGIAS PARA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES USANDO ELEMENTOS DE SEGUNDA ORDEM

**Rudolf Huebner\***

**Mauri Fortes\*\***

\*Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Mecânica, Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil. e-mail : rudolf@demec.ufmg.br

\*\*Centro Universitário de Belo Horizonte-UNI-BH, Rua Diamantina , 529, 31110-320, Belo Horizonte, MG, Brasil. e-mail : maurif@uol.com.br

## Resumo

O presente trabalho tem por objetivo analisar duas metodologias para solução de problemas de escoamento incompressível. Ambas metodologias consistem em uma formulação de Petrov-Galerkin, porém uma faz uso de um método direto para solução do sistema de equações enquanto a outra consiste em um esquema segregado para solução do sistema de equações. As duas metodologias são empregadas na solução de diversos casos de escoamentos laminares e os resultados são comparados entre si e com dados existentes na literatura.

**Palavras- Chaves :** Petrov-Galerkin, Navier-Stokes, Elementos Finitos, Escoamento Incompressível

## 1.INTRODUÇÃO

O método de Galerkin é muito eficiente para analisar problemas lineares auto-adjuntos e problemas não lineares de valores nos contornos. Em problemas de mecânica dos fluidos e problemas convectivos-difusivos (problemas não auto-adjuntos) a matriz associada ao termo convectivo não é simétrica (devido ao caráter não adjunto, assimétrico, do operador diferencial convectivo). Devido a este fato, as soluções obtidas podem apresentar um comportamento oscilatório e, para que se obtenham soluções precisas e sem oscilações, deve-se utilizar malhas muito refinadas. As limitações da formulação de Galerkin, principalmente no que se refere à falsa difusão e à dispersão numérica, podem ser superadas utilizando-se os chamados esquemas a montante (*upwind*) ou formulações de Petrov-Galerkin (Brooks e Hughes, 1982; Hughes, 1978; Sampaio, 1990; Rice e Schnipke, 1986).

Os esquemas do tipo a montante (*upwind*) eliminam oscilações mas não são precisos. Assim, (Hughes, 1978) propôs um método que consiste em modificar a forma de integração numérica do termo convectivo. Uma grande vantagem desse tipo de aproximação é que o grau de 'upwinding' pode ser continuamente controlado a fim de melhorar a precisão dos resultados.

(Brooks e Hughes, 1982) utilizaram o método de Petrov-Galerkin, segundo o qual as funções de peso (teste) e as funções de forma são escolhidas em espaços diferentes. Assim, propuseram uma formulação que modifica as funções de teste através da adição de uma perturbação. Este esquema é chamado de método de Petrov-Galerkin de linhas de corrente a montante (Streamline Upwind Petrov-Galerkin, SUPG). Uma vantagem do método de Petrov-Galerkin de linhas de corrente a montante é que o problema de falsa difusão é reduzido sensivelmente.

(Shaw, 1991) desenvolveu um esquema de solução segregada que tem por base o algoritmo SIMPLER (Patankar, 1980). Neste esquema as componentes da velocidade são calculadas pelas equações de quantidade de movimento e efetuam-se correções para velocidade e pressão, a fim de satisfazer a equação da continuidade. O esquema proposto por Shaw permite que se usem interpolações lineares para pressão e velocidades. O método se mostrou instável ao ser aplicado a problemas com números de Reynolds mais elevados levando assim à necessidade de se utilizarem técnicas ‘upwind’, tal como o SUPG ou o método de integração proposto por (Hughes, 1978).

O método proposto por (Sampaio, 1991) consiste em uma formulação de Petrov-Galerkin que é obtida a partir da aplicação da formulação de mínimos quadrados dos resíduos das equações (de quantidade de movimento e continuidade). A metodologia permite que interpolações lineares sejam usadas para velocidade e pressão. Uma desvantagem da metodologia proposta por Sampaio é que deve-se utilizar um método direto de solução de equações. Este trabalho tem por objetivo implementar e analisar duas alternativas de solução de problemas de escoamento incompressível, verificar a possibilidade de se utilizarem métodos diretos e segregados de solução quando do uso destas formulações e analisar a aplicabilidade das metodologias no que se refere ao uso de elementos que utilizam funções de interpolação de segunda ordem.

## 2. METODOLOGIA

As equações desenvolvidas nesta seção são formuladas considerando que o escoamento é em regime transiente, incompressível e axis-simétrico. As equações de quantidade de movimento e continuidade são escritas como :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( r \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + b_x \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( r \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \mu \frac{v}{r^2} + b_r \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (3)$$

em que  $u$  e  $v$  são as componentes da velocidade nas direções  $x$  e  $r$  respectivamente,  $p$  é a pressão,  $\rho$  é a densidade,  $\mu$  é a viscosidade do fluido,  $t$  é o tempo e  $b_x$  e  $b_r$  são as componentes da força de corpo.

As equações de quantidade de movimento são discretizadas no tempo usando um esquema de diferenças centradas (conforme indica o índice  $n+1/2$ ) :

$$F_x - b_x^{n+1/2} = 0 \quad (4)$$

$$F_r - b_r^{n+1/2} = 0 \quad (5)$$

com

$$F_x = \frac{\rho}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) + \rho u^n \frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x} + \rho v^n \frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial r} - \mu \nabla^2 u^{n+1/2} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} \quad (6)$$

$$F_r = \frac{\rho}{\Delta t} (v^{n+1} - v^n) + \rho u^n \frac{\partial v^{n+1/2}}{\partial x} + \rho v^n \frac{\partial v^{n+1/2}}{\partial r} - \mu \nabla^2 v^{n+1/2} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial r} + \mu \frac{v^{n+1/2}}{r^2} \quad (7)$$

A discretização das variáveis dependentes é feita por meio das interpolações quadráticas para velocidade e pressão:

$$\hat{u}^{n+1} = N_a u_a^{n+1} \quad \hat{v}^{n+1} = N_b v_b^{n+1} \quad \hat{p}^{n+1} = N_c p_c^{n+1} .$$

As equações de quantidade de movimento discretizadas podem ser escritas como :

$$\hat{F}_x = \frac{\rho}{\Delta t} (\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n) + \rho \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^{n+1/2}}{\partial x} + \rho \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^{n+1/2}}{\partial r} - \mu \nabla^2 \hat{u}^{n+1/2} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\hat{F}_r = \frac{\rho}{\Delta t} (\hat{v}^{n+1} - \hat{v}^n) + \rho \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1/2}}{\partial x} + \rho \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1/2}}{\partial r} - \mu \nabla^2 \hat{v}^{n+1/2} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial r} + \mu \frac{\hat{v}^{n+1/2}}{r^2}. \quad (9)$$

Substituindo  $F_x$ ,  $F_r$  por  $\hat{F}_x$ ,  $\hat{F}_r$  e usando as equações (4) e (5) pode-se escrever a soma do quadrado dos resíduos das equações de quantidade de movimento.

$$S = \int_{\Omega} [\hat{F}_x - b_x^{n+1/2}]^2 d\Omega + \int_{\Omega} [\hat{F}_r - b_r^{n+1/2}]^2 d\Omega. \quad (10)$$

A equação acima pode ser minimizada com relação aos parâmetros  $u_i^{n+1}$ ,  $v_k^{n+1}$  e  $p_l^{n+1}$  :

$$\frac{\partial S}{\partial u_i^{n+1}} = \int_{\Omega} 2[\hat{F}_x - b_x^{n+1/2}] \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial u_i^{n+1}} d\Omega = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial S}{\partial v_k^{n+1}} = \int_{\Omega} 2[\hat{F}_r - b_r^{n+1/2}] \frac{\partial \hat{F}_r}{\partial v_k^{n+1}} d\Omega = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_l^{n+1}} = \int_{\Omega} 2[\hat{F}_x - b_x^{n+1/2}] \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial p_l^{n+1}} d\Omega + \int_{\Omega} 2[\hat{F}_r - b_r^{n+1/2}] \frac{\partial \hat{F}_r}{\partial p_l^{n+1}} d\Omega = 0. \quad (13)$$

As equações (11) e (12) podem ser encaradas como o método de Petrov-Galerkin para as equações de quantidade de movimento.

$$\int_{\Omega} (N_i + W_i) [\hat{F}_x - b_x^{n+1/2}] d\Omega = 0, \quad (14)$$

$$\int_{\Omega} (N_k + W_k) [\hat{F}_r - b_r^{n+1/2}] d\Omega = 0, \quad (15)$$

onde

$$W_i = \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) - \frac{\mu \Delta t}{2\rho} \nabla^2 N_i, \quad (16)$$

$$W_k = \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_k}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) - \frac{\mu \Delta t}{2\rho} \nabla^2 N_k + \frac{N_k \mu}{2r^2}. \quad (17)$$

O parâmetro  $\Delta t$  nas equações acima é calculado da seguinte maneira :

$$\Delta t = \frac{\alpha h}{|u|} \quad (18)$$

em que,  $\alpha = \coth\left(\frac{Re}{2}\right) - \frac{2}{Re}$ ,  $Re = \frac{\rho|u|h}{\mu}$  é o número de Reynolds do elemento e  $h$  é o comprimento característico do elemento.

$W_i$  e  $W_k$  são descontínuas nos contornos dos elementos, e assim, os termos ponderados por estas funções deverão ser integrados apenas no interior dos elementos, como indicado por Brooks e Hughes (1982). Usando o teorema de Green nos termos viscosos, ponderados segundo Galerkin nas equações (14) e (15) e considerando o limite quando os valores de  $u$ ,  $v$  e  $p$  avaliados no instante  $n+1$  tendem aos valores de  $u$ ,  $v$  e  $p$  avaliados no instante  $n$ , obtém-se as seguintes equações:



$$\int_{\Omega} (N_i + W_i) \left[ \rho \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial x} + \rho \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial r} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial x} - b_x \right] d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} \mu \nabla N_i \cdot \nabla \hat{u}^{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} W_i \mu \nabla^2 \hat{u}^{n+1} d\Omega = \int_{\Gamma} N_i \mu \nabla \hat{u}^{n+1} \cdot n d\Gamma$$
(19)

$$\int_{\Omega} (N_k + W_k) \left[ \rho \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial x} + \rho \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial r} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial r} + \mu \frac{\hat{v}^{n+1}}{r^2} - b_r \right] d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} \mu \nabla N_k \cdot \nabla \hat{v}^{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} W_k \mu \nabla^2 \hat{v}^{n+1} d\Omega = \int_{\Gamma} N_k \mu \nabla \hat{v}^{n+1} \cdot n d\Gamma$$
(20)

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal ao contorno.

A equação para pressão é obtida combinando-se a equação de continuidade, na sua forma discretizada, com a equação (13). Considerando o limite para regime permanente temos :

$$\int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[ \rho \hat{u}^{n+1} \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial x} + \rho \hat{v}^{n+1} \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial r} - \mu \nabla^2 \hat{u}^{n+1} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial x} - b_x \right] d\Omega +$$

$$\int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial y} \left[ \rho \hat{u}^{n+1} \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial x} + \rho \hat{v}^{n+1} \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial r} - \mu \nabla^2 \hat{v}^{n+1} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial r} + \mu \frac{\hat{v}^{n+1}}{r^2} - b_r \right] d\Omega +$$

$$\int_{\Omega} N_i \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} + \frac{\hat{v}}{r} \right)^{n+1} d\Omega = 0$$
(21)

As equações de quantidade de movimento (19) e (20) e a equação de pressão-continuidade (21) constituem o sistema a ser resolvido. Pelo menos um valor de referência para pressão deve ser definido a fim de se obter um problema bem colocado.

Como na maioria dos problemas não-lineares, alguma forma de relaxação é necessária a fim de se obter uma solução convergida. No caso da metodologia segregada uma relaxação linear na forma

$$\phi_r = \alpha \phi_n + (1-\alpha) \phi_o$$
(22)

é aplicada às variáveis  $u$ ,  $v$  e  $p$ . Na equação acima  $\phi_r$  é o valor relaxado,  $\phi_n$  é valor obtido na iteração atual e  $\phi_o$  é o valor da iteração anterior.

A solução do sistema resultante de equações é realizada de duas formas. No caso da formulação segregada o sistema é resolvido conforme a seqüência mostrada abaixo.

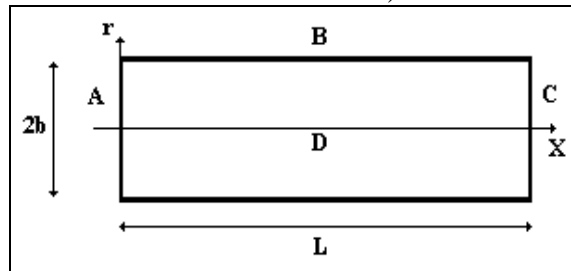
1. Obtenção de  $u$  - equação (19)
2. Atualização de  $u$  - equação (23)
3. Obtenção de  $v$  - equação (20)
4. Atualização de  $v$  - equação (23)
5. Obtenção de  $p$  - equação (21)
6. Atualização de  $p$  - equação (23)
7. Se a solução convergiu pare, caso contrário retorne ao passo 1.

No caso da formulação direta (Sampaio) os passos (1), (3) e (5) são realizados simultaneamente e a equação 22 não é necessária ao longo do processo. O *solver* utilizado nas duas formulações é uma adequação, para um ou três graus de liberdade, do método de solução

frontal apresentado em (Taylor e Hughes, 1981). Nas duas metodologias a solução é considerada convergida quando  $|\phi_r - \phi_{r\text{ anterior}}| \leq \epsilon$ .

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, serão apresentados problemas que ilustram a aplicação da formulação proposta. O primeiro problema a ser considerado é o escoamento plenamente desenvolvido no interior de um tubo. A figura 1 mostra a geometria considerada. Devido à simetria do problema somente metade da região foi discretizada. O número de Reynolds para o escoamento foi 56 (baseado na velocidade média e diâmetro do tubo).



**Figura 1.** Geometria e dimensões características ( $b=0,5\text{m}$  e  $L=50\text{m}$ )

A região foi discretizada utilizando uma malha uniforme com 5 elementos ao longo da direção  $x$  e 5 ao longo da direção  $y$ . As condições de contorno utilizadas foram :

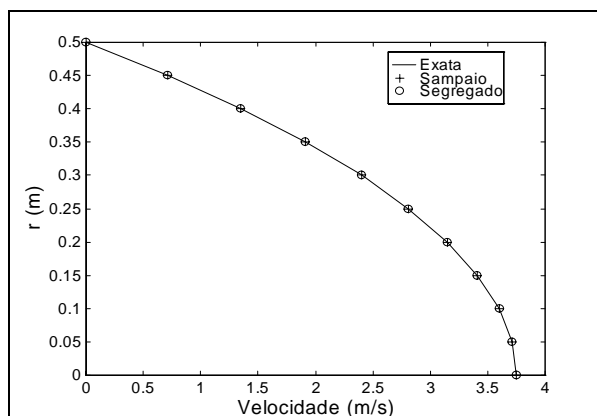
Na entrada (A) :  $p = 100 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

Na parede (B) :  $u = 0 \quad v = 0$

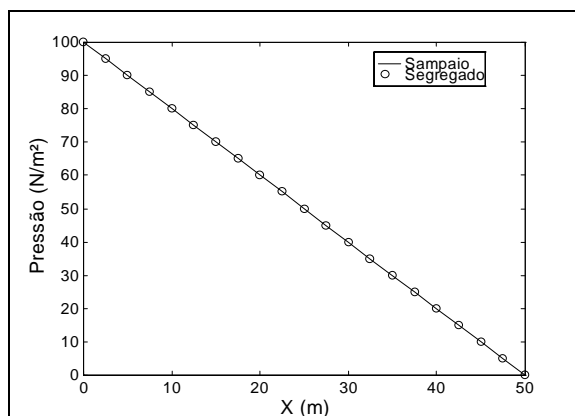
Na saída (C) :  $p = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

No plano de simetria (D) :  $v = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0$

Na análise do problema o critério de convergência usado foi de  $(10^{-3})$  e nenhuma relaxação foi necessária para obtenção dos campos de pressão e velocidade. A formulação de Sampaio necessitou de uma iteração para satisfazer o critério de convergência enquanto a segregada necessitou de duas iterações.



**Figura 2.** Perfil de velocidade na saída



**Figura 3.** Perfil de pressão ao longo de  $x$

A figura 2 mostra o perfil de velocidade na saída do domínio e pode-se observar que as soluções obtidas coincidem com a solução exata. A variação linear do perfil de pressão ao longo da direção  $x$  é mostrada na figura 3.

O segundo problema considerado foi o escoamento em desenvolvimento no interior de um duto circular. O domínio analisado apresenta a mesma geometria do problema anterior, exceto o comprimento do domínio (L) que passou a ser igual a 15. O número de Reynolds para o escoamento foi 100 (baseado na velocidade média e diâmetro do tubo).

As condições de contorno utilizadas foram :

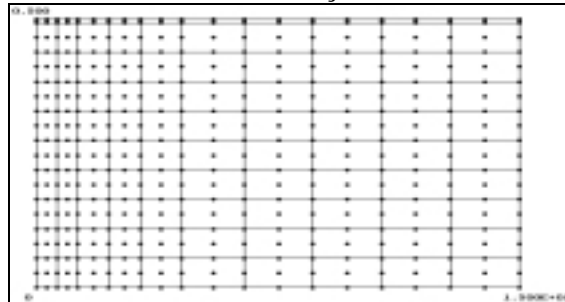
Na entrada (lado A, figura 1) :  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad u = 1 \quad v = 0$

Na parede (lado B, figura 1) :  $u = 0 \quad v = 0$

Na saída (lado C, figura 1) :  $p = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

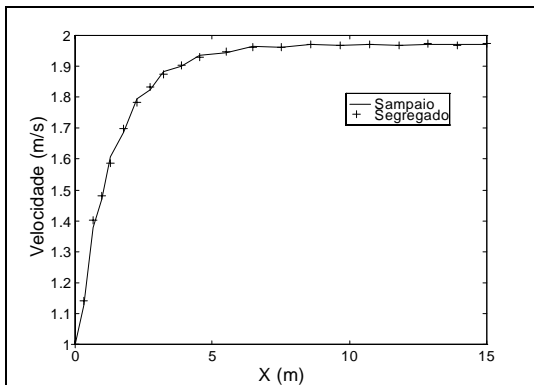
No plano de simetria (lado D, figura 1) :  $v = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0$

A figura 4 mostra a malha utilizada nas simulações.

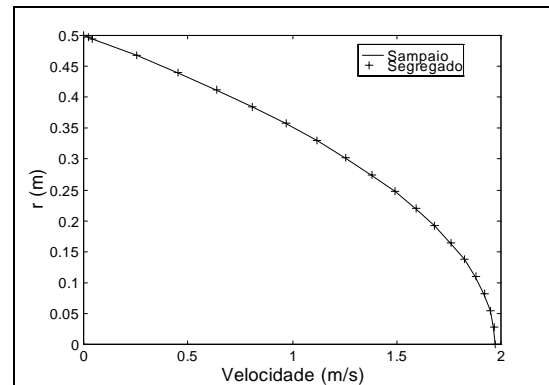


**Figura 4.** Discretização da região

Na análise do problema o critério de convergência usado foi de  $(10^{-3})$ . As velocidades não foram relaxadas e a pressão foi relaxada por um fator igual a  $5 \times 10^{-3}$ . A formulação de Sampaio convergiu em 5 iterações e a segregada exigiu 188 iterações.

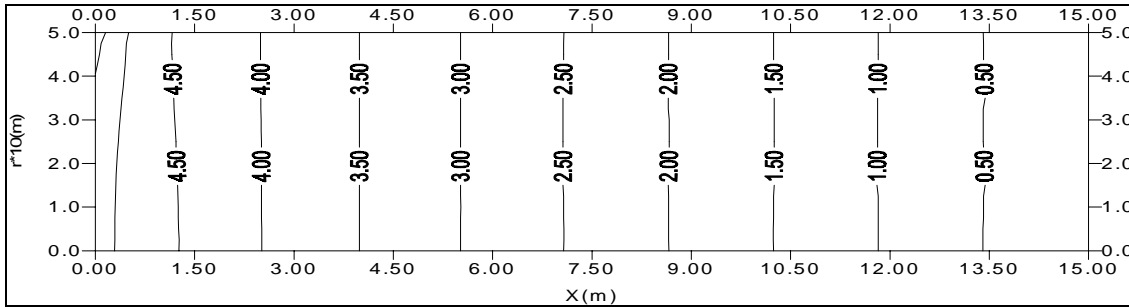


**Figura 5.** Variação de u na linha de centro

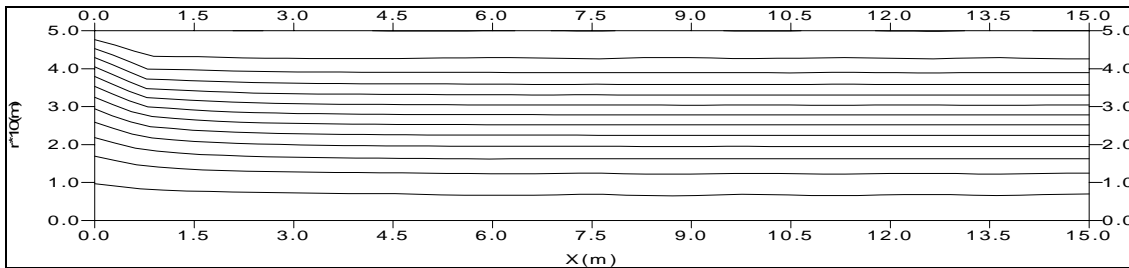


**Figura 6.** Perfis de velocidade na saída

A figura 5 mostra a variação da velocidade u ao longo da linha de centro. O comportamento da curva mostra que o comprimento de entrada se aproxima bem do valor de 5,65 m citado por Ward-Smith (1980). A figura 6 mostra que os perfis de velocidade obtidos se aproximam bem do perfil de velocidade de um escoamento completamente desenvolvido na região de saída. O campo de pressão obtido utilizando-se a metodologia segregada é mostrado na figura 7 (fora de escala). Nota-se que o campo não apresenta oscilações apesar do uso de interpolações de mesma ordem para velocidade e pressão. A figura 8 (fora de escala) mostra as linhas de corrente do escoamento ao se utilizar a formulação de Sampaio.

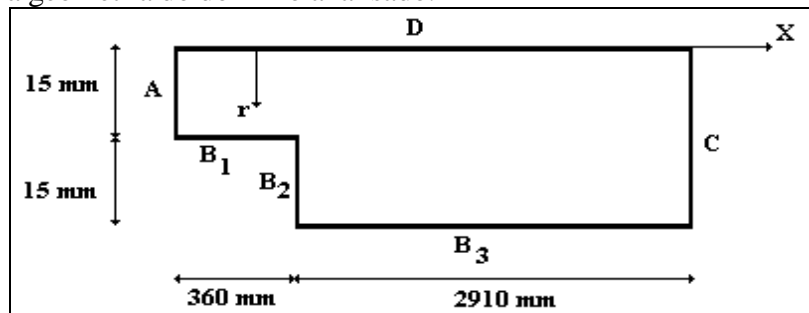


**Figura 7.** Campo de pressão obtido com a metodologia segregada



**Figura 8.** Linhas de corrente obtidas com a formulação de Sampaio

O último problema a ser considerado é o escoamento laminar em uma expansão abrupta. A figura 9 mostra a geometria do domínio analisado.



**Figura 9.** Geometria do domínio

As condições de contorno utilizadas foram :

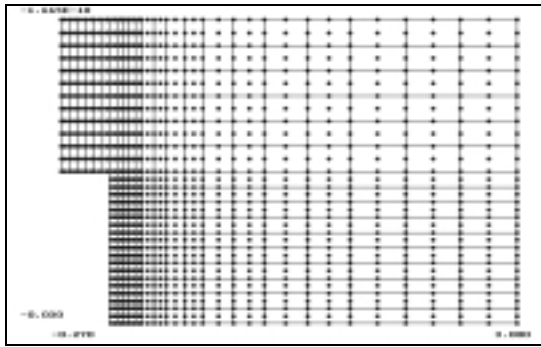
Na entrada (A) : 
$$u(r) = -\frac{8 \cdot 10^4}{9} (r - 0,015) * (r + 0,015) ; v = 0 ; \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Nas paredes (B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub> e B<sub>3</sub>) : 
$$u = 0 ; v = 0$$

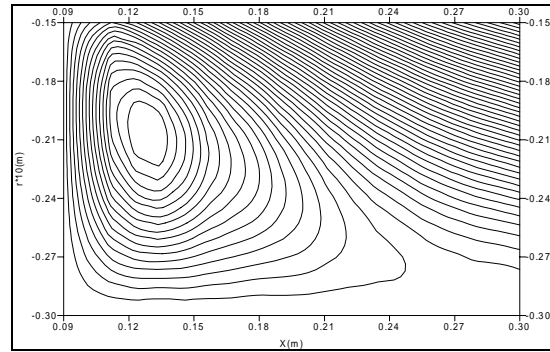
Na saída (C) : 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial v}{\partial x} = 0 ; p = 0$$

No plano de simetria (D) : 
$$v = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

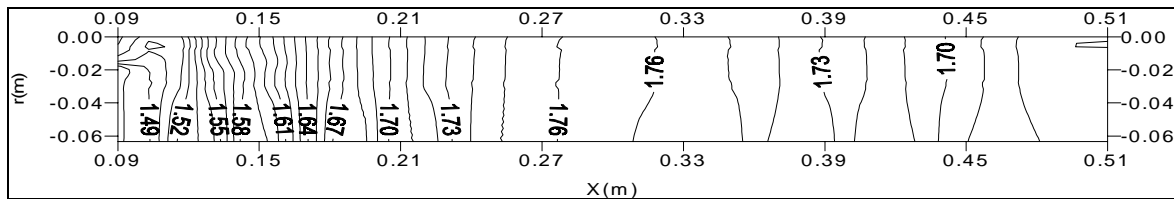
O número de Reynolds foi 100 (baseado na velocidade média na entrada e no menor diâmetro da expansão). A malha utilizada é mostrada na figura 10. O critério de convergência utilizado foi igual a  $10^{-3}$ . As velocidades foram relaxadas por um fator igual a 0.5 e a pressão por um fator igual a  $10^{-3}$ . A formulação de Sampaio convergiu em 9 iterações e a segregada exigiu 172 iterações. A figura 11 (fora de escala) mostra as linhas de corrente numa região próxima ao degrau ao se utilizar a metodologia direta. O centro do vórtice e seu tamanho se aproximam bem dos valores sugeridos por Ward-Smith (1980). Na figura 12 observa-se o campo de pressão obtido pela metodologia segregada, numa região próxima ao degrau, nota-se que o mesmo é fisicamente consistente não apresentando qualquer tipo de oscilação.



**Figura 10.** Malha utilizada na discretização



**Figura 11.** Linhas de corrente



**Figura 12.** Campo de pressão obtido com a metodologia segregada

#### 4. CONCLUSÕES

Os resultados mostram que a formulação originalmente proposta por Sampaio (1991) admite um esquema de solução na forma segregada e que ambas podem ser empregadas utilizando-se elementos quadráticos. Os resultados obtidos pelas duas formulações apresentam campos de pressões e velocidades consistentes apesar das ordens de interpolação utilizadas. O esquema segregado requer um número maior de iterações para convergir entretanto o esforço computacional envolvido em cada iteração é menor.

#### 5. REFERÊNCIAS

- Brooks, A.N. & Hughes, T.J.R., 1982, "Streamline upwind Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes Equations", Computer Methods in Applied Mec. and Engng.
- Hughes, T.J.R., 1978, "A simple scheme for developing "upwind" finite elements", Int. J. Num. Methods in Engng. 12: 1359-1365.
- Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Ed. Hemisphere, New York, 168p.
- Rice, J.G. & Schnipke, R.J., 1986, "An equal-order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes", Comp. Methods Appl. Mech. Engng., 58: 135-149.
- Sampaio, P.A.B. de, 1990, "A Petrov-Galerkin modified operator formulation for convection-difusion problems", Int. J. Num. Methods in Engng. 30: 331-347.
- Sampaio, P.A.B. de, 1991, "A Petrov-Galerkin formulation for the incompressible Navier-Stokes equations using equal order interpolation for velocity and pressure", Int. J. Num. Methods in Engng. 31: 1135-1149.
- Shaw, C.T., 1991, "Using a segregated finite element scheme to solve the incompressible Navier-Stokes equations", Int. J. Num. Methods in Fluids 12: 81-92.
- Taylor, C. & Hughes, T.G., 1981, "Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations", Ed. Pineridge Press Ltd., Swansea, 244p.
- Ward-Smith, A.J, 1980, "Internal Fluid Flow", Ed. Clarendon Press, Oxford,, 566p.

# UMA METODOLOGIA SEGREGADA PARA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

**Rudolf Huebner\***

**Mauri Fortes\*\***

\*Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Mecânica, Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil. e-mail : rudolf@demec.ufmg.br

\*\*Faculdade de Ciências Gerenciais-UNA, Rua Sapucaí, 429, 30150-050, Belo Horizonte, MG, Brasil. e-mail : maurif@uol.com.br

## Resumo

O presente trabalho apresenta uma metodologia segregada para solução das equações de Navier-Stokes. O método consiste em uma formulação de Petrov-Galerkin obtida à partir da aplicação da formulação de mínimos quadrados aos resíduos das equações de quantidade de movimento. A presente metodologia permite que interpolações de mesma ordem sejam utilizadas para velocidade e pressão. O método é utilizado na solução de diversos casos de escoamentos laminares e os resultados são comparados com dados existentes na literatura.

**Palavras- Chaves :** Petrov-Galerkin, Navier-Stokes, Elementos Finitos, Escoamento Incompressível

## 1. INTRODUÇÃO

Problemas incompressíveis (ou ligeiramente compressíveis) de escoamento de fluidos geralmente são formulados em termos de velocidade e pressão e caem na categoria de problemas de formulação mista (Dyne e Heinrich, 1993). Em tais problemas, a condição de estabilidade de Babuska-Brezzi (CEBB) impõe restrições ao uso de funções de interpolação arbitrárias para velocidades e pressões. Pode-se mostrar que a violação da CEBB leva a um sistema singular de equações; para que não haja violação da CEBB, a interpolação utilizada para a velocidade deve ser de ordem superior à interpolação usada para a pressão (Zienkiewicz e Wu, 1991; Zienkiewicz e Taylor, 1989; Hughes, 1989). Formulações mistas, que não obedecem à CEBB podem gerar campos de pressão espúrios e apresentar dificuldade de convergência

Vários pesquisadores desenvolveram metodologias que contornam a CEBB, sem a utilização de ordens de interpolações diferentes (Schnipke e Rice, 1986; Sampaio, 1991; Shaw, 1991; Franca, Hughes e Ballestra, 1986).

Rice e Schnipke (1986) desenvolveram uma metodologia de aproximação *upwind* segregada. Nesta metodologia as equações de quantidade de movimento são discretizadas usando-se a formulação de Galerkin em todos os termos, exceto os termos convectivos. Os termos convectivos são tratados usando-se uma formulação *upwind* na direção das linhas de corrente. Esta metodologia não produz oscilações e reduz substancialmente a difusão numérica.

Shaw (1991) desenvolveu um esquema de solução segregada que tem por base o algoritmo SIMPLER (Patankar, 1980). O esquema proposto permite que se usem interpolações de mesma ordem para pressão e velocidades; entretanto a instabilidade do método ao ser aplicado a

problemas com números de Reynolds mais elevados mostra a necessidade de se utilizarem técnicas *upwind*, tais como a proposta por Hughes(1978).

Sampaio (1991), tendo por base uma formulação proposta por Franca et al. (1986), propôs o uso de uma outra metodologia para solução das equações de Navier-Stokes. O método consiste em uma formulação de Petrov-Galerkin que é obtida a partir da aplicação da formulação de mínimos quadrados aos resíduos das equações (quantidade de movimento e continuidade). A metodologia proposta permite que interpolações de mesma ordem sejam usadas para velocidade e pressão. Uma desvantagem da técnica proposta por Sampaio é que ela trata a velocidade e pressão de um modo acoplado devendo-se utilizar um método direto de solução do sistema resultante de equações. O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma metodologia segregada para solução das equações de Navier-Stokes tomando por base a formulação proposta por Sampaio.

## 2. METODOLOGIA

As equações de quantidade de movimento e continuidade aplicáveis a escoamentos transientes, bidimensionais e incompressíveis são :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + b_x \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + b_y \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

em que  $u$  e  $v$  são as componentes da velocidade nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente,  $p$  é a pressão,  $\rho$  é a densidade,  $\mu$  é a viscosidade do fluido,  $t$  é o tempo e  $b_x$  e  $b_y$  são as componentes da força de corpo.

As equações de quantidade de movimento são discretizadas no tempo como :

$$F_x - b_x^{n+1/2} = 0 \quad (4)$$

$$F_y - b_y^{n+1/2} = 0 \quad (5)$$

onde

$$F_x = \frac{\rho}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) + \rho u^n \frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x} + \rho v^n \frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial y} - \mu \nabla^2 u^{n+1/2} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} \quad (6)$$

$$F_y = \frac{\rho}{\Delta t} (v^{n+1} - v^n) + \rho u^n \frac{\partial v^{n+1/2}}{\partial x} + \rho v^n \frac{\partial v^{n+1/2}}{\partial y} - \mu \nabla^2 v^{n+1/2} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial y} \quad (7)$$

em que o sobrescrito  $n+1/2$  indica que as equações foram discretizadas no tempo usando um esquema de diferenças centrais. A discretização das variáveis dependentes é feita por meio de interpolações lineares para velocidade e pressão.

$$\hat{u}^{n+1} = N_a u_a^{n+1} \quad \hat{v}^{n+1} = N_b v_b^{n+1} \quad \hat{p}^{n+1} = N_c p_c^{n+1} .$$

As equações de quantidade de movimento, na forma discretizada, são escritas como :

$$\hat{F}_x = \frac{\rho}{\Delta t} (\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n) + \rho \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^{n+1/2}}{\partial x} + \rho \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^{n+1/2}}{\partial y} - \mu \nabla^2 \hat{u}^{n+1/2} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} , \quad (8)$$

$$\hat{F}_y = \frac{\rho}{\Delta t} (\hat{v}^{n+1} - \hat{v}^n) + \rho \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1/2}}{\partial x} + \rho \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1/2}}{\partial y} - \mu \nabla^2 \hat{v}^{n+1/2} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y}. \quad (9)$$

Substituindo  $F_x, F_y$  por  $\hat{F}_x, \hat{F}_y$  e usando as equações (4) e (5) pode-se escrever a soma do quadrado dos resíduos das equações de quantidade de movimento.

$$S = \int_{\Omega} [\hat{F}_x - b_x^{n+1/2}]^2 d\Omega + \int_{\Omega} [\hat{F}_y - b_y^{n+1/2}]^2 d\Omega. \quad (10)$$

Minimizando a equação acima com relação a  $u_i^{n+1}, v_k^{n+1}$  obtém-se as equações abaixo que são equivalentes ao método de Petrov-Galerkin para as equações de quantidade de movimento.

$$\int_{\Omega} (N_i + W_i) [\hat{F}_y - b_y^{n+1/2}] d\Omega = 0, \quad (11)$$

$$\int_{\Omega} (N_k + W_k) [\hat{F}_y - b_y^{n+1/2}] d\Omega = 0, \quad (12)$$

onde

$$W_i = \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) - \frac{\mu \Delta t}{2\rho} \nabla^2 N_i \quad \text{e} \quad W_k = \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_k}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) - \frac{\mu \Delta t}{2\rho} \nabla^2 N_k.$$

O parâmetro  $\Delta t$  nas equações acima é calculado da seguinte maneira :

$$\Delta t = \frac{\alpha h}{|u|} \quad (13)$$

em que,  $\alpha = \coth\left(\frac{Re}{2}\right) - \frac{2}{Re}$ ,  $Re = \frac{\rho|u|h}{\mu}$  é o número de Reynolds do elemento e  $h$  é o comprimento característico do elemento.

Usando o teorema de Green nos termos viscosos, ponderados segundo Galerkin nas equações (11) e (12) e considerando o limite quando os valores de  $u, v$  e  $p$  avaliados no instante  $n+1$  tendem aos valores de  $u, v$  e  $p$  avaliados no instante  $n$ , obtém-se as seguintes equações:

$$\int_{\Omega} (N_i + W_i) \left[ \rho \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial x} + \rho \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial x} - b_x \right] d\Omega + \int_{\Omega} \mu \nabla N_i \cdot \nabla \hat{u}^{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} W_i \mu \nabla^2 \hat{u}^{n+1} d\Omega = \int_{\Gamma} N_i \mu \nabla \hat{u}^{n+1} \cdot n d\Gamma \quad (14)$$

$$\int_{\Omega} (N_k + W_k) \left[ \rho \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial x} + \rho \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial y} - b_y \right] d\Omega + \int_{\Omega} \mu \nabla N_k \cdot \nabla \hat{v}^{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} W_k \mu \nabla^2 \hat{v}^{n+1} d\Omega = \int_{\Gamma} N_k \mu \nabla \hat{v}^{n+1} \cdot n d\Gamma \quad (15)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal ao contorno.



A equação (10) pode ser minimizada com relação a  $p_1^{n+1}$ .

$$\frac{\partial S}{\partial p_1^{n+1}} = \int_{\Omega} 2[\hat{F}_x - b_x^{n+1/2}] \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial p_1^{n+1}} d\Omega + \int_{\Omega} 2[\hat{F}_y - b_y^{n+1/2}] \frac{\partial \hat{F}_y}{\partial p_1^{n+1}} d\Omega = 0 \quad (16)$$

A equação para pressão, mostrada abaixo, é obtida à partir da combinação da equação de continuidade, discretizada segundo Galerkin, com a equação (16).

$$\int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[ \rho \hat{u}^{n+1} \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial x} + \rho \hat{v}^{n+1} \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial y} - \mu \nabla^2 \hat{u}^{n+1} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial x} - b_x \right] d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial y} \left[ \rho \hat{u}^{n+1} \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial x} + \rho \hat{v}^{n+1} \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial y} - \mu \nabla^2 \hat{v}^{n+1} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial y} - b_y \right] d\Omega + \int_{\Omega} N_i \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right)^{n+1} d\Omega = 0 \quad (17)$$

As equações (14), (15) e (17) constituem o sistema a ser resolvido. As condições de contorno essenciais são valores prescritos de velocidade e/ou pressão, e as condições de contorno naturais são gradientes de velocidade prescritos. Pelo menos um valor de referência para pressão deve ser definido a fim de se obter um problema bem colocado.

Neste trabalho uma relaxação linear na forma

$$\phi_r = \alpha \phi_n + (1-\alpha) \phi_o \quad (18)$$

é aplicada às variáveis  $u$ ,  $v$  e  $p$ . Na equação acima  $\phi_r$  é o valor relaxado,  $\phi_n$  é valor obtido na iteração atual e  $\phi_o$  é o valor da iteração anterior.

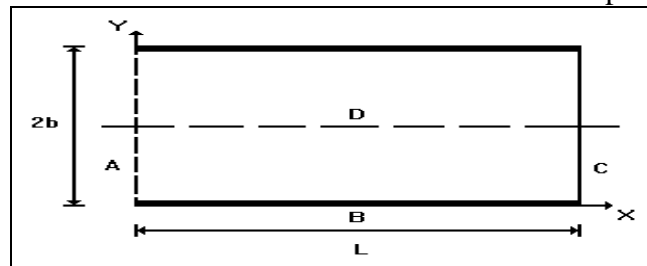
O sistema resultante de equações foi resolvido conforme a seqüência mostrada abaixo.

1. Obtenção de  $u$  - equação (14)
2. Atualização de  $u$  - equação (18)
3. Obtenção de  $v$  - equação (15)
4. Atualização de  $v$  - equação (18)
5. Obtenção de  $p$  - equação (17)
6. Atualização de  $p$  - equação (18)
7. Se a solução convergiu pare, caso contrário retorne ao passo 1.

A solução é considerada convergida quando  $|\phi_r - \phi_{r \text{ anterior}}| \leq \epsilon$ .

### 3.RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, serão apresentados problemas que ilustram a aplicação da formulação proposta. O primeiro problema a ser considerado é o escoamento plenamente desenvolvido entre placas. A figura 1 mostra a geometria considerada. Devido à simetria com relação ao plano central somente metade da região entre as placas foi discretizada. O número de Reynolds para o escoamento foi 150 (baseado na velocidade média e distância entre as placas).

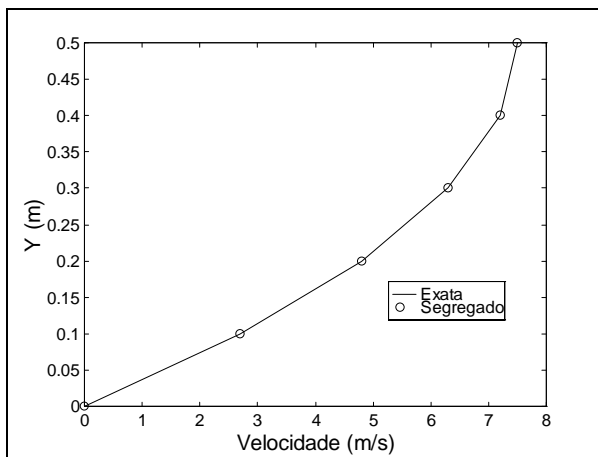


**Figura 1.** Geometria e dimensões características ( $b=0,5\text{m}$  e  $L=50\text{m}$ )

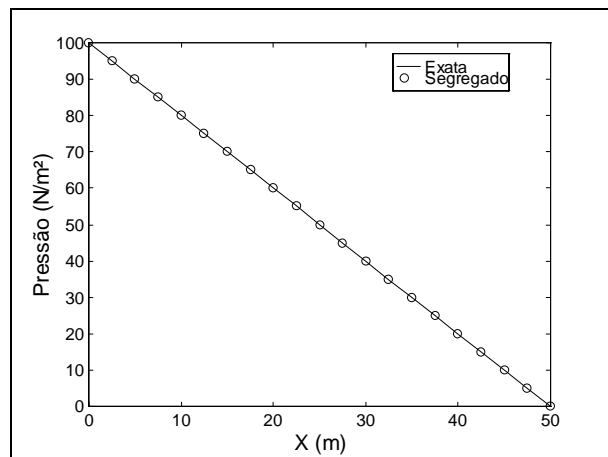
A região foi discretizada utilizando uma malha uniforme com 10 elementos ao longo da direção x e 5 ao longo da direção y. As condições de contorno utilizadas neste problema foram :

$$\begin{aligned} \text{Na entrada (A) :} & \quad p = 100 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \text{Na parede (B) :} & \quad u = 0 \quad v = 0 \\ \text{Na saída (C) :} & \quad p = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \text{No plano de simetria (D) :} & \quad v = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Na análise do problema o critério de convergência usado foi de  $(10^{-3})$  e nenhuma relaxação foi necessária para obtenção dos campos de pressão e velocidade.



**Figura 2.** Perfil de velocidade



**Figura 3.** Variação da pressão com x

A figura 2 mostra que o perfil de velocidade obtido, na saída do domínio, coincide com a solução exata. Na figura 3 pode-se observar a variação linear do perfil de pressão ao longo da direção x.

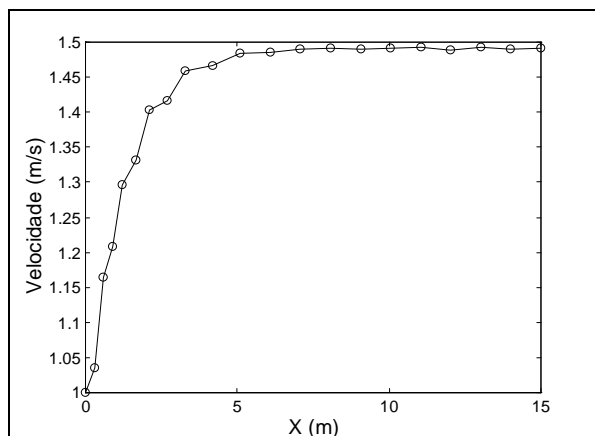
O segundo problema considerado foi o escoamento em desenvolvimento entre placas. O domínio analisado apresenta a mesma geometria do problema anterior, exceto o comprimento do domínio (L) que passou a ser igual a 15. O número de Reynolds para o escoamento foi 100 (baseado na velocidade média e distância entre as placas).

As condições de contorno utilizadas foram :

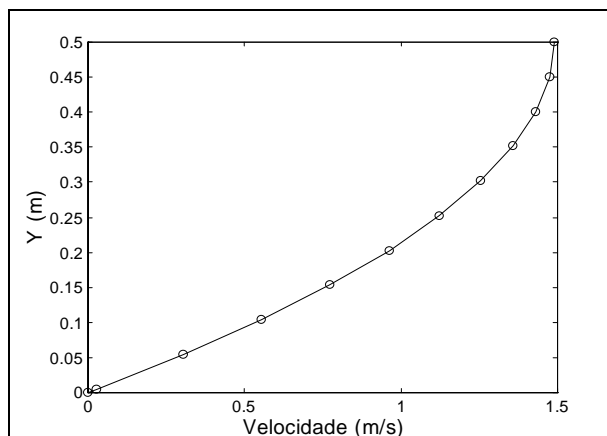
$$\begin{aligned} \text{Na entrada (lado A, figura 1) :} & \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad u = 1 \quad v = 0 \\ \text{Na parede (lado B, figura 1) :} & \quad u = 0 \quad v = 0 \\ \text{Na saída (lado C, figura 1) :} & \quad p = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \text{No plano de simetria (lado D, figura 1) :} & \quad v = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Nas simulações a região foi discretizada utilizando 20 divisões ao longo da direção x e 11 divisões ao longo da direção y. Na direção y a malha foi refinada junto a parede e na direção x a malha foi refinada na região próxima à entrada do escoamento

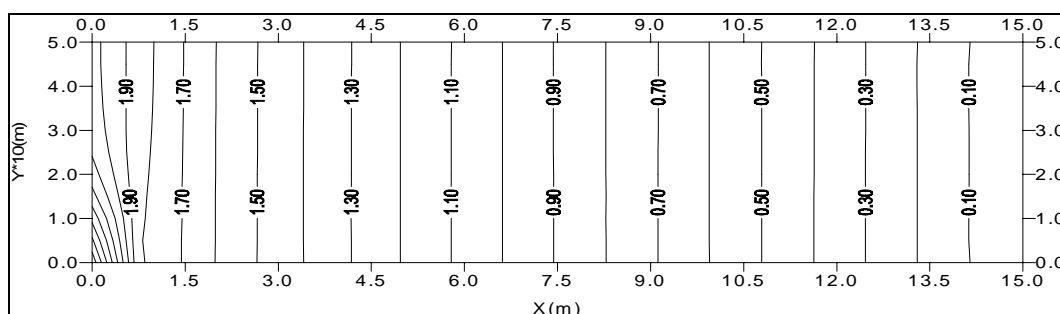
Na análise do problema o critério de convergência usado foi de  $(10^{-3})$  e apenas a pressão foi relaxada por um fator igual a  $10^{-2}$ .



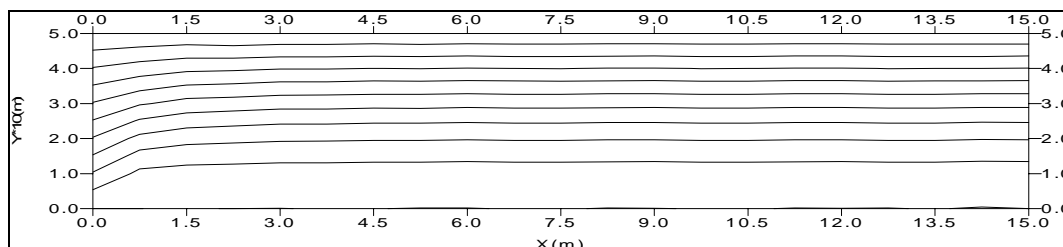
**Figura 4.** Variação de  $u$  para  $y=0,5$



**Figura 5.** Perfil de velocidade na saída



**Figura 6.** Campo de pressão



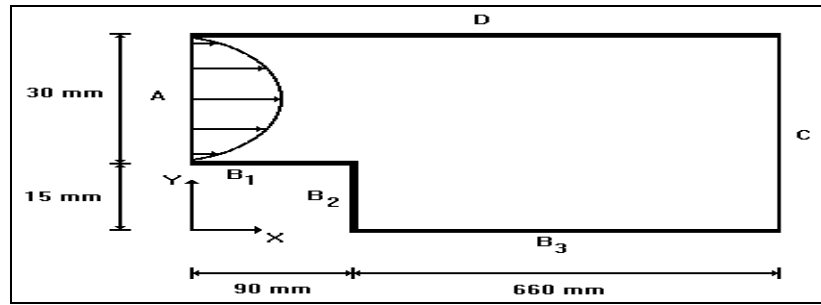
**Figura 7.** Linhas de corrente

A variação da componente  $u$  da velocidade, ao longo da linha de centro, é mostrada na figura 4. A figura 5 mostra que o perfil de velocidade obtido se aproxima bem do perfil de velocidade de um escoamento completamente desenvolvido na região de saída. O campo de pressão obtido é mostrado na figura 6 (fora de escala) e observar-se que o mesmo não apresenta oscilações apesar do uso de interpolações de mesma ordem para velocidade e pressão. A figura 7 (fora de escala) mostra as linhas de corrente do escoamento. A tabela 1 mostra os valores de  $u$ , ao longo da linha de centro, obtidos pela presente formulação e por Guerrero e Cotta (1995) para um escoamento com  $Re$  igual a 40. Pode-se observar uma boa concordância entre os valores obtidos pelas duas metodologias.

**Tabela 1** - Valores de  $u$  ao longo da linha de centro do escoamento para  $Re = 40$ .

x	Guerrero e Cotta	Segregado	x	Guerrero e Cotta	Segregado
0.2	1.022	1.035	1.4	1.421	1.452
0.6	1.166	1.259	1.8	1.480	1.477

O último problema a ser considerado é o escoamento laminar sobre um degrau. A figura 8 mostra a geometria do domínio analisado.



**Figura 8.** Geometria e dimensões

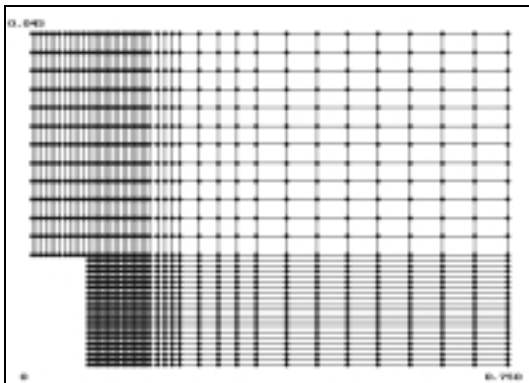
As condições de contorno utilizadas foram :

Na entrada (A) : 
$$u(y) = -\frac{2 \cdot 10^4}{3} (y - 0,015) * (y - 0,045) ; v = 0 ; \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

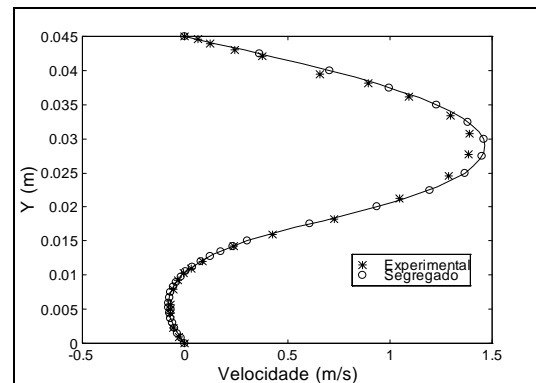
Nas paredes (B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, B<sub>3</sub> e D) : 
$$u = 0 ; v = 0$$

Na saída (C) : 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial v}{\partial x} = 0 ; p = 0$$

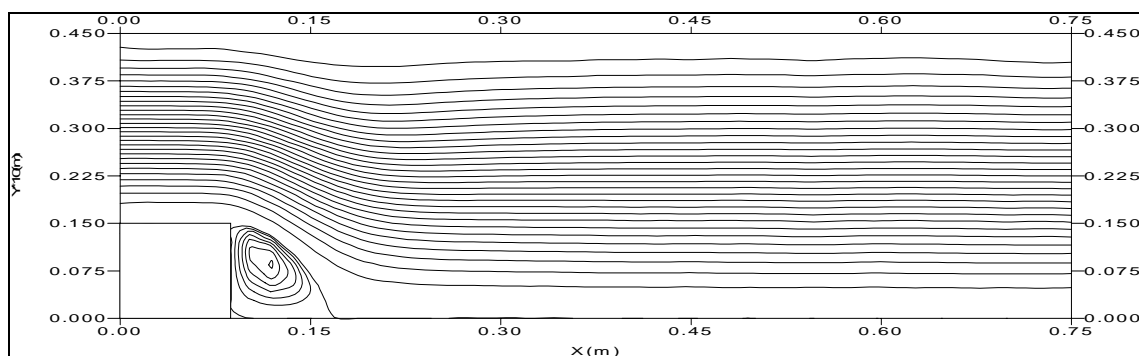
O número de Reynolds foi 73 (baseado na velocidade média na entrada e altura do degrau). A figura 9 mostra a malha utilizada. O critério de convergência utilizado foi igual a  $10^{-3}$ . As velocidades foram relaxadas por um fator de relaxação igual a 0.5 e a pressão por um fator igual a  $10^{-3}$ . A figura 10 mostra o perfil de velocidade (componente u do vetor velocidade) a 12 mm do degrau. O perfil obtido numericamente aproxima-se bastante dos valores experimentais obtidos por Denham e Patrick (1974); citados por Shaw, (1991). As linhas de corrente e o campo de pressão são mostrados nas figuras 11 e 12 (fora de escala), respectivamente.



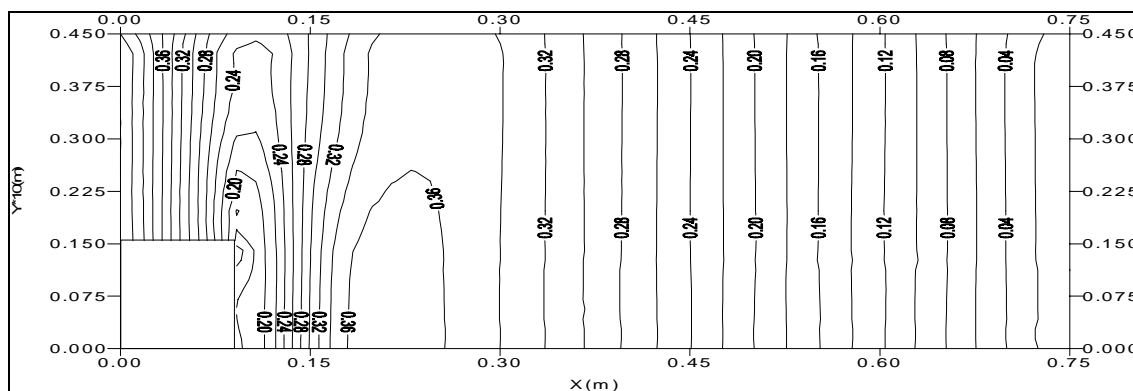
**Figura 9.** Malha utilizada na discretização



**Figura 10.** Perfil a 12 mm do degrau



**Figura 11.** Linhas de corrente



**Figura 12.** Campo de Pressão

#### 4. CONCLUSÕES

Os resultados mostram que a formulação originalmente proposta por Sampaio (1991) admite um esquema de solução na forma segregada. O esquema segregado leva à soluções que apresentam campos de velocidade e pressões fisicamente consistentes. Uma vantagem da metodologia segregada é que o esforço computacional envolvido na solução do sistema de equações é menor, entretanto é necessário uso de relaxações para se obter convergência.

#### 5. REFERÊNCIAS

- Dyne, B.R. & Heinrich, J.C., 1993, "Physically correct penalty-like formulations for accurate pressure calculation in finite element algorithms of the Navier-Stokes Equations", Int. J. Num. Methods in Engng. 36: 3883-3902.
- Franca, L.P., Hughes, T.J.R. & Ballestra. M., 1986, "A new finite element formulation for computational fluid dynamics : V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition : A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations", Comp. Methods Appl. Mech. Engng. 59: 85-99.
- Guerrero, J.S.P. & Cotta, R.M., 1995, "Integral transform solution of developing laminar duct flow in Navier-Stokes formulation", Int. J. Num. Methods in Fluids. 20:1203-1213.
- Hughes, T.J.R., 1978, "A simple scheme for developing "upwind" finite elements", Int. J. Num. Methods in Engng. 12: 1359-1365.
- Hughes, T.J.R., 1989, "The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 803p.
- Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Ed. Hemisphere, New York, 168p.
- Rice, J.G. & Schnipke, R.J., 1986, "An equal-order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes", Comp. Methods Appl. Mech. Engng., 58: 135-149.
- Sampaio, P.A.B. de, 1991, "A Petrov-Galerkin formulation for the incompressible Navier-Stokes equations using equal order interpolation for velocity and pressure", Int. J. Num. Methods in Engng. 31: 1135-1149.
- Shaw, C.T., 1991, "Using a segregated finite element scheme to solve the incompressible Navier-Stokes equations", Int. J. Num. Methods in Fluids 12: 81-92.
- Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L., 1989, "The Finite Element Method", Vol. 1, Ed. McGraw-Hill Book Company, London, 648p.
- Zienkiewicz, O.C. & Wu, J., 1991, "Incompressibility without tears - How to avoid restrictions of mixed formulation", Int. J. Num. Methods in Engng. 32: 1189-1203.

# **CÁLCULO DO ESCOAMENTO EM UM DISPOSITIVO GERADOR DE JATOS DE ÁGUA A ALTA PRESSÃO**

**Marcelo Trindade de Sousa**

Universidade de Brasília, Depto. Eng. Mecânica, LTMD, 70910-900, Brasília, DF, Brasil.

E-mail: mtsousa@diablo.ltmd-enm.unb.br

**Virginie Daru**

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, SINUMEF, Paris, França

## **Resumo**

Este trabalho apresenta um estudo numérico do escoamento em um dispositivo gerador de jatos de água a alta pressão utilizados como ferramenta de decapagem ou de corte em domínios de aplicação variados. O jato é tratado numericamente através de um software comercial (FLUENT) onde o escoamento é simulado em regime laminar e turbulento. Os resultados obtidos mostram que, em regime turbulento, a influência do modelo de turbulência é preponderante. Em regime laminar, o escoamento é não estacionário devido à instabilidade da zona de recirculação muito desenvolvida que se forma na parte cilíndrica terminal do dispositivo gerador.

**Palavras-chave:** Jato de água, Alta pressão

## **1. INTRODUÇÃO**

O princípio físico das ferramentas a jato fluido baseiam-se na utilização da pressão e do fluxo de massa como vetores de energia. Na tecnologia do jato fluido a alta pressão, os níveis de pressão envolvidos são largamente superiores a todos os sistemas encontrados na hidráulica clássica. Não é raro, na verdade, utilizar fluidos sob pressões de 400MPa, ou seja, 4000bar.

Nesta tecnologia, a potência veiculada pelo sistema é conduzida através de um jato de pequeno diâmetro. A interação entre o jato assim formado e qualquer material colocado em sua frente produz uma tensão extremamente elevada sobre o material. Essa tensão pode ser utilizada de maneira muito eficaz nas operações de corte, de decapagem e de tratamento superficial.

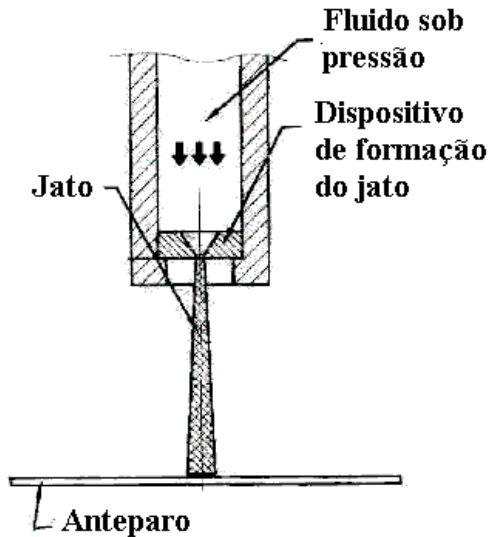
O dispositivo gerador do jato tem o papel de conversor de energia. Ele transforma a energia de pressão do fluido em energia cinética. O dispositivo é formado por um corpo sobre o qual é fixado o orifício de formação do jato. Este último, frequentemente construído em aço, canaliza o fluido e produz um escoamento a altíssima velocidade (figura 1).

Como citado no documento informativo da ENSAM (1999), a utilização do jato d'água como ferramenta de corte de precisão é ainda pouco difundida, mas é extremamente promissora. O jato d'água puro ou com adição de abrasivos permite a usinagem de praticamente todos os tipos de materiais de forma rápida, e não produz qualquer tipo de resíduo nocivo. Um dos problemas da utilização do jato de água a alta pressão para esta finalidade reside na pouca precisão alcançada se comparado a outros processos de usinagem.

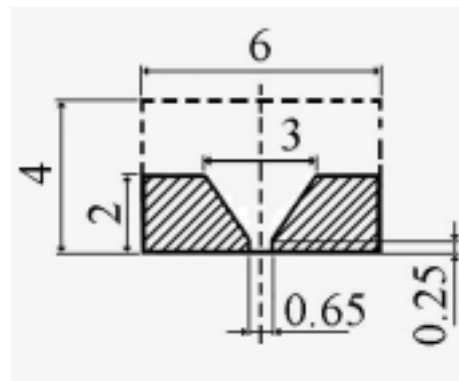
Uma maior precisão de corte só pode ser alcançada a partir da determinação das características do jato desde sua formação até o momento do impacto e ainda a interação com

o material. Através de uma breve consulta à bibliografia disponível observa-se a falta de estudos teóricos sobre o assunto, sendo a quase totalidade dos estudos baseados em observações prático-experimentais.

O objetivo desse estudo é conhecer a forma geral de um jato produzido, e o perfil de velocidades do mesmo na saída do dispositivo gerador.



**Figura 1** – Formação do Jato



**Figura 2** – Geometria do dispositivo [mm].

Pode-se observar a geometria do dispositivo gerador do jato a partir da figura 2 onde é possível observar as dimensões envolvidas, tal como o diâmetro de 0,65mm do cana terminal. Para melhor simular o escoamento, considera-se uma extensão do domínio de cálculo a montante do dispositivo. Devido a simetria axial da geometria, calculou-se somente a metade do domínio físico.

## 2. ABORDAGEM NUMÉRICA

Simulou-se numericamente o escoamento em regime turbulento e laminar. No caso turbulento, utilizou-se os modelos k-ε RNG e de Spalart-Allmaras (1992).

Em regime turbulento e empregando-se o modelo k-ε RNG, utilizou-se o modelo de duas camadas como tratamento da vizinhança da parede. Como pode ser visto em Piquet (1983), nesse caso, as funções de parede são completamente abandonadas em favor da integração direta até a parede, de toda região afetada pela viscosidade, inclusive a subcamada viscosa. Esse modelo subdivide o domínio de cálculo em uma região afetada pela viscosidade e uma região de turbulência completamente desenvolvida. Conforme os manuais do usuário (1998), a demarcação dessas duas regiões é determinada pelo número de Reynolds turbulento,

$Re_y \equiv \frac{\rho \sqrt{k} y}{\mu}$ , baseado em uma distância 'y' normal à parede. Na região de turbulência

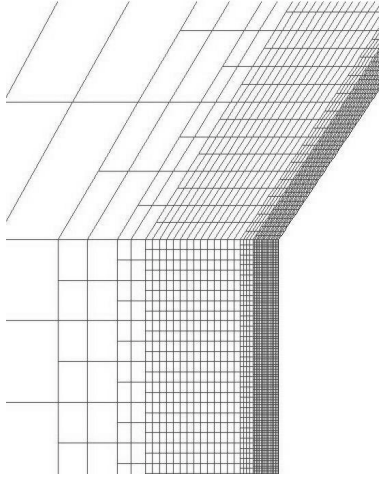
completamente desenvolvida ( $Re_y > 200$ ), o modelo k-ε é empregado. Na região próxima à parede, afetada pela viscosidade ( $Re_y < 200$ ), o modelo de uma equação de Wolfstein é empregado. Optou-se pela integração direta até a parede levando-se em conta os elevados gradientes de pressão existentes.

Os dois casos utilizados, axissimétrico ou bidimensional plano, serão considerados.

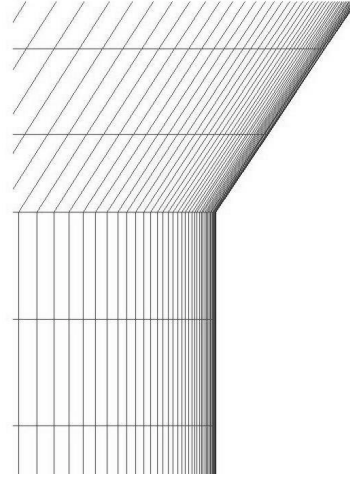
Considerou-se o escoamento em regime permanente, e a água como um fluido incompressível.

## 2.1 Malhas Empregadas

Para melhor compreender a influência da geometria sobre os resultados, utilizou-se duas malhas diferentes.



**Figura 3** – Malha multiblocos em detalhe.



**Figura 4** – Malha estruturada em detalhe.

A primeira é uma malha estruturada em múltiplos blocos, refinada próxima à parede do dispositivo em diversos subdomínios ou blocos de malha. Essa malha contém 33935 células. Observa-se a interface entre cada bloco de malha com volumes não coincidentes (figura 3).

A Segunda é uma malha estruturada em todo o domínio como nos mostra a figura 4. Essa malha contém 9850 células. Nesse caso, nos vimos obrigados a refinar também a malha no canal a montante do dispositivo gerador do jato.

Os dois casos serão chamados, respectivamente, de malha multiblocos e malha estruturada.

## 2.2 Condições de Contorno

Para fixar a condição de contorno na fronteira de entrada do domínio, utilizou-se uma condição de pressão definida, com pressões de 1800 a 2800bar. Na fronteira de saída, utilizou-se também uma condição de pressão definida sendo a mesma igual à pressão atmosférica.

## 3. ANÁLISE DOS RESULTADOS

A tubulação de entrada da água é suficientemente longa para que se possa considerar um escoamento turbulento completamente desenvolvido na entrada do dispositivo.

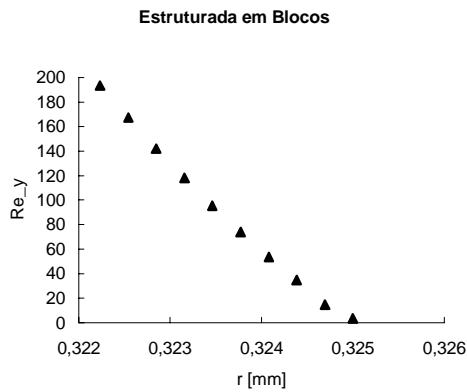
Como uma aproximação inicial, considera-se a intensidade de turbulência ( $I$ ) do escoamento entrando no dispositivo igual a 3,3%. Esse valor é obtido com auxílio de uma formulação empírica empregada para escoamentos turbulentos completamente desenvolvidos apresentada no manual do usuário Fluent (1998).

Avalia-se a qualidade da malha próxima à parede por intermédio do número de Reynolds turbulento  $Re_y$ . Com o modelo de duas camadas, a região afetada pela viscosidade ( $Re_y < 200$ ) deve conter ao menos 10 volumes.

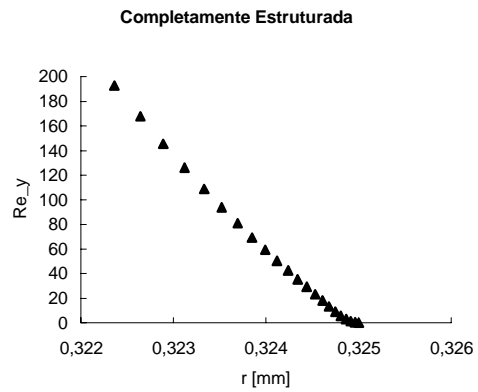


O modelo de Spalart-Allmaras foi desenvolvido para ser utilizado com malhas que resolvam de maneira “precisa” a região afetada pela viscosidade. Por consequência, a malha próxima à parede deve ser similar àquela utilizada para o modelo de duas camadas.

A malha estruturada contém muito mais células na região afetada pela viscosidade em relação à malha multiblocos (figuras 5 e 6), mas pode-se dizer que as duas malhas empregadas são suficientes.



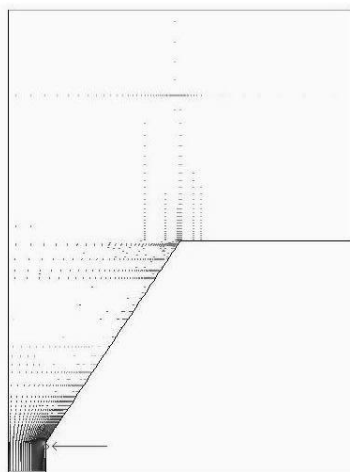
**Figura 5** – Distribuição de volumes na região afetada pela viscosidade utilizando-se a malha multiblocos.



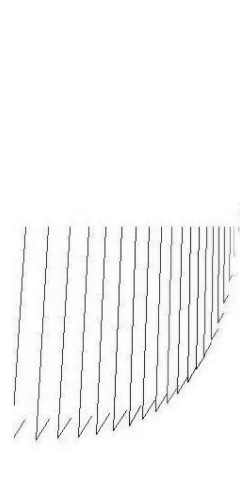
**Figura 6** – Distribuição de volumes na região afetada pela viscosidade utilizando-se a malha estruturada.

Não existem diferenças importantes entre os resultados obtidos a partir das duas malhas empregadas. Os resultados são similares apesar do refinamento diferente próximo à parede em cada malha.

### 3.1 Modelo de Turbulência k-ε RNG



**Figura 7** – Local de Descolamento da camada limite.



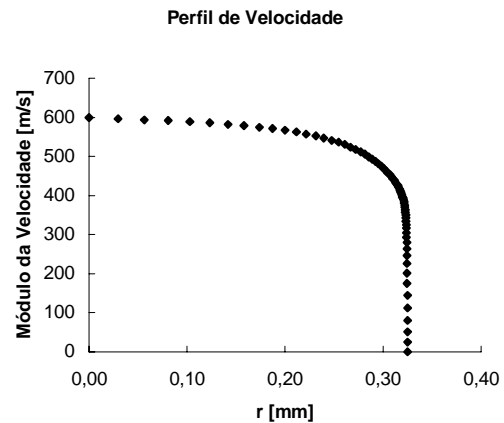
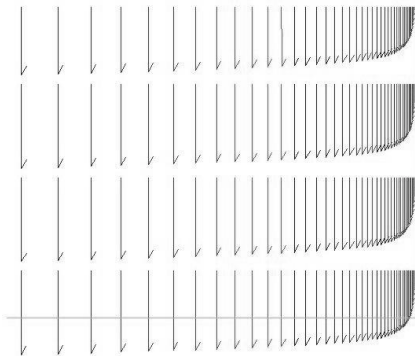
**Figura 8** – Descolamento localizado da camada limite em detalhe.

Para um caso a 1800bar, 2D, I=3.3%

Observa-se um descolamento localizado da camada limite na entrada do canal terminal do dispositivo, como mostrado nas figuras 7 e 8. As soluções 2D e axissimétricas são similares em relação a esse pequeno descolamento.

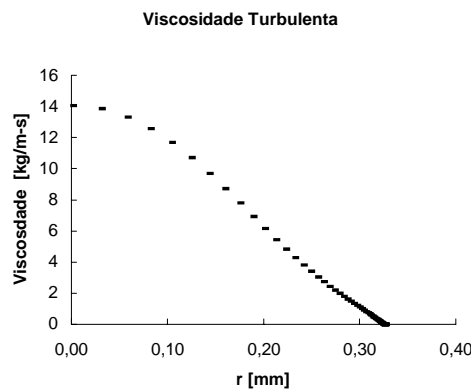
O perfil de velocidade na saída não aparenta ter sido afetado pelo pequeno descolamento da camada limite (figuras 9 e 10).

Variando a intensidade de turbulência do escoamento na entrada do dispositivo, entre 0,01 et 25%, não foi constatada nenhuma variação na formação turbilhonária citada anteriormente. Da mesma forma, também não foi observada nenhuma influência da pressão geratriz (de 1800 a 2800bar) nesse descolamento.



**Figura 9** – Vetores de velocidade na seção de saída do dispositivo.  
(1800bar, 2D, I=3.3%)

**Figura 10** – Módulo de velocidade em função do raio da seção de saída.



**Figura 11** – Viscosidade turbulenta na saída.  
(1800bar, 2D, I = 3.3%)

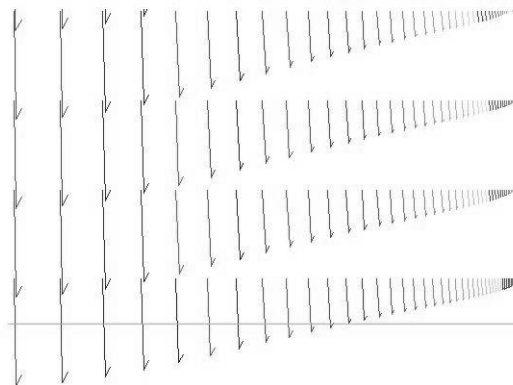
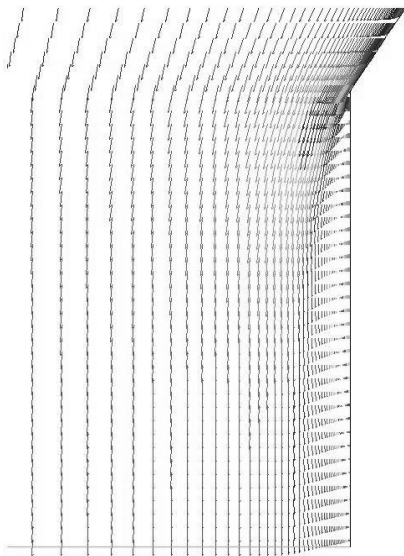
Por outro lado, observa-se curiosamente que a viscosidade turbulenta é máxima no centro do escoamento, fora da camada limite (figura 11) onde se deveria esperar valores próximos a zero.

### 3.2 Modelo de Turbulência de Spalart-Allmaras (S-A)

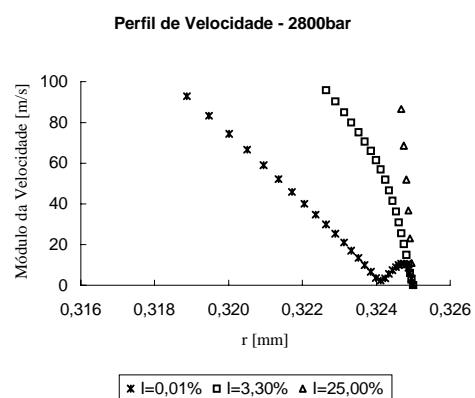
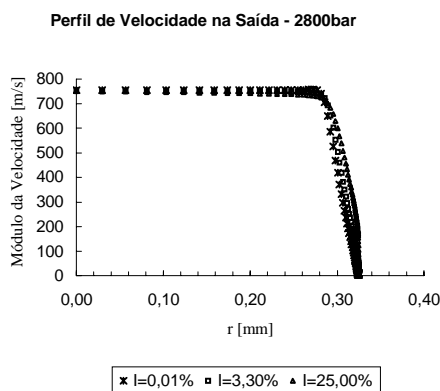
De acordo com os resultados obtidos utilizando-se o modelo de Spalart-Allmaras, observa-se, no canal terminal do dispositivo, uma zona de recirculação muito mais importante (figuras 12 e 13) que a citada anteriormente (modelo  $k-\epsilon RNG$ ).

O tamanho dessa zona de recirculação é influenciado pela pressão geratriz e também pela intensidade de turbulência do escoamento na entrada do dispositivo. A zona de recirculação aumenta com a pressão geratriz e, ao contrário, diminui com o aumento da intensidade de turbulência, conforme pode ser visto nas figuras 14 e 15.

Essa zona de recirculação atinge a seção de saída do dispositivo. Com uma intensidade de turbulência próxima a zero, observa-se, na verdade, uma readmissão de fluido.



**Figura 12** – Vetores de velocidade no canal **Figure 13** – Vetores de velocidade na seção terminal do dispositivo.  
(2800bar, 2D,  $I=3,3\%$ )

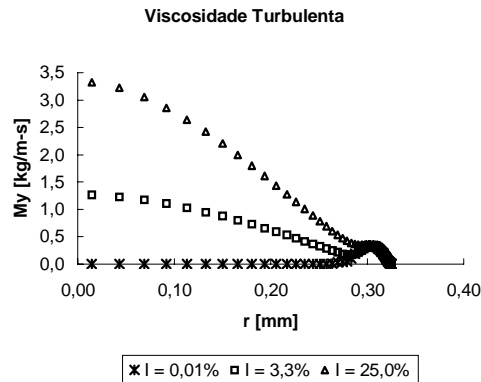


**Figura 14** – Perfil de velocidade na saída do dispositivo para diferentes intensidades de turbulência do escoamento na entrada.  
(2800bar, 2D)

**Figura 15** – Perfil de velocidades em detalhe, próximo à parede.

Ainda, para pequenas intensidades de turbulência do escoamento na entrada do dispositivo, a viscosidade turbulenta é máxima na camada limite, como seria esperado.

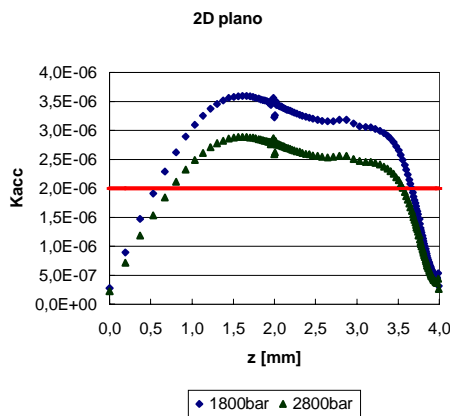
Quando a intensidade aumenta, o comportamento da viscosidade turbulenta se aproxima daquele do modelo k-ε RNG (figura 16).



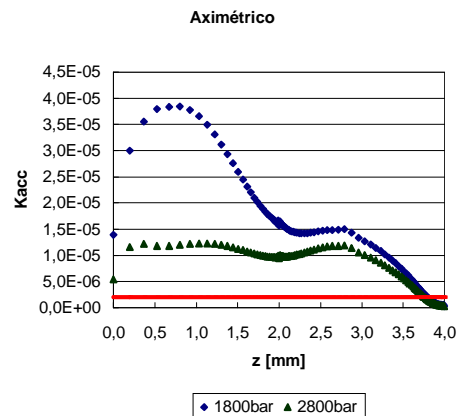
**Figura 16** – Viscosidade turbulenta na seção de saída do dispositivo. (2800bar, 2D)

Devido a esses resultados “curiosos” e se leva-se em consideração o critério de relaminarização da camada limite sujeita a gradientes de pressão extremamente elevados, e ainda, se extrapolarmos esse critério para escoamentos em tubos, diz-se que : - Mesmo se o escoamento é turbulento na entrada do dispositivo, os fortes gradientes de pressão favoráveis ao escoamento podem relaminarizá-lo. A condição de relaminarização é avaliada, segundo Piquet (1999), por intermédio do coeficiente de aceleração que é dado por :

$$K_{acc} = \frac{\nu}{U_e^2} \frac{dU_e}{dx} = -\nu \frac{d\left(\frac{1}{U_e}\right)}{dx} > 2,0 \times 10^{-6} \quad (1)$$



**Figura 17** – Coeficiente de aceleração em função do eixo de simetria – Caso 2D plano.



**Figura 18** – Coeficiente de aceleração em função do eixo de simetria – Caso axissimétrico.

Ainda segundo Piquet, existem algumas variações entre os autores sobre o valor crítico desse coeficiente, mas pode-se afirmar que o escoamento relaminariza quando esse coeficiente ultrapassa o valor entre  $2,0 \times 10^{-6}$  a  $3,5 \times 10^{-6}$ .

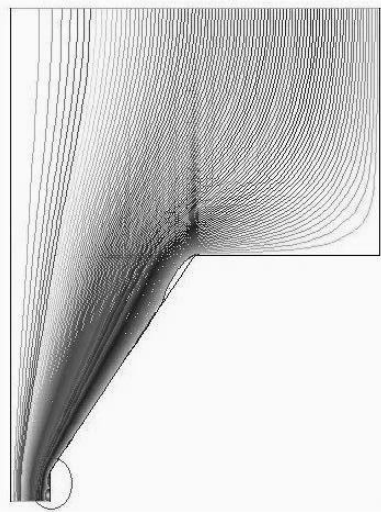
Com base nesses valores, e analisando as figuras 17 e 18, parece então mais correto tratar-se de um escoamento laminar.

Diz-se que o modelo  $k-\epsilon$  é capaz de prever a relaminarização de um escoamento, mas ele não parece nem mesmo adaptado a esse tipo de escoamento.

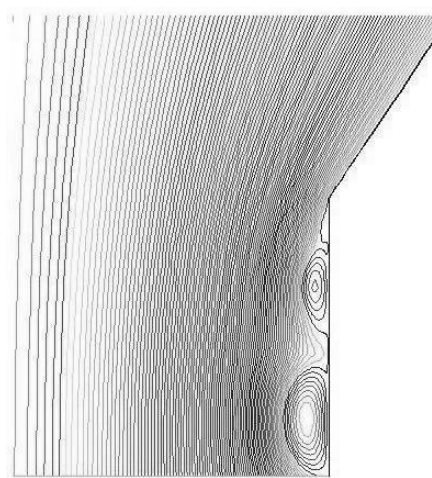
### 3.3 Regime Laminar

Em regime laminar, observa-se uma grande região turbilhonaria no canal terminal do dispositivo (figuras 19 e 20). Neste cálculo, não se converge à um estado estacionário. O escoamento é não estacionário devido à instabilidade dessa zona de recirculação bastante desenvolvida.

A readmissão de fluido na saída não permite simular corretamente o escoamento considerando o dispositivo isolado. Logo, é preciso realizar um cálculo levando em consideração o ambiente que o envolve.



**Figura 19** – Linhas de corrente e a zona de recirculação.



**Figura 20** – Zona de recirculação em detalhe.

(1800bar, axissimétrico)

## 4. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Os modelos de turbulência utilizados não parecem adaptados para o tipo de escoamento estudado. Observam-se alguns resultados curiosos em relação à viscosidade turbulenta com ambos os modelos empregados.

Em regime laminar, o escoamento é não estacionário devido à instabilidade da zona de recirculação bastante desenvolvida que se forma no canal terminal do dispositivo. Ainda, a readmissão de fluido na saída não permite simular corretamente o escoamento considerando somente o dispositivo isolado, sem considerar a atmosfera que o envolve.

Portanto, a seqüência deste estudo demanda um cálculo que leve em consideração a atmosfera que envolve o dispositivo e que utilize um modelo de escoamento bifásico (ar/água).

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ferziger, J. H., Peric, M., 1996, “Computational Methods for Fluid Dynamics”, Ed. Springer.
- FLUENT 5, 1998, User’s Guide, Volumes 1, 2, 3 and 4, Fluent Inc.

- Piquet, J., 1999, “Turbulent Flows”, Ed. Springer.
- Piquet, J., 1983, “La Turbulence et sa Modélisation”, ENSM, France.
- Spalart, P.R., Allmaras, S. R., 1992, “A One-equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows”, AIAA 92-0439.
- Versteeg, H. K., Malalasekera, W., 1995, “An Introduction to Computational Fluid Dynamics”, Ed. Longman Scientific & Technical.
- “La Technologie des Jets Fluides à Haute Pression”, 1999, Document informatif, ENSAM Aix en Provence, France.

## DESIGN AND DYNAMIC CHARACTERISTICS OF A LIQUID-PROPELLANT THRUST CHAMBER

**Avandelino Santana Junior**

Instituto de Aeronáutica e Espaço, Centro Técnico Aeroespacial, IAE/CTA,  
CEP 12228-904 - São José dos Campos, SP, Brasil. E-mail: junior@mec.ita.cta.br

**Luiz Carlos Sandoval Góes**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, ITA,  
CEP 12228-900 - São José dos Campos, SP, Brasil. E-mail: goes@mec.ita.cta.br

**Abstract.** *According to the national program for space activities (PNAE), which is elaborated by the Brazilian space agency (AEB), the liquid propulsion technology is essential in the development of the next launch vehicle, called VLS-2. The advantages of liquid-propellant rocket engines are their high performance compared to any other conventional chemical engine and their controllability in terms of thrust modulation. Undeniably, the most important component of these engines is the thrust chamber, which generates thrust by providing a volume for combustion and converting thermal energy to kinetic energy. This paper presents the design and the dynamic analysis of a thrust chamber, which can be part of the future Brazilian rocket. The basic components of the thrust chamber assembly are described, a mathematical model for simulation of the system at nominal regime of operation is constructed, and the dynamic characteristics including the stability analysis are briefly discussed.*

**Keywords:** *Liquid rocket engine, liquid propulsion, rocket engine design, dynamic modeling, dynamic analysis.*

### 1. INTRODUCTION

The design of an engine and its components is not a simple task, especially concerning liquid-propellant engine system, because it includes complex and multidisciplinary problems. Since rocket engines are airborne devices, a desirable thrust chamber combines lightweight construction with high performance, simplicity, and reliability (Sutton, 1986).

Stable operation is also a design prerequisite for rocket engine chambers, however pressure fluctuations are always present during their run. Such oscillations are caused mainly by the intrinsic combustion process, high frequency instability, and the coupling between the propellant feed system, the rocket engine and vehicle structure, low frequency instability (Huzel & Huang, 1992).

Such dynamic problems are greatly affected by design issues, for instance: dimension of injector, component configuration, and chamber length. Hence, it is important to address the question of dynamic during the engine design. Thus, in this paper, the design characteristic of a thrust chamber is described, as well as its dynamic characteristic is analyzed.

The purpose of this liquid propellant chamber, working with liquid oxygen and kerosene,

is to be part of a future Brazilian launch vehicle. All functional requirements of the engine are established beforehand to meet the mission goal and they dictate the technological concepts and the design solutions that are adopted and described in the following section.

## 2. DESIGN CHARACTERISTICS OF A THRUST CHAMBER

According to Sutton (1986), a thrust chamber comprises three major parts, the injector head, the combustion chamber, and the nozzle, which are shown in Fig. 1.

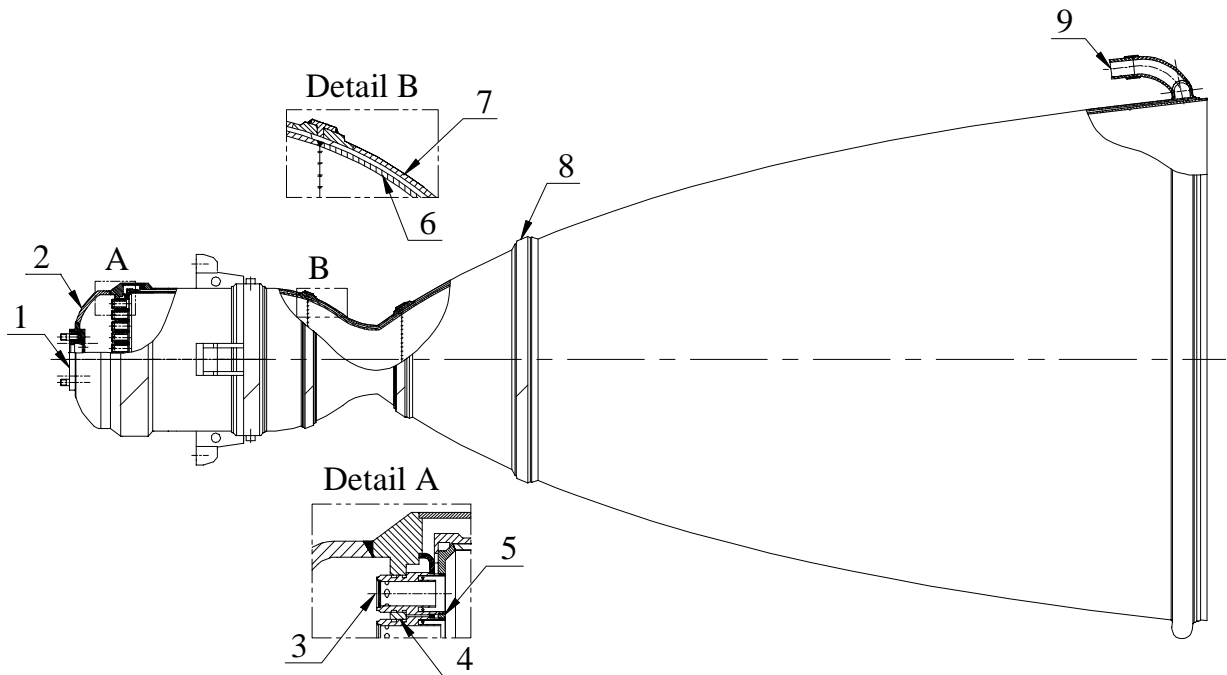


Figure 1 - Thrust chamber assembly.

### 2.1 Injector head design

The injector head consists of the outer bottom (2) with a flange (1), the injector (3), and the fire bottom (5). Fuel and oxidizer are kept separate by the middle bottom (4). The oxidizer cavity is located between middle bottom and outer bottom. The oxidizer is fed into cavity through the flange then it flows to tangential passages of the oxidizer injector. The fuel cavity is located between middle and fire bottoms. The fuel flows from cooling jacket to tangential passages of the fuel injector, before it cools the fire bottom.

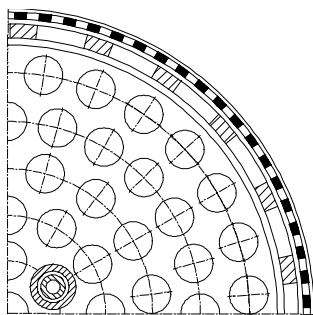


Figure 2 - Partial injector head view.

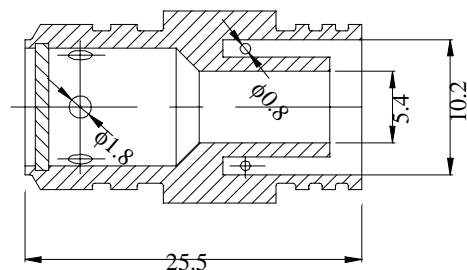


Figure 3 - Swirl injector dimensions, mm.



The final injector head configuration, including the positions of each injector, manifold, and propellant line connection is determined geometrically. Figure 2 shows part of 91 injectors installed concentrically at injector head. Each injector is a bipropellant swirl type, as it is shown in Fig. 3.

## 2.2 Combustion chamber design

The combustion chamber, which is shown in Fig. 1, was designed with large structural margins of safety in order to withstand all possible operating conditions. Its inner wall (6) is manufactured from a high-temperature stainless steel 1.5 mm thick. The outer shell (7) is made of a plastic stainless steel 2.25 mm thick. The distance between the walls is 2 mm, such space is called cooling jacket, and permits the flow of the fuel along the chamber, providing an efficient regenerative cooling system. The maximum fuel speed inside the cooling jacket is 22 m/s, and the total pressure drop is 1.73 MPa. Additionally, to reduce the transfer of heat in the critical region, there is a film cooling ring that allows the fuel liquid to be injected into the chamber to form a protective film of liquid adjacent to the walls. It is located at the end of the cylindrical part of the chamber, immediately upstream of the nozzle throat. The flow rate of film cooling corresponds to 1.9% of the total mass flow rate of the chamber. As result the maximum wall temperature on the gas side is 608.5 K and on the liquid side is 408.6 K, the gas temperature in the combustion chamber core is constant and equal to 3672.55 K.

## 2.3 Nozzle design

The nozzle in Fig. 1 is contour type, which was profiled with help of the characteristic method with free expansion of exhaust gases. This shape has better performance and is shorter than conical one. Milling ribs of the cooling jacket provide rigidity to whole wall. The fuel inlet manifold (9) is welded at the end of the nozzle for two reasons: for increasing the rigidity and for suitable distribution of regenerative cooling. Nozzle part connection is carried out by welding two halves ring (8) on the shell. The exit angle of nozzle, equal to  $6^\circ$ , is chosen according to optimization scheme of payload as function of mass of construction (nozzle mass) and impulse specific (Santana Jr., 1998). The nozzle contraction half angle ( $35.72^\circ$ ) is set according to gas free expansion. These angles are connected by smooth and continuous radial transitions, which allows smooth flow conditions to exist throughout the nozzle and thus minimize losses.

## 2.4 Thrust chamber design and performance parameters

The design and performance parameters of the thrust chamber are obtained by systematic calculation and are summarized in the Tab. 1. The geometry associated with combustion chamber and nozzle is calculated by equations derived from basic thermodynamic, pressure and force relations, the internal chamber contour is shown in the Fig. 4 (Santana Jr., 1998).

Table 1 - Thrust chamber parameters.

Run duration	150 s
Thrust level	73270 N
Vacuum specific Impulse	3589.8 m/s
Chamber pressure	8 MPa
Expansion pressure ratio	1000
Propellant mixture ratio (O/F)	2.469
Propellant mass flow rate	21.243 kg/s
Thrust chamber efficiency	0.974

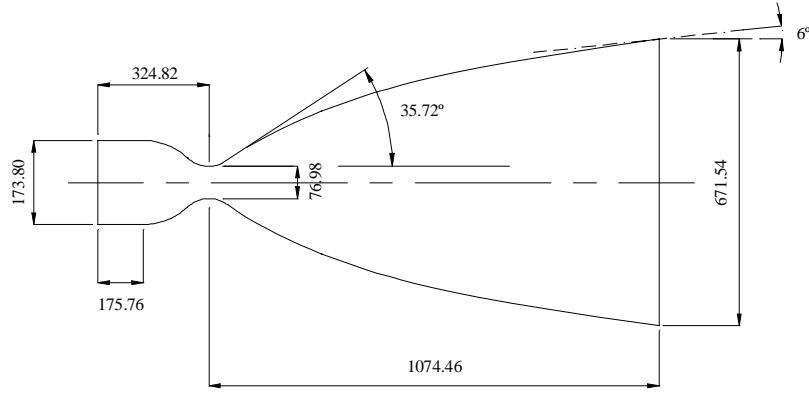


Figure 4 - Thrust chamber dimensions, mm.

Briefly discussed design solutions, as well as all parameters described here are necessary to build the mathematical model of the thrust chamber system. Such modeling permits to simulate and analyze the system stability, in this manner the purpose of the next section is to summarize various important aspects of thrust chamber dynamics.

### 3. DYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE THRUST CHAMBER

The modeling of the thrust chamber, at the nominal regime of operation, is carried out by means of the knowledge of its working principle and design characteristics. The linear mathematical model of the combustion chamber, injector head and cooling jacket is obtained analytically, using the Laplace transform to change from the time domain to complex  $s$ -plane domain. Hereinafter for any parameter time dependent  $X(t)$  is expressed as follows:

$$X(t) = X + \Delta X(t), \quad (1)$$

where  $X$  is the nominal value and  $\Delta X(t)$  is its pulsation component whose dimensionless form is:

$$\overline{\Delta X(t)} = \frac{\Delta X(t)}{X}. \quad (2)$$

#### 3.1 Combustion chamber modeling

A simple analysis based on mass conservation together with some simplification leads to combustion chamber dynamic equation for the parameters at the nominal regime of operation (Santana Jr. & Góes, 1999). The transfer function relating the pressure in the combustion chamber  $p_c$ , the fuel mass flow rate  $\dot{m}_f$ , and the oxidizer mass flow rate  $\dot{m}_o$  while considering the time delay effect  $\tau$  is obtained as follows:

$$(T_c s + 1) \cdot \overline{\Delta p_c} = e^{-s\tau} \cdot (K_1 \cdot \overline{\Delta \dot{m}_o} + K_2 \cdot \overline{\Delta \dot{m}_f}). \quad (3)$$

According to Gladkova (1997), the burning process time constant  $T_c$ , the gain constants for the oxidizer line  $K_1$  and for the fuel pipeline  $K_2$  are respectively:

$$T_c = \frac{V \cdot C^*}{R \cdot T \cdot A_t} \cdot \phi, \quad (4)$$

$$K_1 = \frac{(O/F)}{(O/F)+1}, \text{ and} \quad (5)$$

$$K_2 = \frac{I}{(O/F) + I}. \quad (6)$$

$A_t$  is the throat area,  $C^*$  is the gas characteristic velocity,  $V$  is the chamber volume,  $T$  is the gas temperature,  $R$  is the gas constant,  $(O/F)$  is the propellant mixture ratio,  $\Phi$  is the burning and nozzle efficiency.

### 3.2 Injector head modeling

From dynamics standpoint, a swirl injector is a much more complicated element than a jet injector is. The main difference lies in the mechanisms of disturbance propagation between combustion chamber and the feed system (Bazarov & Yang, 1998).

For the sake of simplification, in this paper the injectors are modeled as jet one whose length is much less than the wavelength of oscillation. The linear dynamics of such short injector with passage area ( $A_{in}$ ) and length ( $L_{in}$ ) are obtained from flow equations using energy, momentum, and mass continuity laws (Kessaev, 1997).

It is assumed that the propellant is incompressible, the walls of the injector are rigid, and the heat transfer problem is neglected. For the liquid oxygen injectors, the transfer function relating to mass flow rate through injector head  $\dot{m}_{in}$ , the pressure of propellant injection  $p_{in}$  and combustion chamber  $p_c$  is:

$$\overline{\Delta \dot{m}_{in}} \cdot (T_{in}s + I) = K_3 \cdot \overline{\Delta p_{in}} + K_4 \cdot \overline{\Delta p_c}. \quad (7)$$

The gain constants  $K_3$  and  $K_4$ , and the time constant of liquid oxygen injectors ( $T_{in}$ ) are:

$$K_3 = \frac{I}{2} N_{in} \cdot \mu_{in} \cdot A_{in} \sqrt{\frac{2\rho_{lox}}{(p_{in} - p_c)}} \cdot \frac{p_{in}}{\dot{m}_{in}}, \quad (8)$$

$$K_4 = -\frac{I}{2} N_{in} \cdot \mu_{in} \cdot A_{in} \sqrt{\frac{2\rho_{lox}}{(p_{in} - p_c)}} \cdot \frac{p_c}{\dot{m}_o}, \text{ and} \quad (9)$$

$$T_{in} = \frac{\rho_{lox} \cdot N_{in}^2 \cdot \mu_{in}^2 \cdot A_{in} \cdot L_{in}}{\dot{m}_o}, \quad (10)$$

where  $\rho_{lox}$  is the liquid oxygen specific mass,  $N_{in}$  is the number of injectors,  $\mu_{in}$  is the discharge coefficient. The same procedure is applied to obtain the gain constants of the kerosene injector,  $K_5$  and  $K_6$ , and its time constant.

### 3.3 Cooling jacket modeling

The flow inside the channels of the cooling jacket is assumed one-dimensional with certain fluid inertia; the friction is considered a fluid resistance and the kerosene specific mass  $\rho_{ker}$  is not constant. The discharge coefficient  $\mu_{cj}$  is obtained experimentally (Kessaev, 1997). The Laplace transform for the cooling jacket taking into account the liquid compressibility and the channel elasticity is described as:

$$(I_{cj}C_{cj}s^2 + R_{cj}C_{cj}s + I) \cdot \overline{\Delta p_{cj}} = K_7 \cdot \overline{\Delta p_i} + K_8 \cdot (T_{cj}s + I) \cdot \overline{\Delta \dot{m}_{cj}}. \quad (11)$$

where the gain constant  $K_7$  and  $K_8$ , and the time constant of the cooling jacket  $T_{cj}$  are, respectively:

$$K_7 = \frac{P_i}{P_{in}}, \quad (12)$$

$$K_8 = -\frac{\dot{m}_{cj}^2}{P_{in} \cdot \rho_{ker} \cdot (\mu_{cj} A_{cj})^2}, \text{ and} \quad (13)$$

$$T_{cj} = -\frac{L_{cj} \cdot \dot{m}_{cj}}{A_{cj} \cdot p_{cj}} \cdot \frac{1}{K_8}. \quad (14)$$

Considering the cooling jacket as a tube with equivalent length  $L_{cj}$ :  $p_i$  represents the pressure at fuel inlet manifold,  $\dot{m}_{cj}$  is the mass flow rate,  $A_{cj}$  is the cross-sectional area. The fluid inertia in the cooling jacket  $I_{cj}$ , the equivalent capacitance  $C_{cj}$  and the liquid resistance  $R_{cj}$  are described as:

$$I_{cj} = \frac{L_{cj} \rho_{ker}}{A_{cj}}, \quad (15)$$

$$C_{cj} = \frac{V_{cj}}{\beta_{ker}} + V_{cj} \cdot \frac{2r_{cj}}{Et_{cj}}, \text{ and} \quad (16)$$

$$R_{cj} = \frac{\dot{m}_i}{(\mu_{cj} A_{cj})^2}, \quad (17)$$

where  $E$  is the elastic modulus of the tube,  $\dot{m}_i$  is mass flow rate at fuel inlet manifold,  $t_{cj}$  is the thickness of the wall channel,  $r_{cj}$  is the internal radius of equivalent tube,  $V_{cj}$  is the liquid volume, and  $\beta_{ker}$  is kerosene *Bulk modulus*.

Connecting all components and defining numerically the time constants and gains of the mathematical model allows the construction of the block diagram, as it is shown in Fig. 5, which can be used to simulate and to analyze the system stability.

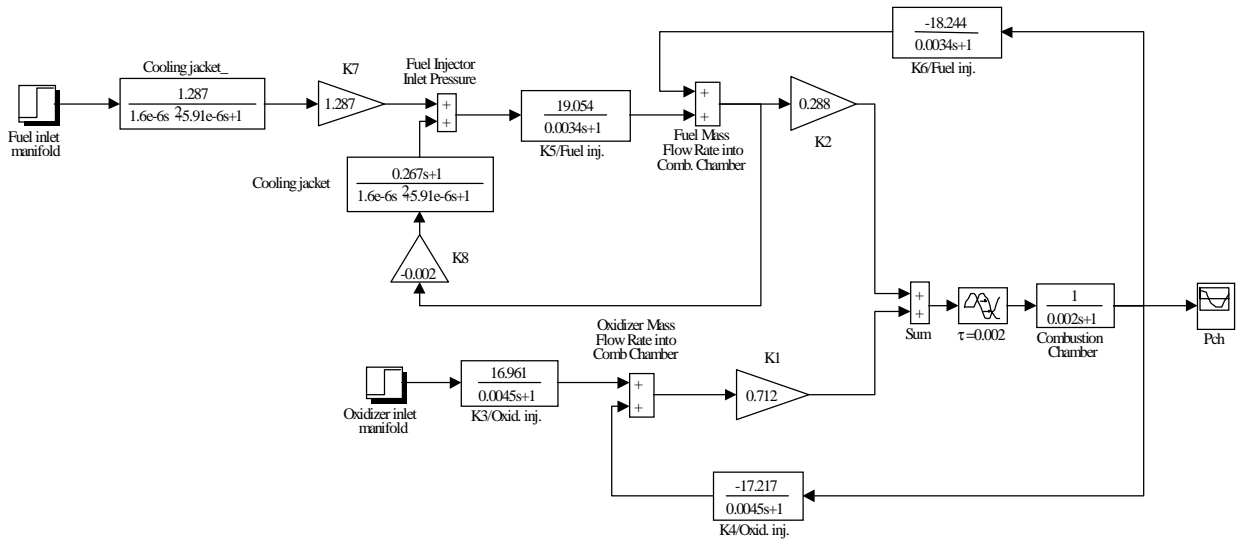


Figure 5 - Thrust chamber block diagram representation.

### 3.4 Thrust chamber frequency response

The frequency response of a system is defined as the steady-state response of the system to a sinusoidal input signal. The assessment of the stability performance in the frequency domain can be carried out by means of two different diagrams, Nyquist and Bode plots.

Figure 6 shows that the system is stable by the Nyquist criterion of stability. The concept of relative stability can be established by the gain margin (GM) and phase margin (PM) for a rated range of frequency in the Bode plot, as it is presented in Fig. 7.

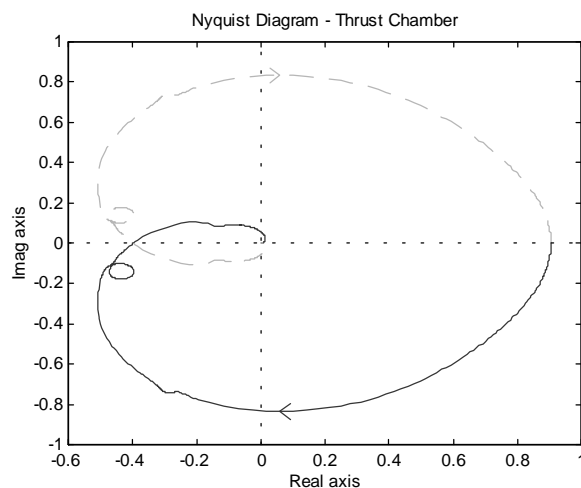


Figure 6 - Nyquist plot, frequency runs changes from  $-\infty$  to  $+\infty$ .

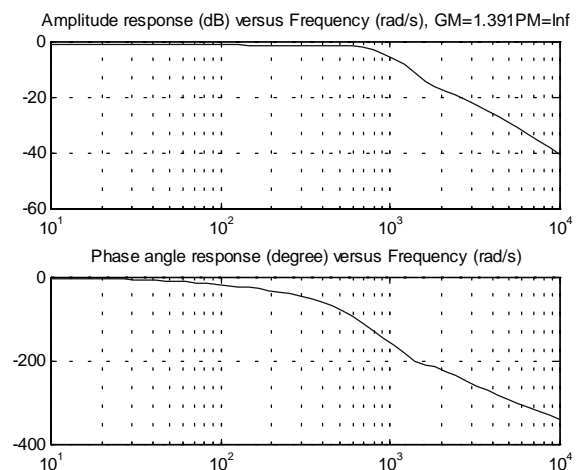


Figure 7 - Bode plot, frequency runs from 1.5 Hz to 1500 Hz.

### 3.5 Thrust chamber stability analysis

Several techniques have been developed for stability analysis, which can be used for two purposes, to know if the system is stable or not and to obtain a region of stability. Recently, two different methods were applied to construct such region, Mikhailov and Hermite-Biehler criteria, for three parameters that have great influence on frequency oscillations development of combustion chambers (Santana Jr. & Góes, 1999).

In this manner, the Routh-Hurwitz criterion also can be applied to find the zones of stability for the same analyzed parameters (Fig. 8). However, the time constant of combustion chamber  $T_c$  and the time delay of the combustion process  $\tau$  constitute another plane.

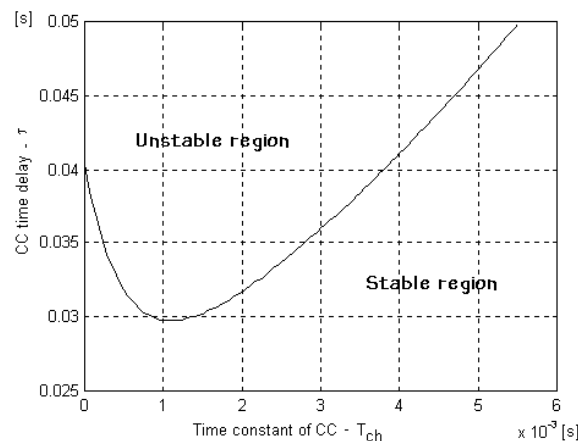


Figure 8 - Zone of stability in the plane time constant - time delay by Routh criterion.

The procedure involves selecting a range of values for these two parameters, computing the roots of the characteristic equation (Eq. 18) for specific values of them. For each value of  $T_c$  is found the first value of  $\tau$  that result in at least one root of the characteristic equation in the half-right plane. This process is repeated until the entire selected range of  $T_c$  and  $\tau$  is exhausted. Then, the plot of these pairs defines the separation between the stable and unstable regions.

$$\begin{aligned} \delta(s) = & 0.00111859 \cdot T_c \tau s^4 + (0.00223718 \cdot T_c + 0.00111859 \cdot \tau + 1.39412 \cdot T_c \tau) s^3 + \\ & + (0.00223718 + 2.78824T_c + 0.274792\tau + 204.62T_c\tau) s^2 + \\ & + (5.02689 + 409.24T_c - 47.7664\tau) s + 914.013 \end{aligned} \quad (18)$$

The designed system parameters,  $T_c = 0.002$  s and  $\tau = 0.002$  s, are inside the stable region.

#### 4. CONCLUSION

From the previous summary about the design of a liquid oxygen/kerosene thrust chamber, it can be concluded that such preliminary design meet the requirements of the technical specification for a second stage rocket engine. Because of high combustion temperature and high heat transfer rates from the hot gases to the chamber wall, two cooling techniques were used: regenerative and film cooling.

The dynamic analysis deserves special consideration during engine design, because potential mechanisms of chamber pressure oscillations can generate instability problems. Thus, the modeling of the combustion chamber, injector head, and cooling jacket was carried out. The Bode and Nyquist diagrams showed that the system is stable. In addition, the region of stability was obtained, for the two parameters,  $\tau$  and  $T_c$ , by means of Routh-Hurwitz criterion, and for their nominal values, the system is stable.

#### 5. REFERENCES

- BAZAROV, V. G. and YANG, V., 1998, "Liquid-Propellant Rocket Engine Injector Dynamics". *Journal of Propulsion and Power*, v.14.
- GLADKOVA, V. N., 1997, "Theory of Rocket Engines Automatic Control Systems". In: *Fundamental Course in Engine Design*. São José dos Campos, CTA/IAE.
- HUZEL, D. K. and HUANG, D. H., 1992, "Modern Engineering for Design of Liquid-Propellant Rocket Engines". Washington: AIAA.
- KESSAEV, J., 1997, "Theory and Calculation of Liquid-Propellant Engine". In: *Fundamental Course in Engine Design*. São José dos Campos: CTA/IAE.
- SANTANA JR., A., 1998, "Diploma Project: Design of a Liquid Rocket Engine". In: *Fundamental Course in Engine Design*. São José dos Campos: CTA/IAE.
- SANTANA JR., A. and GÓES, L.C.S., 1999, "Dynamic Modeling and Stability Analysis of a Liquid Rocket Engine". 15<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mechanical Engineering, COBEM, Águas de Lindóia/SP.
- SUTTON, G. P., 1986, "An Introduction to Rocket Propulsion". New York: John Wiley & Sons.

## SEMI-CIRCULAR-SECTION CYLINDER WAKE VISUALIZATION

**Herbert Carlos Gonçalves**

**Edson Del Rio Vieira**

Universidade Estadual Paulista – Unesp – Departamento de Engenharia Mecânica

Cx. P. 31, – 15385-000 – Ilha Solteira, SP, Brasil. E-mail: [delrio@dem.feis.unesp.br](mailto:delrio@dem.feis.unesp.br)

### **Abstract**

Flow visualization permits flow fields exploration, as well as physical phenomena interpretation, from fields induced by global measurement – force, moment – or from local ones – pressure, velocity. Linking that important experimental technique with image processing, this work investigates the vortex-shedding wake from semi-circular section prismatic bluff-body. Experiments were performed out in a pilot vertical low turbulence hydrodynamic tunnel, with 146×146×500 mm of test section. The emission of liquid dye tracers through very small holes on the body surface has been used to create the flow image. Video images have been captured using a 3 CCD high-resolution video camera, and still photographic images using a S.L.R. 35 mm camera. Strouhal number is determinate by image processing for Reynolds numbers up to 600. The knowledge of the Strouhal number behavior in function of Reynolds number for several rigid body shapes is much important as aid to vortex meter projects.

**Keywords:** Flow visualization, Image processing, Vortex shedding, Bluff body

### **1. INTRODUCTION**

Studies of vortex wakes generated by different geometries of rigid prismatic bluff-bodies applied to several engineering fields as well as to the Nature. Many numerical or experimental tools have been developed intending to understand this complex phenomenon.

Numerical research works on several prismatic bluff-body wakes, circular and square sections mostly, are frequently found, as in Meneghini *et al.* (1998), employing large eddy simulation for an oscillating circular cylinder, or in Pereira *et al.* (1999), using vortex method simulation to arbitrary bodies.

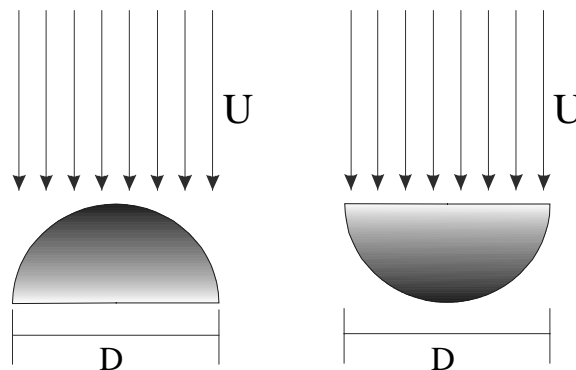
Many experimental techniques have also been proposed in the technical literature to von Kármán-vortex wake research. In scientific laboratory environment, vortex-shedding frequency is generally measured by a number of different ways. Modi & Dikshit (1975) employed successfully a highly sensitive pressure transducer positioned at the centerline of the vortex wake, and Sarpkaya & Kline (1982) measured the lift force actuating directly on the body surface using very small pressure sensors. Many researchers prefer to determine a spectral analysis of the flow

velocity in a fixed point on the wake. In those cases, the velocity signal are obtained by several ways, hot-wire anemometers (HWA) – Okajima (1982) and Kawakita & Silveiras (1993) – laser Doppler Anemometers (LDA) – Ferreira & Santos (1998) and Durão *et al* (1991), at last, using particle image velocimetry (PIV) – Agüi & Jiménez (1987) and Lourenço *et al.* (1997).

On the other hand, experimental flow visualization represents a very powerful tool for bluff-body wake analysis. Several beautiful images have been obtained out of different prismatic non-aerodynamic body wakes in hydrodynamic medium for relatively low Reynolds (up to 4000). Examples are the the images obtained by: Gonçalves & Vieira, (1999) utilizing four different regular polygon section cylinders (Re less than 600); Lindquist *et al.* (1999), for circular cylinder (showing the vortex street and re-circulating bubble) and Lindquist *et al.* (1998) for rectangular cylinder.

However, just few works explore the semi-circular section geometry, one exception could be given up to the papers by Luo & Chew (1989) and by Boisaubert *et al.* (1996). Additionally it is well known to the bluff-body aerodynamicist that the wakes of different prismatic bluff-bodies are not identical and moreover, there is a great influence of the after-body shape on their aerodynamics.

The main goal of the present work is, therefore, to study the wake generated by semi-circular cylinders positioned orthogonally according two different arrangements – the flat side facing upstream and downstream respectively, as in Figure 1.



**Figure 1.** Semi-circular section bluff-body cylinder tested in two different arrangements

## 2. EXPERIMENTAL SET-UP

Qualitative and quantitative experimental results from flow visualization have been obtained in a vertical low turbulence hydrodynamic pilot tunnel, operated by gravitational effect in blow-down mode, with a 146x146x500 mm test section and 0,1 % of turbulence. More details about that water tunnel facility and its operation are available in Gonçalves & Vieira (1999).

The flow visualization technique applied in this work is the injection of opaque liquid dye through small holes (I.D. 0,7 mm) on the body surface. The dye utilized is a solution of black PVA pigments, water and ethyl alcohol. The flow image has intensively been illuminated by twelve photoflood tungsten (150 W) lamps, shielded by white velvet-like translucent paper in order to provide a uniformly diffuse bright background against which the dye patterns were photographed.

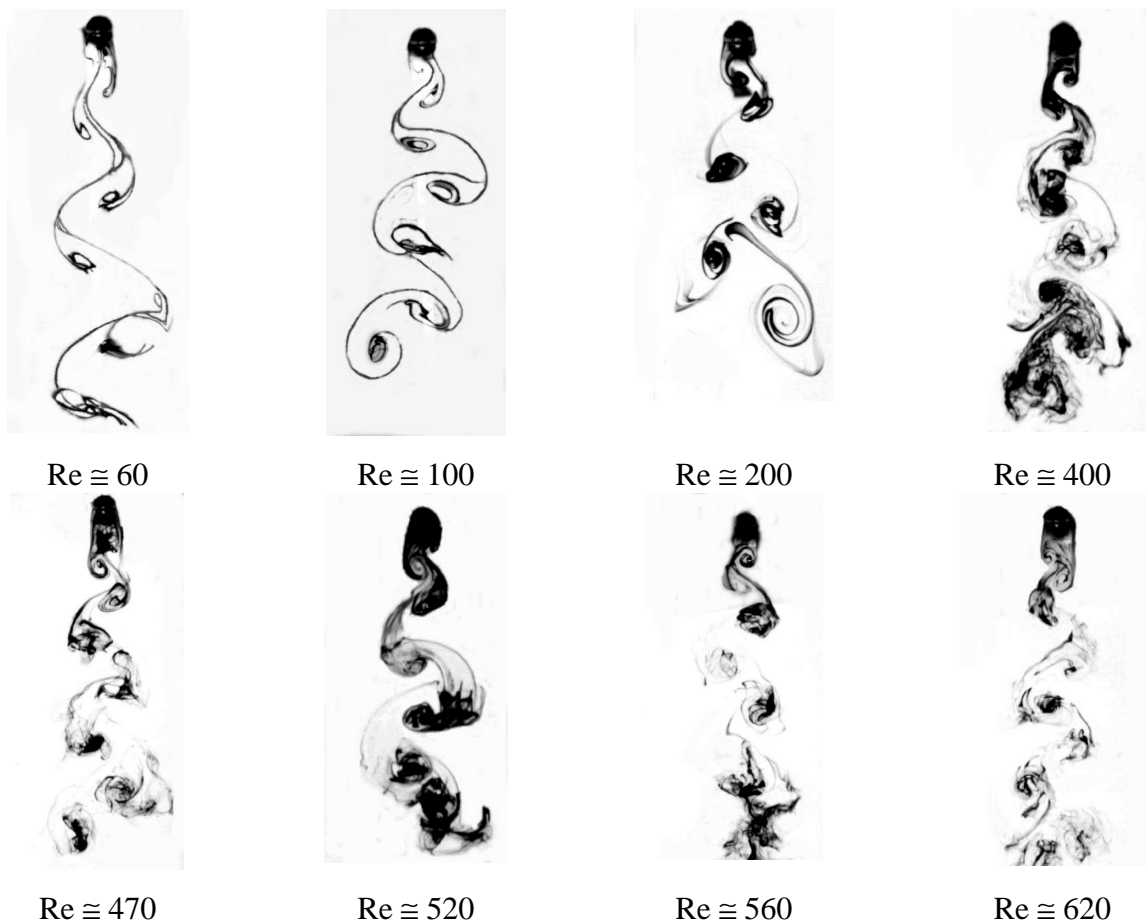


A JVC KY-27C high-resolution video camera and a BR-S822U JVC videocassette recording (VCR) equipped with a TC (time counter) board have been used to capture video images. TC board permits the recording of a precise temporal identification of each frame. Observing in a highly controlled slow motion, the images recorded in video, it is possible to identify the precise moment of the beginning of the vortex shedding process. Once a complete vortex-shedding period identified, the time counter board allows the determination of the time associated with the process and consequently the vortex frequency. An estimate of errors associated to vortex-shedding frequency is about  $\pm 5\%$ . More details about the technique to determine the vortex-shedding frequency using a VCR are found in the work of Gonçalves & Vieira (1999). Additionally, vortex street still images have been captured utilizing a Nikon F4s (SLR) single lens reflex 35 mm camera and black & white negative film - Kodak Tmax 400.

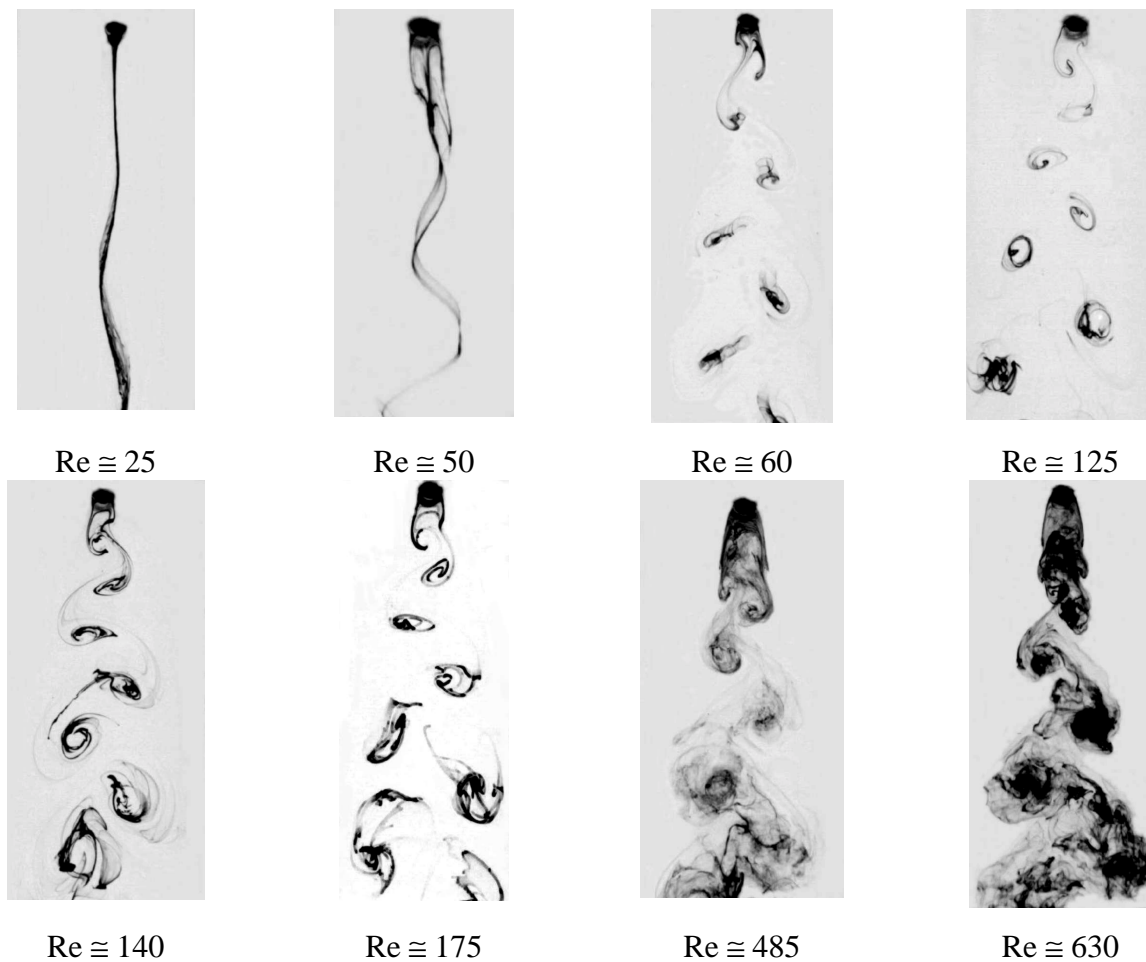
The non-perturbed velocity upstream the test model has been obtained using a *Yokogawa* electromagnetic flow meter mounted downstream the test section. An estimation of the errors associated to free stream velocity has shown less than about 5%, when compared with data obtained by hot film anemometer (*Dantec CTA Streamline*).

### 3. RESULTS

Flow images captured to the normal flat face turned downstream are showed in figure 2, and the opposite arrangements, the flat face turned upstream, are showed in Figure 3.



**Figure 2.** Wakes generated by a semi-circular cylinder (flat face turned downstream).



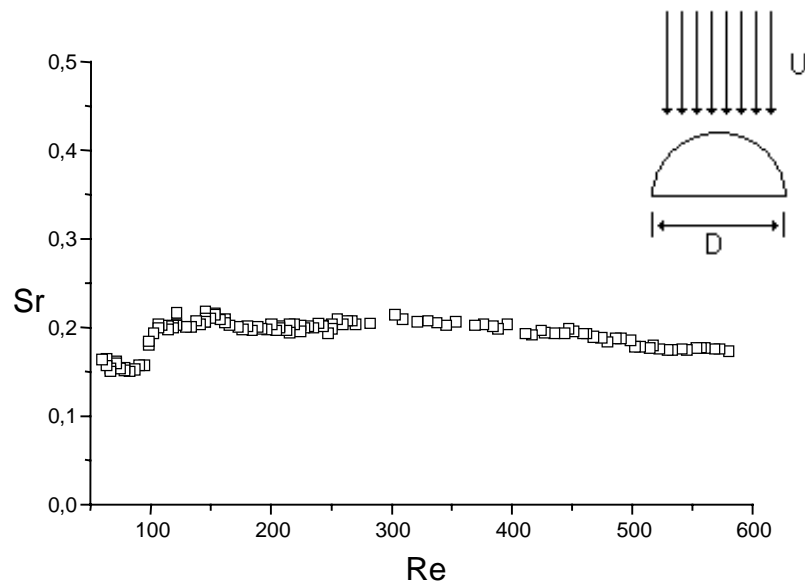
**Figure 3.** Wakes generated by a semi-circular cylinder (flat face turned upstream)

The non-dimensional vortex shedding frequency or Strouhal number ( $Sr$ ), is based in the characteristic length ( $D$ ) and non-perturbed flow velocity ( $U$ ) – see Figure 1 – and the vortex shedding frequency ( $f$ ), in accord to Equation 1.

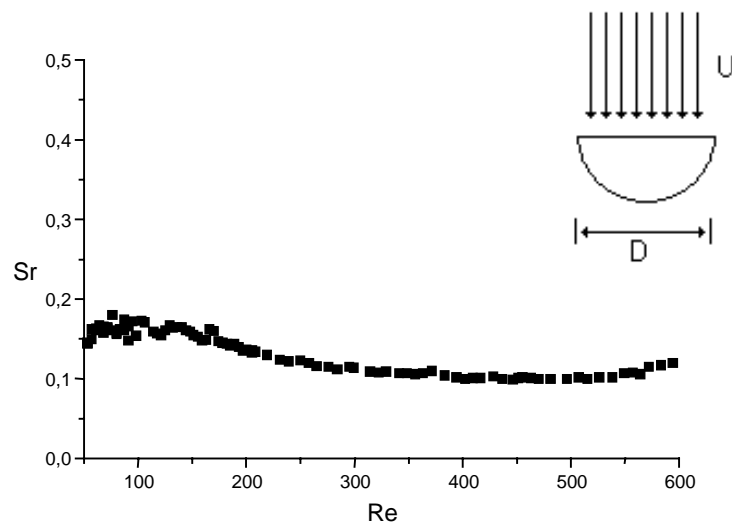
$$Sr = \frac{f D}{U} \quad (1)$$

Strouhal number behavior in function of Reynolds number for two arrangements proposed is depicted in the Figures 4 and 5.

All experiments have been performed out using a test model made from aeronautical polished aluminum of  $D = 6$  mm. In this situation, the blockage ratio is less than 5 % and aspect ratio (length to characteristic dimension ( $D$ ) ratio) more than 24.



**Figure 4.** Strouhal behavior in function of Reynolds (flat face turned downstream)



**Figure 5.** Strouhal behavior in function of Reynolds (flat face turned upstream)

#### 4. CONCLUSIONS

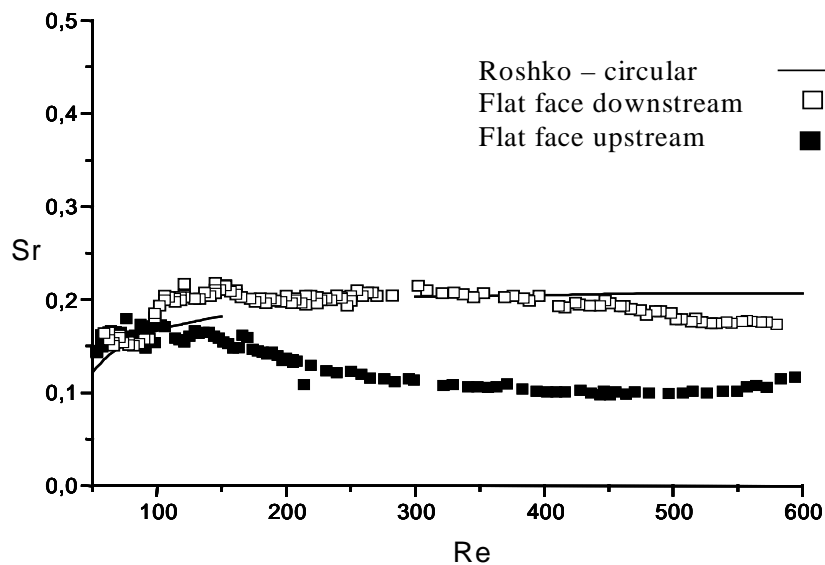
In this work semi-circular section prismatic bluff bodies for relative low Reynolds number (up to 600) and low blockage ratio (5 %) has been experimentally tested, using hydrodynamic flow visualization as a working tool, for obtaining the Strouhal – Reynolds behavior.

In the Figures 3 and 4 a number of images of the wake for two opposite attack angles are depicted. For Reynolds less than approximately 200, the wake images are very sharp, and the vortex is clearly identifiable. In opposition, for Reynolds more than 200, the vortex wake is

relatively more turbulent and the corresponding images is less clear, forcing the images to be captured using a higher dye tracer flow rate.

Flat face turned upstream wake images, Figure 3, show two particular images in relative low Reynolds. For Reynolds equals to 25, the flow contours the body, generating a stable small re-circulating bubble next to the curved face and the dye pattern wake is attached, generating small wave perturbation. For increased Reynolds, i.e. about 50, the re-circulating bubble is bigger and unstable and the dye pattern shows higher wave amplitude. For Reynolds number equals to 60, the flow exhibits an entire developed vortex shedding wake forming a full-configured von Kármán vortex street.

The Strouhal curves for the two opposite attack angles analyzed show appreciable difference. Figure 6 depicts a comparative analysis of the Strouhal number curves obtained in this work, for semi-circular section, and the traditional results obtained by Anatol Roshko, in 1953, for a circular cylinder.



**Figure 6.** Comparative Strouhal-Reynolds curves

Strouhal behavior for the semi-circular section with the flat face turned downstream is very close – in the range of Reynolds range 300 - 400 – to full circular cylinder section results obtained by Roshko. Apparently, in this range, the influence of the after-shape of the circular section is negligibly small in the detachment process. Obviously, the Strouhal generated by a semi-circular section with a flat face turned upstream differs appreciably, because the detachment promoted by the sharp edges.

Unfortunately, the testes have been restricted to Reynolds numbers up to 600, because the limitations in flow visualization technique and image capture hardware. Video image has been captured at a rate of approximately 30 fps (frames per second) using NTSC system, which allows the precise determination of shedding frequency limited to approximately 10 Hz maximum. In order to extend the present work to higher Reynolds numbers using the same technique, either a high-speed video camera, able to capture thousands of frames per second, or bigger tunnel facilities, able to test larger models, will be necessary.

Finally, in this work, no tentative has been made to reach the optimum configuration for achieving parallel vortex shedding in the wake of the bluff bodies. In order to accomplish this, the implementation of endplate devices has already been scheduled for future works.

## 5. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors acknowledge – and are thankful for - the financial support provided by FAPESP and Fundunesp/Unesp.

## 6. BIBLIOGRAPHY

- Agüí, J.C. and Jiménez, J., 1987, “On the Performance of Particle Tracking”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.185, pp.447–468.
- Boisaubert, N.; Coutanceau, M. and Ehrmann, P., 1996, “Comparative early Development of Wake Vortices Behind a Short Semicircular-Section Cylinder in Two opposite Arrangements”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.327, pp.73-99.
- Durão, D.F.G., Gouveia, P.S.T. and Pereira, J.C.F., 1991, “Velocity Characteristics of the Flow Around a Square Cross Section Cylinder Placed Near a Channel Wall”, *Experiments in Fluid*. Vol.11, no.6, pp.341–350,
- Ferreira, V.C.S. and Santos, S.M., 1998, “Caracterização do Escoamento Periódico com Vórtices Através de Laser Doppler Velocimetria”, *Proceedings of the Encit 98 – 7<sup>th</sup> Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences*, vol.2, Rio de Janeiro, Brazil, pp.695-700.
- Gonçalves, H.C. and Vieira, E.D.R., 1999, “Strouhal Number Determination for Several Regular Polygon Cylinders for Reynolds Number up to 600, *Proceedings (in CD-ROM) of the COBEM 99 - XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Águas de Lindóia.
- Kawakita, K. and Silveira, O.M., 1993, “Estudo de Corpos de Perfil Não-Aerodinâmico Visando a Aplicação em Medidores de Vazão do Tipo Vórtice”, *Proceeding of the COBEM 93 - XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Brasília, pp.901-904.
- Lindquist, C., Mansur, S.S. and Vieira, E.D.R., 1998, “Estudo Experimental do Escoamento ao Redor de Cilindros Retangulares: Uma Aplicação aos Trocadores de Calor Compactos. *Proceedings of the Encit 98 – 7<sup>th</sup> Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences*, vol.1, Rio de Janeiro, Brazil, pp.557-561.
- Lindquist, C., Vieira, E.D.R. and Mansur, S.S., 1999, “Flow Visualization of the von Kármán Vortex Street: a Tool for Fluid Mechanics Learning”, *Proceedings of the ICECE’99 – International Conference on Engineering and Computer Education*, Rio de Janeiro, Brazil.
- Lourenço, L; Subramanian, S and Ding, Z., 1997, “Time Series Velocity Field Reconstruction from PIV Data”, *Measurement Science and Technology*, vol.8, no.12, pp. 1533-1538.
- Luo, S.C. and Chew, Y.T., 1989, “A Smoke Wires Flow Visualization Study of the Wakes of Bluff Bodies with Different Afterbodies”, *Flow Visualization V (Reznicek, R. ed.) Proceedings of the Fifth International Symposium on Flow Visualization*, Hemisphere Publishing Corp.
- Meneghini, J.R.; Saltara, F. and Siqueira, C.L.R., 1998, “The Simulation of Vortex Shedding from an Oscillating Circular Cylinder with Large Eddy Simulation”, *Proceedings*

of the Encit 98 – 7<sup>th</sup> Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences, vol.2, Rio de Janeiro, Brazil, pp.1340-1345.

Modi, V.J. and Dikshit, A.K., 1975, “Near–Wakes of Elliptic Cylinders in Subcritical Flow”, *AIAA Journal*, Vol.13, no.4, pp.490–497.

Okajima, A., 1982, “Strouhal Numbers of Rectangular Cylinders”, *Journal of Fluid Dynamics*, vol.123, pp. 379-398.

Pereira, L.A.A., Hirata, M.H. and Oliveira, W., 1999, “Aerodynamics Loads (Numerical Simulation Using Vortex Clouds”, Proceedings (in CD-ROM) of the Cobem 99 – 15 th. Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Águas de Lindóia, Brazil.

Sarpkaya, T. and Kline, H.K, 1982, “Impulsively–Started Flow About Four Types of Bluff Body”. *Trans. of the ASME: Journal of Fluids Engineering*, Vol.104, pp.207–213, 1982

# SIMULAÇÃO DE DESEMPENHO DE BOMBA CENTRÍFUGA PARA TURBOBOMBA DE MOTOR-FOGUETE A PROPELENTE LÍQUIDO

**Renato Yassuo Tamashiro**

**João Roberto Barbosa**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Departamento de Energia, 12228-901, São José dos Campos, SP, Brasil. E-mail: barbosa@mec.ita.cta.br

## Resumo

Este trabalho tem por objetivo definir uma metodologia para dimensionamento e simulação de operação de uma bomba centrífuga aplicável em turbobombas de motor-foguete a propelente líquido. São determinadas as dimensões dos principais elementos de uma bomba: alimentador, indutor em espiral, impelidor, coletor e difusor, a partir das características do fluido e das condições de operação da bomba. Um modelo de perdas que leva em consideração as principais fontes de variação das condições ideais é estabelecido. Um algoritmo, implementado em *Mathcad*, é utilizado para resolver o sistema de equações obtido. Definida a geometria da bomba, um novo algoritmo é definido para obter as perdas durante o funcionamento fora do ponto de projeto, com vistas à obtenção dos mapas de desempenho da bomba centrífuga. A validade do modelo é verificada através do dimensionamento e da simulação de uma turbobomba para utilização no motor russo RD-109, cujas características são conhecidas.

**Palavras-chave:** propulsão, foguetes, turbobomba, bomba centrífuga.

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo e aprimoramento de turbobombas para aplicação em motor-foguete surgiu da necessidade de uma máquina que operasse com uma rotação muito elevada, condições extremas de temperatura e que fosse ao mesmo tempo leve, pequena e confiável. A turbobomba é um dos principais componentes de um motor-foguete e compõe-se basicamente de três elementos: turbina, bomba de oxidante e bomba de combustível. Os principais requisitos de uma turbobomba para aplicação espacial são alta confiabilidade, baixo custo, mínimo peso, fluxo estável dentro dos limites de operação, alta eficiência e desempenho adequado de sucção.

Tendo por base a experiência dos russos no projeto, fabricação e desenvolvimento de motores-foguete, procurou-se aplicar os seus conhecimentos, relatados em literatura aberta, para o desenvolvimento de uma metodologia de projeto e de simulação de funcionamento de uma bomba centrífuga. O motor RD-109 é usado nos estágios superiores de veículos de lançamento. Foi desenvolvido entre 1958 e 1962 e com ele um patamar de confiabilidade foi atingido. É produzido e usado até hoje pelos russos. Pelo fato de alguns dados de projeto e de desempenho dessa bomba estarem disponíveis, foi escolhida como referência neste trabalho.

O RD-109 utiliza oxigênio líquido como oxidante e querosene como combustível. A turbobomba deste motor movimenta o propelente para o interior da câmara de combustão e do gerador de gás. Ela possui um eixo simples onde estão acopladas a turbina e duas bombas centrífugas. O conjunto rotativo tem seu movimento e apoio proporcionados por dois rolamentos especiais. A bomba de oxidante possui um impelidor do tipo centrífugo, fechado, com uma entrada axial e um indutor helicoidal.

## 2. PRINCIPAIS ELEMENTOS DE UMA BOMBA CENTRÍFUGA

### 2.1 Indutor helicoidal

Conhecendo-se a vazão volumétrica  $V$ , a rotação  $\omega$  e a geometria da bomba, podem-se obter as velocidades absoluta  $c_{1z,s}$ , tangencial  $u_{s,p}$  e o triângulo de velocidades na entrada do indutor. Em geral, o ângulo de escoamento  $\beta_{1,s,p}$  não deve exceder  $8^\circ$  e o ângulo de incidência  $i_p$  não deve exceder  $3^\circ$  de forma a evitar o descolamento do escoamento na bomba, conforme observa Ovsyannikov e Borovskiy (1973).

As velocidades axial, tangencial e absoluta na saída do rotor podem ser calculadas por

$$c_{1z,s} = 4V(\pi D_{s,eq}^2)^{-1}, \quad u_{s,p} = 0,5\omega D_s \quad e \quad c_{2u,s} = v_{2,rel} u_{s,p} \quad (1)$$

onde  $D_{s,eq}$  é o diâmetro equivalente do indutor,  $v_{2,rel}$  é a razão de velocidades e  $u_{s,p}$  é a velocidade tangencial no diâmetro  $D_s$ . A área do círculo caracterizado por  $D_{s,eq}$  é igual à área da co-roa circular definida pelo diâmetro do cubo  $d_{hub}$  e pelo diâmetro externo do indutor  $D_s$ .

### 2.2 Impelidor centrífugo

O escoamento no espaço entre o indutor e o impelidor é considerado sem perdas, obedecendo a lei de vórtice livre  $c_{1u} \cdot r = \text{constante}$ , sendo  $c_{1u}$  a componente tangencial da velocidade absoluta na entrada do impelidor e  $r$  a distância radial. Assim,

$$c_{1u} = D_s D_1^{-1} c_{2u,s} \quad (2)$$

A partir da velocidade angular  $\omega$  e do diâmetro de entrada no impelidor  $D_1$  obtém-se a velocidade tangencial  $u_1$ . A componente meridional da velocidade absoluta  $c_{1m}$  é dada pela razão da vazão que atravessa o impelidor e a área da seção transversal ao escoamento. Daí

$$u_1 = 0,5\omega D_1 \quad e \quad c_{1m} = V(\pi D_1 b_1 \eta_{flow})^{-1} \quad (3)$$

onde  $b_1$  é a altura da pá do impelidor no diâmetro  $D_1$  e  $\eta_{flow}$  é o rendimento volumétrico da bomba.

Do triângulo de velocidades determinam-se a velocidade relativa  $w_1$  e o ângulo do escoamento na entrada do impelidor  $\beta_1$  e, deste, o ângulo da pá  $\beta_{1,B}$ :

$$w_1 = \sqrt{c_{1m}^2 + (u_1 - c_{1u})^2}, \quad \beta_1 = \tan^{-1}(c_{1m} (u_1 - c_{1u})^{-1}) \quad e \quad (4)$$

$$\beta_{1,B} = \beta_1 + i \quad (5)$$

onde  $i$  é o ângulo de incidência na entrada do impelidor.

De forma semelhante, obtêm-se as velocidades tangencial  $u_2$ , a componente meridional da velocidade absoluta  $c_{2m}$  e a componente tangencial da velocidade absoluta  $c_{2u}$ , na saída do impelidor:

$$u_2 = 0,5\omega D_2, \quad c_{2m} = V(\pi D_2 b_2 \eta_{flow})^{-1} \quad e \quad c_{2u} = c_{2u,inf} k_z \quad (6)$$



onde  $D_2$  é o diâmetro de saída no impelidor,  $b_2$  é a altura do impelidor no diâmetro  $D_2$ ,  $k_z$  é o fator de escorregamento,  $\psi$  um coeficiente empírico dado por Ovsyannikov e Celifonov (1996) e  $c_{2u.inf}$  é a componente tangencial da velocidade absoluta considerando-se o número de pás  $z_K$  infinito. Os valores de  $k_z$ ,  $\Psi$  e  $c_{2u.inf}$  são dados por:

$$k_z = \left( 1 + 2\Psi \left[ z_K \left( 1 - \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right) \right] \right)^{-1}, \quad \psi = \left( \frac{c_{2m}}{u_2} \right)^{\frac{1}{6}} (1 + \sin \beta_{2,B}) \quad e \quad (7)$$

$$c_{2u.inf} = u_2 - c_{2m} (\tan \beta_{2,B})^{-1}. \quad (8)$$

### 3. MODELO DAS PRINCIPAIS PERDAS

Assim como em qualquer máquina de fluxo, numa bomba centrífuga observa-se uma conversão de energia acompanhada de perdas. Torna-se então imprescindível o estudo da natureza e da magnitude dessas perdas, de forma a minimizar seus aspectos indesejáveis e melhorar o desempenho da bomba.

Com a identificação das perdas e principalmente dos processos através dos quais elas aparecem e afetam o desempenho da bomba, tornam-se possíveis as alterações na sua modelação real. Com isso, pode-se conhecer antecipadamente o funcionamento da bomba e, desta forma, avaliá-la melhor.

Neste trabalho as perdas consideradas são: perdas hidráulicas, perdas por fuga do fluido, perda por fricção do rotor e perdas mecânicas. Não são consideradas separadamente as perdas de topo, embora tenham influência significativa no desempenho de bombas.

#### 3.1 Perda hidráulica

A perda hidráulica de uma bomba centrífuga decompõe-se em perda hidráulica no alimentador ( $L_{in}$ ), no indutor ( $L_s$ ), no impelidor ( $L_K$ ), no coletor ( $L_C$ ) e no difusor cônico ( $L_{KD}$ ).

$$L_{hidr} = L_{in} + L_s + L_K + L_C + L_{KD}, \quad \text{com} \quad L_{in} = 0,5\zeta_{in} c_{1z}^2 \quad (9)$$

onde  $c_{1z}$  é a velocidade axial e  $\zeta_{in}$  é o coeficiente de perda no alimentador.

A perda de energia no indutor  $L_s$  é dada pela diferença entre a capacidade de carga teórica do indutor  $H_{T,s}$  e a capacidade de carga real  $H_s$ :

$$L_s = H_{T,s} - H_s. \quad (10)$$

O valor de  $H_{T,s}$  é encontrado a partir da equação de Euler (para  $c_{1u} = 0$ ):

$$H_{T,s} = c_{2u.ave} u_{ave} \quad (11)$$

onde  $u_{ave}$  é a velocidade tangencial no diâmetro médio e  $c_{2u.ave}$  é a componente tangencial da velocidade absoluta no diâmetro médio. Considerando-se que:

$$H_s = \eta_{hidr.s} c_{2u.ave} u_{ave} \quad \text{tem-se} \quad L_s = (1 - \eta_{hidr.s}) c_{2u.ave} u_{ave} \quad (12)$$

onde  $\eta_{\text{hidr.s}}$  é o rendimento hidráulico do indutor.

A perda de energia no impelidor  $L_K$  é proporcional ao quadrado da velocidade relativa na entrada do impelidor:

$$L_K = 0,5\zeta_K w_1^2 \quad (14)$$

onde  $\zeta_K$  é o coeficiente de perda de energia no impelidor e  $w_1$  é a velocidade relativa na entrada do impelidor determinada pelo triângulo de velocidades:

$$w_1^2 = c_{1m}^2 + (u_1 - c_{1u})^2. \quad (15)$$

O coeficiente de perda  $\zeta_K$  diminui com a redução da quantidade de energia transmitida ao líquido pelo indutor. A utilização do indutor em conjunto com o impelidor assegura uma pré-rotação do fluido na entrada do anel centrífugo. Isto leva a uma redução da perda de energia no impelidor.

A perda no coletor  $L_C$ , posicionado logo após o impelidor, é dada por

$$L_C = 0,5\zeta_C c_{2u}^2 \quad (16)$$

onde  $\zeta_C$  é o coeficiente de perda no coletor e  $c_{2u}$  é a componente tangencial da velocidade absoluta na saída do impelidor.

A perda no difusor cônico  $L_{KD}$  é determinada por:

$$L_{KD} = 0,5\zeta_{KD} c_g^2 \quad (17)$$

onde  $c_g$  é a velocidade absoluta na entrada do difusor cônico.

O coeficiente de perda  $\zeta_{KD}$  depende da correlação de áreas de saída,  $F_{\text{out}}$ , e da garganta,  $F_g$ , do difusor e do ângulo equivalente  $\alpha_{\text{eq}}$  do difusor, conforme a equação abaixo:

$$\zeta_{KD} = 1,15 \text{tg} \alpha_{\text{eq}} \sqrt[3]{F_{\text{out}} F_g^{-1} - 1}. \quad (18)$$

Conhecendo-se todas as parcelas que constituem a perda hidráulica total, podem-se calcular a capacidade de carga teórica  $H_T$  da bomba e o rendimento hidráulico,  $\eta_{\text{hidr}}$ , que caracteriza as qualidades do escoamento que atravessa a bomba, por:

$$H_T = H + L_{\text{hidr}} \quad \text{e} \quad \eta_{\text{hidr}} = \frac{H}{H_T} = \frac{H}{H + L_{\text{hidr}}}. \quad (19)$$

### 3.2 Perda por fuga

Perda por fuga ou vazamento é aquela devida à passagem de fluido por pequenas folgas existentes entre o impelidor e a carcaça da bomba. Devido à quantidade de vazamento  $V_{\text{seal}}$ , a vazão que atravessa o impelidor ( $V + V_{\text{seal}}$ ) é maior que a vazão da bomba ( $V$ ). A razão entre a vazão da bomba e a vazão do impelidor denomina-se rendimento volumétrico:

$$\eta_{\text{flow}} = V(V + V_{\text{seal}})^{-1}. \quad (20)$$

O sistema de vedação separa duas cavidades: uma de alta pressão e outra de baixa pressão, na região do impelidor. O vazamento depende da área da seção transversal, da geometria da folga e da diferença de pressão no anel de vedação. Segundo Pfeleiderer (1948), a vazão através da folga é determinada pela equação

$$V_{\text{seal}} = \mu f_{\text{seal}} \sqrt{2\rho^{-1}(p_{\text{seal}} - p_{\text{imp}})} \quad (21)$$

onde  $\mu$  é o coeficiente de vazão,  $f_{\text{seal}}$  é a seção de passagem do anel de vedação,  $p_{\text{seal}}$  é a pressão na frente do anel de vedação,  $\rho$  é a massa específica do fluido e  $p_{\text{imp}}$  é a pressão de entrada no impelidor. O coeficiente de vazão  $\mu$  é determinado pela magnitude da resistência hidráulica do anel de vedação. Quanto maior essa resistência, mantida constante a diferença de pressão, menor o fluxo que atravessa o anel de vedação. Esse coeficiente pode ser calculado, segundo Ovsyannikov e Borovskiy (1973), por

$$\mu = \left( \frac{\lambda l_{\text{seal}}}{\delta_{\text{seal}}} + 1,5 \right)^{-0,5} \quad (22)$$

onde  $\lambda$  é o coeficiente de fricção,  $l_{\text{seal}}$  é o comprimento do anel de vedação e  $\delta_{\text{seal}}$  é a folga radial do anel de vedação.

### 3.3 Perda por fricção do rotor

Trata-se da energia consumida para movimentar o impelidor. Este tipo de perda ocorre devido a dois fatores: a fricção real do fluido sobre o rotor, que é relativamente menor, e a ação de bombeamento do fluido em contato com o rotor, pelo qual o fluido é movimentado localmente pela ação de forças centrífugas, de acordo com Huzel e Huang (1992). A energia perdida devido à fricção do rotor transforma-se em calor e pode aumentar apreciavelmente a temperatura do fluido. A potência de fricção do rotor é determinada pela equação

$$N_{\text{disk}} = 2C_{\text{disk}} \rho (0,5D_2)^5 \omega^3. \quad (23)$$

O coeficiente de fricção  $C_{\text{disk}}$  é determinado em função do número de Reynolds. Para rotores lisos, obtém-se, para  $Re > 10^5$ :

$$C_{\text{disk}} = 0,039(Re)^{-0,2}. \quad (24)$$

Determina-se o rendimento do rotor pela equação

$$\eta_{\text{disk}} = 1 - N_{\text{disk}} (\rho(V + V_{\text{seal}})H_T + N_{\text{disk}})^{-1}. \quad (25)$$

### 3.4 Perda mecânica

As perdas por fricção nas vedações, segundo Stepanoff (1948), são afetadas por inúmeros fatores, como por exemplo, tamanho e profundidade da vedação, rotação da bomba, pressão e métodos de empacotamento e lubrificação. Assim, dados de literatura seriam válidos somente para um certo tipo de vedação e aplicação. Com relação aos rolamentos, ainda que suas di-

mensões estejam padronizadas, as perdas por fricção variam para um mesmo tamanho e carga de operação, de acordo com os diferentes modos de fabricação. Da mesma forma, o método de lubrificação afeta as perdas nos rolamentos.

A experiência tem mostrado que o rendimento mecânico  $\eta_{mec}$  de uma bomba de alta rotação pode atingir valores entre 0,95 e 0,97 no ponto de projeto. Neste trabalho as perdas mecânicas foram consideradas constantes e, em consequência,  $\eta_{mec}$  foi fixado em 0,95.

#### 4. VERIFICAÇÃO DA VALIDADE DO MODELO USANDO DADOS DA TURBO-BOMBA DO MOTOR RD-109

O modelo de perdas foi utilizado tanto no dimensionamento da bomba como na simulação de seu desempenho no ponto de projeto e fora dele. No que se segue é descrito como se desenvolveu o projeto da bomba e como seu funcionamento foi simulado a partir do modelo de perdas adotado.

##### 4.1 Projeto de bombas utilizando a metodologia desenvolvida

A Tabela 1 mostra os dados iniciais relativos à bomba de oxidante do motor RD-109, para os cálculos da bomba centrífuga usados neste trabalho.

**Tabela 1** - Dados iniciais para o cálculo da bomba de oxidante

Dados iniciais	símbolo	valor	unidade
Vazão de massa	$m_p$	11,83	kg/s
Pressão requerida na saída da bomba	$p_{out}$	$6,57 \cdot 10^6$	Pa
Pressão mínima na entrada da bomba	$p_{in}$	$0,29 \cdot 10^6$	Pa
Temperatura máxima na entrada da bomba	$T_{in}$	90	K
Pressão de vapor	$p_s$	$0,13 \cdot 10^6$	Pa
Densidade	$\rho$	1140	kg/m <sup>3</sup>
Viscosidade	$\nu$	$1,66 \cdot 10^{-7}$	m <sup>2</sup> /s
Potência consumida pela bomba (oxidante)	$N_o$	$102,9 \cdot 10^3$	W
Potência consumida pela bomba (combustível)	$N_f$	$109,62 \cdot 10^3$	W
Tensão de torção admissível do eixo	$\tau$	$1,0 \cdot 10^8$	Pa
Ângulo de saída do impelidor	$\beta$	8°	
Ângulo de incidência do impelidor	$\iota$	0,7°	

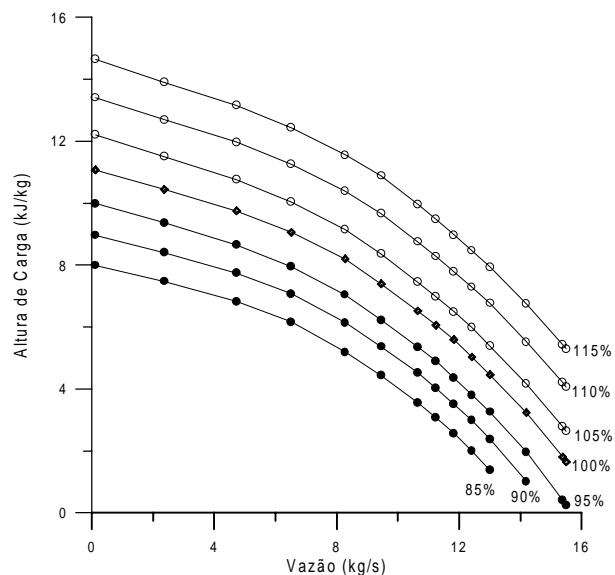
A partir destes dados e obedecendo algumas restrições de projeto, tais como qualidade anti-cavitacional e tensão de torção admissível do eixo, obtém-se a velocidade angular, o rendimento, a potência consumida e as principais dimensões da bomba centrífuga. Os detalhes do projeto podem ser obtidos em Tamashiro (1999).

Utilizando-se os modelos de perdas indicados, foi montada uma seqüência de cálculos utilizando-se o software *Mathcad*. Os dados de entrada são a geometria da bomba, a vazão requerida e a rotação. Como resultado, obtém-se a capacidade de carga H, as perdas e o rendimento. O programa utilizado faz variar automaticamente a vazão e a rotação, obtendo-se os dados necessários para a construção das curvas ilustradas nas Figuras 1 e 2, também obtidas automaticamente. Os valores que definem a geometria da bomba, a velocidade de rotação, o rendimento e a potência consumida estão listados na Tabela 2, bem como os respectivos valores para a bomba de oxidante do motor RD-109 e a variação percentual obtida entre essas medidas. Os resultados obtidos poderiam ser mais próximos dos valores da bomba do RD-109,

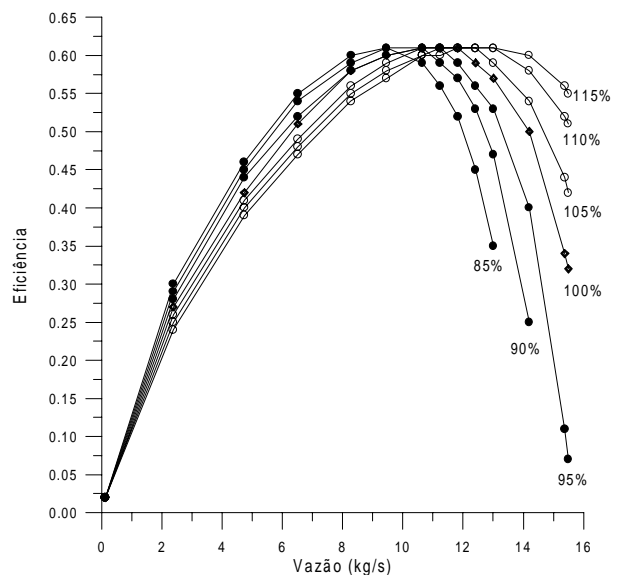
uma vez que alguns dados de projeto poderiam ter sido alterados. Neste trabalho optou-se por adotar valores médios. Utilizando-se a seqüência de cálculos pode-se ainda calcular as perdas e, em conseqüência, o desempenho da bomba fora do ponto de projeto. Então, definida a geometria e fixada uma velocidade de rotação, faz-se variar a vazão de massa para a obtenção das características da bomba analisada.

**Tabela 2** - Valores calculados comparados com os valores da bomba do motor RD-109

Parâmetros analisados	símbolo	calculado	RD-109	%
Velocidade de rotação (rpm)	$n_{RPM}$	36544	33800	8
Diâmetro do cubo ( $10^{-3}$ m)	$d_{hub}$	18,25	18,59	2
Diâmetro externo do indutor ( $10^{-3}$ m)	$D_s$	40,74	41,50	2
Diâmetro na entrada do impelidor ( $10^{-3}$ m)	$D_1$	33,00	36,40	9
Diâmetro de entrada no impelidor ( $10^{-3}$ m)	$D_0$	40,74	44,85	9
Altura inicial da pá do impelidor ( $10^{-3}$ m)	$b_1$	16,75	18,35	9
Diâmetro externo na entrada do impelidor ( $10^{-3}$ m)	$D'_1$	49,70	50,57	2
Altura final da pá do impelidor ( $10^{-3}$ m)	$b_2$	4,59	5,38	15
Diâmetro na saída do impelidor ( $10^{-3}$ m)	$D_2$	73,93	80,50	8
Rendimento da bomba de oxidante	$\eta$	0,61	0,58	5
Potência consumida ( $10^3$ W)	$N_o$	115,4	121,6	5



**Figura 1** - Comportamento da capacidade de carga em função da vazão de oxidante



**Figura 2** - Comportamento do rendimento da bomba em função da vazão de oxidante

Levando-se em conta que a bomba será acionada por uma turbina, também em fase de projeto, e para que possa haver compatibilidade de rotação entre a bomba e a turbina, procurou-se simular o funcionamento da bomba entre 85% e 115% da sua rotação nominal. Os resultados dos cálculos estão mostrados nas Figuras 1 e 2, para valores de rotação variando entre 85% e 115%, como indicado nas curvas.

## 5. CONCLUSÕES

O modelo de perdas considerou os principais fatores que influenciam o desempenho de

uma bomba centrífuga. Tendo sido construído levando-se em conta dados experimentais, é de se esperar que os resultados obtidos neste trabalho sejam qualitativa e quantitativamente coerentes. A Tabela 2 indica essa qualidade, uma vez que, tanto a geometria básica da bomba como suas características principais de desempenho, são muito próximas das de uma bomba equivalente, já projetada, fabricada e ensaiada, como a do motor RD-109. Fora do ponto de projeto, o modelo prevê corretamente o comportamento da bomba, uma vez que as curvas de desempenho têm as formas usuais, que também podem ser obtidas utilizando-se as relações de similaridade, conforme pode ser visto em Tamashiro (1999). Embora não tenha sido possível a obtenção de dados experimentais da bomba operando fora do ponto de projeto, para fins de comparação, pode-se esperar que o desempenho calculado esteja bem próximo do real, uma vez que o modelo de perdas foi calibrado para esses tipos de aplicações. A pesquisa será continuada no sentido de se calcular o escoamento no interior dos canais para se assegurar que o escoamento seja coerente com o modelo adotado.

Existem diversos procedimentos para o dimensionamento de uma bomba. Este trabalho apresentou um deles. Tem a característica especial de definir a geometria básica de uma bomba similar a uma bomba existente, o mesmo acontecendo com seu desempenho. Desta forma, sua utilização pode resultar no projeto de uma bomba cujo desempenho requerido possa ser alcançado após pouco desenvolvimento em bancos de ensaios.

## 6. REFERÊNCIAS

- Huzel, Dieter K., Huang, David H., 1992, “Modern Engineering for Design of Liquid-Propellant Rocket Engine”, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington DC, 431p.
- Ovsiannikov, B. V., Borovskiy, B. I., 1973, “Theory and Calculation of Feed Units of Liquid Propellant Rocket Engines”, Foreign Technology Division, Ohio, 485p.
- Ovsiannikov, B. V., Celifonov, B. C., 1996, “Theory and Calculation of Screw Centrifugal Pumps”, Moscow Aviation Institute, Moscow, 71p.
- Pfeleiderer, C., Petermann Hartwig, 1979, “Máquinas de Fluxo”, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 454p.
- Stepanoff, Alexey J., 1948, “Centrifugal and Axial Flow Pumps”, John Wiley & Sons, Nova York, 428p.
- Tamashiro, R.Y., 1999, “Simulação Numérica de Bomba Centrífuga para Aplicação em Motor-Foguete a Propelente Líquido”, Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, S.P., 127p.

# SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO TRANSPORTE, DEFORMAÇÃO E CAPTURA DE INTERFACES TRIDIMENSIONAIS

**Aristeu da Silveira Neto**

**Juliano Marcelo de Arruda**

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campus Santa Mônica, 38400-902, Uberlândia, MG, Brasil. E-mail: [jmarruda@mecanica.ufu.br](mailto:jmarruda@mecanica.ufu.br)

## Resumo

Apresenta-se parte de um projeto no qual visa-se o estudo e o desenvolvimento de uma metodologia alternativa para estudos na área de dinâmica dos fluidos, envolvendo escoamentos bifásicos e interações fluido-estrutura. Esta metodologia, denominada Método de Captura de Interface, consiste em considerar que um corpo submerso faz parte integrante de um escoamento, sendo visto pela solução das equações de conservação como uma mancha de fluido com propriedades físicas diferentes daquelas do escoamento. Neste trabalho mostra-se o desenvolvimento de um código computacional que simula o transporte de uma interface tridimensional em relação ao escoamento, via campos de velocidades artificiais impostos. Apresenta-se também o cálculo da Função Indicadora, a qual permite obter a posição da interface ao longo do tempo, e a caracterização geométrica da interface (cálculo da normal e elementos de área). Resultados do transporte de esferas com deformações para diferentes campos de velocidades artificiais impostos são apresentados.

**Palavras-chave:** Função Indicadora, Captura de Interface, Parâmetros Geométricos, Transporte de Interface.

## 1. INTRODUÇÃO

Problemas com fronteiras móveis, caracterizados pela presença de interfaces que interagem com o escoamento e demarcam regiões com propriedades físico-química diferentes, aparecem numa grande variedade de aplicações em engenharia, tais como processamento de materiais, interações fluido-estrutura e escoamentos bifásicos. Sob certas condições, influenciadas pelos parâmetros de controle, estas interfaces podem sofrer instabilidades.

A predição da dinâmica destes problemas torna-se importante, pois escoamentos sobre estruturas não rígidas, onde as instabilidades dinâmicas dos escoamentos e as deformações/oscilações das estruturas interagem, implicam em sistemas dinâmicos altamente não lineares. Já a formação de células gasosas e o crescimento de dendritas no processo de solidificação, influem na qualidade final do material processado. Os escoamentos bifásicos e multifásicos compõem um grupo muito importante de aplicações. A interação das múltiplas interfaces entre si e com o escoamento, dão origem a complexos fenômenos do tipo coalescência e fragmentação de interfaces.

A metodologia aqui apresentada permite simular numericamente o transporte de interfaces tridimensionais, realizado através da discretização do escoamento com uma malha euleriana, e da discretização da interface com uma malha lagrangeana, a qual se move por uma malha euleriana.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Diversos estudos têm sido realizados com o intuito de simular o transporte e a captura de interfaces e as conseqüências resultantes de suas presenças sobre o escoamento transportante.

Os estudos de transporte de interfaces e as conseqüências resultantes sobre o escoamento também tem sido explorados. Loewenberg & Hinch (1996) realizaram a simulação numérica de uma emulsão concentrada submetida em um fluxo cisalhante; Zinchenko *et al.* (1997) apresentaram um algoritmo do método da integral de contorno para uma interação viscosa de partículas deformáveis; Cristini *et al.* (1998), simularam a deformação e a fragmentação de partículas em escoamentos viscosos;. Almeida (1998) também simulou a deformação de partículas em emulsões diluídas

Os métodos de captura podem ser divididos em captura de volume e captura de interface ou superfície.

Os métodos de captura de volume sobrepõe problemas de topologia, dividindo o domínio em regiões de solução separadas. Estas regiões são identificadas por marcadores, usados para reconstruir a interface, e que são advectados com o escoamento. Nesta linha tem-se o método “Marker-and-Cell” (MAC) proposto por Harlow & Welch (1965) para um fluido e derivações deste como o de Daly (1969) para dois fluidos. Tem-se também o Método de Volume de Fluido (VOF), apresentado por Hirt & Nichols (1981), no qual uma função marcadora é advectada ao fluido. Ainda na linha de captura de volume tem-se o método proposto por Lee & Tzong (1991), denominado de Formulação de Entalpia, o qual é utilizado muito em problemas de mudança de fase, uma vez que nestes casos o salto de difusividade térmica existente na interface não pode ser desprezada.

A captura de interface é mais precisa porém tem um custo de maior complexidade, pois a mesma é descrita por elementos computacionais adicionais. Inicialmente discutida por Richtmyer & Morton (1967) este método teve sua primeira implementação através do trabalho de Glimm *et al.* (1988), onde uma fronteira móvel foi representada por um conjunto de pontos convectados, os quais formam um contorno interno móvel. Outras técnicas baseadas na mesma idéia foram desenvolvidas, como os trabalhos de Peskin (1977), Fauci & Peskin (1988) e Fogelson e Peskin (1988).

Peskin (1977) realizou análise numérica do escoamento de sangue no interior do coração. Por esta mesma formulação, Silveira-Neto (1997) simulou numericamente escoamentos bifásicos laminares e em transição que transportam bolhas no interior de um canal fechado, utilizando a técnica de captura de interfaces. Esta técnica foi apresentada por Unverdi e Tryggvason (1992), trabalho no qual simulam-se escoamentos multifásicos não estacionários, onde uma interface separa fluidos incompressíveis de diferentes densidades e viscosidades.

Utilizando esta mesma técnica Juric e Tryggvason (1996) simularam numericamente solidificações dendríticas bidimensionais de substâncias puras, e Yu *et al.* (1995) simularam numericamente o transporte de bolhas de cavitação em escoamentos cisalhantes. Recentemente esta técnica também foi utilizada por Mendes (1999) para a simulação numérica fina do processo de transporte de interfaces bidimensionais.

## 3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Os problemas de interação fluido-estrutura, escoamentos bifásicos e transporte de particulados podem ser tratados de formas semelhantes, através da consideração de uma fase contínua para o escoamento, e de uma fase dispersa, a qual é transportada pela fase contínua. A fase dispersa pode ser uma bolha (escoamento bifásico), uma partícula (transporte de particulado) ou um corpo sólido (interação fluido-estrutura). As fases contínua e dispersa são



tratadas por meio de uma formulação euleriana enquanto a interface entre elas é tratada de forma lagrangeana.

### 3.1 Formulação Matemática do Transporte das Fases Contínua e Dispersa

O transporte das fases contínua e dispersa é modelado através das equações de conservação da massa (equação 1) e da conservação da quantidade de movimento (equação 2). Considera-se escoamento incompressível, mas com densidade e viscosidade variáveis. Considera-se ainda escoamento isotérmico de um fluido newtoniano. Assim as equações são dadas por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \left\{ \mu (\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla}^T \vec{V}) \right\} + \vec{F}. \quad (2)$$

### 3.2 Formulação Matemática do Transporte da Interface

A fase dispersa é aquela que é transportada pela fase contínua, e a interface a região entre as duas fases. De um ponto de vista discreto, pode-se considerar a interface que separa estas fases como um conjunto de pontos  $\vec{x}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k}$ . As coordenadas  $(x_k, y_k, z_k)$  são definidas inicialmente. O transporte da interface é modelado de acordo com a seguinte equação lagrangeana:

$$\frac{d\vec{x}_k}{dt} = \vec{V}_k. \quad (3)$$

Esta equação é resolvida explicitamente, interpolando o campo de velocidade euleriano relativo ao tempo anterior, para a determinação da nova posição da interface no tempo atual. O campo de velocidades euleriano é determinado pela solução das equações (1) e (2). As velocidades de transporte lagrangeanas podem ser definidas com uma função delta, como segue:

$$\vec{V}_k(\vec{x}_k, t) = \int_V \vec{V}(\vec{x}, t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_k) d\vec{x}. \quad (4)$$

Com esta definição obtém-se um campo de velocidade diferente de zero sobre a interface, em função do campo de velocidades euleriano na sua vizinhança.

### 3.3 Formulação Matemática do Cálculo dos Parâmetros Geométricos

O cálculo dos parâmetros geométricos, ou seja, a normal, a curvatura e a área do elemento cujo centróide é um dos nós discretizados da interface, torna-se necessário para o cálculo da função indicadora.

O método utilizado para a caracterização geométrica da interface foi proposto por Almeida (1998), o qual é uma variação do método desenvolvido por Zinchenko *et al.* (1997).

Neste método o vetor normal de cada nó é calculado pela somatória dos vetores normais aos elementos triangulares formados pelo nó  $i$ , ponderada pelo inverso das áreas destes elementos, como mostra a equação (5):

$$\mathbf{n}_i = \sum_{el} A_{el}^{-1} \mathbf{n}_{el} / \left| \sum_{el} A_{el}^{-1} \mathbf{n}_{el} \right|, \quad (5)$$

onde  $\mathbf{n}_i$  é o vetor normal ao nó  $i$ ,  $A_{el}$  é a área do elemento  $el$  e  $\mathbf{n}_{el}$  é vetor normal ao elemento  $el$ , sendo o somatório efetuado em todos os elementos nos quais o nó  $i$  está contido. A área do elemento  $el$  é a área formada pelo nó  $i$  e por dois de seus nós adjacentes. Uma vez que cada nó tem um certa quantidade de nós adjacentes, tem-se então a mesma quantidade de elementos de área triangulares. É importante lembrar que estas áreas calculadas aqui são somente para o cálculo do vetor normal, dado pela equação (5), não devendo confundi-la com o elemento de área que entrará no cálculo da função indicadora, como será visto no próximo item. Faz-se pois necessário calcular a área do elemento cujo centróide é o nó em questão. A curvatura pode ser obtida através do ajuste do parabolóide pelo método dos mínimos quadrados. O cálculo da curvatura torna-se necessário na avaliação da força interfacial, uma vez que ela é um dos parâmetros deste cálculo.

### 3.4 Formulação Matemática do Transporte da Função Indicadora

A função indicadora é utilizada com duas finalidades básicas: acompanhar o movimento e a geometria da interface ao longo do tempo. Esta função assume valores entre zero e um, sendo zero fora da interface e um dentro da mesma. O uso da mesma é feito para interpolar as propriedades físicas como a densidade e a viscosidade. De forma intuitiva deve-se buscar o cálculo desta função de forma que o resultado dependa diretamente de um parâmetro geométrico ligado à interface, por exemplo, a normal. Assim, define-se o gradiente da função indicadora como sendo

$$\vec{\nabla} I = \vec{G} = \sum_k D_{ijl} (\vec{x} - \vec{x}_k) \vec{n}(\vec{x}_k) \Delta S(\vec{x}_k). \quad (6)$$

Tem-se, na equação vetorial acima, três componentes, o que dificulta a solução e determinação de  $I(\vec{x}, t)$ . Aplicando-se o operador divergente em ambos os lados desta equação, tem-se:

$$\nabla^2 I(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{G}(\vec{x}, t). \quad (7)$$

A solução desta equação tem duas vantagens: trata-se de uma equação escalar e o operador de Laplace conduz a uma solução bem comportada, mesmo que o termo fonte seja instável.

## 4. RESULTADOS

Neste item são apresentados os resultados obtidos com a metodologia de transporte de interfaces, representadas por uma malha lagrangeana. O transporte foi realizado com a interpolação das velocidades dos pontos eulerianos para os pontos lagrangeanos através da função distribuição. Foram utilizados diferentes campos de velocidades. Observa-se ainda que não foi objetivo deste trabalho o transporte das interfaces com campos de velocidades fornecidos pela solução das equações de Navier-Stokes. Os campos aqui utilizados foram gerados e impostos de forma ad-hoc, com os quais transportam-se as interfaces. Dois campos diferentes foram utilizados com o objetivo de testar as subrotinas de geração de malha, interpolação de velocidades, transporte da interface e cálculo da função indicadora. Não foi objetivo neste trabalho a remalhagem da interface, embora para os casos em que a mesma tem

uma intensa deformação, como nos escoamentos bifasicos, este processo se torne necessário (como pode ser visualizado na figura 5).

#### 4.1. Transporte da fase Dispersa

##### 4.1.1 – Campo de Velocidade Parabólico

Aqui a componente horizontal de velocidade é função de duas ordenadas,  $y$  e  $z$ . O transporte da interface por este campo de velocidades pode ser observado na figura 1, sendo a sua equação governante dada pela equação 8:

$$u(y, z) = -(100,0/3,0) \times (y^2 + z^2) + 20,0(y + z) \quad (8)$$

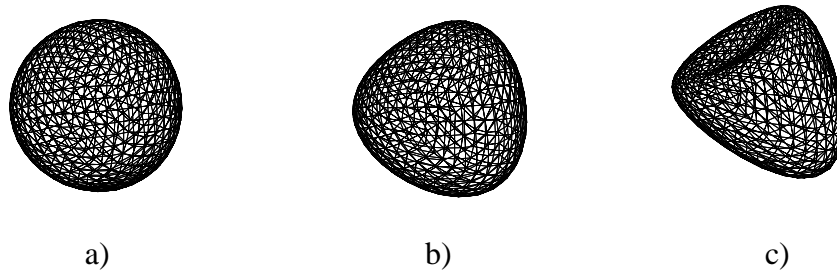


Figura 1 – Transporte de uma interface esférica por um campo de velocidades parabólico nos tempos: a) 0.0seg, b) 0.71 seg e c) 1.51 seg.

##### 4.1.2 – Campo de Velocidade Cisalhante

Novamente aqui, o campo de velocidades foi gerado na malha euleriana, tendo sido interpolado para os pontos lagrangeanos. Neste caso a componente horizontal da velocidade é função somente da direção  $z$ .

O transporte da interface através do campo de velocidades utilizado neste caso pode ser visto a seguir na figura 2. Ele obedece à seguinte condição:

$$u(z) = +1,0 \quad \text{se} \quad z < z_c \quad \text{ou}$$

$$u(z) = -1,0 \quad \text{se} \quad z \geq z_c,$$

onde  $z_c$  é ordenada em  $z$  do centro da esfera representada pela malha lagrangeana.

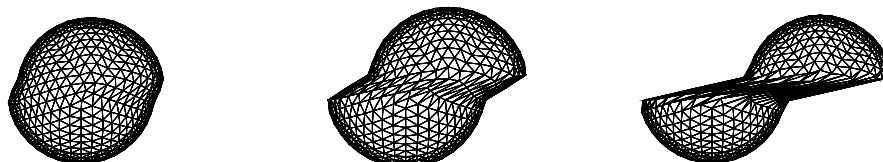


Figura 2 – Transporte de uma interface esférica por um campo de velocidades cisalhantes com um choque de velocidades:  $u_s = 1,0$  m/s e  $u_f = -1,0$  m/s.

## 4.2. Função Indicadora

A seguir apresenta-se a captura de uma interface tridimensional, com o seu transporte e deformação, via função indicadora.

### 4.2.1. Visualização da Função Indicadora

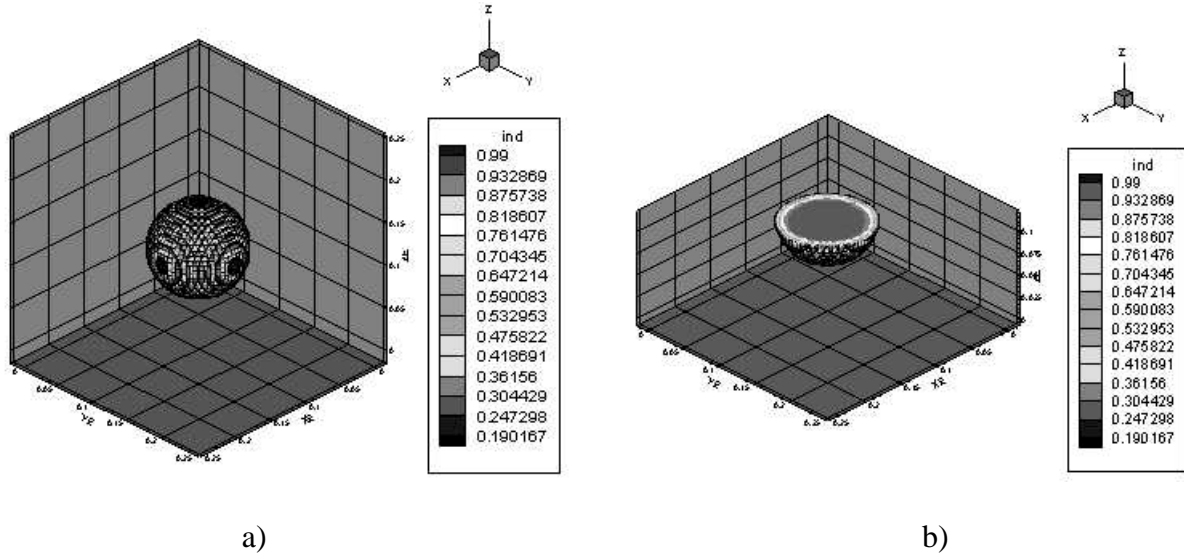


Figura 3 – Captura de uma interface esférica via função indicadora; raio da esfera igual a 25% do tamanho do domínio: a) esfera; b) corte hemisférico.

### 4.2.2. Campo de Velocidade Parabólico

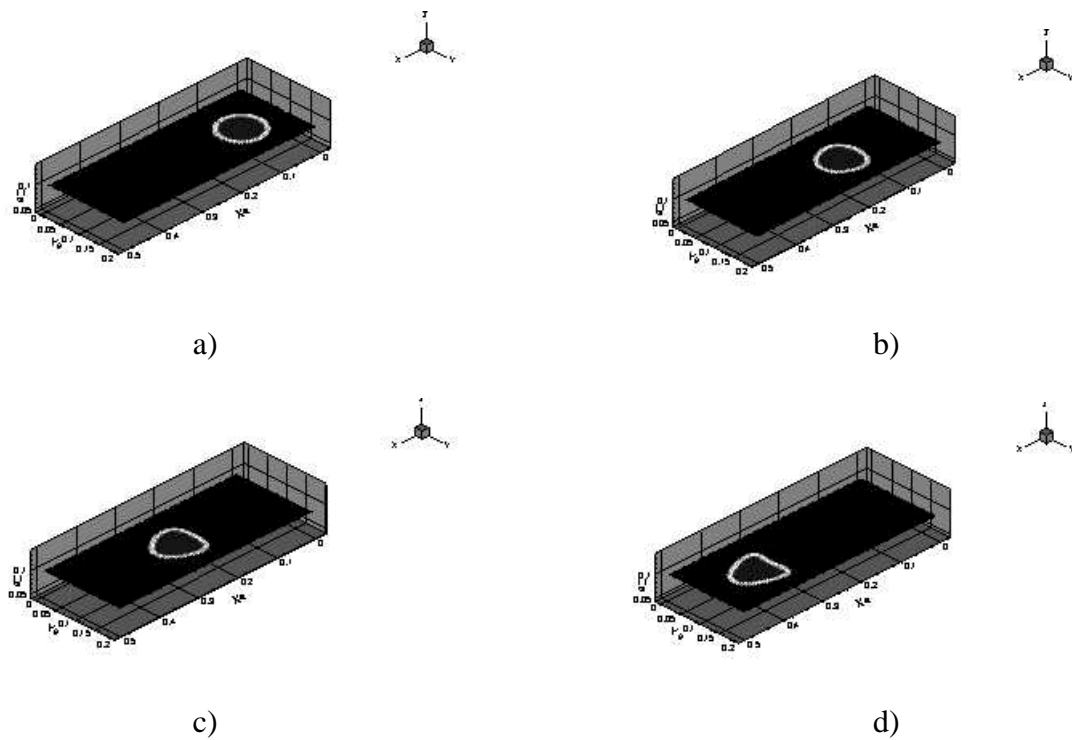


Figura 4 – Visualização da captura e do transporte da interface sob um campo de velocidades parabólico nos tempos: a) 0,0s, b) 0,04s, c) 0,06s, d) 0,09s.

### 4.2.3. Campo de Velocidade Cisalhante

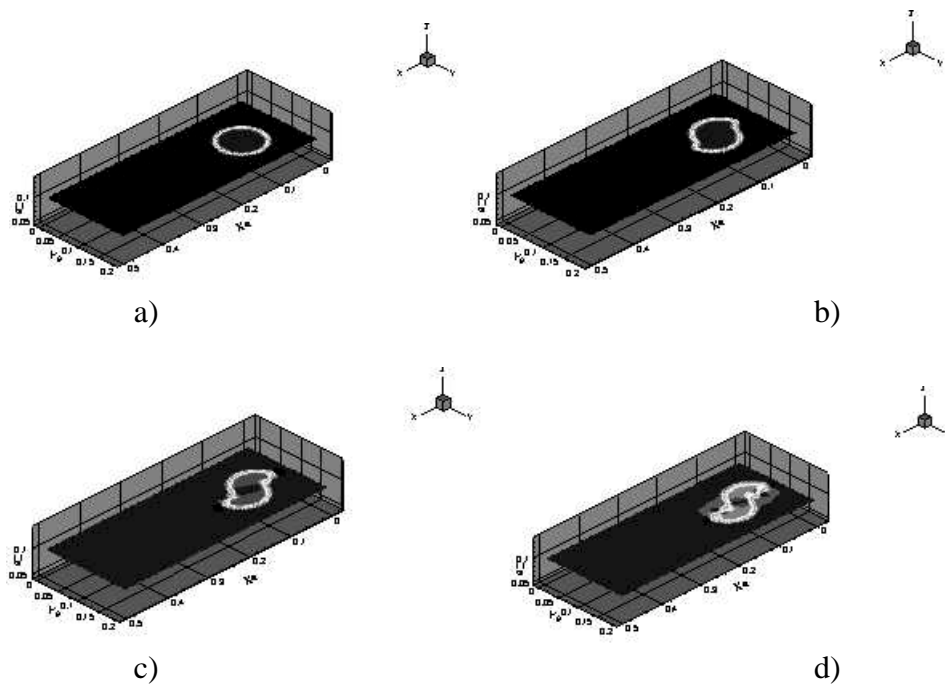


Figura 5 – Visualização da captura da interface sob um campo cisalhante com choque de velocidades nos tempos: a) 0,00s, b) 0,01s, c) 0,02s, d) 0,03s.

Percebe-se neste caso a necessidade de um processo de remalhagem (adição, subtração ou reconexão de nós) na interface. Devido a grande deformação ocorrida em alguns nós, a função indicadora não consegue mais capturar, com eficiência, a interface, fazendo com que após um determinado instante os resultados comecem a divergir.

## 5. CONCLUSÕES

Apresentou-se uma simulação numérica do processo de transporte passivo e deformação de uma interface tridimensional, utilizando-se campos de velocidade impostos e conhecidos. Foi implementado um procedimento para cálculo da Função Indicadora, a qual permite interpolar e determinar os campos de propriedades físicas como a densidade e a viscosidade. O processo de geração da malha inicial foi desenvolvido e implementado com sucesso.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Almeida, M. H. P. , 1998, "Simulação Numérica da Mecânica de Deformação de Partículas em Emulsões Diluídas", Dissertação de Mestrado, UnB, Brasília-DF.
- Cristini et al. , 1998, "Drop Breakup in Three-Dimensional Viscous Flows", Letters – Physics Fluids, vol 10, 8, pp. 1781-1783.
- Daly, B. J., 1969, 'A Technique for Including Surface Tension Effects in Hydrodynamic Calculation', Journal of Computational Physics, 4, pp. 97-117.
- Fauci, L. J. e Peskin, C. S., 1988 , "A Computational Model of Aquatic Animal Locomotion", Journal of Computational Physics, 77, pp. 85-108.

- Faber, T. E. , 1995, Fluid Dynamics for Physicists, Cambridge University Press.
- Fogelson, A. L. e Peskin, C. S. , 1988, 'A Fast Numerical Method for Solving the Three-Dimensional Stokes' equation in the Presence of Suspended Particles', Journal of Computational Physics, 79, pp. 50-69.
- Glimm et al. , 1988, "The Bifurcation of Tracked Scalar Waves", SIAM Journal of Science and Statistics Computational, 9, pp.61-79.
- Harlow, F. H. e Welch, J. E. , 1965, "Numerical calculation of Time-Dependent Viscous of Incompressible Flow of Fluid with Free Surface", Physics Fluids, 8, pp. 2182-2189.
- Hirt, C. W. e Nichols, B. D. , 1981, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries", Journal of Computational Physics, 39, pp. 201-225.
- Juric, D. e Tryggvason, G. , 1996, "A Front-Tracking Method for Dendritic Solidification", Journal of Computational Physics, 123, pp. 127-148.
- Lee, S. L. e Tzong, R. Y. , 1991, "An Enthalpy Formulation for Phase Change Problems with a Large Thermal Diffusivity Jump across the Interface", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol 34, 6, pp. 1491-1502.
- Loewenberg, M. e Hinch, E. J., 1996, "Numerical Simulation of a Concentrated Emulsion in Shear Flow", Journal of Fluid Mechanics, 321, pp. 395-419.
- Mendes, P. J. T. , 1999, "Simulação Numérica Fina do Transporte de Interfaces", Dissertação de Mestrado, UFU, Uberlândia-MG.
- Peskin, C. S., 1977, "Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart", Journal of Computational Physics, 25, pp. 220-252.
- Richtmyer, R. D. e Morton, K. W. , 1967, "Difference Methods for Initial-Value Problems", Interscience, New York.
- Silveira-Neto, A., 1997, "Simulation Numerique Fine des Ecoulements Turbulents Diphasiques non Miscibles", DTP/SMTH/LATA/97-06, Grenoble.
- Unverdi, S. O. e Tryggvason, G. A. , 1992, "Front-Tracking Method for Viscous, Incompressible, Multi-fluid Flows", Journal of Computational Physics, 100, pp. 25-37.
- Yu et al. , 1995, "The Collapse of a Cavitation Bubble in Shear Flows – A Numerical Study", Physics Fluids, 7, pp. 2608-2616.
- Zinchenko et al. , 1997, "A Novel Boundary-Integral Algorithm for Viscous Interaction of Deformable Drops", Physics Fluids, 9, pp. 1493-1511.

# ANÁLISE DA INSTABILIDADE DE BLENDS DURANTE O PROCESSO DE EXTRUSÃO

**Alexandre Alves Costa Oliveira**

**Roberto Guimarães Pereira**

Universidade Federal Fluminense, Departamento de Engenharia Mecânica  
Rua Passo da Pátria, 156, São Domingos, Niterói, RJ, CEP 24210-240, Brasil

## Resumo

Este trabalho apresenta uma observação experimental de algumas características reológicas da blenda TPE/SB (Elastômero Termoplástico / Estireno-Butadieno) utilizada pela indústria de transformação de plástico em produtos de uso médico-hospitalar.

As curvas de escoamento (viscosidade cisalhante x taxa de deformação) da blenda foram investigadas em diferentes temperaturas e em uma ampla faixa de taxa de deformação. Durante o processo de extrusão, o fenômeno de instabilidade (fratura do fundido) e sua relação com os parâmetros temperatura e taxa de deformação também foram investigados.

Todos os experimentos, as curvas de escoamento e a observação do fenômeno de instabilidade foram realizados em um reômetro capilar (ROSAND Rh-2100) que utiliza uma matriz capilar de 1mm de diâmetro por 16mm de comprimento.

**Palavras-chave:** Reologia, Blendas, Extrusão, Instabilidade.

## 1. INTRODUÇÃO

A fratura do material fundido se manifesta com uma queda na qualidade da superfície do produto e é bastante problemática em processos onde a integridade superficial é importante como, por exemplo, na produção de filmes plásticos e extrusão de tubos.

Distorções superficiais nestes produtos não são nenhuma novidade, mas as causas destas distorções foram, e continuam a ser, um tema bastante discutido. Grande parte do problema que cerca o fenômeno de fratura do fundido se deve ao grande número de termos usados para descrevê-lo.

Algumas observações sobre fratura do fundido foram relatadas por Petrie e Denn (1976). Em um artigo publicado, Hill et al.(1990) mostraram que para vários polietilenos, e, em particular, para o Polietileno de Baixa Densidade, as curvas de escoamento mostram uma descontinuidade e uma mudança de inclinação sob regimes em que a fratura do fundido pode ser visualmente observada.

Hatzikiriakos (1994) sugeriu que altas taxas de estiramento, ocorrendo quando o material fundido passa pela saída da matriz capilar, são a razão da fratura do material.. Rammamurthy (1986) e Kalika e Denn (1987) sugerem que a fratura do fundido é causada por uma falha da adesão na interface parede – fluido. Os resultados obtidos por El Kissi e Piau (1990) em um

estudo do escoamento de um Polietileno Linear de Baixa Densidade (LLDPE) através de diferentes geometrias capilares mostram claramente que métodos experimentais para determinar velocidades de deslizamento não dão evidências conclusivas da existência de deslizamento na parede para o escoamento de LLDPE sob condições que normalmente produzem instabilidade do material processado. Deixando-se de lado os mecanismos que causam fratura do fundido, as distorções superficiais acontecem e, uma vez estabelecidas, são muito difíceis, senão impossíveis de serem eliminadas.

Os modernos reômetros capilares tornam a observação e o estudo dos fenômenos de instabilidade muito mais fáceis, e agora, possíveis de serem detectadas e prevenidas.

## 2. EQUIPAMENTO

O equipamento usado neste estudo foi um reômetro capilar ROSAND Rh-2100 trabalhando com uma matriz capilar de tungstênio com 1mm de diâmetro por 16mm de comprimento e com um ângulo de entrada de 180°. Este reômetro opera no modo de deformação controlada (*controlled rate*) que obtém a função viscosidade do material medindo a perda de carga causada por uma matriz capilar quando o material é forçado a passar através desta matriz.

Uma fonte de erros de medida são os efeitos de entrada causados pela abrupta redução da seção circular quando o material passa do reservatório para o capilar. Estes efeitos de entrada causam uma perda de carga que influencia negativamente a relação perda de carga – viscosidade do material.

Para eliminar estes erros, um segundo teste deve ser realizado utilizando-se uma matriz capilar com o mesmo diâmetro da usada anteriormente mas com comprimento igual a zero (matriz orifício). A perda de carga causada por esta matriz é então subtraída do valor obtido durante o teste com a matriz de 16mm de comprimento. Esta correção é conhecida como Correção de Bagley.

Devido à característica não-Newtoniana do material que estava sendo analisado, outra correção é requerida, a correção de Weissenberg-Rabinowitsch. Esta correção leva em conta o índice de *power-law* (ou índice não-Newtoniano) do material e transforma a taxa de deformação aparente em um valor corrigido (taxa de deformação corrigida,  $\dot{\gamma}_c$ )

$$\dot{\gamma}_c = \left( \frac{3n+1}{4n} \right) \dot{\gamma}_a \quad (1)$$

Sendo  $\dot{\gamma}_a$  é o valor aparente para a taxa de deformação e n é o índice de *power-law*.

## 3. EXPERIMENTO

O experimento consiste na investigação das curvas de escoamento ( $\eta \times \dot{\gamma}$ ) da blenda TPE / SB (20% de TPE e 80% de SB) e de seus componentes separadamente e em uma observação do aspecto macroscópico da blenda durante uma simulação do processo de transformação para que seja detectado o fenômeno de fratura do fundido.



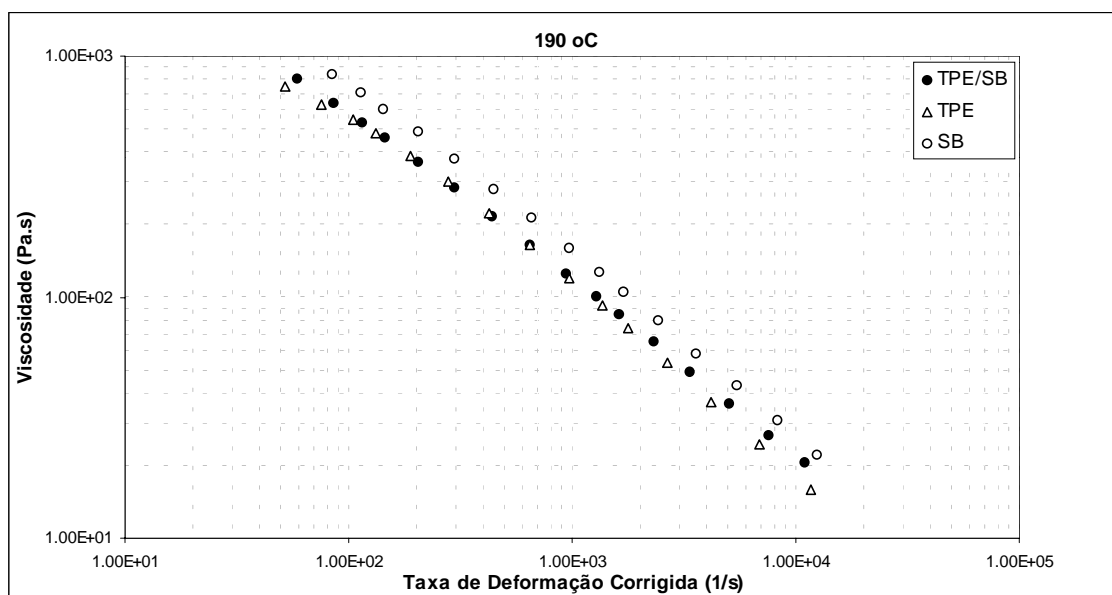
Os testes para avaliação da função viscosidade da blenda foram realizados sob duas temperaturas diferentes, 190 e 210 °C, e sob uma faixa de taxa de deformação de 42 a 20000 s<sup>-1</sup> (valores aparentes de taxa de deformação,  $\dot{\gamma}_a$ )

Para se detectar a fratura do fundido, o processo de transformação foi simulado usando-se o reômetro capilar extrudando a blenda sob as seguintes taxas de deformação: 1400, 2000, 4200, 6000, 10000, 15000 e 20000 s<sup>-1</sup> a 190 e 210 °C. O material extrudado sob cada taxa de deformação e temperatura foi então coletado e fotografado com o auxílio de uma câmera digital.

#### 4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS E RESULTADOS

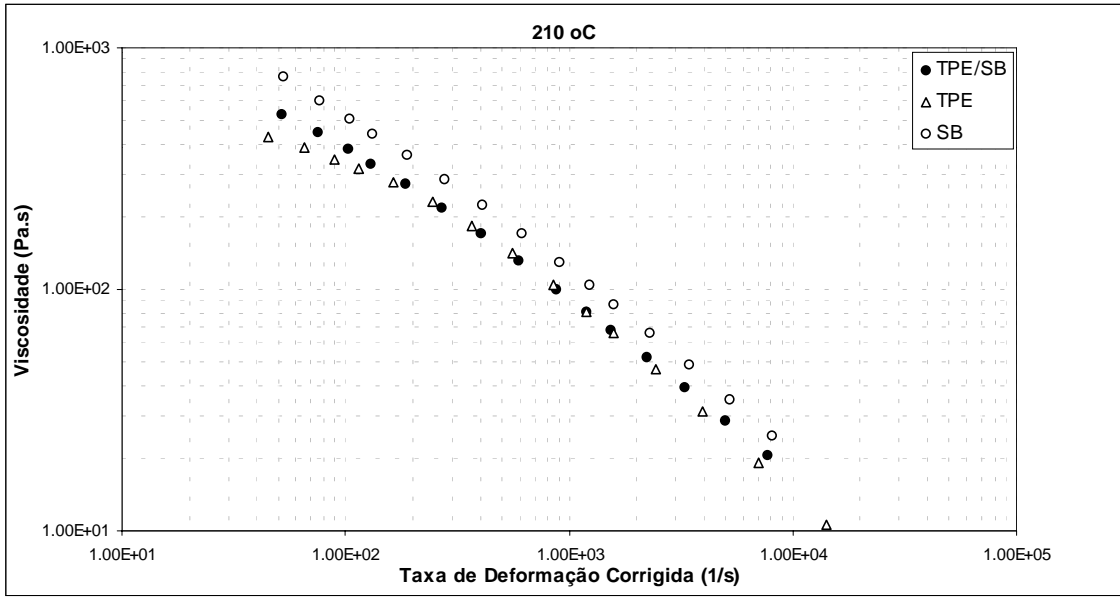
##### Função Viscosidade

Os dados obtidos nos testes de escoamento com a blenda TPE/SB e seus componentes a 190 e 210 °C, incorporando as correções de *Bagley* e *Weissemberg-Rabinowitsch* são apresentados nas Figuras 1 e 2.

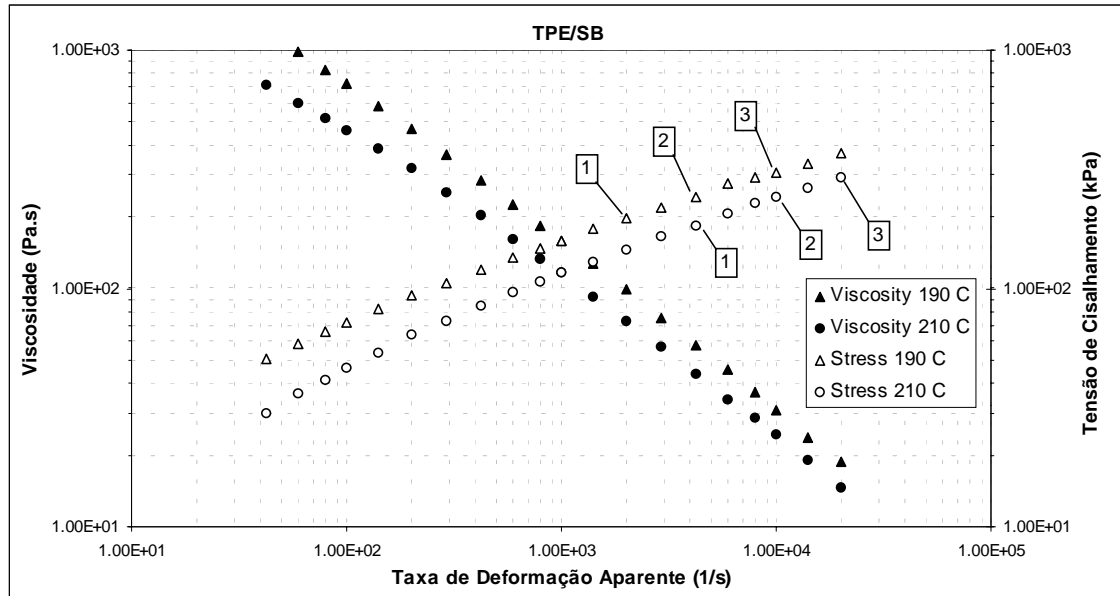


**Figura 1.** Curva de escoamento – Blenda TPE/SB e seus componentes a 190 °C

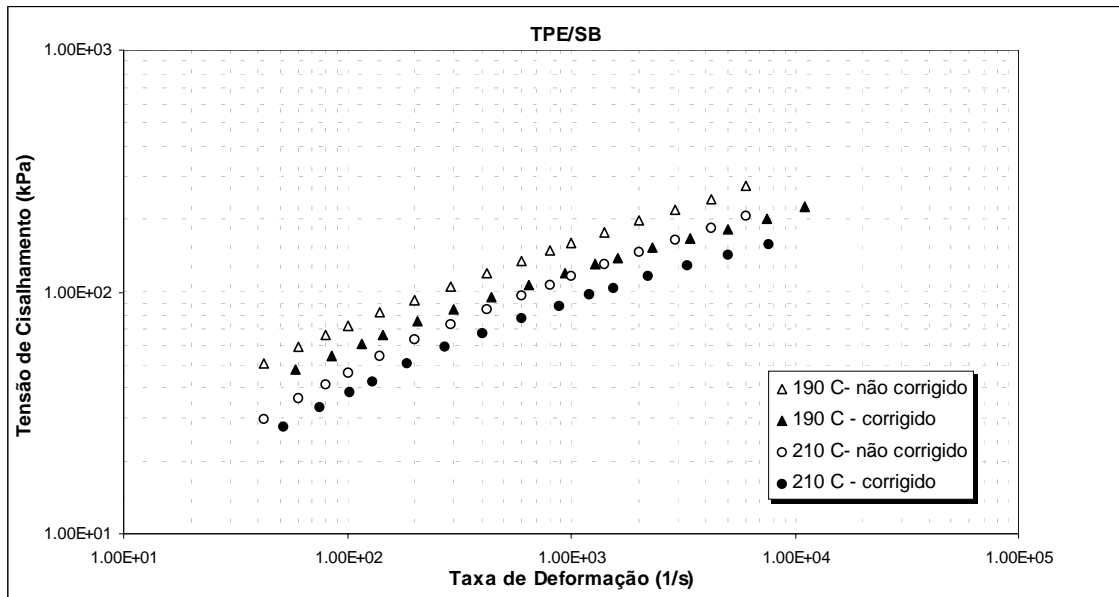
Para uma melhor comparação dos resultados obtidos nas duas temperaturas de ensaio e nas diferentes taxas de deformação, os resultados apresentados na Figura 3 não sofreram as correções de *Bagley* e *Weissemberg-Rabinowitsch*. As influências destas correções são apresentadas na Figura 4.



**Figura 2.** Curva de Escoamento – Blenda TPE/SB e seu componentes a 210 °C



**Figura 3.** Curva de Escoamento não corrigida – Blenda TPE/SB. Os números 1, 2 e 3 no interior do gráfico se referem aos estágios (Tabela 1) de fratura do fundido.

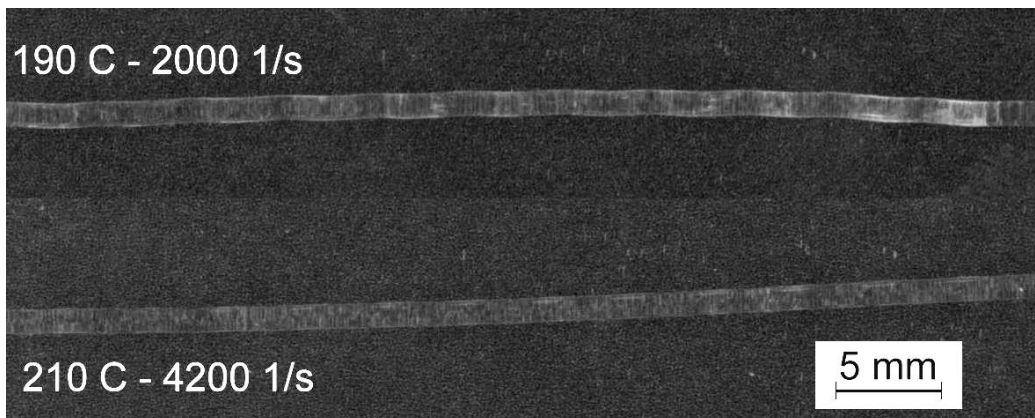


**Figura 4.** Efeito das correções de Bagley e Weissemberg-Rabinowisch

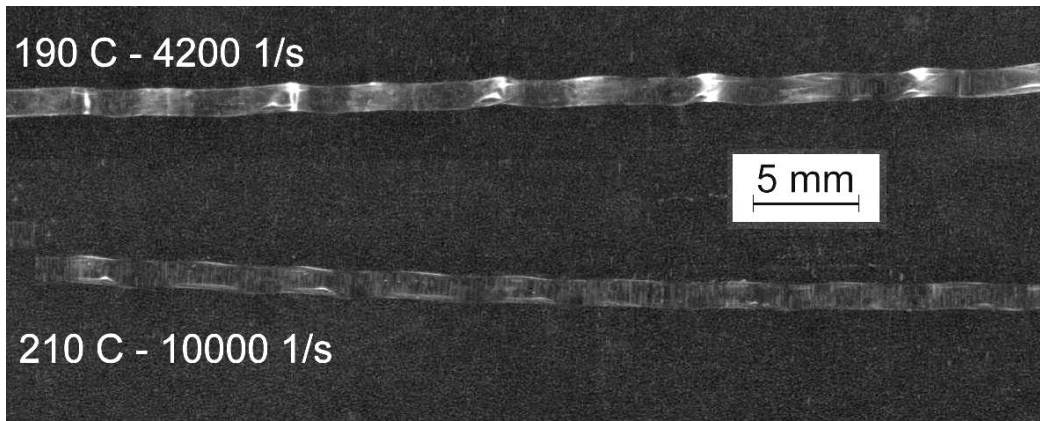
Embora a fratura do fundido, detalhada a seguir, tenha ocorrido durante a extrusão da blenda nos testes realizados a 190 e 210 °C, nenhuma descontinuidade ou mudança de inclinação significativa da curva pôde ser detectada nas Figuras 1, 2, 3 ou 4.

### Fratura do Fundido

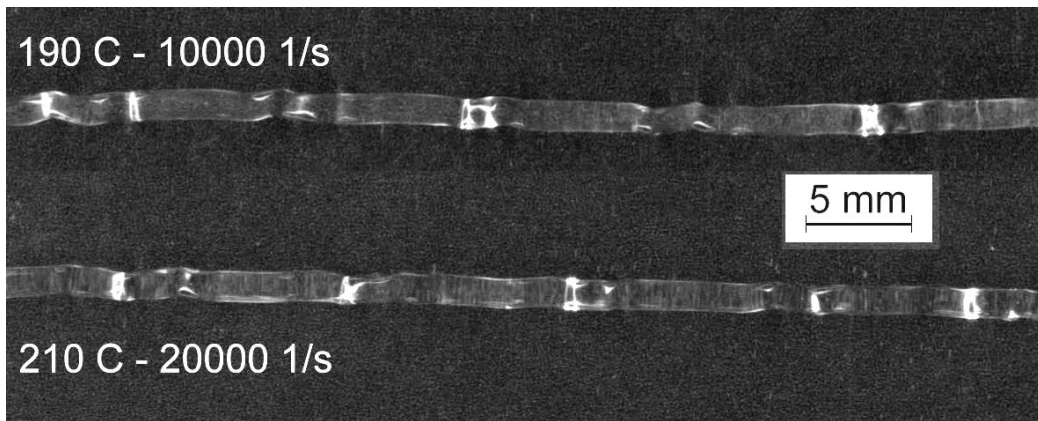
Para a análise do fenômeno de fratura do fundido, o processo foi simulado a 190 e 210 °C e sob diferentes taxas de deformação, como citado anteriormente. O material extrudado sob cada temperatura e cada taxa de deformação foi então coletado para inspeção. Através desta inspeção visual foi possível determinar, para cada temperatura, o início do fenômeno de fratura, determinando-se assim um valor crítico de taxa de deformação. As amostras de material obtidas sob taxas de deformação acima do valor crítico foram comparadas para as duas diferentes temperaturas de extrusão e aquelas que possuíam o mesmo aspecto visual foram separadas em três diferentes estágios de fratura do fundido: 1- Início da Fratura, 2- Fratura Moderada, 3- Fratura Severa. Estes estágios são mostrados nas Figuras 5, 6 e 7.



**Figura 5.** Início da Fratura (estágio 1)



**Figura 6.** Fratura Moderada (estágio 2)



**Figura 7.** Fratura Severa (estágio 3)

Os valores de tensão de cisalhamento e taxa de deformação (valores não corrigidos, como mostrados na Figura 3) para cada estágio são mostrados na Tabela 1.

**Tabela 1.** Estágios de Fratura do Fundido durante a extrusão da blenda TPE/SB a 190 e 210 °C

ESTÁGIO	190 °C		210 °C	
	Taxa de Def.(1/s)	Tensão (kPa)	Taxa de Def.(1/s)	Tensão (kPa)
1-Início da Fratura	2000	197.4	4200	184.7
2-Fratura Moderada	4200	242.8	10000	242.7
3-Fratura Severa	10000	308.2	20000	293.2

Os pontos 1, 2 e 3 da Tabela 1 possuem, aproximadamente, os mesmos valores de tensão de cisalhamento a 190 e 210 °C, mostrando que a tensão crítica de fratura do fundido para a blenda TPE/SB é independente da temperatura. Este fenômeno também foi observado por Ramamurthy (1986).

## 5. CONCLUSÕES

Este trabalho foi motivado, principalmente, pela necessidade da indústria de transformação de plásticos de melhorar as características do produto final, em particular no uso de blendas poliméricas, e também de otimizar os processos de transformação destes materiais.

A reometria capilar se mostra uma ferramenta muito útil no estudo do comportamento de materiais plásticos, simulando as condições de processo e tornando possível a detecção e prevenção das condições críticas de operação, como por exemplo, o início do fenômeno de fratura do fundido.

## 6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, pelo suporte financeiro prestado.

## 7. REFERÊNCIAS

- El Kissi, N. And Piau, J. M., 1990, J. Non-Newt. Fluid Mech., 37: 55-94
- Hatzikiriakos, S. G., 1994, Polymer Eng. & Sci., 34: 1441
- Hill, D. A., Hasegawa, T. and Denn, M. M., 1990, J. Rheology, 34: 891-918
- Kalika, D. S. and Denn, M. M., 1987, J. Rheology, 31: 815
- Petrie, C. J. S. and Denn, M. M., 1976, AIChE J., 22: 209-236
- Ramamurthy, A. V., 1986, J. Rheology, 30: 337

# **AValiação DOS PROCESSOS DINâmICOS NOS COLETORES DE ESCAPAMENTO DE MOTORES DE COMBUSTÃO INTERNA**

**João Nildo de Souza Vianna**

**Alessandro B. S. Oliveira**

**Lucio H. H. Oliveira**

Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica,  
CEP : 70910-900, Brasília, DF, E-mail : vianna@enm.unb.br

## **RESUMO**

Neste trabalho é realizada uma análise comparativa entre resultados experimentais e simulados numericamente de pressão dinâmica e velocidade dos gases nos coletores de escapamento, para um motor do ciclo Otto operando em ampla faixa de rotações. Para a aquisição de dados experimentais, fez-se uso de um coletor de descarga especial a fim de se eliminar a interferência do processo de descarga dos outros cilindros. Quanto ao método numérico aplicado aos coletores, empregou-se o modelo da ação das ondas, seguindo uma abordagem homoentrópica dos processos e que permite a avaliação espaço-temporal das propriedades dos gases no interior dos coletores.

**Palavras-chaves** : Motores de combustão interna, Simulação de coletores, Ondas de pressão.

## **1. INTRODUÇÃO**

As ondas de pressão geradas quando se abre a válvula de descarga dos motores, se propagam no coletor de escapamento com a velocidade local do som. Ao alcançarem a extremidade do duto de escapamento “entendem” a atmosfera como uma parede isobárica e se refletem, retornando em direção à válvula como uma onda de expansão. Dependendo do comprimento do duto esta onda de expansão pode encontrar a válvula aberta e interferir no processo de descarga e talvez no de admissão se coincidir com o momento de cruzamento das válvulas. Naturalmente estes efeitos dependem da geometria dos coletores de descarga e tem um papel importante no desempenho dos motores de combustão interna.

Na simulação global de motores de combustão interna os modelos que considerem a variação espaço-temporal das propriedades no interior dos coletores são fundamentais para o estudo e compreensão dos complexos processos dinâmicos associados às fases de admissão e de descarga. A formulação proposta por Winterbone (apud Benson, 1986) para modelagem do escoamento em coletores de admissão e descarga utilizando os modelos de ação das ondas permitiu que os programas simuladores apresentassem resultados de desempenho bem mais realistas que os que, até então, utilizavam os métodos quase-permanente e de enchimento-esvaziamento. A partir daí vários autores têm aperfeiçoado o método e o adaptado às suas necessidades específicas. Oliveira (1995) mostrou que a introdução dos modelos que consideram o efeito das ondas nos coletores representam um importante passo quando se pretende otimizar o desempenho de programas simuladores, além de contribuírem para estudos de compatibilização de turbocompressores pulsantes. Vianna et al. (1996) e

Bertoluzzi et al (1998) também apontam que a modelagem dos coletores de admissão e descarga pelo método da ação das ondas aporta uma significativa melhoria no desempenho de programas simuladores no que diz respeito à predição dos parâmetros de desempenho global do motor, incluindo inclusive a avaliação de emissões de poluentes, como apresentados por Onorati et al (1998) e por Oliveira et al. (1996).

Muito embora a simples introdução do modelo teórico de ação das ondas melhore consideravelmente a aderência dos resultados globais simulados aos resultados experimentais, quando o objetivo é avaliar a interação das ondas de compressão e expansão com a geometria dos coletores o ajuste preciso dos parâmetros experimentais do modelo torna-se indispensável. Neste caso, as vantagens do modelo de ação das ondas são de certa forma limitadas pelas dificuldades de seu ajuste experimental decorrente da alta frequência e temperatura com que os eventos ocorrem.

Este trabalho tem por objetivo colaborar para a compreensão dos processos dinâmicos que ocorrem nos coletores de descarga explicitando as limitações metrológicas da instrumentação e dando continuidade ao estudo numérico-experimental dos fenômenos associados à propagação de ondas de pressão nos coletores, desenvolvidos anteriormente. Isto é realizado através de um estudo comparativo entre resultados experimentais e simulados de pressão dinâmica e velocidade dos gases de exaustão no interior de um coletor de um motor ciclo Otto. Os resultados experimentais foram obtidos utilizando-se um sistema de anemometria de fio quente e um sensor de pressão piezométrico. Com respeito à simulação numérica, o método das características, seguindo uma abordagem homoentrópica, foi empregado para a caracterização dos processos dinâmicos no interior dos coletores.

## 2.0 MODELO TEÓRICO APLICADO AO CILINDRO

A modelagem dos processos interiores ao cilindro consistiu em se aplicar as equações clássicas de conservação de massa e energia e dos gases perfeitos, bem como outras provenientes do mecanismo biela-manivela e transferência de calor para determinar as condições instantâneas de pressão, temperatura, massa e volume, ao longo de um ciclo termodinâmico completo (Oliveira, 1995). Para os processos sem queima de combustível, a variação da energia interna dos gases no interior do cilindro é dada por:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} + h_e \left( \frac{dm}{dt} \right)_e + h_a \left( \frac{dm}{dt} \right)_a \quad (1)$$

onde os subíndices  $a$  e  $e$  correspondem às válvulas de admissão e escape.

Para o processo de combustão empregou-se um modelo onde a pressão final a cada instante é resultante da superposição de três efeitos simultâneos: variação do volume devido ao movimento do pistão, liberação de energia proveniente da queima de combustível e transferência de calor dos gases às paredes do motor (Campbell, 1979). Este modelo se baseia na integração temporal das equações diferenciais ordinárias de conservação de massa e energia, sendo esta última obtida a partir da Eq. (1), acrescentada do fluxo de calor liberado na queima do combustível. Oliveira (1994) mostra que esta forma de modelagem retrata satisfatoriamente os processos interiores ao cilindro.

## 3. A MODELAGEM DOS COLETORES

Para a modelagem dos coletores empregou-se a formulação homoentrópica proposta por Benson (1986) para o escoamento no interior dos coletores, fazendo-se uso do método das características como ferramenta numérica para solução das equações que descrevem este

escoamento e para cálculo das propriedades termodinâmicas do fluido. Este modelo considera um duto simples, sem interferência dos cilindros adjacentes. As equações que governam o escoamento homentrópico não-permanente são :

- Equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

- Equação da conservação da quantidade de movimento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

- Equação de conservação de energia

$$\left( \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) - a^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0 \quad (4)$$

A velocidade do som  $a$  é expressa em termos das propriedades termodinâmicas  $P$ ,  $\rho$ ,  $T$  e entropia  $S$  segundo a expressão:

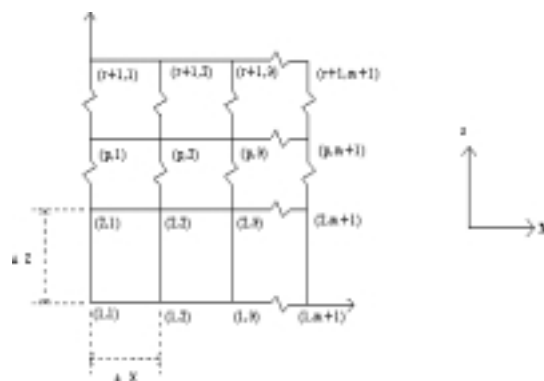
$$a^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{s=cte} = \frac{dP}{d\rho} = \frac{kP}{\rho} = kRT \quad (5)$$

A equação da continuidade pode ser expressa em termos das velocidades  $a$  e  $u$  (Benson, 1986):

$$\frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{k-1}{2} a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

E a equação da quantidade de movimento em termos de  $a$  e  $u$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2}{k-1} a \frac{\partial a}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (7)$$



**Figura 1** - Malha espaço-temporal de cálculo para os dutos.

Obtém-se portanto um sistema com duas equações, Eq. (6) e Eq. (7), e duas variáveis,  $a$  e  $u$ . As equações 6 e 7 formam um conjunto de equações diferenciais parciais hiperbólicas quase-lineares. Exceto em alguns casos particulares, não há solução analítica e uma solução numérica deve ser empregada. Para obter-se esta solução, o método das características é utilizado.



Para se solucionar as equações características, utiliza-se o método de solução proposto por Benson (1986), onde os dutos de admissão e exaustão são discretizados sob a forma de uma malha espaço-temporal e os extremos dos dutos correspondem aos nós extremos da malha. Nesta malha, o incremento espacial  $X$  é fixo e o incremento temporal  $Z$  varia de acordo com o critério de estabilidade de Courant-Friedrich-Lewis.

A figura 1 apresenta a malha de cálculo na qual pode-se observar  $m+1$  nós na direção  $X$  e  $r+1$  nós na direção  $Z$ .

Os cálculos são efetuados da seguinte forma: dadas as características iniciais  $\lambda_I$  e  $\lambda_{II}$  em todos os nós  $(1,s)$  calcula-se, para cada incremento de tempo  $Z$  - obtido segundo o critério de estabilidade já mencionado - as características  $\lambda_I$  e  $\lambda_{II}$  dos nós  $(p,s)$  a partir das condições conhecidas no instante anterior e das condições de contorno em  $(p,1)$  e  $(p,m+1)$ , sendo este cálculo realizado por interpolação linear.

Calcula-se então as condições termodinâmicas de cada nó  $(r+1,s)$  utilizando-se as expressões abaixo:

$$A = \frac{\lambda_I + \lambda_{II}}{2} \quad (8)$$

$$= \frac{\lambda_I - \lambda_{II}}{k-1} \quad (9)$$

$$P = \left( \frac{\lambda_I + \lambda_{II}}{2} \right)^{\frac{2k}{k-1}} \cdot P_{ref} \quad (10)$$

$$T = \left( \frac{\lambda_I + \lambda_{II}}{2} \right)^2 \cdot T_{ref} \quad (11)$$

Nestas equações, a velocidade do som local  $A$  e a velocidade do escoamento  $U$  correspondem às variáveis  $a$  e  $u$  adimensionalizadas.

#### 4. O PROGRAMA SIMULADOR

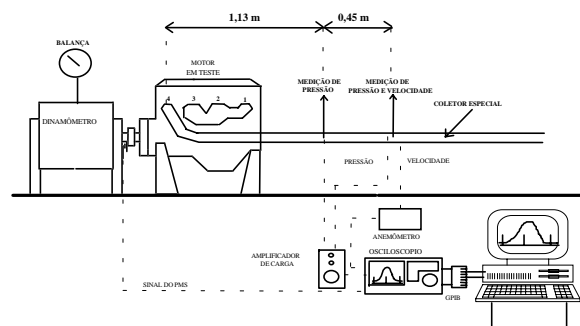
O programa simulador Otto versão 3.0 que resolve o sistema foi desenvolvido na linguagem Pascal. Suas principais características são a pouca dependência de dados experimentais e a sensibilidade a parâmetros geométricos e operacionais do motor em estudo. Com respeito a parâmetros de desempenho global, o programa fornece resultados de: consumo específico de combustível, potências efetiva, indicada e de atrito, rendimentos volumétrico e térmico, torque e pressão média efetiva. Também são calculadas as distribuições espaço-temporais de pressão dinâmica, temperatura e velocidade dos gases nos coletores. Para o caso do modelo de emissões que leva em conta a formação de 12 espécies, são apresentadas as concentrações em volume para  $CO_2$ ,  $CO$ ,  $O_2$ ,  $H_2O$ ,  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $H$ ,  $NO$ ,  $OH$ ,  $O$ ,  $N$  e  $N_2O$ .

#### 5. METODOLOGIA E INSTRUMENTAÇÃO

Para a avaliação dos modelos numéricos e para uma melhor compreensão dos processos associados à fase aberta do ciclo, realizou-se ensaios em bancada dinamométrica com um motor ciclo Otto de 4 cilindros, com  $1000 \text{ cm}^3$ , a gasolina. Os ensaios foram realizados com um coletor de descarga especial, com seção transversal constante, comprimento de 2,56m e

alimentado unicamente pelo quarto cilindro, a fim de se eliminar a interferência das ondas de pressão geradas pelos demais cilindros; manteve-se o coletor de admissão original, com comprimento igual a 0,12m e diâmetro de 0,027m. Para a medição de pressão utilizou-se um transdutor piezoelétrico Kistler com frequência natural de 150kHz e para a medida de velocidade um sistema de anemometria Disa equipado com uma sonda de fio quente de 9 $\mu$ m. Três metodologias de ensaio foram empregadas: a primeira teve por objetivo fornecer subsídios para a validação dos resultados numéricos; para tal realizou-se a medição de pressão dinâmica com o motor operando à plena carga e com o sensor de pressão piezoelétrico instalado no coletor especial a uma distância de 1,13m da válvula de escape. A segunda metodologia permitiu a investigação da influência do comprimento do coletor especial sobre o comportamento das ondas que se propagam em seu interior; isto compreendeu a variação do comprimento do coletor para 3,36m durante a execução dos ensaios. Por último, desejando-se avaliar de maneira preliminar a interação entre as propriedades dos gases de escape, realizou-se medições simultâneas de pressão dinâmica e velocidade, com a sonda de fio quente instalada no coletor a 1,58m da válvula de escape; estas medições foram realizadas inibindo-se a combustão no quarto cilindro tendo em vista as limitações de temperatura imposta à operação da sonda do anemômetro de fio quente.

A figura 2 apresenta esquematicamente a instrumentação empregada para a aquisição dos sinais de pressão dinâmica, velocidade e PMS no coletor especial. O registro do PMS foi realizado por meio de um diodo de foto-acoplamento, instalado na extremidade do eixo cardan do motor. Este dispositivo consiste em um disco furado fixado ao eixo cardan e que gira entre um emissor e um receptor óptico, permitindo o foto-acoplamento do seu furo quando tem-se ponto morto superior - PMS.



**Figura 2** - Aparato para aquisição dos sinais de pressão dinâmica, velocidade e PMS

Os transdutores piezoelétricos de pressão foram instalados no coletor através de adaptadores refrigerados a ar. A função de transferência do conjunto transdutor-adaptador foi levantada no Tubo de Choque e verificou-se que a linha pneumática do adaptador não interferia no ganho nem na fase do sistema, na faixa de frequência do escoamento em estudo. Os sinais provenientes do transdutor piezoelétrico e da sonda do anemômetro de fio quente foram então adquiridos por um sistema de aquisição e tratamento de dados, composto de um osciloscópio digital e microcomputador. A propagação de erro no sistema conduz a uma incerteza de medição padronizada de 2,4% para as medições de pressão.

## 6. RESULTADOS

A figura 3 apresenta resultados numéricos de pressão e velocidade em função da posição ao longo do coletor de exaustão e do ângulo do girabrequim. Os resultados simulados de

pressão e velocidade nos coletores são altamente desejáveis não só pela compreensão do processo físico mas também representam um grande auxílio à instrumentação, pois fornecem uma indicação para a melhor localização dos sensores. A simulação foi realizada para uma rotação de 2000 rpm e comprimento do coletor de escape igual a 2,56m, empregando-se uma discretização com uma resolução espacial de um nó a cada 10 mm para os coletores de admissão e escape. Adotou-se o PMS como referência do ângulo zero do girabrequim, sendo os ângulos de abertura e fechamento das válvulas:

- Válvula de escape

Abertura: 142 graus do girabrequim

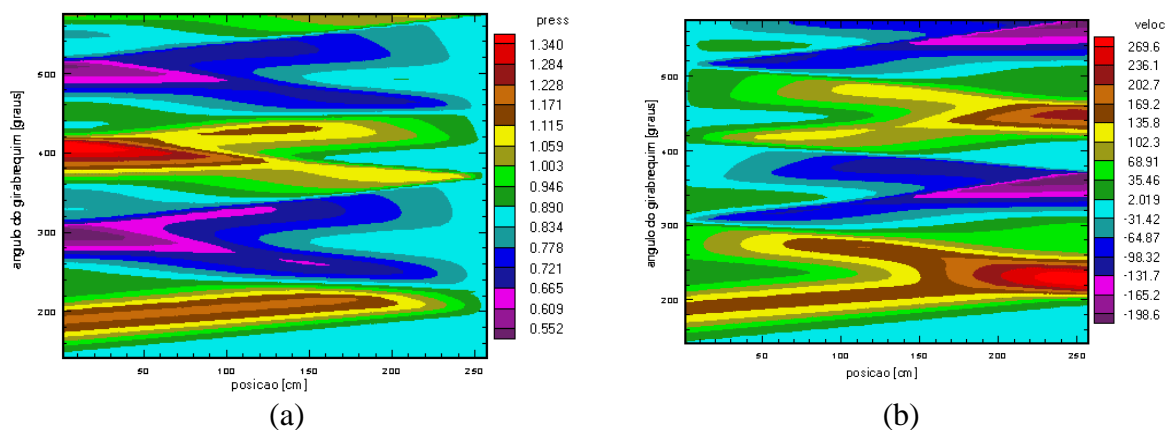
Fechamento: 366 graus do girabrequim

- Válvula de admissão

Abertura: 352 graus do girabrequim

Fechamento: 576 graus do girabrequim

Pode-se observar na figura 3 que o ângulo do girabrequim varia na faixa de 142 graus, abertura da válvula de descarga, até 576 graus, quando se dá o fechamento da válvula de admissão. Analisando-se a figura 3(a) pode-se observar que a abertura da válvula de escape propicia a propagação de uma onda de pressão ao longo do coletor de exaustão. Junto à válvula de escape, esta onda possui amplitude igual a 1,2 bar. À medida que a onda se propaga no coletor, sua amplitude decresce continuamente, o que é fisicamente consistente pois deve-se ter pressão ambiente na extremidade do duto que está aberta para a atmosfera. Esta onda se reflete na extremidade do coletor, cuja pressão é atmosférica, e se propaga em direção à válvula de escape - que ainda se encontra aberta - como uma onda de expansão. Esta onda se reflete novamente e retoma a direção do final do coletor, como uma onda de pressão, a partir de 400 graus do virabrequim. A partir deste momento, uma vez que não há mais fluxo de massa através da válvula, tem-se apenas ondas residuais se propagando no interior do coletor.



**Figura 3** - Diagramas espaço-temporais do escoamento no interior do coletor de exaustão, para 2000 rpm e a plena carga: (a) pressão [bar] e (b) velocidade [m/s]

Analisando-se a figura 3(b) pode-se observar que simultaneamente à diminuição da amplitude da onda de pressão que se propaga após a abertura da válvula de escape, tem-se um aumento da velocidade do escoamento dos gases no interior do coletor, chegando a um valor máximo de 270 m/s na extremidade do duto aberta para a atmosfera, num intervalo compreendido entre 220 e 240 graus do girabrequim.

Os resultados numéricos apresentados na figura 3 além de permitirem uma melhor compreensão dos fenômenos físicos associados à propagação de ondas de pressão nos coletores também indicaram pontos estratégicos para a localização dos sensores; optou-se pela instalação do sensor de pressão piezométrico a 1,13 m da válvula de escape nos ensaios com combustão no quarto cilindro e pela instalação simultânea dos sensores de pressão e da sonda

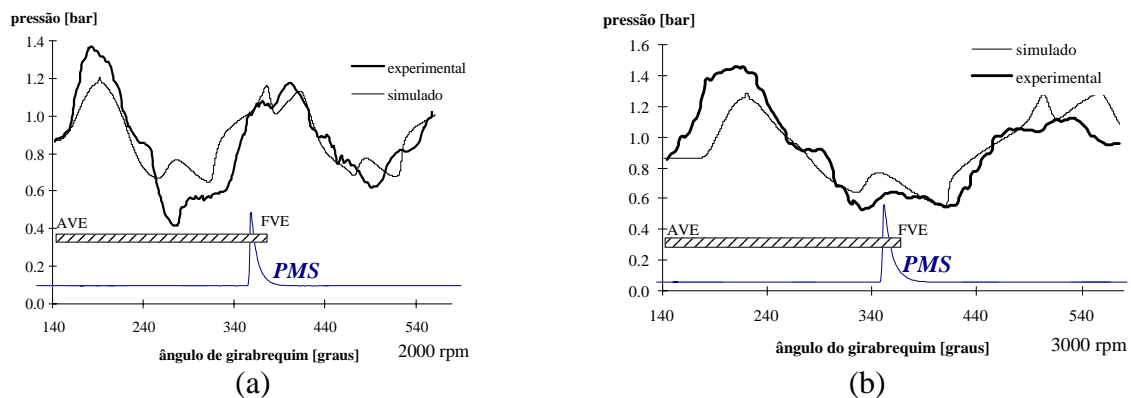
do anemômetro de fio quente a 1,58 m daquela válvula nos ensaios sem combustão no quarto cilindro.

As figuras 4(a) e (b) apresentam as curvas de pressão simuladas e experimentais em função do ângulo do girabrequim para rotações de 2000 e 3000, respectivamente. As condições de operação do motor são apresentadas na tabela 1.

**Tabela 1:** Condições de operação do motor

Rotação [rpm]	2000	3000
Razão de equivalência	0,797	0,846
Relação ar-combustível	10,829	11,492
Avanço [graus girabrequim]	46	50
Pressão de entrada no coletor de admissão [bar]	0,872	0,863
Temperatura de entrada no coletor de admissão [ oC ]	9	8

Com respeito à amplitude das ondas, de pressão e expansão, os valores simulados apresentaram-se abaixo dos obtidos experimentalmente. Mais especificamente, a diferença entre os resultados experimental e simulado para a amplitude da onda de pressão gerada logo após a abertura da válvula de escape é de cerca de 0,2 bar, para as duas rotações avaliadas. Isto representa uma diferença de 14% entre os resultados experimental e simulado. Segundo Benson (1986), a pequena flutuação observada na curva de pressão simulada, a aproximadamente 180 graus do virabrequim, pode ser atribuída a instabilidades nas condições de contorno do método numérico. Isto porque, numericamente, verifica-se neste ponto a transição do regime sônico para subsônico da onda de pressão.



**Figura 4** - Curvas de pressão por ângulo simuladas e experimentais relativas ao quarto cilindro: (a) 2000 rpm e (b) 3000 rpm.

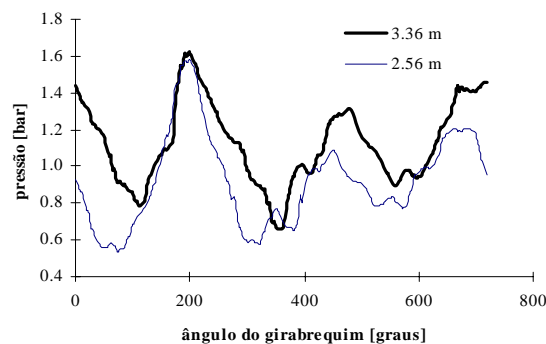
Para se avaliar a influência do comprimento do coletor de exaustão sobre o comportamento das ondas de pressão que se propagam em seu interior, foram realizados ensaios em bancada dinamométrica variando-se o comprimento do coletor de exaustão especial, mantendo-se a rotação do motor em 2500 rpm. Dois comprimentos foram avaliados: 2,56m e 3,36m. As condições de ensaio do motor são apresentadas na tabela 2.

Analisando-se a figura 5, pode-se observar que a onda de pressão que se propaga no coletor após a abertura da válvula de escape atinge o sensor de pressão em um ângulo de 200 graus do virabrequim, para os dois comprimentos. Comparando-se a onda de expansão que se forma após a reflexão da onda de pressão na extremidade do duto, percebe-se que há um atraso da ordem de 50 graus no caso do coletor de 3,36m. Uma vez que neste coletor as ondas devem percorrer uma distância adicional de 1,6m quando comparado ao coletor de 2,56m,

conclui-se que a velocidade de propagação da onda para a rotação de 2500 rpm é da ordem de 480 m/s, o que está de acordo com os resultados apresentados por Vianna et al. (1996), o qual obteve uma velocidade da ordem de 500 m/s para um motor semelhante ao empregado neste trabalho e para rotações de 2000 e 3000 rpm.

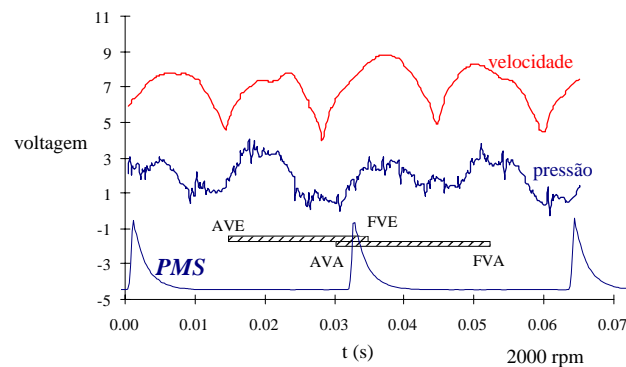
**Tabela 2:** Condições de operação do motor

Rotação [rpm]	2500	2500
Razão de equivalência	0,803	0,827
Relação ar-combustível	10,904	11,227
Avanço [graus girabrequim]	48	48
Pressão de entrada no coletor de admissão [bar]	0,863	0,859
Temperatura de entrada no coletor de admissão [ oC ]	7	9
Comprimento do coletor de exaustão[m]	2,56	4,16
Número de nós do coletor de exaustão	257	208



**Figura 5** - Sinais de pressão para dois diferentes comprimentos: 2,56m e 3,36m.

A figura 6 apresenta qualitativamente as curvas experimentais de pressão e velocidade obtidas a 2000 rpm, a 1,58m da válvula de escape e sem combustão no cilindro. Observa-se que após a abertura da válvula de escape - AVE - uma onda de pressão se propaga no coletor e traz consigo um escoamento induzido, sendo registada tanto pelo sensor de pressão quanto pelo anemômetro de fio quente através de uma elevação de voltagem. A partir daí o anemômetro de fio quente registra as demais ondas de pressão que se propagam no interior do coletor.



**Figura 6** - Sinais de pressão e velocidade para o motor a 2000 rpm

## 7. CONCLUSÕES

Este trabalho contribui para compreensão dos processos dinâmicos relacionados ao escoamento no interior de coletores de motores ciclo Otto e que estão relacionados com o desempenho global e com os níveis de emissões de motores de combustão interna.

Com respeito à simulação numérica, o programa Otto versão 3.0 mostrou-se capaz de descrever os processos dinâmico no interior do coletor, com uma boa aderência aos resultados experimentais. O modelo proposto, quando incorporado ao programa Otto, descreve as variações de pressão dinâmica e velocidade nos coletores, havendo uma boa concordância entre os resultados experimentais e os obtidos pela simulação numérica.

Pode-se concluir também que esta ferramenta numérica pode auxiliar não só a compreensão dos fenômenos físicos associados à fase aberta do ciclo mas também na estratégia dos ensaios e na definição das características da instrumentação a ser empregada na fase experimental da pesquisa. O transdutor de pressão e fio quente têm características de frequência e sensibilidade par o tipo de medição proposto, sendo que este último ainda tem problemas para correção da curva de calibração e avaliação das incertezas de medição, quando realiza medições a altas temperaturas.

## **8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

BENSON, R. S. , “The Thermodynamics and Gas Dynamics of Internal Combustion Engines”, Volume I, Clarendon Press, Oxford, 1986.

CAMPBELL, A.S., “Thermodynamic Analysis of Combustion Engines”, John Wiley & Sons, 1979.

OLIVEIRA, G.L. , “Simulação de Motores do Ciclo Otto com Modelo de Combustão Progressiva”, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 1994.

OLIVEIRA, G.L. , “Simulação de Motores de Ignição por Centelha - Análise Teórica e Experimental dos Processos Termodinâmicos”, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 1995.

VIANNA, J.N.S., OLIVEIRA, G.L., OLIVEIRA, L.H.H., “Modelagem dos Coletores de Admissão e Descarga pelo Método da Ação das Ondas e sua Influência sobre a Precisão dos Resultados do Programa Simulador de Motores de Combustão Interna”, Anais do VI ENCIT, pp.1051-1056, Florianópolis-SC, 1996.

OLIVEIRA, L.H.H., VIANNA, J.N.S. - Validação Experimental dos Níveis de Emissões Calculados por um Programa de Simulação de Motores de Combustão Interna - IX SIMEA - Simpósio de Engenharia Automotiva - S. Paulo, 1997.

BORTOLUZI, D., COSSALTER, V., DORIA, A. - The effect of Tunable Resonator on Volumetric Efficiency of a Engine – Transaction SAE 1998- Section 3, pp 2363-2372.

ONORATI, A., FERRARI, G. – Modeling of 1-D Unsteady Flows in I.C. Engine Pipe Systems: Numerical Methods and Transport Chemical Species - Transaction SAE 1998- Section 3, pp 1101-1114.

# ANÁLISE DAS FORMULAÇÕES VARIÁVEIS PRIMITIVAS E FUNÇÃO CORRENTE PARA ESCOAMENTO TURBULENTO VIA TRANSFORMADA INTEGRAL

## **Lima, J.A.**

Universidade Federal da Paraíba, Coord. Pós-Graduação Eng. Mecânica - CPGEM/CT/UFPB  
58.059-900 - João Pessoa - PB, Brasil  
jalima@funape.ufpb.br

## **Santos, C.A.C.**

Universidade Federal da Paraíba, Lab. Energia Solar - LES/DTM/CT/UFPB  
58.059-900 - João Pessoa – PB, Brasil

## **Pimentel, L.C.G.**

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Prog. Engenharia Mecânica - PEM/COPPE/UFRJ  
21.945-970 - Rio de Janeiro – RJ, Brasil

## **Resumo**

Em trabalhos recentes sobre o desenvolvimento hidrodinâmico do escoamento laminar em canais de placas planas paralelas, são discutidas as diferenças e vantagens da formulação em função corrente sobre a de variáveis primitivas, quando a Técnica da Transformada Integral é utilizada. Incentivados por estes resultados, a mesma comparação crítica entre as formulações é presentemente realizada para o caso do escoamento turbulento. Novamente, a GITT é aplicada como ferramenta de solução das equações parabólicas de camada limite e um modelo algébrico é utilizado para a modelagem do fenômeno da turbulência. O objetivo é identificar se as bases utilizadas nas expansões dos campos de velocidade e função corrente do problema laminar, preservarão as mesmas características de convergência para o caso do escoamento turbulento. Resultados numéricos para diferentes números de Reynolds são apresentados para verificação de sua influência sobre ambas as formulações.

*Palavras-Chave:* Escoamento Turbulento, Variáveis Primitivas, Função Corrente, GITT

## **1. INTRODUÇÃO**

Pela sua simplicidade, o canal de placas paralelas se constitui numa geometria ideal para teste e desenvolvimento de técnicas numéricas aplicadas à solução das equações que governam a dinâmica de escoamentos. Entre as técnicas que se apresentam para a solução destas equações, a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é um método do tipo espectral que se baseia em expansões de autofunções que, com a ajuda de *softwares* recentes de manipulação algébrica/simbólica, incorpora alguns aspectos de uma técnica puramente analítica. Devido à sua natureza híbrida, esta técnica apresenta alguns fatores

interessantes como o procedimento automático e direto do controle de erro global, bem como a necessidade de um pequeno acréscimo no esforço computacional global com o aumento do número de variáveis independentes do problema. Dadas estas características, a GITT torna-se particularmente apropriada para finalidades de covalidação de resultados, e será empregada para a análise das formulações que neste trabalho se apresentam.

A aplicação da GITT na solução das equações de camada limite laminar na formulação variáveis primitivas está bem estabelecida em várias contribuições (Cotta e Carvalho, 1991; Carvalho *et al.*, 1993; Machado e Cotta, 1995). Motivados pela possibilidade de um ganho de convergência, Figueira da Silva *et al.* (1996), propuseram a solução das equações de camada limite laminar na formulação alternativa de função corrente. Vislumbraram que a satisfação automática da conservação da massa e a eliminação do termo fonte representado pelo gradiente de pressão resultariam em redução do custo computacional e melhor representação dos potenciais estudados. Pimentel (1993), alicerçado no estudo apresentado para o caso laminar, estendeu os procedimentos anteriormente estabelecidos para o estudo do desenvolvimento hidrodinâmico turbulento empregando o modelo algébrico de turbulência de Cebeci e Smith (1974). Com a confirmação da violação da equação da continuidade, identificada pela variação da velocidade média ao longo do canal, Pimentel *et al.* (1997) implementaram a formulação em função corrente e verificaram uma melhora na representação e convergência dos potenciais do problema.

Buscando verificar a causa das discrepâncias entre estas formulações, na análise do desenvolvimento do escoamento turbulento em canais de placas paralelas, e, de certa forma, complementando o esforço anteriormente desenvolvido por Lima *et al.* (1999), o presente trabalho analisa com um maior grau de profundidade os fatores que levam à violação da conservação da massa, bem como apresenta uma discussão sobre qual das formulações apresenta menor custo computacional para uma dada precisão prescrita e resultados completamente convergidos. De forma a simplificar tal análise, um modelo algébrico de turbulência extremamente simples e anteriormente utilizado em outros trabalhos (Lima *et al.*, 1997 e Lima *et al.*, 1999) é empregado. As características pertinentes a cada formulação são demonstradas pela apresentação de resultados para diferentes números de Reynolds.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considera-se o desenvolvimento do escoamento turbulento incompressível, bidimensional, de um fluido newtoniano com propriedades físicas constantes em um canal de placas planas e paralelas. O fluido entra no canal com um perfil uniforme e paralelo de velocidade e considera-se que a transição laminar-turbulento ocorre logo na entrada do canal. Assume-se que o escoamento médio esteja em regime permanente e que o conceito de viscosidade turbulenta é válido. Empregando-se os seguintes grupos adimensionais:

$$x = \frac{x^*}{b} \frac{1}{Re}; \quad y = \frac{y^*}{b}; \quad U = \frac{U^*}{\bar{U}}; \quad V = \frac{V^*}{\bar{U}} Re; \quad Re = \frac{\bar{U}b}{\nu}; \quad v_t = \frac{v_t^*}{\nu}; \quad P = \frac{P^*}{\rho \bar{U}^2}$$

sendo  $b$  a metade da distância entre as placas,  $\bar{U}$  a velocidade média,  $\rho$  a massa específica do fluido,  $\nu$  a viscosidade molecular e  $v_t^*$  a viscosidade turbulenta; as equações médias de Reynolds - equação da conservação da massa, equação da quantidade de movimento na direção  $x$  e equação da quantidade de movimento na direção  $y$  - na formulação de camada limite, são escritas em variáveis primitivas e na forma adimensional como:



$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad 0 < y < 1, \quad x > 0 \quad (1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1+v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

submetidas às condições de entrada e de contorno, respectivamente:

$$x=0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (4)$$

$$U(0,y)=1$$

$$V(0,y)=0 \quad (5)$$

$$y=0, \quad x > 0 \quad (6-9)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$

$$V(x,0)=0$$

$$y=1, \quad x > 0$$

$$U(x,1)=0$$

$$V(x,1)=0$$

De forma a se reescrever o sistema de equações acima na formulação alternativa de função corrente,  $\Psi(x,y)$ , parte-se de sua definição:

$$U(x,y) = \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y}; \quad V(x,y) = -\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} \quad (10-11)$$

que, após apropriada manipulação matemática das Eqs. (2-3), chega-se à equação que governa o escoamento nesta nova formulação:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( (1+v_t) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \right], \quad 0 < y < 1, \quad x > 0 \quad (12)$$

submetida às condições de entrada e de contorno, respectivamente:

$$x=0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (13)$$

$$\Psi(0,y)=y$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (14)$$

$$y=0, \quad x > 0$$

$$\Psi(x,0)=0$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$$

$$y=1, \quad x > 0$$

$$\Psi(x,1)=1$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{y=1} = 0 \quad (15-18)$$

Para o fechamento dos sistemas de equações (1-9) e (12-18), faz-se necessário a prescrição ou modelamento da viscosidade turbulenta,  $\nu_t$ . O modelo aqui adotado é o mesmo utilizado por Lima *et al.* (1997) e Lima *et al.* (1999), o qual consiste num modelo algébrico que utiliza o conceito de viscosidade turbulenta efetiva, desenvolvido por Richman e Azad (1973). Representa um truncamento do modelo original de Van Driest em  $(1-y)=0.158$  que, apesar de extremamente simples, serve para os propósitos que neste trabalho se apresentam. Maiores considerações sobre este modelo podem ser obtidas em Richman e Azad (1973).

### 3. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

Seguindo idéias anteriormente estabelecidas no desenvolvimento da GITT propõe-se a separação dos potenciais a serem estudados, velocidade e função corrente, em duas parcelas: uma devido ao campo completamente desenvolvido e outra devido exclusivamente ao campo em desenvolvimento. Este procedimento reduz significativamente o esforço computacional, além de homogeneizar a condição de contorno, eq. (17); uma vantagem adicional para a aplicação da transformada integral. Uma vez que os sistemas resultantes para ambas as formulações são similares, e de forma a reescrevê-los em termos de apenas uma equação, são definidas as seguintes variáveis genéricas:

$$G(x,y) = F(x,y) + F_\infty(y) \quad (19)$$

onde:  $G(x,y)$  - potencial original de velocidade,  $U(x,y)$ , ou função corrente,  $\Psi(x,y)$   
 $F(x,y)$  - potencial filtrado de velocidade,  $U(x,y)$ , ou função corrente,  $\Phi(x,y)$   
 $F_\infty(y)$  - campo completamente desenvolvido,  $U_\infty(y)$ , ou  $\Psi_\infty(y)$

O primeiro passo para a aplicação da técnica da transformada integral consiste na escolha de problemas de autovalor que irão auxiliar no processo de solução. Para ambas as formulações, estes problemas estão bem estabelecidos e podem ser encontrados em Figueira da Silva *et al.* (1996). Os problemas auxiliares permitem a definição do seguinte par genérico de transformada/integral:

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{Y}_i(y) \bar{F}_i(x) \quad \text{Inversa} \quad (20)$$

$$\bar{F}_i(x) = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) F(x,y) dy \quad \text{Transformada} \quad (21)$$

onde os potenciais são definidos, de acordo com a formulação que se esteja analisando, como:

$\bar{F}_i(x)$  - potencial transformado de velocidade,  $\bar{U}_i(x)$ , ou de função corrente,  $\bar{\Phi}_i(x)$   
 $\tilde{Y}_i(y)$  - autofunções normalizadas associadas aos autovalores  $\mu_i$ 's.

Após o formalismo matemático de transformação integral, isto é, após a aplicação do operador  $\int_0^1 \tilde{Y}_i(y) dy$  e uso da fórmula de inversão, eq. (21), nas equações (1-9) e (12-18) obtém-se o seguinte sistema genérico de equações diferenciais ordinárias, com os seus respectivos coeficientes.

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \frac{d\bar{F}_k}{dx} = B_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (22)$$

onde, para a formulação em variáveis primitivas, os coeficiente são definidos como:

$$A_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} [A_{ijk} + B_{ijk}] \cdot \bar{U}_j + [C_{ik\infty} + D_{ik\infty}] - 2 \cdot \bar{f}_i(0) \cdot [\bar{U}_k + B_{k\infty}] \quad (23)$$

$$B_i = - [\mu_i^2 \bar{U}_i + B_{i\infty} + B_{iv\infty}] + \bar{f}_i(0) \cdot \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 \bar{f}_j(0) \bar{U}_j - \frac{dU_{\infty}}{dy} \Big|_{y=1} \right] \quad (24)$$

$$A_{ijk} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{Y}_j \tilde{Y}_k dy \quad B_{ijk} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{Y}_j \tilde{f}_k dy \quad C_{ik\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{Y}_k U_{\infty} dy \quad (25-27)$$

$$D_{ik\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{f}_k U'_{\infty} dy \quad B_{i\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i U_{\infty} dy \quad B_{iv\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i v_t \left( \frac{\partial U}{\partial y} + U'_{\infty} \right) dy \quad (28-30)$$

$$\bar{f}_i(y) = \int_y^1 \tilde{Y}_i dy \quad (31)$$

e, para a formulação em função corrente:

$$A_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} [A_{ijk} - B_{ijk}] \cdot \bar{\Phi}_j + [C_{ik\infty} - D_{ik\infty}] \quad B_i = [\mu_i^4 \bar{\Phi}_i + B_{i\infty} + B_{iv\infty}] \quad (32-33)$$

$$A_{ijk} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{Y}_j \tilde{Y}_k'' dy \quad B_{ijk} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{Y}_j''' \tilde{Y}_k dy \quad C_{ik\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{Y}_k'' \Psi'_{\infty} dy \quad (34-36)$$

$$D_{ik\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{Y}_k \Psi''_{\infty} dy \quad B_{i\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i'' \Psi''_{\infty} dy \quad B_{iv\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i'' v_t \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \Psi''_{\infty} \right) dy \quad (37-39)$$

nestes coeficientes, um apóstrofe, ('), denota diferenciação em relação à variável y.

A condição de entrada, x=0, para cada formulação deve igualmente ser transformada:

$$\bar{F}_i(0) = \bar{U}_i(0) = \int_0^1 \tilde{Y}_i [1 - U_{\infty}(y)] dy \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad \text{Variáveis Primitivas} \quad (40)$$

$$\bar{F}_i(0) = \bar{\Phi}_i(0) = \int_0^1 \tilde{Y}_i [y - \Psi_{\infty}(y)] dy \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad \text{Função Corrente} \quad (41)$$

O processo de transformação integral elimina, então, a coordenada transversal, y, e oferece um sistema diferencial ordinário para os potenciais transformados na coordenada x. O sistema infinito, Eq. (22), deve ser truncado numa ordem N, suficientemente grande, de forma a se obter resultados numéricos dentro de uma precisão prescrita, através de subrotinas para problemas de valor inicial, como a DIVPAG (IMSL, 1987). Uma vez que estas quantidades tenham sido avaliadas para qualquer posição axial, x, os potenciais originais são recuperados analiticamente pelo uso de suas definições e da fórmula de inversão.

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O procedimento computacional foi implementado em Fortran e executado em um microcomputador Pentium III de 500 MHz/192 Mb de memória. Um erro relativo de  $10^{-5}$  (cinco dígitos significativos) foi estabelecido na chamada da subrotina DIVPAG. Resultados para os principais potenciais são mostrados para diferentes números de Reynolds.

A tabela 1 ilustra a convergência da velocidade média, quando a formulação em variáveis primitivas é empregada, para dois números de Reynolds ao longo do canal. Verifica-se que a violação da velocidade média, comentada no trabalho de Figueira da Silva *et al.* (1996) e Pimentel (1993), é claramente observada apenas quando baixas ordens de truncamento nas expansões propostas são utilizadas, mais notadamente, em posições distantes da entrada do canal. Para  $Re=3,5 \cdot 10^4$  e  $N=200$ , a velocidade média já se encontra completamente convergida. Para um número de Reynolds mais elevado,  $Re=4,8 \cdot 10^4$ , a tabela 1 indica que o processo de convergência parece ser mais lento, requerendo um maior número de termos para a completa conservação.

Tabela 1 – Convergência da velocidade média,  $\bar{U}(x)$ , ao longo do canal, para diferentes números de Reynolds. (Variáveis Primitivas)

$x^*/D_h   N$	$Re=3,5 \cdot 10^4$				$Re=4,8 \cdot 10^4$			
	10	100	150	200	10	100	150	200
1	0,9961	1,001	1,000	<b>0,9999</b>	0,9966	1,001	1,001	<b>1,001</b>
5	1,006	1,004	1,002	<b>1,000</b>	1,006	1,005	1,003	<b>1,002</b>
10	1,011	1,005	1,003	<b>1,001</b>	1,011	1,007	1,004	<b>1,003</b>
20	1,015	1,006	1,003	<b>1,001</b>	1,016	1,008	1,005	<b>1,003</b>
30	1,019	1,007	1,003	<b>1,001</b>	1,020	1,009	1,006	<b>1,003</b>
40	1,023	1,007	1,003	<b>1,001</b>	1,024	1,010	1,006	<b>1,003</b>
60	1,032	1,008	1,003	<b>1,001</b>	1,033	1,011	1,006	<b>1,003</b>
100	1,063	1,009	1,004	<b>1,001</b>	1,066	1,014	1,007	<b>1,004</b>
400	3,049	1,037	1,007	<b>1,001</b>	3,019	1,071	1,022	<b>1,007</b>

A tabela 2 ilustra o comportamento da convergência da velocidade no centro do canal ao longo da posição axial, para  $Re=3,5 \cdot 10^4$ . Esta tabela mostra a equivalência entre as duas formulações quando a conservação da massa é alcançada.

Tabela 2 – Convergência da velocidade no centro do canal,  $U(x,0)$ , ao longo da posição axial, para ambas as formulações.  $Re=3,5 \cdot 10^4$

$X^*/D_h   N$	Variáveis Primitivas				Função Corrente			
	10	100	150	200	10	100	150	200
1	1,024	1,022	1,021	<b>1,021</b>	1,020	1,021	1,022	<b>1,022</b>
5	1,082	1,070	1,069	<b>1,068</b>	1,068	1,067	1,069	<b>1,070</b>
10	1,121	1,107	1,104	<b>1,103</b>	1,105	1,102	1,103	<b>1,104</b>
20	1,146	1,132	1,128	<b>1,126</b>	1,127	1,125	1,125	<b>1,126</b>
25	1,151	1,136	1,132	<b>1,129</b>	1,130	1,129	1,129	<b>1,129</b>
30	1,154	1,138	1,134	<b>1,131</b>	1,131	1,130	1,130	<b>1,130</b>
40	1,159	1,139	1,135	<b>1,132</b>	1,132	1,131	1,131	<b>1,131</b>
60	1,171	1,141	1,136	<b>1,133</b>	1,132	1,132	1,132	<b>1,132</b>
100	1,210	1,142	1,136	<b>1,133</b>	1,132	1,132	1,132	<b>1,132</b>

Observa-se que, tomando os resultados de função corrente como referência, em posições próximo à entrada do canal, os resultados fornecidos pela formulação em variáveis primitivas são praticamente idênticos aos fornecidos pela formulação em função corrente, mesmo para pequenos valores de N. Todavia, para posições distantes da entrada, os resultados para a formulação variáveis primitivas se deterioram devido à não conservação da massa. Um número maior de termos se faz necessário. Fazendo-se  $N=200$  as formulações são idênticas.

Confirmando as conclusões anteriores, a tabela 3 mostra a convergência da velocidade longitudinal na posição axial,  $x^*/D_h=10$ , em vários pontos da coordenada transversal, y. Nota-se que, em regiões afastadas da parede, as duas formulações fornecem resultados iguais. Entretanto, próximo à parede, onde prevalecem os maiores gradientes de velocidade, a convergência é mais lenta. Até mesmo a formulação em função corrente, que conserva a massa em toda posição ao longo do canal, tem sua convergência prejudicada nesta região.

Tabela 3 – Convergência da velocidade longitudinal,  $U(x,y)$ , para a posição axial  $x^*/D_h=10$  para ambas as formulações.  $Re=3,5 \cdot 10^4$

Y   N	Variáveis Primitivas				Função Corrente			
	10	100	150	200	10	100	150	200
0,0	1,121	1,107	1,104	<b>1,103</b>	1,105	1,102	1,103	<b>1,104</b>
0,1	1,119	1,105	1,102	<b>1,101</b>	1,102	1,100	1,101	<b>1,101</b>
0,2	1,112	1,099	1,096	<b>1,094</b>	1,097	1,094	1,094	<b>1,095</b>
0,3	1,100	1,088	1,085	<b>1,083</b>	1,085	1,083	1,083	<b>1,084</b>
0,4	1,082	1,072	1,069	<b>1,067</b>	1,069	1,066	1,066	<b>1,067</b>
0,5	1,057	1,049	1,046	<b>1,043</b>	1,045	1,043	1,043	<b>1,043</b>
0,6	1,022	1,018	1,015	<b>1,012</b>	1,013	1,012	1,011	<b>1,011</b>
0,7	0,9798	0,9777	0,9747	<b>0,9723</b>	0,9713	0,9719	0,9711	<b>0,9706</b>
0,8	0,9251	0,9277	0,9249	<b>0,9225</b>	0,9192	0,9221	0,9212	<b>0,9205</b>
0,9	0,8523	0,8582	0,8557	<b>0,8535</b>	0,8487	0,8530	0,8523	<b>0,8514</b>

A tabela 4 ilustra uma comparação, em termos de custo computacional, entre as duas formulações. Observa-se que, para a faixa analisada, o número de Reynolds apresenta pouca influência sobre o tempo de execução, para um mesmo número de termos e mesma formulação. Também, para um mesmo número de termos, a formulação em função corrente apresenta custo computacional de cerca de duas vezes o custo apresentado pela formulação variáveis primitivas. Em adição, para ambas as formulações, nota-se um crescimento excessivo do custo computacional com o aumento do número de termos. Isto indica a necessidade de recursos computacionais avançados para uma perfeita convergência de resultados, principalmente quando se utiliza a formulação em função corrente.

Tabela 4 – Tempo de CPU, em segundos, para diferentes números de Reynolds e para as diferentes formulações.

N	Variáveis Primitivas		Função Corrente	
	$Re=3,5 \cdot 10^4$	$Re=4,8 \cdot 10^4$	$Re=3,5 \cdot 10^4$	$Re=4,8 \cdot 10^4$
10	2,8	3,0	5,4	5,1
50	160	159	363	364
100	1.225	1.218	2.422	2.777
150	4.429	4.200	9.366	9.380
200	12.281	12.300	26.961	26.881

## 5. CONCLUSÕES

Quando as equações de camada limite são analisadas na formulação em variáveis primitivas pela GITT, resultados idênticos aos produzidos pela formulação em função corrente são obtidos. Tal conclusão é verdadeira desde que a conservação da massa seja totalmente satisfeita, isto é, um número de termos,  $N$ , suficientemente elevado seja utilizado nas expansões dos potenciais. Esta conclusão, reafirma os resultados de Figueira da Silva *et al.* (1996) e Pimentel *et al.* (1997), realçando, entretanto, que a violação da equação da continuidade se dá apenas devido às baixas ordens de truncamento anteriormente empregadas. Isto implica que a formulação em variáveis primitivas é tão representativa quanto a formulação em função corrente. Mais ainda, se os recursos computacionais são escassos, a formulação em variáveis primitivas apresenta menor custo, apesar de requerer um maior número de termos para a total convergência de resultados. A favor da formulação em função corrente está a excelente representatividade dos potenciais originais para baixas ordens de truncamento e pequena influência do número de Reynolds nas taxas de convergência, características que levam à sua preferência em relação à formulação em variáveis primitivas. Como uma nota final, lembra-se que o mesmo comportamento de convergência deve ser verificado com outros modelos algébricos que melhor descrevem o fenômeno da turbulência.

## REFERÊNCIAS

- Carvalho, T.M.B., Cotta, R.M. and Mikhailov, M.D., 1993, "Flow Development in the Entrance Region of Ducts", *Comm. Num. Meth. Eng.*, Vol.9, pp. 503,509.
- Cebeci, T. and Smith, A.M.D., 1974, "Analysis of Turbulent Boundary Layers", Academic Press, New York.
- Cotta, R.M. and Carvalho, T.M.B., 1991, "Hybrid Analysis of Boundary Layer Equations for Internal Flow Problems", *Proceedings of the 7<sup>th</sup> Int. Conf. on Num. Meth. in Laminar and Turbulent Flow, Part 1*, pp.106-115, July, Stanford, CA.
- Figueira da Silva, E., Perez-Guerrero, J.S. and Cotta, R.M., 1996, "A Comparison of Integral Transform Strategies for Solving Boundary Layer Equations", *Proceedings of the 6<sup>th</sup> National Thermal Sciences Meeting, ENCIT-96*, Novembro, Florianópolis, SC, Brazil.
- IMSL Library, 1987, *Math/Lib*, Houston, Texas.
- Lima, J.A., Perez-Guerrero, S.S. and Cotta, R.M., 1997, "Hybrid Solution of the Averaged Navier-Stokes Equations for Turbulent Flow", *Computational Mechanics*, Vol. 19, Iss. 4, pp. 297-307.
- Lima, J.A., Santos, C.A.C. and Pimentel, L.C.G., 1999, "Solution of the Reynolds-Averaged Equations for Turbulent Flow via Integral Transform and Algebraic Turbulence Model", *Proceedings of the 15<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mechanical Engineering, 15<sup>th</sup> Symposium, COBEM-99*, November, Águas de Lindóia, SP, Brazil.
- Machado, H.A. and Cotta, R.M., 1995, "Integral Transform Method for Boundary Layer Equations in Simultaneous Heat and Fluid Flow Problems", *Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Flow*, Vol.5, pp. 225-237.
- Pimentel, L.C.G., 1993, "Simulação do Escoamento Turbulento em Dutos via Modelo Algébrico de Turbulência e Transformação Integral", PEM/COPPE/UFRJ, M.Sc., Tese, Rio de Janeiro, Brasil.
- Pimentel, L.C.G., Cotta, R.M. and Kakaç, S., 1997, "Integral Transform Solution of the Turbulent Boundary Layer Equations in Streamfunction-only Formulation", *Proc. Of the ICHMT Int. Symp. on Computational Heat Transfer*, pp. 224-231, May, Turquia.
- Richman, J.W. and Azad, R.S., 1973, "Developing Turbulent Flow in Smooth Pipes", *Applied Science Research*, Vol. 28, pp. 419-441.

# **ESTUDO EXPERIMENTAL DA HIDRODINÂMICA DO ESCOAMENTO BIFÁSICO PELA ANÁLISE ELETRÔNICA**

## **Francisco Antônio Belo**

Universidade Federal da Paraíba, Centro de Tecnologia, Departamento de Tecnologia Mecânica, João Pessoa, PB, Brasil. E-Mail: belo@les.ufpb.br

## **Luiz Felipe Mendes de Moura**

## **Azamor Cirne de Azevedo**

Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia mecânica, Departamento de Engenharia Térmica e de Fluidos. E-Mails: felipe@fem.unicamp.br; azamor@fem.unicamp.br

## **RESUMO**

Este trabalho apresenta um estudo experimental sobre a hidrodinâmica do escoamento bifásico (ar-água) vertical ascendente co-corrente através de análise eletrônica. Analisou-se o comportamento do escoamento usando-se um sensor capacitivo com dois eletrodos colocados na superfície externa (não invasiva e não intrusivamente) de um tubo de acrílico de 16 mm de diâmetro interno, por onde escoava a mistura. O transdutor eletrônico usado para a medida emprega uma técnica de medição imune à capacitância parasita. Através da análise eletrônica, obteve-se uma equação característica do transdutor, relacionando a capacitância do sensor aos sinais de entrada e saída do transdutor. A capacitância foi também relacionada à fração de vazio do fluxo, obtida através de um sistema de fechamento simultâneo de válvulas. O padrão do escoamento estudado foi identificado, através dos mapas convencionais, como sendo bolhas dispersas. Os valores experimentais da capacitância foram comparados com os valores teóricos, baseados em uma permissividade elétrica relativa da mistura obtida através das equações de Maxwell e Bruggeman.

Palavras-chave: Escoamento bifásico, escoamento multifásico, análise dinâmica, análise eletrônica.

**Palavras-chaves:** Escoamento bifásico, escoamento multifásico, análise dinâmica, análise eletrônica

## **1. INTRODUÇÃO**

O estudo dos escoamentos multifásicos têm aplicações importantes nas usinas geradoras de potências elétrica, na mineralogia, em processos químicos, e na produção, transporte e processamento de petróleo. Essa área de pesquisa está ainda em fase de desenvolvimento, seja na procura de conhecimento dos fenômenos básicos, na construção de instrumentos precisos de medição, nas representações matemáticas ou nos métodos de solução. Na maioria dos sistemas práticos, os escoamentos multifásicos ocorrem com transferência de calor e massa, além de serem turbulentos ou transientes. As transferências de quantidade de movimento,

calor e massa, entre os componentes, ocorrem em interfaces móveis e deformáveis, o que dificulta muito a análise desses escoamentos.

Um dos parâmetros mais importantes de um escoamento bifásico gás-líquido é a fração de vazio, definida como sendo a razão entre o volume do gás e o volume total da mistura em um dado comprimento do duto (Kendoush and Sarkis, 1995). A fração de vazio é importante na determinação da densidade da mistura, da variação da pressão, do padrão de escoamento, da taxa de transferência de calor, da velocidade média e dos fluxos volumétricos.

Várias técnicas experimentais tem sido utilizadas para medir a fração de vazio, como por exemplo o método de atenuação de radiação nuclear (Kendoush, 1992). Outro exemplo são os sensores elétricos que apresentam uma resposta mais rápida (Huang et alli., 1992). A resposta desses sensores é baseada na medida da impedância (capacitância ou condutância) elétrica, sendo que os sensores podem estar em contato direto com o fluido (invasivo) ou podem estar isolados (não invasivos). Como geralmente a variação da permissividade elétrica com a temperatura pode ser considerada desprezível, quando comparada à condutividade elétrica, os sensores de capacitância oferecem uma maior estabilidade ao sistema de medidas. Além disso, a permissividade não é afetada por mudanças na concentração iônica (Geraets and Borst, 1988), o que torna o sensor capacitivo mais adequado que o sensor condutivo para a análise de escoamentos multifásicos.

O primeiro equacionamento das propriedades efetivas de um sistema bifásico foi apresentado por Maxwell (1873). Esse modelo foi baseado na hipótese do efeito do campo de reação da fase dispersa não modificar o campo elétrico da fase contínua. As demais equações são derivadas da equação de Maxwell, ponderando o efeito do aumento participação da fase dispersa em relação à fase contínua, conforme Bruggeman (1935), Meredith and Tobias (1960) e Looyenga (1965).

Um equacionamento completo do campo eletrostático aparece no estudo da espessura de filme de líquido em escoamento bifásico com sensores condutivos invasivos (o sensor se caracteriza pelo contato direto do eletrodo com o escoamento), mas não intrusivos, realizado por Coney (1973). A partir da equivalência das relações da condutância e capacitância elétrica entre eletrodos em um campo eletrostático, para uma mesma geometria, Andreussi et al. (1988) obtém uma extensão do modelo de Coney (1973) para sensores de capacitância, e compara os resultados obtidos com os modelos estruturais de Maxwell e Bruggeman. Albouelwafa and Kendal (1979) utilizam as fórmulas de guias de onda em microondas para estimar o valor da capacitância devido ao escoamento bifásico. Geraets et al. (1988) utilizam um sensor helicoidal montado sobre a superfície de um duto para obter medidas da fração de vazio em um escoamento bifásico.

Uma característica de qualquer das técnicas apresentadas é a não homogeneidade do campo elétrico em um duto cilíndrico, o que dificulta o seu equacionamento em virtude da diferença da forma e da disposição das fases. Uma proposta de um sensor com uma geometria de eletrodos imersos no duto que compensa este efeito foi apresentada por Auracher and Daubert (1985). Entretanto, o sensor proposto é intrusivo, o que pode alterar ou perturbar o escoamento.

Na maior parte das aplicações para escoamentos multifásicos, a parte real da impedância elétrica (complexa) de um sensor corresponde à valores de capacitância muito baixos (entre 0,01 pF e 20 pF), de maneira que a capacitância de acoplamento pode ser o principal problema desses transdutores. Dependendo da disposição do sensor e do transdutor eletrônico, em muitas aplicações, o valor da capacitância de acoplamento pode flutuar e pode ser maior que a capacitância desconhecida. Transdutores imunes à capacitância de acoplamento podem ser construídos utilizando-se uma configuração intrinsecamente imune à capacitância de acoplamento, com ambos os eletrodos flutuando, ou utilizando-se uma guarda ativa, quando um



dos eletrodos está aterrado. Os parâmetros térmicos e a frequência eletrônica são importantes para a rapidez, a sensibilidade e a qualidade da resposta, (Belo and Leite, 1992).

Desenvolve-se neste trabalho uma análise hidrodinâmica de escoamentos bifásicos do tipo bolhas dispersas, através de uma bancada experimental, onde o transdutor eletrônico é inserido na seção de testes.

## 2. MÉTODO EXPERIMENTAL

A bancada de teste construída para a análise hidrodinâmica de escoamentos bifásicos ar-água consistia na mistura de um fluxo de ar fornecido por um compressor e de um fluxo de água fornecido por uma bomba (reservatório de armazenamento subterrâneo), através de um injetor, formando o circuito da figura 1 (Azevedo Filho, 1997).

Nas extremidades da seção de acrílico (tubo de 1 m de comprimento e diâmetro interno de 16 mm) foram instaladas duas válvulas de fechamento rápido. Após o fechamento simultâneo dessas válvulas obtinha-se a fração de vazio, a partir da altura da coluna de água retida. A montante da seção de acrílico tinha-se uma tubulação vertical (um metro de comprimento e 16 mm de diâmetro interno) cuja finalidade era proporcionar o perfeito desenvolvimento do perfil de velocidade. À jusante da seção de acrílico, contendo as válvulas de fechamento simultâneo, encontrava-se o sensor capacitivo, formando junto com o transdutor eletrônico um analisador eletrônico da fração de vazio do escoamento bifásico.

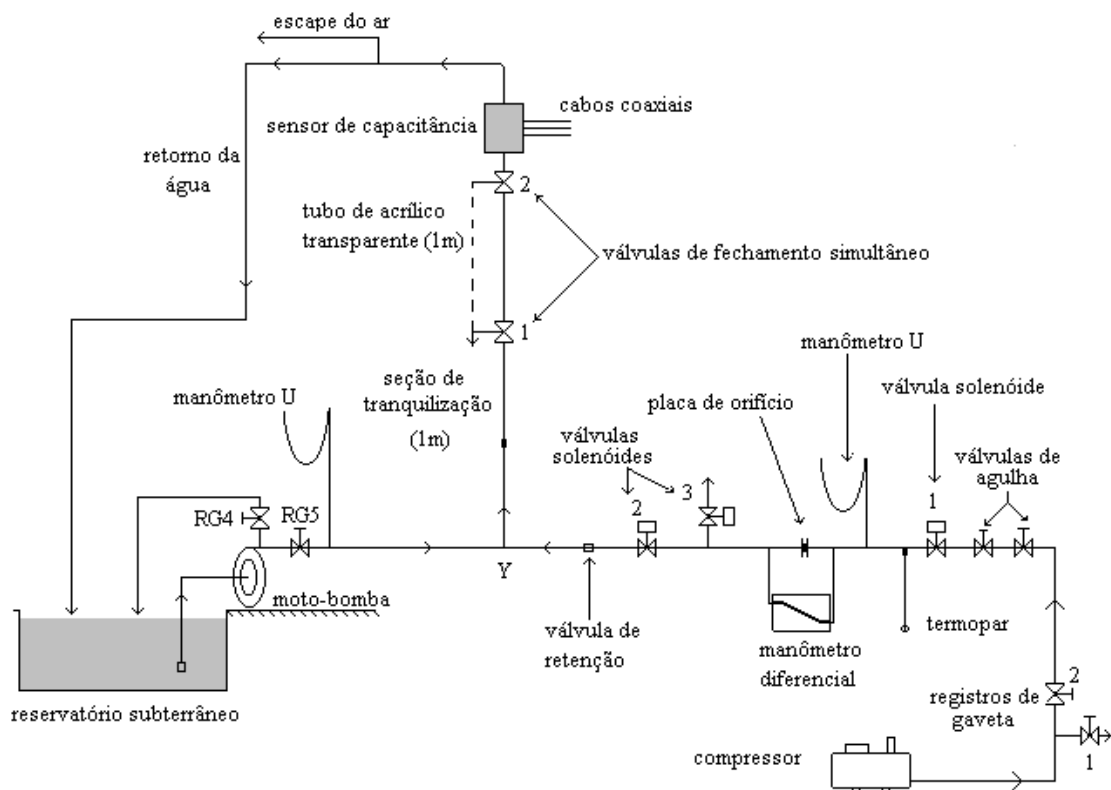


Figura 1 - Bancada experimental para análise de escoamentos bifásicos.

O analisador eletrônico da fração de vazio consistia de um sensor capacitivo, com os eletrodos formados por placas metálicas coladas externamente ao tubo de acrílico. Um sinal senoidal era aplicado no eletrodo emissor e o transdutor eletrônico estava ligado ao eletrodo

receptor de sinal. Os conversores de corrente alternada para corrente contínua CA/CC eram colocados junto ao eletrodo emissor e logo após o transdutor eletrônico. Com esta arquitetura e com um circuito eletrônico de alta banda passante, obteve-se uma resposta do sensor com boa fidelidade até frequências relativamente altas, limitadas praticamente pela resposta em frequência do circuito eletrônico (Belo, 1995). Um técnica de guarda longitudinal foi usada de maneira a direcionar o campo elétrico atuante e minimizar os efeitos de borda dos eletrodos (Belo, 1995).

As medidas foram realizadas através de uma placa de aquisição de sinais analógicos, baseado no conversor AD 674 da *Analog Device*, acoplada a um microcomputador. Através dessa placa e de um programa de aquisição de dados, os sinais de entrada e saída do transdutor, transmitidos através de cabos coaxiais, eram lidos e armazenados em disco.

### 3. MODELO TEÓRICO

O valor teórico da capacitância entre dois eletrodos pode ser determinado para diferentes situações envolvendo escoamentos bifásicos. Vamos considerar uma disposição genérica dos eletrodos em torno de um duto isolante e uma disposição dos fluidos dentro do duto correspondendo à um escoamento anular, conforme apresentado na figura 2.

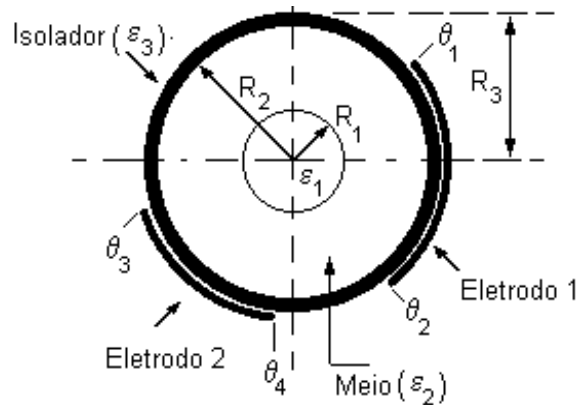


Figura 2. Escoamento anular no sensor

Para um sensor com dois eletrodos iguais formando ângulos quaisquer, como na figura 2, o valor da capacitância, conforme Belo (1995) é dado por:

$$\text{Cap} = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{senn}\theta_1}{nL} [ABF_3^n + CDF_2^n - ACF_1^n - BD] \text{senn}\theta_2 +$$

$$- \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{senn}\theta_1}{nL} [ABF_3^n + CDF_2^n - ACF_1^n - BD] \text{senn}\theta_3 \quad (1)$$

$$A = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad B = \varepsilon_3 + \varepsilon_2, \quad C = \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \quad D = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

$$F_1 = (R_2 / R_1)^2, \quad F_2 = (R_3 / R_2)^2, \quad F_3 = (R_3 / R_1)^2$$

onde:  $\varepsilon_0$  = permissividade elétrica absoluta do Vácuo

$\varepsilon_1$  = permissividade elétrica relativa do fluido 1

$\varepsilon_2$  = permissividade elétrica relativa do fluido 2

$\varepsilon_3$  = permissividade elétrica do isolador

Para um escoamento tipo bolhas dispersas pode-se utilizar a equação (1) considerando-se apenas uma fase, sendo a permissividade elétrica da mistura dada pela equação Maxwell:

$$\frac{\epsilon_{\alpha} - \epsilon_{ag}}{\epsilon_{\alpha} + 2 \cdot \epsilon_{ag}} = \alpha \cdot \frac{\epsilon_{ar} - \epsilon_{ag}}{\epsilon_{ar} + 2 \cdot \epsilon_{ag}} \quad (2)$$

ou pela equação de Bruggeman:

$$\left( \frac{\epsilon_{ar} - \epsilon_{\alpha}}{\epsilon_{ar} - \epsilon_{ag}} \right) \cdot \left( \frac{\epsilon_{ag}}{\epsilon_{\alpha}} \right)^{1/3} = 1 - \alpha, \quad (3)$$

onde:  $\epsilon_{\alpha}$  = permissividade da mistura

$\epsilon_{ag}$  = permissividade da água

$\epsilon_{ar}$  = permissividade do ar

$\alpha$  = fração de vazio

#### 4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

O transdutor eletrônico foi calibrado de forma a determinar a relação (constante de calibração) entre a capacitância do sensor e os sinais de potencial elétrico medidos no eletrodo emissor e na saída do transdutor:

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta V_e} = K \cdot C_x \quad (4)$$

onde:  $V_e$  = potencial elétrico no eletrodo emissor (sinal de entrada)

$V_s$  = potencial elétrico na saída do transdutor (sinal de saída)

$C_x$  = capacitância do sensor

$K$  = constante de calibração

A capacitância  $C_x$  pode ser estimada através da equação (1), que relaciona a capacitância com os parâmetros geométricos, propriedades do sensor e do escoamento bifásico, conforme a Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros geométricos e propriedades do sensor.

Comprimento dos eletrodos de guarda	Comprimento dos eletrodos de medida	Diâmetro interno	Diâmetro externo
100 mm	100 mm	16 mm	21 mm
Ângulo entre os eletrodos (grau)	Permissividade relativa do acrílico	Permissividade de relativa do ar	Permissividade de da relativa da água
2,2	3,1	1	80

As calibrações foram realizadas com o sensor instalado na seção deacrílico. Foram utilizados sinais de entrada com frequências entre 1 e 8 MHz, obtidos através de um gerador de sinais de frequência e amplitude variáveis. A figura 3 mostra a resposta do sensor (sinal de saída em função do sinal de entrada), para uma frequência de 2 MHz, quando estava escoando somente ar ou água pela tubulação.

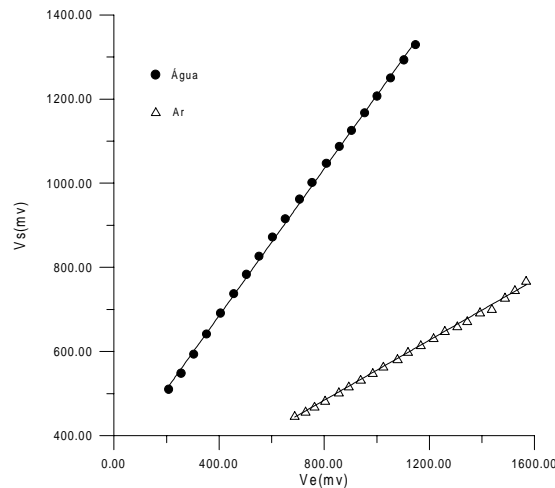


Figura 3 - Resposta do sensor para ar e água separadamente (2 MHz).

O circuito experimental permitiu o estudo de escoamentos do tipo bolhas dispersas, com uma fração de vazio variando de 21,1 a 53,4 %. O padrão de escoamento foi determinado a partir de um mapa de padrões de escoamento vertical, conforme Taitel and Dukler (1980). As figuras 4 (a) e (b) mostram a resposta do sensor para dois ensaios, correspondendo aos dois valores extremos de fração de vazio do escoamento.

A partir dos resultados da resposta do sensor (razão  $\Delta V_s / \Delta V_e$ ), os valores de capacitância do sensor foram relacionados com a fração de vazio medida através da técnica de fechamento simultâneo das válvulas.

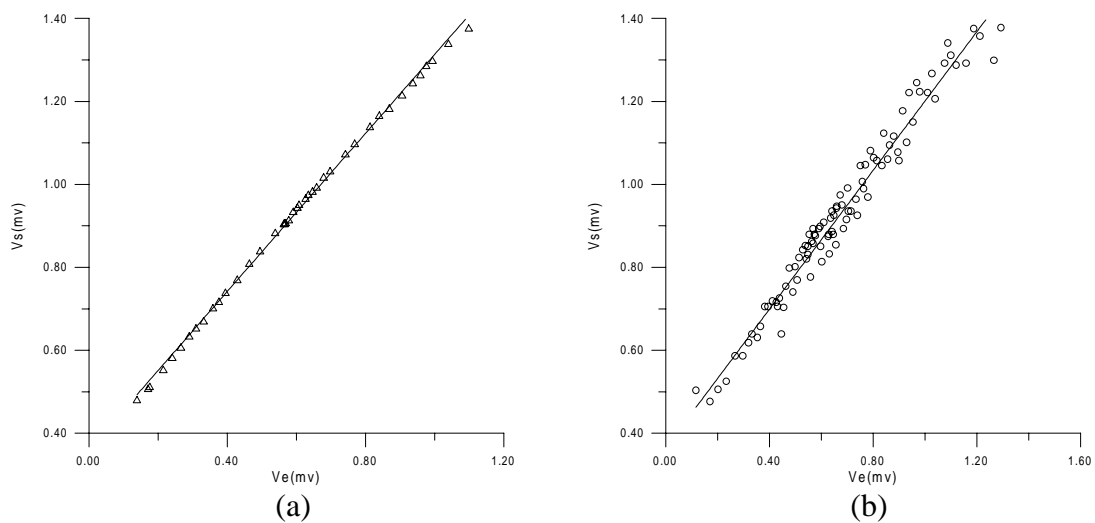


Figura 4 – Resposta do sensor. Fração de vazio (a) 21.1 %. (b) 53.4 %.

A figura 5 mostra os valores das capacitâncias em função da fração de vazio, obtidos de um total de 120 testes experimentais. Esse resultados são comparados com os modelos de Maxwell e Bruggeman, equações (2) e (3), respectivamente.

A diferença entre as capacitâncias medidas e os valores obtidos com os modelos de Maxwell e Bruggeman foi sempre menor que 5.0%. Observou-se um aumento sistemático dessa diferença com a diminuição da fração de vazio.

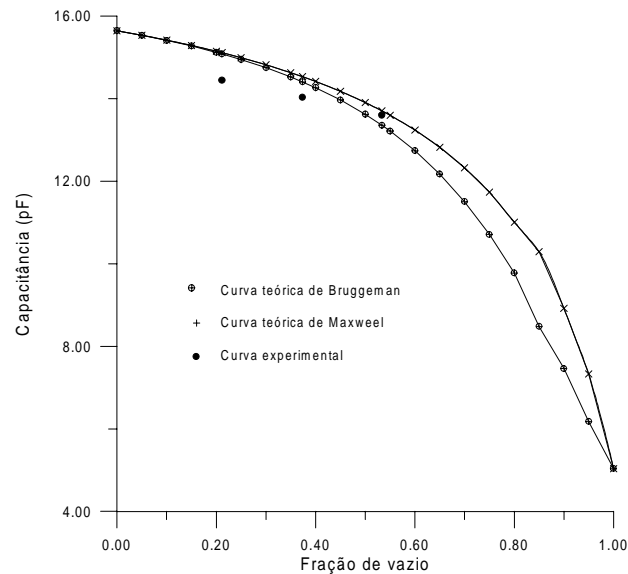


Figura 5 - Capacitância teórica e medida em função da fração de vazio

Foi utilizado na construção do transdutor o amplificador operacional OPA 678, fabricado pela *BURRN-BROWN*. Com uma melhoria na qualidade do circuito eletrônico desenvolvido para este trabalho e utilizando como o amplificador operacional o OPA 621, já foram obtidos melhores resultados na resposta do transdutor.

## CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta uma aplicação da análise eletrônica ao estudo da hidrodinâmica dos escoamentos bifásicos gás-líquido em tubos verticais. A fração de vazio do escoamento é obtida através de medidas da capacitância elétrica de um sensor formado por dois eletrodos localizados na superfície externa de um tubo isolante.

Os valores experimentais da capacitância do sensor, em função da fração de vazio, foram comparados com os valores teóricos, obtidos através das equações de Maxwell e Bruggman. As diferenças observadas, inferiores a 5%, podem ser consideradas satisfatórias para esse tipo de escoamento. Outro fato importante é que foram apresentados os valores absolutos da capacitância, enquanto que na maioria dos trabalhos faz-se uma normalização, que pode ocultar erros de acoplagens e indutâncias induzidas. Apesar de terem sido realizados muitas medidas de capacitância, o circuito experimental permitiu o estudo de apenas um padrão de escoamento em uma faixa restrita de fração de vazio.

## REFERÊNCIAS

- Albouelwafa, M. S. A. and Kendal, E. J. M., Analysis and design of helical capacitance sensors for volume fraction determination, *Rev. Sci. Instrum.* 50(7), Jul. 1979.
- Andreussi, P., Di Donfrancesco, A. and Messia, An Impedance for the Measurement of Liquid Hold-Up in Two-Phase Flow, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 14, No. 6, pp. 777-785, 1988.
- Auracher, H., Daubert, J., A capacitance Method for Void Fraction Measurements in Two-Phase Flow, 2nd International Conference on Multi-phase flow, London, England, June 1985.
- Azevedo Filho, A. C. Estudo experimental da hidrodinâmica de escoamento bifásico através da análise eletrônica, UFPB, 1997, Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica.
- Belo, F. A. and Leite, J. T. F., Electronic Analyser of Quality, SAE Brasil, São Paulo, 1992.
- Belo, F. A., Aplicação da análise eletrônica ao estudo do escoamento multifásico, Campinas, UNICAMP, 1995. Tese de doutoramento em Engenharia Mecânica.
- Bruggeman, D. A. G., "Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen, *Ann. Phys. Leipzig*, 24, p. 636, 1935.
- Coney, M. W. E., The theory and application of conductance probes for the measurement of liquid film thickness' in two-phase flow, *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, vol. 6, 1973.
- Geraets, J. J. M. and Borst, J. C., A Capacitance Sensor for Two-Phase Void Fraction Measurement and Flow Pattern Identification, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 14, No. 3, pp. 305-320, 1988.
- Huang, S. M., Xie, C. G., Salked, J. A., Plaskowski, A. B., Thorn, R., Williams, R. A., Hunt, A. and Beck, M. S., Process Tomography for identification, Design and Measurement in Industrial Systems, *Powder Technology*, 69 (1992) 85 -92, 1992.
- Kendoush, A. A. and Sarkis, Z., A. Improving the accuracy of the capacitance method for void fraction measurement, *Experimental Thermal and Fluid Science*, Elsevier Science Inc., New York, 1995.
- Kendoush, A. A. A comparative study of the various nuclear radiations used for void fraction measurements, *Nuc. Eng. Des.* 137, 247-257, 1992.
- Looyenga, H., *Physical*, 31, 401, 1965.
- Maxwell, J. C., *Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon, Oxford, 1873.
- Meredith, R. E. and Tobias, C. W., "Resistance to Potential Flow Through a Cubic Array of Spheres", *J. App. Phys.*, 34, 7, 1270, July 1960.
- Taitel, Y., Bornea, D., Dukler, A. E. Modelling flow pattern transitions for steady upward gas-liquid flow in vertical tubes. *AIChE Journal*, v.26, n.3, 1980.

# CARACTERIZAÇÃO REOLÓGICA DE MISTURAS DE MEL COM EXTRATO DE PRÓPOLIS

**Cleber Couto da Costa**

**Roberto Guimarães Pereira**

Universidade Federal Fluminense, Departamento de Engenharia Mecânica  
Rua Passos da Pátria, nº 156, CEP:24210-240, São Domingos, Niterói, RJ, Brasil  
Telefone: (0xx21) 620-7070 – Ramal: 303. E-mail: misticus@yahoo.com

## Resumo

O presente trabalho refere-se a uma investigação do comportamento reológico do mel puro e de misturas de mel com o extrato de própolis em diferentes porcentagens. Através do estudo reológico é possível observar algumas diferenças entre o mel puro e as misturas de mel com própolis. Nesse trabalho são levantadas curvas reológicas para ambas as amostras, onde além de se constatar a variação do comportamento reológico do mel puro em relação ao mel com própolis, observa-se, também, uma mudança da característica reológica das misturas de mel com própolis em diferentes porcentagens. Foram realizados testes reológicos com as amostras, analisando-se: (i) Cisalhamento (*steady shear*), obtendo-se as curvas de escoamento e viscosidade. (ii) Oscilação (*sinusoidal shear*), resultando na curva de varredura de frequência e varredura de tensão.

**Palavras-chave:** Reologia, Alimentos, Mel, Própolis.

## 1. INTRODUÇÃO

O mel é um produto aromático e viscoso apreciado desde o tempo da Grécia antiga e produzido pelas abelhas a partir do néctar de diferentes espécies de flores conforme citado por Dustmann (1993). As características de textura, aparência, sabor e doçura do mel, bem como suas propriedades medicinais, tem atraído centenas de consumidores segundo foi mencionado por Dustmann (1993) e Zumlai & Lulat (1989). Esse alimento produzido pelas abelhas é amplamente comercializados em sua forma pura e também em misturas com inúmeras plantas ou derivados produzidos pelas próprias abelhas. No presente trabalho o composto mel-própolis será nosso objeto de estudo. Esse composto possui propriedades de prevenção e combate a gripes e resfriados e ainda limita os efeitos maléficos do fumo. A própolis em solução alcoólica, funciona como um antibiótico natural, combate infecções, age como cicatrizante e anti-inflamatório. É comum encontrarmos comercialmente misturas de até 5% de própolis.

No presente trabalho foram realizados testes com proporções de 5%, 10%, 15% e 20% de extrato de própolis adicionadas ao mel puro (florada silvestre), além de ter-se realizado testes também com o mel puro e o extrato de própolis. O objetivo deste trabalho é analisar as possíveis variações no comportamento reológico da mistura. Dois testes foram realizados: (i)

Cisalhamento (*steady shear*), obtendo-se as curvas de escoamento e viscosidade e (ii) Oscilação (*sinusoidal shear*), resultando na curva de varredura de frequência e varredura de tensão.

## 2. EQUIPAMENTO

Todas as medidas foram realizadas em um reômetro RS50 conectado a um banho termostático K20-DC5 ambos da HAAKE. Foram utilizados dois tipos de geometria de sensor :cone-placa e o cilíndrico concêntrico. O primeiro sensor foi utilizado para realizar medidas com o mel puro e algumas misturas de diferentes proporções do extrato de própolis. Devido à baixa viscosidade do extrato de própolis, tornou-se necessário o uso do segundo sensor anteriormente mencionado. Nas tabelas 1 e 2 estão listadas as especificações geométricas para ambos os sensores.

**Tabela 1.** Especificações para o sensor de geometria cone-placa.

Diâmetro do Cone	59,996 mm
Diâmetro da Placa	100 mm
Ângulo do Cone	1,993 Deg
Truncamento	0,104 mm

**Tabela 2.** Especificações para o sensor de geometria cilíndrico concêntrico (DG 41).

Diâmetro Interno 1	35,500 mm
Diâmetro Interno 2	36,000 mm
Diâmetro Externo 1	42,800 mm
Diâmetro Externo 2	43,400 mm
Volume da Amostra	6,3 cm <sup>3</sup>

## 3. PREPARO E CONDIÇÕES DA AMOSTRA

As amostras foram gentilmente cedidas pela Cooperativa Apícola do Rio de Janeiro (COAPI-Rio). O mel utilizado nos testes é de florada silvestre. O extrato de própolis utilizado para os testes possui a seguinte composição: uma quantidade de 1,5Kg de própolis bruta é diluída em 1,8 litros de água destilada e 4,8 litros de álcool etílico.

O extrato de própolis foi cuidadosamente adicionado ao mel, de modo a obter-se proporções de 5%, 10%, 15% e 20% de extrato de própolis misturados ao mel puro. As misturas foram realizadas volumetricamente com o auxílio de uma pipeta com precisão de 0,1ml. Por exemplo, para uma quantidade de 50ml de mistura com própolis à 5% temos 47,5ml de mel e 2,5ml de própolis.

Um outro parâmetro cuidadosamente medido foi a umidade das amostras. Utilizando-se de um refratômetro de bancada M/PZD , ref. RL3 com escala de 0 a 85%, obteve-se o índice de refração do material e a partir de uma tabela determinou-se à umidade para cada uma das misturas. As umidades encontradas foram as seguintes: 19,1% de umidade para a amostra de mel puro (florada silvestre), 20,6% de umidade para a amostra com 5% do extrato de própolis; 21,7% de umidade para a amostra com 10% do extrato de própolis, 23,6% de umidade para a amostra com 15% do extrato de própolis e acima de 25,0% para a amostra com 20% do extrato de própolis.



O volume da amostra utilizado no testes com o sensor cone-placa e com o cilindro concêntrico são respectivamente de 2,0 ml e 6,3 ml. As amostras foram medidas com uma seringa com uma precisão de 0,1ml. O primeiro passo a ser realizado, é obter o ponto zero do sensor. Uma vez obtido esse ponto, a amostra é cuidadosamente colocada sobre a placa (no caso do sensor cone-placa) ou no interior do copo (no caso do sensor cilíndrico concêntrico). No caso da placa deve-se ter cuidado para que a amostra seja colocada bem ao centro de forma que ao baixar-se o sensor ela não exceda o diâmetro do sensor (59,996mm). Uma vez posicionada a amostra, acionamos a posição de medida através do programa que gerencia o reômetro.

A temperatura da amostra em teste é cuidadosamente controlada com a utilização do banho termostático conectado ao reômetro. É aguardado que a amostra atinja o equilíbrio térmico com a placa para iniciar-se o teste. No presente trabalho todos os testes foram realizados com a amostra mantida a 25°C.

#### 4. TESTE DE CISALHAMENTO

O teste de cisalhamento consiste em impor à amostra de fluido um determinado valor de tensão (método de tensão controlada – CS) ou de deformação (método de deformação controlado – CR) obtendo-se como resposta, respectivamente, um valor de deformação ou de tensão. Obtém-se, então, a curva de escoamento do material, relacionando a tensão com taxa de deformação. Uma relação linear caracteriza o fluido como Newtoniano, sendo a viscosidade do fluido independente da taxa de deformação. Para o caso de uma relação não-linear entre a tensão e a taxa de deformação, tem-se um fluido não-Newtoniano cujo valor da viscosidade depende da taxa de deformação aplicada.

#### 5. TESTE DE OSCILAÇÃO

Os testes de oscilação são conhecidos como testes dinâmicos, pois nesse caso aplica-se uma tensão ou uma deformação senoidal sobre a amostra de teste obtendo-se uma deformação ou tensão dependente do tempo.

Em testes desse tipo, a tensão e a deformação são funções oscilatórias temporais, essas funções podem estar em fase ( $\delta = 0^\circ$ ), fora de fase ( $\delta = 90^\circ$ ) ou em um ponto intermediário entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . No primeiro caso tem-se uma deformação máxima para uma tensão máxima aplicada e isso caracteriza um fluido **elástico**. O segundo caso equivale a uma tensão máxima aplicada obtendo-se uma deformação mínima o que caracteriza um fluido **viscoso** e finalmente no caso intermediário tem-se um fluido **viscoelástico**, ou seja, o aparecimento de ambos os comportamentos.

Grandezas importantes são obtidas através dos testes de oscilação. Entre elas pode-se destacar o módulo complexo ( $G^*$ ) que representa a resistência total da substância contra uma deformação de acordo com Macosko (1994), sendo dado por :

$$G^* = \frac{\tau_0}{\gamma_0}, \quad (1)$$

sendo  $\tau_0$  e  $\gamma_0$  respectivamente as amplitudes de tensão e de deformação.

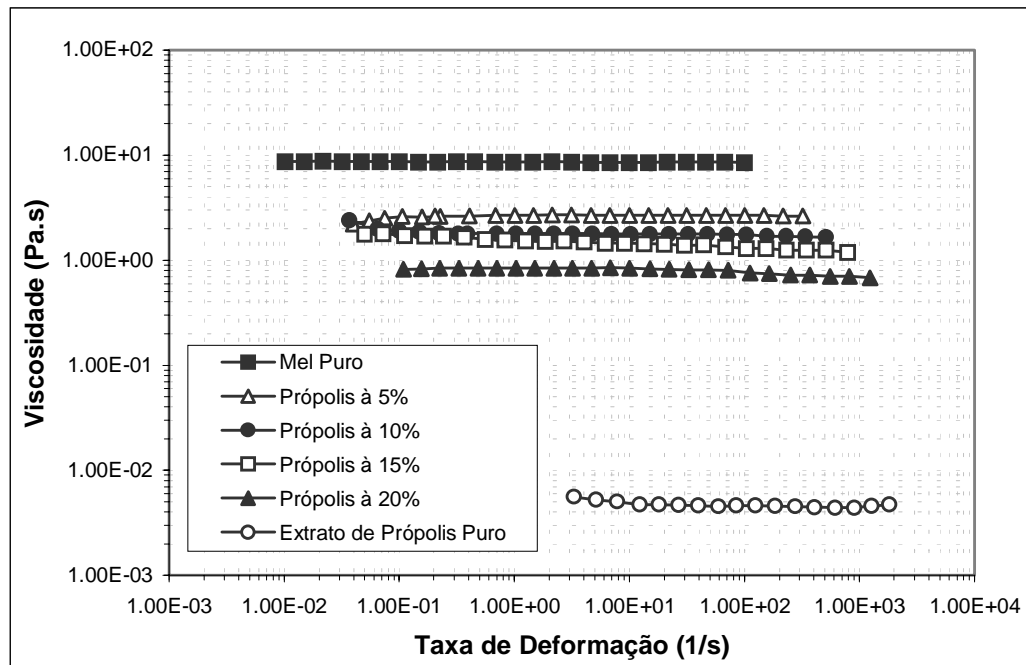
Outra forma na qual o módulo complexo pode ser representado é dada em função do módulo elástico ou de armazenamento ( $G'$ ) e do módulo viscoso ou de perda ( $G''$ ):

$$(2) \quad G^* = G' + iG''$$

Na equação (2),  $G'$  indica a energia que é temporariamente armazenada durante o teste, podendo ser recuperada posteriormente, e  $G''$  indica a energia que é necessária para que o fluido escoe e que é transformada em calor. Pode-se então definir um fluido como sendo viscoso ( $G'=0$  e  $G''=G^*$ ), elástico ( $G'=G^*$  e  $G''=0$ ) ou viscoelástico ( $G' \neq 0$  e  $G'' \neq 0$ ).

## 6. RESULTADOS

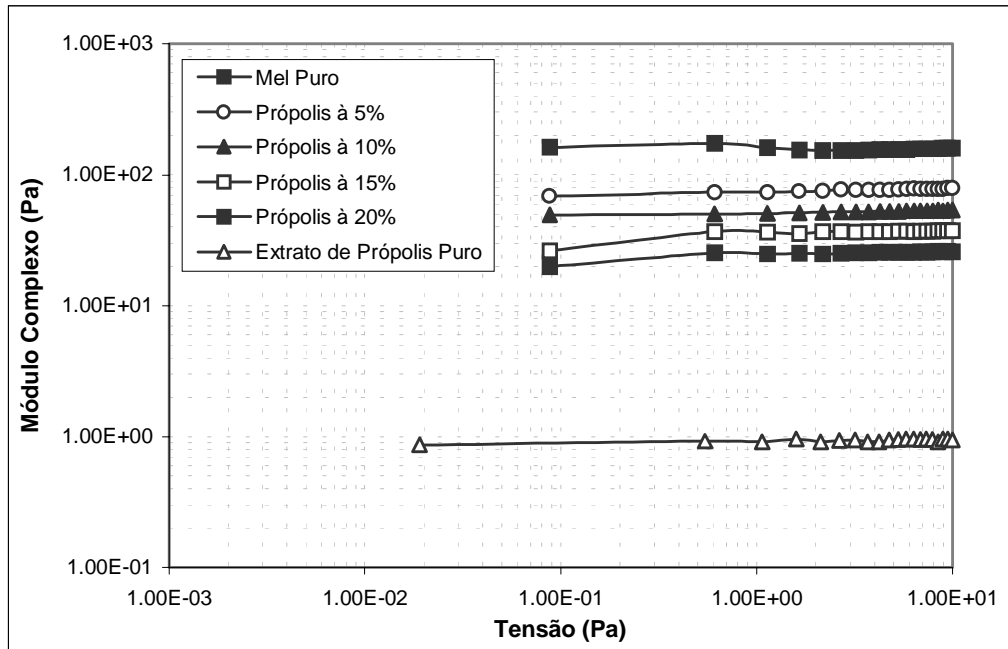
A figura 1 apresenta a viscosidade do mel puro, do extrato de própolis e das misturas entre mel e extrato de própolis, obtidas em um teste de cisalhamento.



**Figura 1.** Curva de viscosidade: obtida para uma temperatura de 25°C.

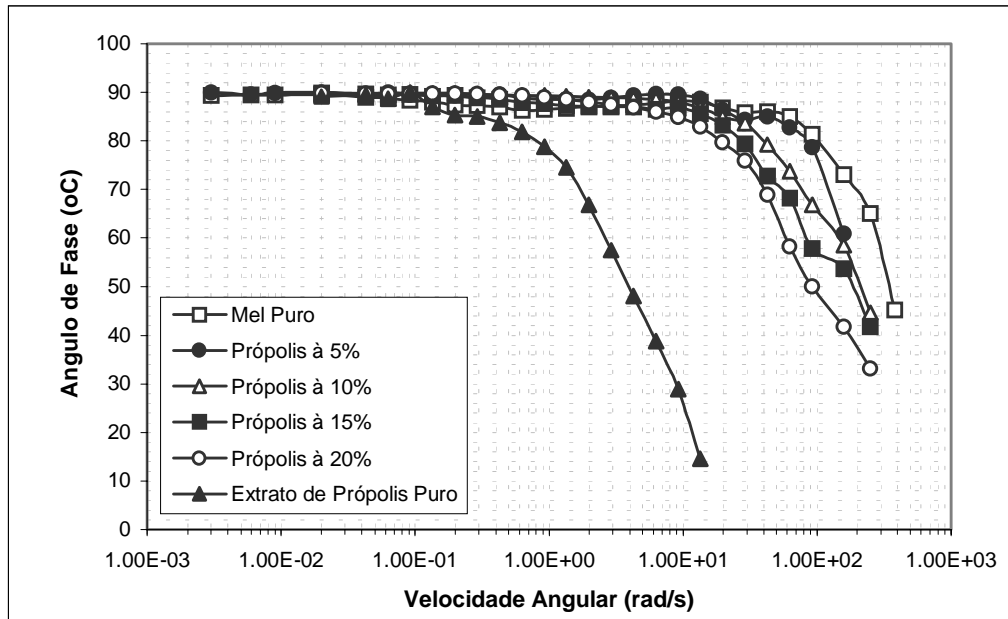
Evidencia-se na figura acima uma diferença acentuada entre os valores de viscosidade para o mel puro e o extrato de própolis nas diferentes taxas de deformação aplicadas. Além disso, já a partir de uma proporção de 5% de extrato de própolis adicionada ao mel puro, observa-se uma significativa diferença no valor da viscosidade comparada com a do mel puro. Deste modo, através da determinação da viscosidade, pode-se avaliar a quantidade de extrato de própolis presente em um determinado tipo de mel, constituindo-se em um importante teste de controle de qualidade do produto final.

Na figura 2 encontra-se os resultados do teste de varredura de tensão para o mel puro, extrato de própolis e as misturas intermediárias realizados para uma frequência de 4,64Hz e temperatura de 25°C. Observa-se que para as faixas de tensão investigadas, todas as amostras encontram-se dentro do limite de viscoelasticidade linear indicando que a estrutura do material não foi modificada, fato este caracterizado pelo valor constante do módulo complexo ( $G^*$ ) para diferentes tensões aplicadas.

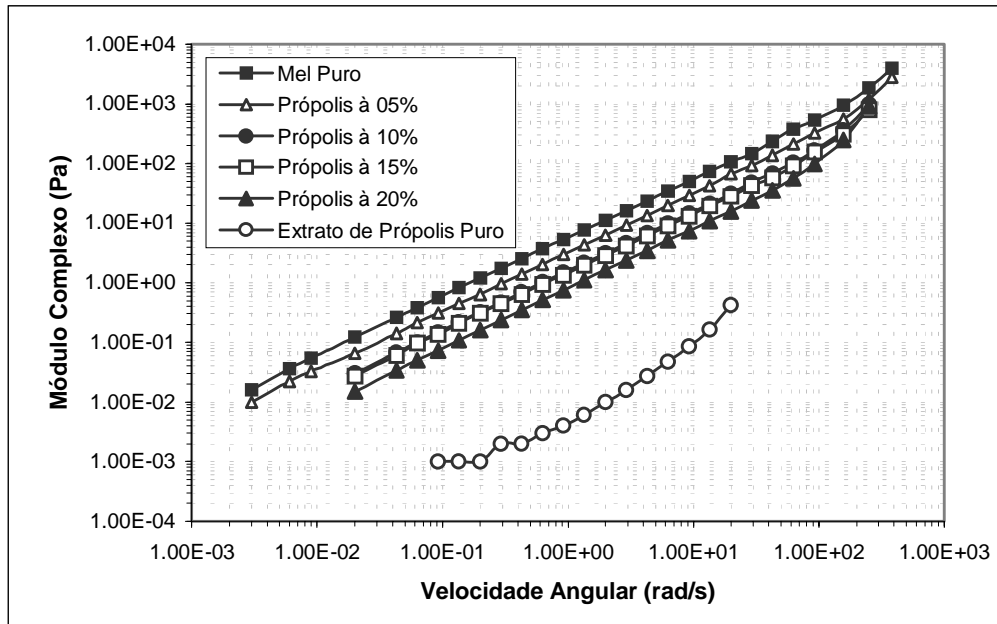


**Figura 2.** *Stress Sweep*: teste de varredura de tensão, no qual foram mantidos constantes os valores da frequência (4,640 Hz) e da temperatura (25°C).

As figuras 3 e 4 referem-se aos testes de varredura de frequência realizados a 25°C e para uma tensão constante de 1Pa, sendo assim, encontra-se dentro do limite de viscoelasticidade linear.



**Figura 3.** *Frequency Sweep*: foi realizada uma varredura de frequência utilizando uma tensão constante de 1Pa e mantendo as amostras a 25°C.



**Figura 4.** *Frequency Sweep*: foi realizada uma varredura de frequência utilizando uma tensão constante de 1Pa e mantendo as amostras a 25°C.

Com base nos resultados experimentais mostrados na figura 3, constata-se que em baixa velocidade angular todas as amostras apresentam um ângulo de fase de 90° evidenciando um comportamento de fluido newtoniano.

À medida que cresce a velocidade angular, o ângulo de fase começa a diminuir ( $\delta < 90^\circ$ ), sendo esta diminuição mais acentuada ao passo que aumenta-se a proporção de extrato de própolis no mel, até a situação extrema, com o extrato de própolis puro indicando nesse caso um comportamento viscoelástico.

Na figura 4 tem-se o comportamento do Módulo Complexo para as diversas amostras ensaiadas, mostrando nitidamente o aumento de  $G^*$  à medida que cresce a velocidade angular.

Através do teste de varredura de frequência pode-se determinar o comportamento de um dado produto em diversas velocidades (frequências) identificando a predominância de efeitos elásticos ou viscosos capazes de influenciar na utilização do produto.

## 7. CONCLUSÃO

A caracterização reológica do material, constitui um fator de grande importância para a qualidade de um dado produto. Assim, foram realizados no presente trabalho, testes de cisalhamento e de oscilação em misturas de mel com extrato de própolis, além do estudo do mel puro e do extrato de própolis. Através destes testes é possível, por exemplo, avaliar a quantidade de extrato de própolis presente no mel, através do conhecimento da viscosidade da amostra, bem como avaliar o comportamento do escoamento das diferentes misturas de extrato de própolis com mel, fatores decisivos no controle de qualidade do produto final.

## **Agradecimentos**

Os autores do trabalho agradecem ao CNPq e a CAPES pelo suporte financeiro prestado. Agradecemos também, as Biólogas Mary Ribeiro Muniz e Cláudia dos Santos Fagundes, ambas da COAPI-Rio e ao seu Presidente, Sr. Valdir Ribeiro Osório.

## **Referências**

- Dustmann, J. H., 1993, "Honey, quality and its control", *Am. Bee J.*, 133, 648-651
- Macosko, C.W. (1994), "Rheology : principles, measurements and applications", Ed. VCH Plubishers, Inc., United States of America.
- Zumlai, A., & Lulat, A. (1989). "Honey, a remedy rediscovered", *J. Royal Soc. Med.*, 83, 384 – 385

## **BEMC-1 PROGRAMA DE PROJETO E AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DE BOMBAS ELETROMAGNÉTICAS DE CORRENTE CONTÍNUA**

**Eduardo Madeira Borges**

**Francisco Antonio Braz Filho**

**Francisco Sircilli Neto**

**Lamartine Nogueira Frutuoso Guimarães**

Instituto de Estudos Avançados (IEAv - CTA), 12231-970, São José dos Campos, SP, Brasil.

E-mail: eduardo@ieav.cta.br

### **Resumo**

Bombas eletromagnéticas podem ser usadas no controle de vazão de circuitos de refrigeração, este controle é feito pelo campo magnético e corrente elétrica fornecidos. Neste trabalho apresenta-se o programa computacional BEMC-1, desenvolvido para projeto de bombas eletromagnéticas de corrente contínua e sua validação. Esta é obtida comparando-se os resultados de simulações teóricas com os dados experimentais de: indução magnética, pressão estática e curvas de vazão no circuito dinâmico a mercúrio.

**Palavras-chave:** Bombas Eletromagnéticas, Simulação Computacional, Metal Líquido, Eletromagnetismo.

### **1. INTRODUÇÃO**

Sistemas de refrigeração, que utilizam metal líquido como fluido de trabalho, podem retirar altas densidades de potência térmica. As bombas eletromagnéticas não têm partes móveis, são completamente seladas, apresentam alta confiabilidade e permitem a utilização de fluido radioativo à alta temperatura. Estas características as tornam interessantes para serem utilizadas em reatores nucleares rápidos refrigerados a metal líquido, como no EBR-II (Lentz, et al., 1985), no PRISM (Kwant, et al., 1988) e no REARA (Borges, et al., 1994).

No Instituto de Estudos Avançados (IEAv) se projetou e ensaiou a primeira bomba eletromagnética (EM) de corrente contínua nacional, que funcionou satisfatoriamente em ensaios estáticos e dinâmicos, em circuitos fechados a mercúrio especialmente desenvolvidos para este fim (Borges, et al., 1995).

O programa computacional BEMC-1 foi elaborado com o objetivo de se poder estudar cada etapa do desenvolvimento de uma bomba eletromagnética de corrente contínua, independentemente. Assim como, avaliar o desempenho da bomba EM.

O BEMC-1 é bastante versátil, facilita a avaliação de desvios entre dados calculados e experimentais e permite a utilização de fatores de correção, de modo a minimizar estes erros e projetar bombas eletromagnéticas de corrente contínua.

Neste trabalho apresenta-se o princípio de funcionamento de bombas eletromagnéticas de corrente contínua, suas equações básicas, a comparação entre os valores teóricos e experimentais de campo magnético, pressão estática e curvas de vazão, para diferentes valores de corrente principal e de campo fornecidos, validando o programa BEMC-1.

## 2. PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DE BOMBAS ELETROMAGNÉTICAS

Em uma bomba eletromagnética de corrente contínua a força de Lorentz define a intensidade e a direção da força exercida no fluido condutor sob influência da corrente elétrica e do campo magnético impostos. Observa-se, na Figura 1 o princípio de funcionamento de uma bomba eletromagnética de corrente contínua.

Admitindo-se a altura do canal da bomba (a), a largura do canal (b) e o comprimento útil (c), monta-se o equacionamento para a avaliação do seu desempenho (Borges, 1991).

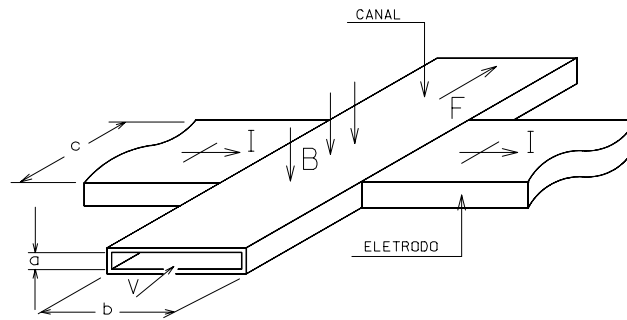


Figura 1. Princípio de funcionamento da bomba eletromagnética de corrente contínua.

### 2.1 Formulação do problema

O campo magnético pode ser calculado de acordo com a Lei Circuital de Ampere:

$$B = \mu N I_{\text{campo}} / d , \quad (1)$$

que relaciona as intensidades de campo magnético (B) em torno de uma trajetória fechada de fluxo magnético e o comprimento da trajetória com a corrente que a circunda, onde N é o número total de espiras e  $I_{\text{campo}}$  é a corrente de campo fornecida, observando-se ainda, que as perdas no entreferro (d) são muito superiores às do magneto e que para os metais líquidos, a permeabilidade magnética ( $\mu$ ) é igual à do vácuo.

Considerando-se a perfeita perpendicularidade entre o campo magnético, a corrente elétrica principal (I) e a direção do escoamento do fluido, a força (F) resultante da interação entre campo e corrente pode ser calculada, em função da corrente elétrica útil ( $I_e$ ) por:

$$F = B * I_e * b \quad . \quad (2)$$

Pode-se definir a pressão manométrica desenvolvida pela bomba como:

$$P = F / ( a * b ) \quad . \quad (3)$$

Substituindo na Eq. (2) tem-se:

$$P = B * I_e / a \quad , \text{ em } [N/m^2] \quad ; e \quad (4)$$

$$P = B * I_e / ( a * 1360 ) \quad , \text{ em } [cm Hg] \quad . \quad (5)$$

Na Figura 2 observa-se o circuito elétrico equivalente da bomba eletromagnética.

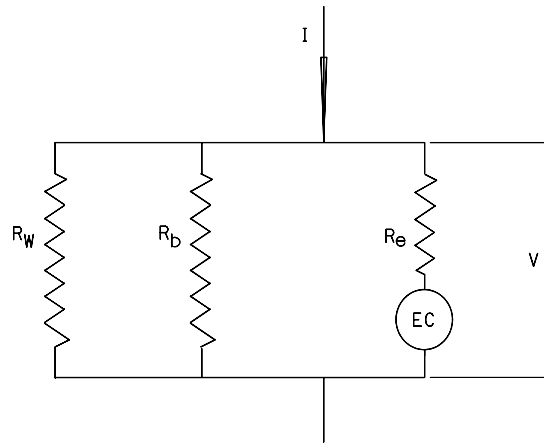


Figura 2. Circuito elétrico equivalente da bomba EM de corrente contínua.

A tensão elétrica da bomba é calculada por:

$$V = I_e * R_e + E_c = I * R_t \quad (6)$$

Onde:  $R_t$  é a resistência elétrica equivalente do circuito e  $E_c$  é a força contra-eletromotriz resultante do deslocamento do fluido no campo magnético. Esta voltagem induzida equivale a:

$$E_c = B * w / a \quad (7)$$

A corrente elétrica útil ( $I_e$ ) pode ser calculada em função da corrente principal ( $I$ ), da força contra eletromotriz ( $E_c$ ) e das resistências elétricas  $R_e$ ,  $R_w$  e  $R_b$  que são respectivamente as resistências elétricas do fluido no canal da bomba, da parede do canal (perpendicular ao campo magnético, na direção da corrente elétrica) e a resistência de “bypass”, que é a resistência de fuga de corrente pelo fluido fora da influência do campo magnético.  $R_b$  por sua vez é calculada multiplicando-se a resistência elétrica útil ( $R_e$ ) por um fator de correção empírico, que está relacionado com a geometria da bomba.

$$I_e = \frac{I}{1 + R_e \left( \frac{R_w + R_b}{R_w * R_b} \right)} - \frac{E_c}{R_e + \frac{R_w * R_b}{R_w + R_b}} \quad (8)$$

Portanto a corrente elétrica útil é uma função da vazão volumétrica ( $w$ ).

Observa-se que no estudo de pressão estática (com vazão nula) o último termo é nulo e no cálculo de pressão dinâmica (com escoamento de fluido) este termo é diferente de zero.

### 3. PROGRAMA COMPUTACIONAL BEMC-1

De modo geral as etapas fundamentais do projeto de uma bomba eletromagnética de corrente contínua são: a avaliação do campo magnético, da pressão estática e dos dados de vazão, pressão dinâmica e eficiência.

O programa BEMC-1, escrito em linguagem C++, foi elaborado com o objetivo de se poder avaliar, cada etapa do desenvolvimento de uma bomba EM, possibilitando alteração em todos os parâmetros importantes de projeto.



Deve-se definir o fluido a ser bombeado e suas propriedades, assim como, a geometria e materiais do canal, calculando-se então as resistências elétricas envolvidas, Eq. (6).

Um parâmetro muito importante é o campo magnético, que pode ser calculado pela equação de campo Eq. (1), em função do entreferro e da corrente de campo e se necessário corrigido pelo fator de correção apropriado.

A pressão fornecida pela bomba, Eq. (5), depende do campo magnético, da geometria do canal e da corrente elétrica útil, que por sua vez é função da corrente principal, das resistências elétricas calculadas e da vazão, Eq.(8).

A pressão estática, valor limite operacional da bomba, é calculada considerando-se nulo o último termo da Eq. (8).

Com o BEMC-1 pode-se avaliar a vazão e pressão dinâmicas fornecidas pela bomba operando em circuitos fechados, calculando as perda de carga do circuito em função da vazão, do seu diâmetro e do comprimento equivalente.

Com o objetivo de facilitar a otimização do projeto de uma bomba eletromagnética de corrente contínua o programa computacional BEMC-1 permite modificar dados e parâmetros para análise de um nova condição de atuação da bomba, assim como, dados geométricos da bomba EM e do circuito.

## 4. AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

Os dados experimentais e teóricos de campo magnético, pressão manométrica e vazão, fornecidos pela bomba EM, devem ser comparados para definição dos fatores de ajuste e validação do programa BEMC-1. Em (Borges, et al., 1995) estão os dados de geometria e ensaios da bomba.

### 4.1 Campo magnético

A bomba EM de corrente contínua estudada tem magneto tipo “C” e bobinas de campo com 2000 espiras. Na Figura 3 apresenta-se a curva de campo magnético médio teórico, calculado pela Eq. (1), e a experimental no centro do entreferro, em função da corrente de campo imposta às bobinas.

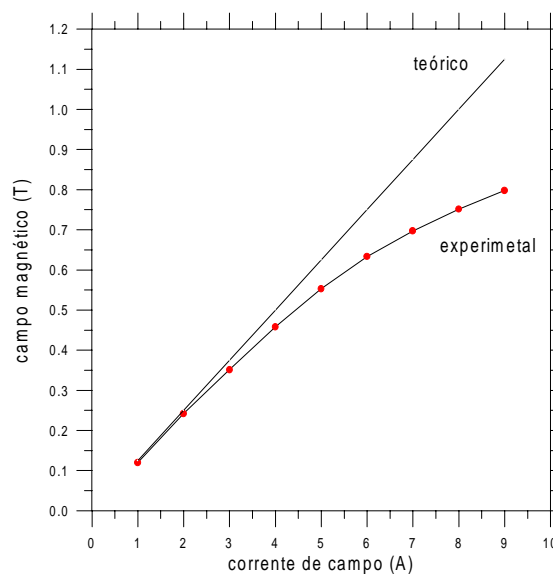


Figura 3. Campo magnético médio no centro do entreferro do magneto tipo “C”.

Observa-se que para valores de correntes de campo crescentes a diferença entre os dados teóricos e experimentais se acentua, devido a saturação do magneto. Há portanto necessidade do uso de fatores de ajuste no cálculo de campo magnético médio no programa BEMC-1, em função da corrente de campo, pois a simulação deve reproduzir os dados experimentais. Isto foi feito e nos cálculos subseqüentes o BEMC-1 usa o campo corrigido.

#### 4.2 Pressão estática da bomba EM

Os valores teóricos de pressão estática são obtidos em função da corrente elétrica média útil, da geometria do canal da bomba e do campo magnético médio teórico corrigido.

Nas Figura 4 e 5, respectivamente, são apresentadas as curvas teóricas e experimentais de pressão estática da bomba EM de corrente contínua com magneto tipo “C”, em função das correntes elétricas principal e de campo.

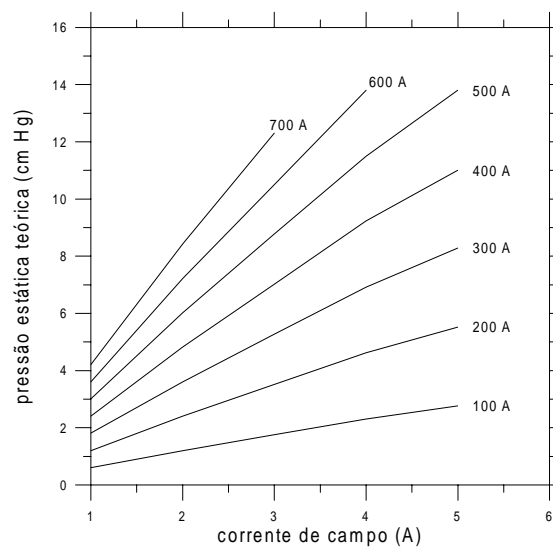


Figura 4. Curvas teóricas de pressão estática da bomba EM, obtidas com o BEMC-1.

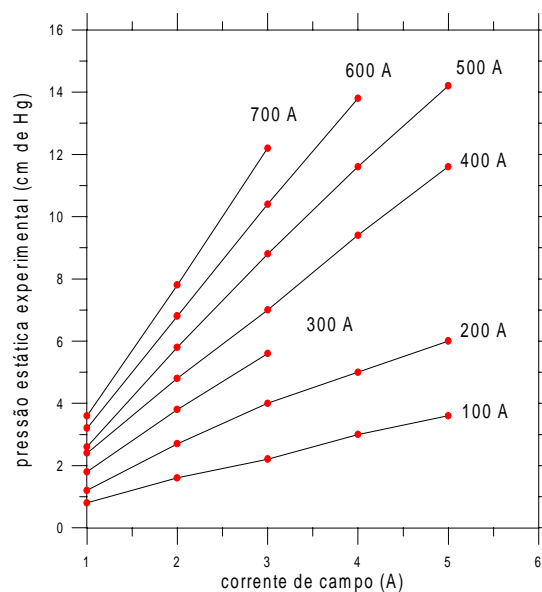


Figura 5. Curvas experimentais de pressão estática da bomba EM.

Comparando-se os dados de pressão estática, nota-se que o programa BEMC-1 (utilizando os fatores de correção de campo magnético e de “bypass” apropriados) reproduz os dados experimentais, com erros quase nulos, validando a metodologia de análise utilizada no BEMC-1. Sem o fator de correção de campo os desvios chegam a 20% (Borges, et al., 1998).

#### 4.3 Ensaios dinâmicos e avaliação teórica de desempenho da bomba EM

Apresenta-se na Figura 6 as curvas experimentais de vazão da bomba EM de corrente contínua com magneto tipo “C” no circuito dinâmico de mercúrio.

Nota-se que como esperado a vazão fornecida pela bomba EM depende diretamente dos valores das correntes de campo e principal. Consegue-se experimentalmente, com o controle destas correntes elétricas, vazões de até aproximadamente seis [l/min], observa-se que este valor está associado às limitações das fontes de corrente utilizadas.

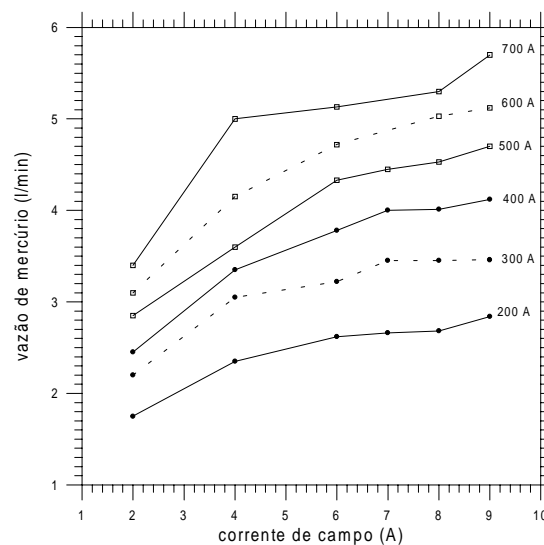


Figura 6. Curvas experimentais de vazão da bomba EM.

Na Figura 7 apresenta-se a curva teórica de perda de carga no circuito dinâmico de mercúrio (com diâmetro interno de 0,0122 metros e comprimento equivalente de 3,8 metros) em função da vazão, obtida com o programa BEMC-1.

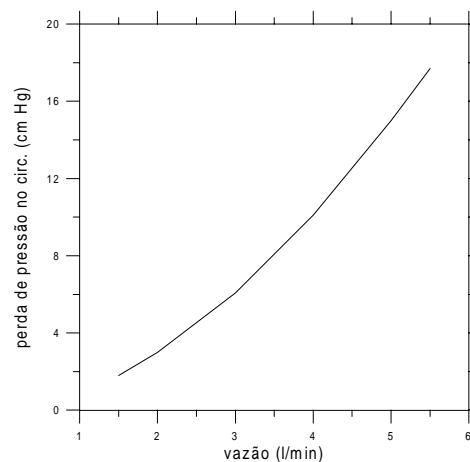


Figura 7. Curva teórica de perda de carga no circuito, obtida com o BEMC-1.

Na avaliação teórica de desempenho dinâmico de uma bomba eletromagnética de corrente contínua deve-se considerar os dados geométrico, as correntes elétricas envolvidas, as curvas de pressão estática da bomba EM e a curva de perda de carga no circuito, calculadas pelo programa BEMC-1. Apresenta-se na Figura 8 as curvas teóricas de vazão da bomba EM de corrente contínua com magneto tipo “C”, para o circuito dinâmico de mercúrio.

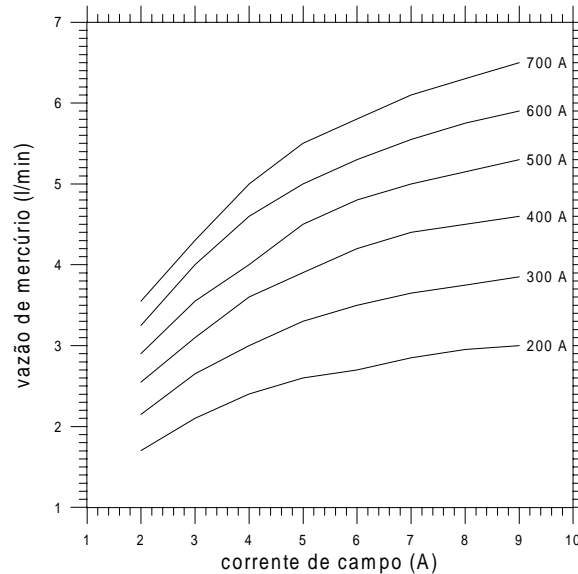


Figura 8. Curvas teóricas de vazão da bomba EM, obtidas com o BEMC-1.

Na Figura 9 apresenta-se, as curvas teóricas de pressão dinâmica da Bomba, obtidas com o programa BEMC-1.

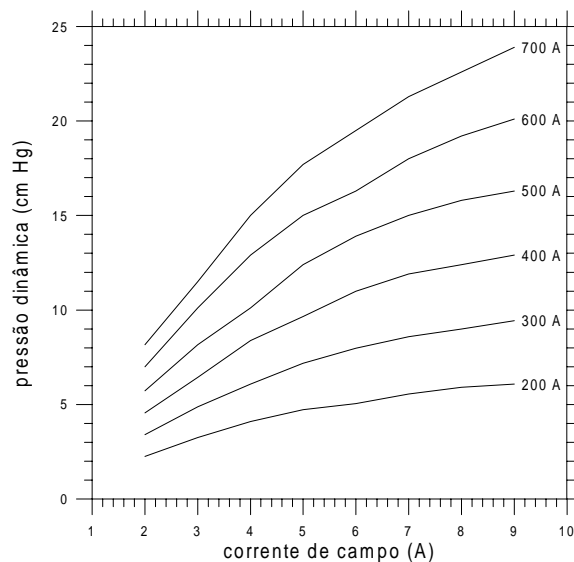


Figura 9. Curvas teóricas de pressão dinâmica da bomba EM, obtidas com o BEMC-1.

As curvas teóricas de pressão dinâmica e de vazão estão correlacionadas, pois a pressão dinâmica é calculada em função da vazão, é sempre inferior ao valor da pressão estática, para as mesmas correntes principal e de campo fornecidas, e deve ser compatível com a curva de perda de carga do circuito.

## 5. CONCLUSÃO E COMENTÁRIOS

A necessidade do desenvolvimento do programa computacional BEMC-1 deve-se principalmente aos projetos de bombas eletromagnéticas de corrente contínua e experiências realizadas no IEAv. Os dados obtidos nos ensaios demonstraram a importância de se desenvolver modelos matemáticos específicos para cada fenômeno estudado.

Comparando os dados teóricos e experimentais de campo magnético, observa-se que para valores de correntes de campo crescentes, a diferença entre eles se acentua, devido a saturação do magneto. Há portanto a necessidade do uso de fatores de ajuste, no cálculo de campo magnético médio no programa BEMC-1, em função da corrente de campo, pois a simulação deve reproduzir os dados experimentais.

Comparando-se os dados de pressão estática, nota-se que o programa BEMC-1 (utilizando os fatores de correção de campo magnético e de “bypass” adequados) reproduz os dados experimentais, com erros quase nulos. Sem estes fatores de correção, obtidos comparando-se os dados teóricos e experimentais, pode haver erros. Em (Borges, et al., 1998) não usou-se os fatores de ajuste de campo e os desvios chegaram a 20%.

Os desvios teórico-experimentais verificados determinaram os fatores de correção necessários ao programa de simulação, que utilizando os fatores de ajuste adequados reproduziu bem os dados experimentais de campo magnético, pressão estática e curvas de vazão. Portanto, apesar de usar modelos analíticos relativamente simples, o BEMC-1 pode ser considerado validado e mostrou-se otimizado para ser utilizado na avaliação e projeto de bombas eletromagnéticas de corrente contínua.

## 6. REFERÊNCIAS

- Borges E. M., 1991, “Desenvolvimento e Simulação Computacional de Bombas Eletromagnéticas Termoelétricas para o Controle do Escoamento em Reatores Nucleares Espaciais Refrigerados a Metal Líquido”. Tese de Doutorado ITA, São José dos Campos, SP, Brasil.
- Borges, E. M.; et al., 1994, “Concepção de um Reator Rápido Experimental para o Brasil”. V Congresso Geral de Energia Nuclear, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Borges, E. M.; et al., 1995, “Ensaio de Pressão Estática de Bomba Eletromagnética de Corrente Contínua”. XIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Borges, E. M.; et al., 1998, “Avaliação de Desempenho da Bomba Eletromagnética de Corrente Contínua no Controle de Vazão de Mercúrio”. VII Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Kwant, W.; et al., 1988, “PRISM Reactor Design and Development”. Safety of Next Generation Power Reactors Meeting, Washington, USA.
- Lentz, G. L.; et al., 1985, “EBR-II - Twenty Years of Operation Experience”. Symposium on Fast Breeder Reactors: Experience and Trends, Lyon, France.

## NUMERICAL AND EXPERIMENTAL FLOW VISUALIZATION OF SQUARE CYLINDER WAKES

**Odenir de Almeida**  
**Cláudio Lindquist**  
**Edson Del Rio Vieira**  
**Sérgio Said Mansur**

UNESP – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica  
15385-000, Ilha Solteira, SP, Brasil. E-mail: [odenir@dem.feis.unesp.br](mailto:odenir@dem.feis.unesp.br)

**Aristeu Silveira Neto**

UFU – Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica  
38400-902, Uberlândia, MG, Brasil.

### **Abstract**

Flow visualization is an important tool to understand complex flows around bluff bodies. In this work, using numerical and experimental hydrodynamic flow visualization, different wake configurations produced by a square-section cylinder have been analyzed in moderate Reynolds numbers. Two-dimensional numerical calculations have been performed using Fluent<sup>®</sup> 5.0 software, employing a finite volume method with different schemes of convective transport. The experiments have been carried out in a vertical water tunnel driven by gravitational action and operated in continuous mode. Experimental visualization testes have been done, employing the dye wash and hydrogen bubble techniques. The images of flow patterns have been captured on photographic film, and the results obtained when compared with numerical ones showed good agreement.

**Keywords:** square cylinder, vortex street, numerical simulation, flow visualization, dye wash and hydrogen bubble techniques.

### **1. INTRODUCTION**

For its wide application in several engineering problems, the flow around square-sectioned cylindrical bodies has been the subject of several researches in the last decades. In fact, many structures used in engineering applications have square or rectangular cross section and are exposed to continuous action of several flow types. These structures can be bridge pillars, energy transmission towers, heat exchangers fins, and others fluidmechanical components.

From the fluid dynamics point of view, this problem is characterized by a high complexity degree, due to the simultaneous interaction of different kind of flows: the boundary layer, the separation zone and the vortex wake. Since the pioneer works of Strouhal (in 1878) and von Kármán (in 1912), the phenomenon of the alternate vortex shedding has

been intensively studied. In spite of that, several aspects related to the vortex generation and shedding in the cylinder wake remain obscure.

The intense activity of experimental research verified in this field has been based frequently on results obtained by different flow visualization techniques, which have contributed substantially to the understanding of the phenomena related to vortex dynamics. According to Merzkirch (1987), an additional advantage of flow visualization is that one can obtain qualitative and quantitative data from the flow images, without introducing physical disturbance to the flow field. Several visualization techniques have been employed in order to make evident the flow patterns in cylinder wakes, as can be seen in the works of Hammache & Gharib (1991) and Williamson (1996) that used the smoke technique in wind tunnels, and Williamson (1989) that used dye wash technique for hydrodynamic flow visualization, among many others authors.

Concerning the use of numeric tools in the treatment of external flows, the enormous increase of computers processing capacity and the improvement of numeric methodologies have contributed extensively in the identification and analysis of several types of phenomenons that occurs in flows. A pioneer numerical flow visualizations in the study of the flow around bluff bodies was presented by Fromm & Harlow (1963). Since that, a great variety of numeric works have been conduced. Davis & Moore (1982) presented a study on vortex shedding past rectangular cylinders in infinite domain. In this work, the computational visualization was also used as a tool for results interpretation, obtained good agreement between the numerical and experimental results. Okajima (1982) compares the experimental visualization of the cylinder wakes, for Reynolds number varying from 150 to 600, with numeric visualizations, showing some differences in development of the vortex-shedding phenomenon.

The purpose of the present work is to study some characteristics of the square-sectioned cylinder wake through numerical and experimental visualization, for a low Reynolds number ( $Re = 150$ ). For the numerical calculations, the computational fluid dynamics package Fluent<sup>®</sup>5.0, has been used, using three different convective transport schemes. In order to visualize the vortex street, the passive marker particles are injected upstream of the body. The experimental part has been carried out in a vertical water tunnel, where two flow visualization techniques have been used – the dye wash and hydrogen bubble techniques. The numerical results yield good pictures from the cylinder wake which, when compared to the experimental ones, have shown good agreement.

## 2. OUTLINE OF NUMERICAL MODELING

The momentum and continuity equations for unsteady state, viscous and incompressible flow have been numerically solved using the computational code Fluent<sup>®</sup>5.0. In this study, the fluid properties are assumed to be constant and the governing equations may be written as follows:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + g_j + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \nu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

The numerical simulations have been computed without any turbulence model, due to the considered low Reynolds number ( $Re = 150$ ). In the finite volume method, the governing

equations have been discretized over elementary control volumes on a cartesian coordinate system. The velocity-pressure coupling has been obtained following the algorithm SIMPLEC (Patankar & Spalding, 1972). The convective terms have been discretized with the third-order QUICK scheme (Leonard, 1979). In the diffusive terms, it has been employed a second-order central difference scheme. For time marching, the first order fully implicit scheme was used, which is unconditionally stable with respect to the time step size. The solution has advanced until the fully developed vortex street has been obtained. The streaklines have been calculated using a Lagrangian formulation, with new particles being injected at a time interval of 0.02s.

The computational domain is rectangular, and has been discretized in the cartesian coordinate system, with  $170 \times 90$  grid points non-uniformly distributed, as one can see schematically in Figure 1. Most of the grid points have been placed close to the cylinder and in the wake region, in order to improve the simulation accuracy. The closest grid line to the wall body was fixed at distance of approximately  $\delta y/B = 0,09$  in the vertical and  $\delta x/B = 0,16$  in the horizontal direction.

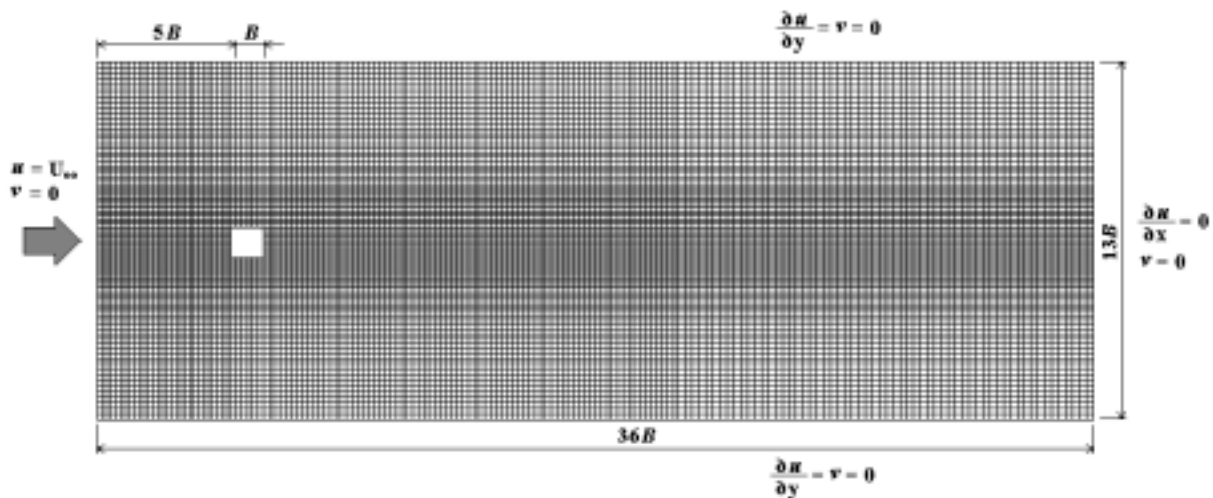


Figure 1. Computational grid and boundary conditions

The streamwise length of the computational domain has been set to  $36B$ , where  $B$  is the dimension of the square cross-section side, while the transversal length has been set to  $13B$ . The cylinder has been placed at  $5B$  downstream the grid inlet (left side in Figure 1).

The boundary conditions have been set as follows. At the upstream boundary, the inlet flow has been assumed to be uniform. At the outlet, a zero gradient boundary condition for both  $u$  and  $v$  has been used. It is important to emphasize that if the grid outlet is placed sufficiently far from the body, this Neumann-type boundary condition usually works well, Sohankar (1998). A no-slip condition has been prescribed at the body surfaces ( $u = v = 0$ ). At the upper and lower boundaries a symmetry conditions was used ( $v = \partial u / \partial y = 0$ ).

### 3. EXPERIMENTAL SETUP

Qualitative experimental results have been obtained from flow visualization tests. These have been conducted in a vertical water tunnel, operated by gravitational action in continuous mode. The test section size is  $146 \times 146 \times 500$  mm and the free stream turbulent intensity is less than 1%. More details about this water tunnel – illustrated in the Figure 2 – facility and its operation are available in Vieira *et al.* (1997).



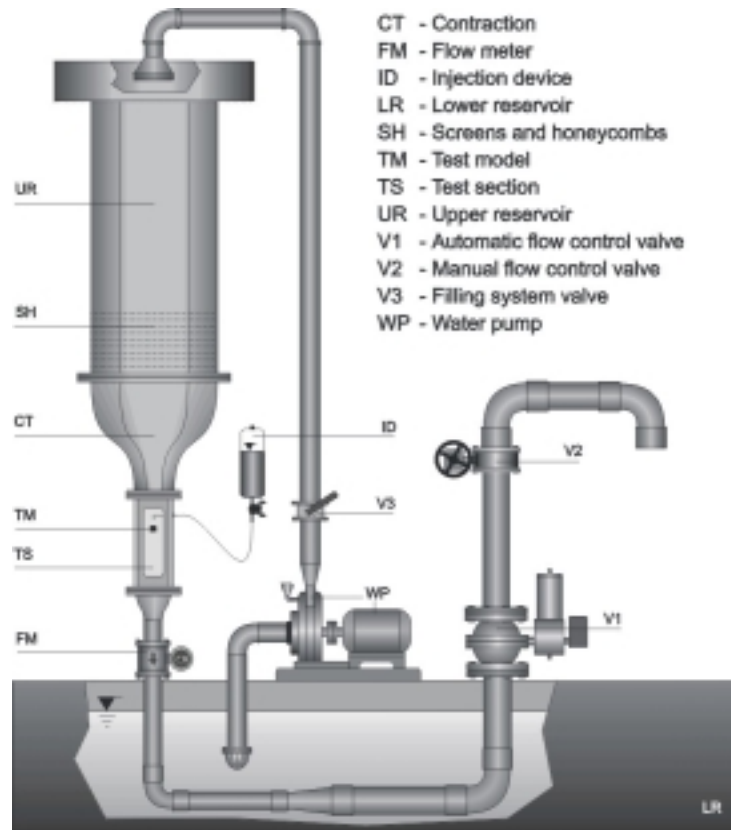


Figure 2. Water tunnel operated by gravity action.

Two flow visualization techniques have been employed in this work. The first, called dye wash technique, consists on adequate injection of opaque liquid dye into the non-disturbed flow field upstream to the solid body by means of a needle. Then, dye injection is suddenly stopped, the needle is removed, and the clean water stream washes the flow field, except the regions where the flow speed is relatively small, as in the cylinder boundary layer and wake. This procedure enables to visualize, for some seconds, the vortex street downstream the cylinder. In the present work, the section test was illuminated in back-light by eight flooding lamps of 150 W, providing an uniformly diffuse bright background against which the dye patterns have been photographed. The dye employed is strong aqueous solution of black PVA pigment.

The second visualization technique used is the classical hydrogen bubble technique. A thin tungsten wire ( $d = 0,075\text{mm}$ ) has been stretched through the test section side walls upstream the cylinder, working as the negative electrode (cathode). The anode (positive electrode) simply consists in a metallic object in electrical contact with the flow, placed near the cathode. If the applied electric tension to the electrodes is large enough, the water hydrolysis takes place, with the formation of hydrogen bubbles on the cathode and oxygen on the anode. Parallel bubble lines may be obtained, if one vary the electric tension in the form of square wave pulses. For this visualization technique, the illuminating apparatus consists in two flash units, placed near the test section side windows and forming with them an angle of approximately  $30^\circ$ , yielding a good contrast between the bubbles and the test section back window. The flow images have been captured using a Nikon F4s camera equipped with a Nikkor 60 mm micro lens and an ISO 100 photographic film.

The free stream velocity inside the test section has been measured with an Yokogawa ADMAG AE208MG electromagnetic flow meter mounted downstream the test section. The overall uncertainty estimate in the Reynolds number has been calculated to be less than  $\pm 5\%$ .

#### 4. RESULTS AND DISCUSSIONS

It is known that the use of different convective transport schemes for the numeric solution of the same problem of fluid flows, can supply completely different results. In fact, the numerical diffusion or false diffusion, associated to the use of non-exact interpolation functions can harm the obtaining of a result physically correct. To verify this influence in the numerical results, three simulations test with different convective transport schemes available in the computational code were developed: a) First-order UPWIND scheme; (b) Second-order UPWIND scheme; (c) QUICK scheme.

The Figure 3 presents the flow field visualization, through isovorticity plots, considering a dimensionless time  $t = U_{\infty} t' / B = 225$ . It has been verified that the use of low order schemes as First-order UPWIND in this type of flows, generates high levels of numeric diffusion, what introduce an artificial viscosity in the fluid. That is verified in Figure 3(a) by the strong flattening of the vortex wake behind the cylinder. On the other hand, the use of higher order scheme facilitates the obtaining of quite representative results for the shedding vortex process. However, it is observed that for the same instant of computational time, different configurations of the cylinder wake are obtained. In a certain way, that difference can be attributed to the presence of numeric oscillations in the schemes of this type.

In Table 1, results of useful physical quantities were computed comparing the different convective transport schemes. The quantities presented are respectively, Strouhal number ( $St$ ), Mean drag coefficient ( $C_D$ ), RMS drag coefficient ( $C_D'$ ), RMS lift coefficient ( $C_L'$ ), Stagnation pressure coefficient at centerline ( $C_{ps}$ ) and base pressure coefficient at centerline ( $C_{pb}$ ). These values are compared with numerical data obtained by Sohankar (1995) using the QUICK scheme. The values obtained by QUICK scheme, in this work, shows good agreement with the numerical data registered by Sohankar (1995). It is also verified that the values obtained with the use of the First-order UPWIND scheme are smaller than others.

Figure 4(a) present the experimental flow patterns for one vortex shedding cycle, visualized with the dye wash technique. Numerically computed isovorticity plots are shown for comparison, Figure 4(b). The numerical results presented in the Figure 4(b) have been obtained with the SIMPLEC algorithm and QUICK scheme.

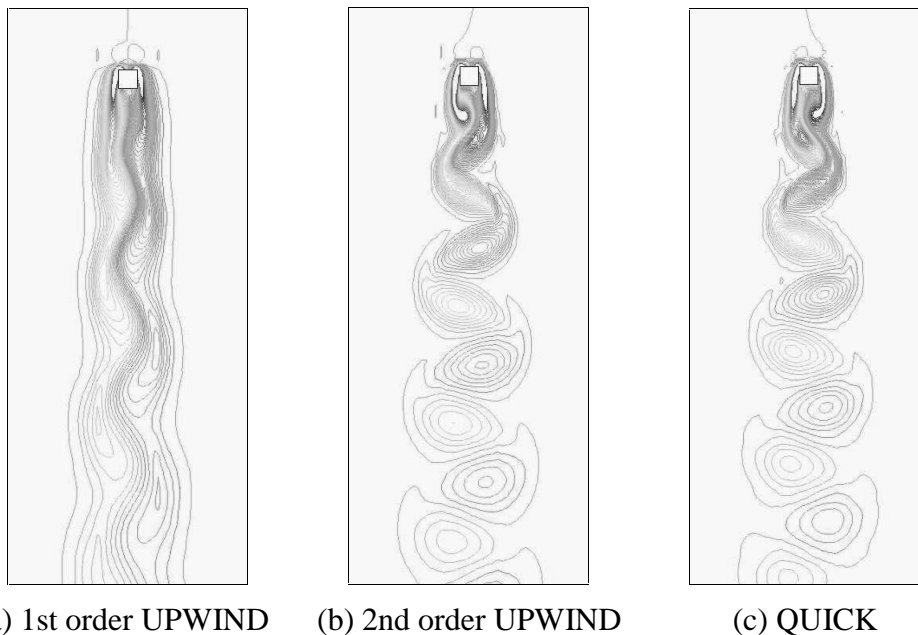


Figure 3. Influence of the transport convective schemes on flow pattern calculation around a square cylinder.

Table 1. Computed parameters from the flow field around a square cylinder ( $Re = 150$ ).

Reference	Scheme	St	$C_D$	$C_{D'}$	$C_{L'}$	$C_{ps}$	$-C_{pb}$
Present work	1 <sup>st</sup> UPWIND	0.120	1.5609	0.0003	0.0468	1.10	0.60
	2 <sup>nd</sup> UPWIND	0.154	1.558	0.0057	0.1896	1.09	0.757
	QUICK	0.161	1.544	0.0045	0.1667	1.11	0.742
Sohankar et al.(1995)	QUICK	0.161	1.408	0.0061	0.177	1.03	0.730

The results show a good agreement between the real and the numerical prediction of flow field. However, some discrepancies are seen over the prediction of formation zone size located in the cylinder near wake. The numeric results show a smaller formation zone than in the real flow field. It can be seen that the Von Kármán vortex street in Figure 4(b) are more regularly shaped and less spaced than those in Figure 4(a).

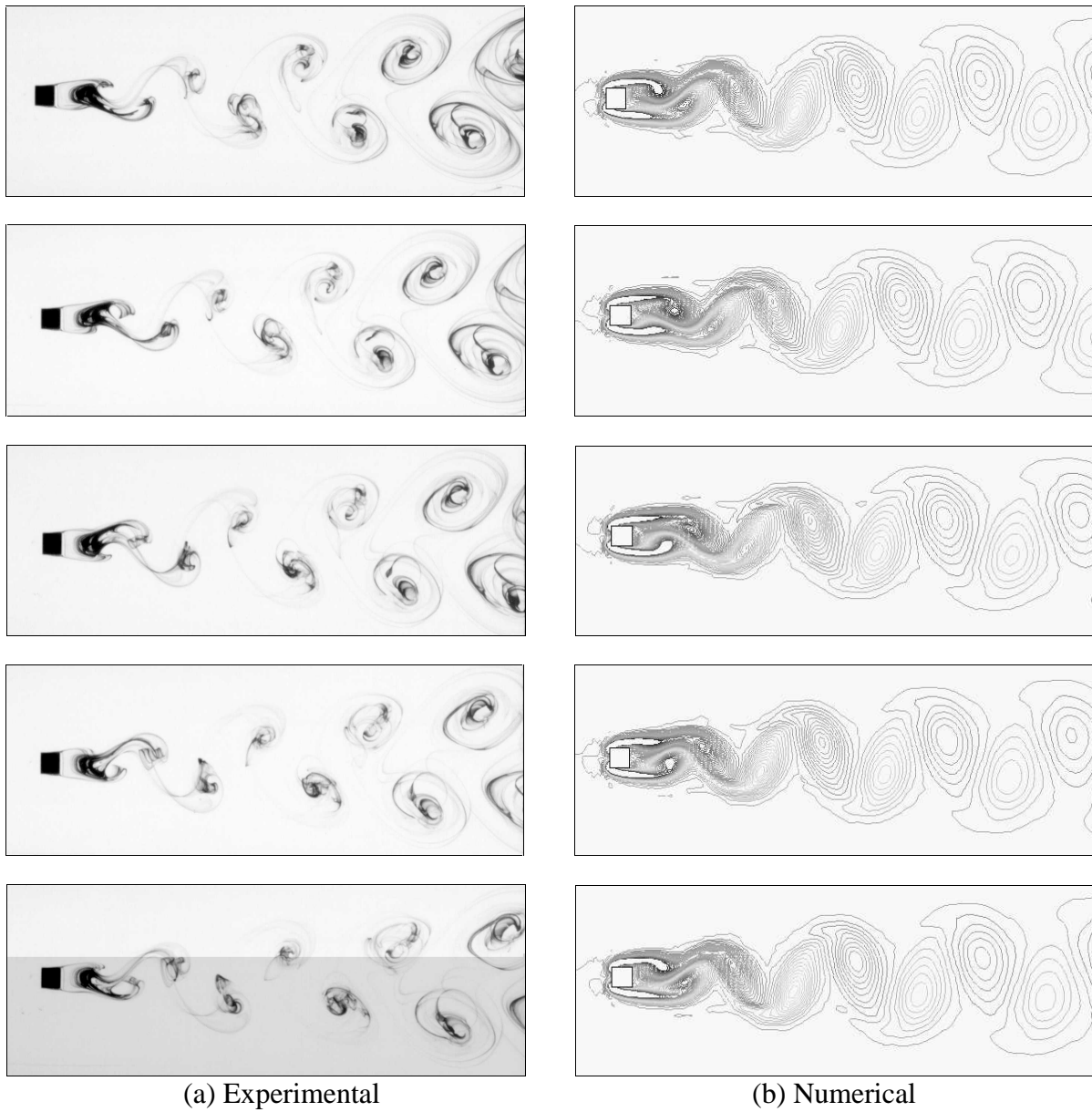


Figure 4 - Comparison between experimental (dye wash) and numerical (isovorticity) visualization of the flow around a square cylinder for one vortex shedding cycle ( $Re = 150$ ).

In this regime ( $Re = 150$ ) the flow state is completely laminar exhibiting a periodic and characteristic wake defined by well shaped vortices. In agreement with Zdravkovich (1990), the formation of Karman vortex street in this regime produces a rise in drag coefficient due pressure ( $C_{Dp}$ ) and a fluctuating lift coefficient ( $C_L$ ).

From this numerical analysis, it was identified that the regions of larger vorticity (magnitude) are positioned in near frontal corners of cylinder and that the relative major values of vorticity occur inside the vortices presents in the wake. Another important observation, in this study, is regarding to location of the passive marker particles in flow field, particularly, inside the vortices. It is observed that the particles introduced ahead of the obstacle were transported for regions of higher vorticity located inside these structures. The results found in this work are in agreement with similar data of Davis & Moore (1982).

It will be seen later that this is also in agreement with experimental visualization dye wash technique. This phenomenon was not verified in the hydrogen bubble technique.

The Figure 5 shows the comparison between different experimental and numerical visualization techniques of cylinder wake employed in this work. The photos 5(a) and (b) illustrates the dye wash and hydrogen bubble techniques for flow field visualization. It is verified a contrast among the two wakes observed.

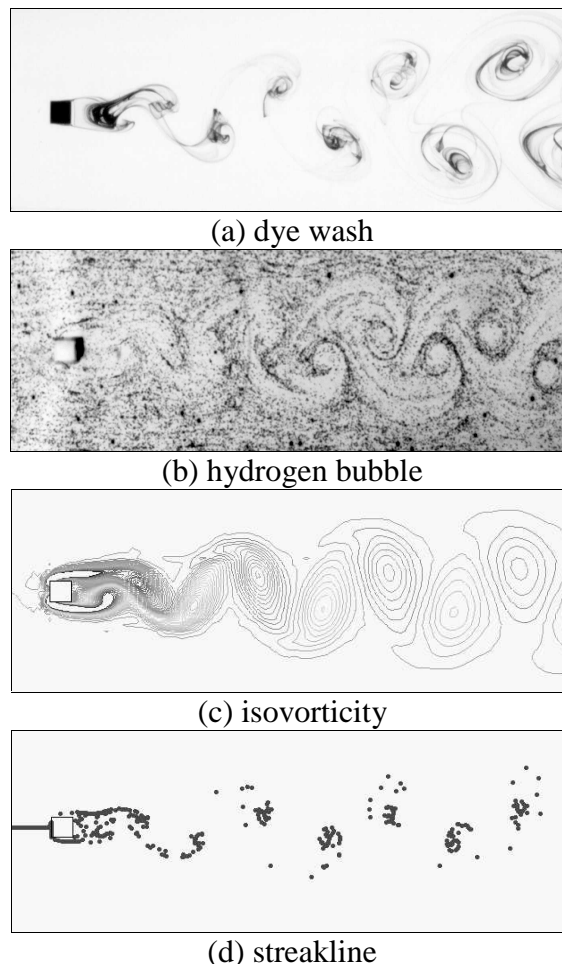


Figure 5. Comparison between the experimental and numerical flow visualization techniques employed in the preset work ( $Re = 150$ ).

The Figure 5(b) shows a wake more regularly defined with vortices less spaced than the Figure 5(a), however, it is not possible to have a good visualization of the formation region behind the cylinder using the hydrogen bubble. In this case, is visible that the use of different

technique for visualization can supply distinct qualitative results. This is because, mainly, the nature of employed experimental technique achieving results influenced by the varying laboratory conditions, such as temperature, for example. It is interesting to emphasize that the flow visualizers as hydrogen bubbles are not passive in flow field due the flotability effects.

The Figures 5(c) and (d) shows the numerical prediction of cylinder wake with visualization isovorticity plots and passive marker particles, respectively. The results in Figure 5(d) were obtained for to validate the discrete phase modeling available in computational code. Although being a test case, the results provided an excellent mean for visualizing the motion of vortices. The numerical flow visualization shows that the particles are swept into vortices and consequently are shed with them composing the Von Karman vortex street. It is identified that the position of vortices are corresponding those obtained in Figure 5(c).

It can be seen that the regions of high dye concentration in Figure 5(a) are numerically represented by regions of high concentration of particles, as observed in the Figure 5(d). This tendency is important to localize the center of vortex. On other hand, this is not verified in the Figure 5(b) with hydrogen bubble technique once the bubbles were positioned in the contours of vortices.

## 5. CONCLUDING REMARKS

The flow around a square cylinder at Reynolds number 150 were numerically and experimental conducted. The numerical results were visualized by vorticity and streakline plots. For the numerical simulation procedure utilized have been used the SIMPLEC algorithm and QUICK scheme for convective transport terms. Two different techniques of experimental flow visualization were employed – dye wash and hydrogen bubble. The qualitative results shown good agreement between numerical and experimental approach. Some discrepancies were identified as a largest difusivity of vortices and a smaller length of the formation region for the numerical case. The comparative results shown a better agreement between the numerical and the hydrogen bubble visualization techniques. Still, qualitative and quantitative numerical results were presented for comparison among different schemes of convective transport. Finally, the use of techniques of experimental and numerical visualization are constituted in useful tools that aid in the understanding of several types of phenomena in flows, contributing each one to the improvement of the technology.

## 6. ACKNOWLEDGMENTS

This study has been developed with financial support provided by FAPESP and FUNDUNESP.

## 7. REFERENCES

- Davis, R. W. & Moore, E. F., 1982, "A numerical study of vortex shedding from rectangles", *J. Fluid Mech.*, vol.116, pp.475-506.
- Fromm, J. E. & Harlow, F. H., 1963, "Numerical solution of the problem of vortex street development", *Physics of Fluids*, vol.6, n.7., pp.975-982.
- Hammache, M. & Gharib, M., 1991, "An experimental study of the parallel and oblique vortex shedding from circular cylinders", *J. Fluid Mech.*, vol.232, pp.567-590.
- Leonard, B. P., 1979, "A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation", *Comp. Meth. Appl. Mech. & Engng.* pp.59-98.

Merzkirch, W., 1987, "Flow Visualization", ed.2, Academic Press, Orlando.

Okajima, A., 1982, "Strouhal numbers of rectangular cylinders", *J. Fluid Mech.*, vol.123, pp.379-398.

Patankar, S. V. & Spalding, D. B., 1972, "A calculation procedure for heat and mass transfer in three-dimensional parabolic flows", *Journal of Heat and Mass Transfer*, vol.15, pp.1787-1806.

Sohankar, A. E., 1998, Numerical study of laminar transitional and turbulent flow past rectangular cylinders, Tese de Doutorado – Gothenburg.

Sohankar, A., Davidson, L. & Norberg, C., 1995, "Numerical simulation of unsteady flow around a square two-dimensional cylinder", *Proceeding 12<sup>th</sup> Australasian Fluid Mechanics Conference*, R. W. Bilger (ed.), pp.517-520.

Vieira, E.D.R., Lindquist, C.; Woiski, E.R. & Mansur, S.S., 1997, Vortex Velocity Measurement by Hydrodynamic Flow Visualization. Proceedings (in CD-ROM) of COBEM/97 XIV Brazilian Congress of Mechanical Engineering, paper code 059, 8pp, Bauru.

Williamson, C.H.K., 1989, Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.206, pp.579-627.

Williamson, C. H. K., 1996, "Three-dimensional vortex dynamics in bluff body wakes", *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol.12, pp.150-168.

Zdravkovich, M. M., 1990, "Conceptual overview of laminar and turbulent flows past smooth and rough circular cylinders", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol.33, pp.53-62.

# PARABOLIZED STABILITY EQUATIONS: A REVIEW

**Márcio T. Mendonça**

Centro Técnico Aeroespacial - Instituto de Atividades Espaciais

Pç Mal. Eduardo Gomes, 50 - 12228-904 - São José dos Campos - SP - Brazil

email: marcio\_tm@yahoo.com

## Summary.

The Parabolized Stability Equations developed at the Ohio State University have given scientist a new tool to investigate hydrodynamic stability. This formulation results in a set of parabolic equations that describe the downstream evolution of convected instabilities in slowly varying shear flows such as boundary layers, jets, and wakes. It is able to consider nonlinear and nonparallel effects in a spatial analysis resulting in a much better representation of the flow physics. The present paper presents a review of the PSE formulation with emphasis on the discussion about the choice for the normalization condition, which is necessary to close the system of equations. Results obtained by the author and co-workers with their own implementation of a PSE code are also reviewed. First, the importance of non-parallel effects is discussed. Then, results for the evolution of stationary and traveling disturbances are presented and compared to experimental results.

**Keyword:** *Laminar flow instability, Laminar-turbulent transition, Parabolized stability equations.*

## 1. INTRODUCTION

In a natural environment a laminar flow is always subject to disturbances such as freestream turbulence, rugosity or structural vibration. If these disturbances are amplified the laminar flow may become turbulent. The field of hydrodynamic stability is concerned with the study of how a given flow field may amplify or damp these initial disturbances and how the evolution of these disturbances is related to transition to turbulence.

The equations that describe an instability problem may be derived by assuming that the instantaneous flow is decomposed into a mean steady flow and a small perturbation,  $v = V + v'$ . Initial disturbances of small amplitude propagate in the flow as wave structures that may be represented by their frequency, wavenumber and growth rate. In this way a small perturbation has a general form  $v' = v(y) \exp[i(\alpha x + \beta z - \omega t)]$ . Where  $x$ ,  $y$  and  $z$  are the streamwise, normal and spanwise coordinate directions,  $\alpha$  and  $\beta$  are the streamwise and spanwise wavenumbers, and  $\omega$  the disturbance frequency. This solution is called a 'normal mode solution'.



The early work on stability of shear layers neglected the growth of the shear layer such that the mean flow could be represented by  $V = V(y)$  only, independent of the streamwise direction  $x$ . This assumption that the flow is ‘locally parallel’ greatly simplifies the resulting governing equation. The resulting ordinary differential equation is known as the ‘Orr-Sommerfeld’ equation (after the two scientists who derived the equation in the beginning of the century) and correspond to what is called a ‘local analysis’ since it does not depend explicitly on the streamwise coordinate. Another simplifying assumption was that the disturbances grow or decay in time (temporal analysis), such that  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ . The imaginary part represents the disturbance growth rate. With the advance of mathematical and computational methods it was possible to represent spatially growing disturbances assuming that  $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ , which results in a more complex equation.

Over the years the Orr-Sommerfeld equations have been extensively used and modified to account for nonparallel (Gaster, 1974; Saric and Nayfeh, 1975) and nonlinear effects (Eckhaus, 1965; Herbert, 1988). These studies were based on secondary instability theory and perturbation methods which involve a large amount of algebraic work. In the late eighties and early nineties, Herbert and Bertolotti (Herbert and Bertolotti, 1987; Bertolotti and Herbert, 1991) realized that using WKB approximations or multiple scales, it was possible to arrive at parabolized equations that could be marched downstream without further simplifications to arrive at ordinary differential equations and, consequently without further limiting assumptions. They called the resulting equations ‘Parabolized Stability Equations’ (PSE).

Since then, the PSE have been applied to a diverse range of laminar flow stability problems, including incompressible and compressible boundary layers, cross flow instability, centrifugal instability, wave interactions, receptivity and secondary instability analysis.

The PSE can take into account both nonlinear and nonparallel effects in a consistent way. It takes into account the history of the disturbance since it is a parabolic formulation. Unlike temporal analysis, in which it is assumed that the disturbances grow in time, it follows the spatial development of the flow. Compared to DNS solutions PSE solutions are much less computer intensive and can be run on desktop workstations.

## 2. PARABOLIZED STABILITY EQUATIONS

The formulation and numerical method presented in this paper was implemented in a code developed by the author (Mendonça, 1997). It is based on the original PSE formulation developed by Herbert and Bertolotti (Herbert and Bertolotti, 1987; Bertolotti and Herbert, 1991).

The Navier-Stokes equations for an incompressible flow of a Newtonian fluid are simplified by assuming that the dependent variables are decomposed into a mean component and a fluctuating component as:  $\vec{u}^* = \vec{U}^* + \vec{u}'^*$ , and  $p^* = P^* + p'^*$ , where  $\vec{u}^* = [u^*, v^*, w^*]^T$  is the velocity vector and  $p^*$  is the pressure. The superscript ‘\*’ indicates dimensional variables.

The coordinate system is based on the streamlines ( $\psi^*$ ) and potential lines ( $\phi^*$ ) of the inviscid flow over a curved plate. This choice of coordinate system is used to simplify the equations in curvilinear coordinate systems for the analysis of centrifugal instabilities.

The equations are nondimensionalized using  $\delta_0^*$  and  $U_\infty^*$  as the length and velocity scaling parameters, where  $\delta_0^* = (\nu^* \phi_0^* / U_\infty^*)^{1/2}$  is the boundary layer thickness parameter,  $U_\infty^*$  is the free stream velocity,  $\phi_0^*$  is a reference length taken as the streamwise location where initial conditions are applied, and  $\nu^*$  is the kinematic viscosity. The Reynolds number is defined as:  $Re = U_\infty^* \delta_0^* / \nu^*$ .



The mean flow is governed by Prandtl boundary layer equations for the flow over a flat plate. The resulting governing equations for the perturbations are elliptic and the perturbations propagate in the flow field as wave structures. The governing equations can be simplified if the wave like nature of the perturbations are represented by their frequency, wavenumber, and growth rate. The perturbation  $\Phi'$  is assumed to be composed of a slowly varying shape function and an exponential oscillatory wave term. It is represented mathematically as a Fourier expansion truncated to a finite number of modes:

$$\Phi' = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M \Phi_{n,m}(\phi, \psi) \exp \left[ \int_{\phi_0}^{\phi} a_{n,m}(\xi) d\xi + im\beta z - in\omega t \right]. \quad (1)$$

where  $a_{n,m}(\phi) = \gamma_{n,m}(\phi) + in\alpha(\phi)$ , and  $\Phi_{n,m}(\phi, \psi) = [u_{n,m}, v_{n,m}, w_{n,m}, p_{n,m}]^T$  is the complex shape function vector. This procedure is similar to a normal mode analysis, but, in this case, the shape function  $\Phi_{n,m}$  is a function of both  $\phi$  and  $\psi$ .

The streamwise growth rate  $\gamma_{n,m}$ , the streamwise wavenumber  $\alpha$ , and the spanwise wavenumber  $\beta$  were nondimensionalized using the boundary layer thickness parameter  $\delta_0^*$ . The frequency  $\omega$  was nondimensionalized using the free stream velocity  $U_\infty^*$  and the boundary layer thickness parameter  $\delta_0^*$ .

The perturbation variable  $\Phi'$ , as defined in Eq. (1), is substituted in the governing equations which are then simplified by assuming that the shape function, wavelength, and growth rate vary slowly in the streamwise direction. Second order derivatives and products of first order derivatives can, therefore, be neglected. After performing a harmonic balance in the frequency, a set of coupled nonlinear equations is obtained. These resulting equations are known as the Parabolized Stability Equations (PSE). For each mode  $(n, m)$  the equation in vector form results:

$$\overline{A}_{n,m} \Phi_{n,m} + \overline{B}_{n,m} \frac{\partial \Phi_{n,m}}{\partial \phi} + \overline{C}_{n,m} \frac{\partial \Phi_{n,m}}{\partial \psi} + \overline{D}_{n,m} \frac{\partial^2 \Phi_{n,m}}{\partial \psi^2} = \frac{\overline{E}_{n,m}}{e^{\int_{\phi_0}^{\phi} a_{n,m}(\xi) d\xi}}, \quad (2)$$

where the coefficient matrices can be found in Mendonça (1997).

The resulting equations are parabolic in  $\phi$  and the solution can be marched downstream given initial conditions at a starting position  $\phi_0$ . The approach is correct as long as the instabilities are convective and propagate in the direction of the mean flow, not affecting the flow field upstream.

The boundary conditions for Eq. (2) are given by homogeneous Dirichlet no-slip conditions at the wall, Neumann boundary conditions for the velocity components in the far field, and homogeneous Dirichlet condition for pressure in the far field. Non-homogeneous boundary conditions for the normal velocity components are also possible, allowing suction and blowing at the wall to be introduced. For the parabolic formulation, it is necessary to specify initial conditions at a starting position  $\phi_0$  downstream of the stagnation point at the leading edge of the curved plate. The initial conditions are obtained from Orr-Sommerfeld solutions for Tollmien-Schlichting waves and similar local solutions for centrifugal instability problems (Görtler or Dean problems).

## 2.1 Normalization condition

The splitting of the perturbation  $\Phi'(\phi, \psi, z, t)$  in Eq. (1) into two functions,  $\Phi_{n,m}(\phi, \psi)$  and  $a_{n,m}(\phi)$ , is ambiguous, since both are functions of the streamwise coordinate  $\phi$ . It is necessary to define how much variation will be represented by the shape function

$\Phi_{n,m}(\phi, \psi)$ , and how much will be represented by the complex wavenumber  $a_{n,m}(\phi)$ . This definition has to guarantee that rapid changes in the streamwise direction are avoided so that the hypothesis of slowly changing variables is not violated. The objective is to transfer fast variations of  $\Phi_{n,m}(\phi, \psi)$  in the streamwise direction to the streamwise complex wavenumber  $a_{n,m}(\phi) = \gamma_{n,m}(\phi) + i\alpha(\phi)$ . If this variation is represented by  $b_{n,m}$ , for each step in the streamwise direction it is necessary to iterate on  $a_{n,m}(\phi)$  until  $b_{n,m}$  is smaller than a given threshold. At each iteration  $k$ ,  $a_{n,m}(\phi)$  is updated according to  $(a_{n,m})_{k+1} = (a_{n,m})_k + (b_{n,m})_k$ . The variation  $b_{n,m}$  of the shape function can be monitored in different ways. Possible choices are presented below.

$$b_{n,m} = \frac{1}{\int_0^\infty \|\vec{u}_{n,m}\|^2 d\psi} \int_0^\infty \left( \vec{u}_{n,m}^\dagger \cdot \frac{\partial \vec{u}_{n,m}}{\partial \phi} \right) d\psi, \quad (3)$$

$$b_{n,m} = \frac{1}{\int_0^\infty E d\psi} \int_0^\infty \frac{\partial E}{\partial \phi} d\psi. \quad (4)$$

$$b_{n,m} = \frac{1}{|u_{n,m}(x, y_{max})|} \frac{\partial u_{n,m}(x, y_{max})}{\partial \phi}, \quad (5)$$

In Eq. (3),  $\vec{u}_{n,m}^\dagger$  is the complex conjugate of  $\vec{u}_{n,m}$ . The integral of  $\|\vec{u}_{n,m}\|^2$  was used to assure that the variation is independent from the magnitude of  $\vec{u}_{n,m}$ . Equation (4) monitors the variation of the Kinetic energy  $E = u_{n,m}^2 + v_{n,m}^2 + w_{n,m}^2$ . In Eq. (5)  $u_{n,m}(x, y_{max})$  is the streamwise velocity component measured at the location away from the wall where it reaches a maximum.

## 2.2 Numerical method

The system of parabolic nonlinear coupled equations given by Eq. (2) is solved numerically using finite differences. The partial differential equation is discretized implicitly using a second order backward differencing in the streamwise direction, and fourth order central differencing in the normal direction. The resulting coupled algebraic equations form a block pentadiagonal system which is solved by LU decomposition.

To start the computation a first order backward differencing is used. The first order approximation is used also in a few subsequent steps downstream in order to damp numerical transients more efficiently. For the points neighboring the boundaries, second order central differencing in the normal direction is used.

The nonlinear terms are evaluated iteratively at each step in the streamwise direction. The iterative process is used to enforce both the normalization condition and the convergence of the nonlinear terms. A Gauss-Siedel iteration with successive overrelaxation is used. The nonlinear products are evaluated in the time domain. The dependent variables in the frequency domain are converted to the time domain by an inverse Fast Fourier Transform subroutine. The nonlinear products are evaluated and the results are transformed back to the frequency domain. The complex wavenumber is updated at each iteration and the variation in the shape function is monitored through Eq. (3). The iteration is considered converged when the normalization condition is no larger than a given small threshold.

Results from the present numerical implementation of the PSE have been compared to experimental and numerical results for K-type breakdown, H-type breakdown and for the nonlinear development of Görtler Vortices. The code was able to reproduce the nonlinear development of interacting disturbances with good accuracy.

### 3. ON THE NORMALIZATION CONDITION

Using the code developed based on the above formulation, we may now investigate the effect of normalization condition on the results obtained for the evolution of Tollmien-Schlichting waves. Figure 1 presents a comparison between the three different normalization conditions presented above for the variation of the amplitude of a two-dimensional (2D) TS wave of frequency  $F = \omega/Re10^6 = 86$ . The computation starts at a stable position close to the lower branch of the neutral curve and continues up to a position past the upper branch of the neutral curve. It can be seen that the results are not dependent on the choice of the normalization condition. Figure 2 and 3 present the variation of the growth rate and streamwise wavenumber for the three different choices of the normalization condition presented above. It can be seen that the choice of the normalization condition changes slightly the value of these variables.

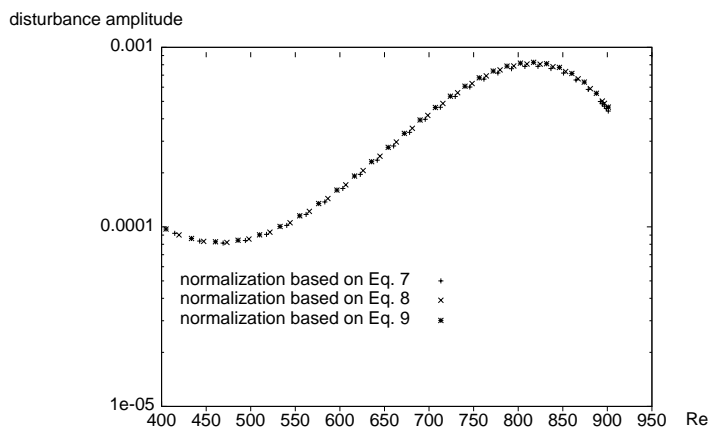


Figure 1: Growth and decay of the maximum amplitude of a 2D TS wave for different choices of normalization condition.

The real (physical) wavenumber and growth rate should take into account the variations left in the shape function. This is done by computing:

$$\bar{\gamma}(x) = \gamma(x) + \left[ \frac{1}{u_{n,m}(x, y_{max})} \frac{\partial u_{n,m}(x, y_{max})}{\partial \phi} \right]_r,$$

$$\bar{\alpha}(x) = \alpha(x) + \left[ \frac{1}{u_{n,m}(x, y_{max})} \frac{\partial u_{n,m}(x, y_{max})}{\partial \phi} \right]_i,$$

where the subscripts  $r$  and  $i$  represent the real and imaginary parts respectively.

It can be seen in figure 4 and 5 that the physical quantities are independent of the choice for the normalization condition. In fact, since the normalization condition transfers fast variations of the shape function  $\Phi_{n,m}$  to the exponential function  $\exp[\int a_{n,m}(\xi)d\xi]$ , as long as the hypothesis of slow variation of the shape function in the streamwise direction is not violated, small variations in the normalization condition does not change the results.

### 4. NONPARALLEL EFFECTS

Nonparallel effects are significant mainly for the evolution of three-dimensional (3D) disturbances. Using PSE to compute the growth rate of 2D TS waves Bertolotti (Bertolotti

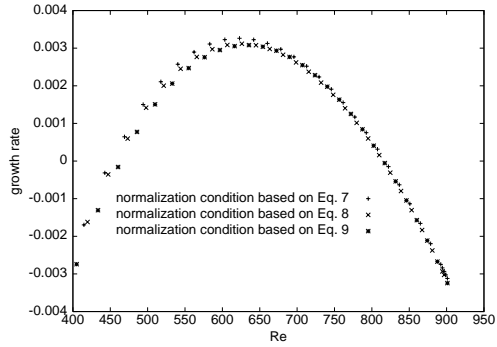


Figure 2: Variation of the growth rate for different choices of the normalization condition.

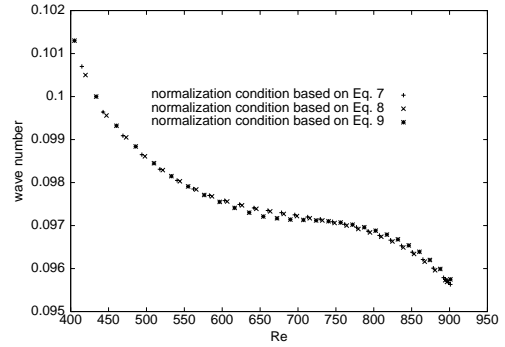


Figure 3: Variation of the streamwise wavenumber for different choices of the normalization condition.

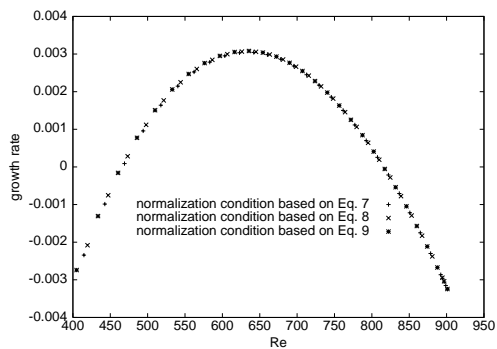


Figure 4: Variation of the physical growth rate.

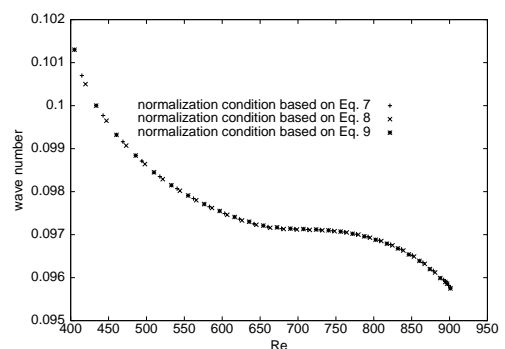


Figure 5: Variation of the physical streamwise wavenumber.

*et al.*, 1992) showed that the large discrepancies observed between experimental results and normal modes computations could not be attributed to the small effect of non-parallelism. These discrepancies are due to the choice of the way the disturbance growth is monitored, either based on amplitude, total kinetic energy or at a fixed distance from the wall.

For 3D TS waves nonparallel effects increase with the increase of the angle between the mean flow direction and the wave propagation direction. The present PSE implementation is now used to show this effect. Figure presents comparisons between local parallel computations and nonparallel PSE computations for different wavenumbers  $b = \beta 10^3 / Re$ . The TS wave frequency is  $F = \omega 10^6 / Re = 86$ . It can be seen that as  $b$  increases the oblique waves are destabilized by nonparallel effects. For  $b = .3$  the parallel theory predicts stable waves while nonparallel theory still predicts unstable disturbances for a range of Reynolds numbers.

## 5. SOME NONLINEAR RESULTS

In this section some computational results for the nonlinear evolution of 3D disturbances are presented and compared to experimental results to illustrate the capabilities of the PSE. Figure 7 presents results for the nonlinear evolution of Görtler vortices. The computational results are compared to experimental results (Swearingen and Blackwelder, 1987) for two different streamwise positions. AT  $x = 60$  cm the spanwise periodic structure is already visible. At  $x = 80$  cm the vortices are forming the characteristic mushroom

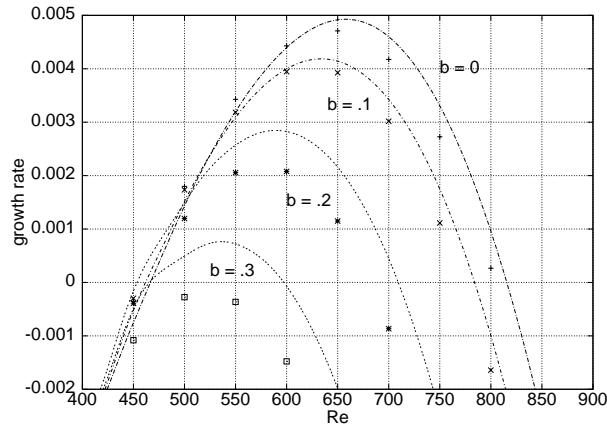


Figure 6: Growth rate based on maximum amplitude. Comparison between parallel (symbols) and nonparallel computations (lines).

type structures. The computational results compare well with the experimental results.

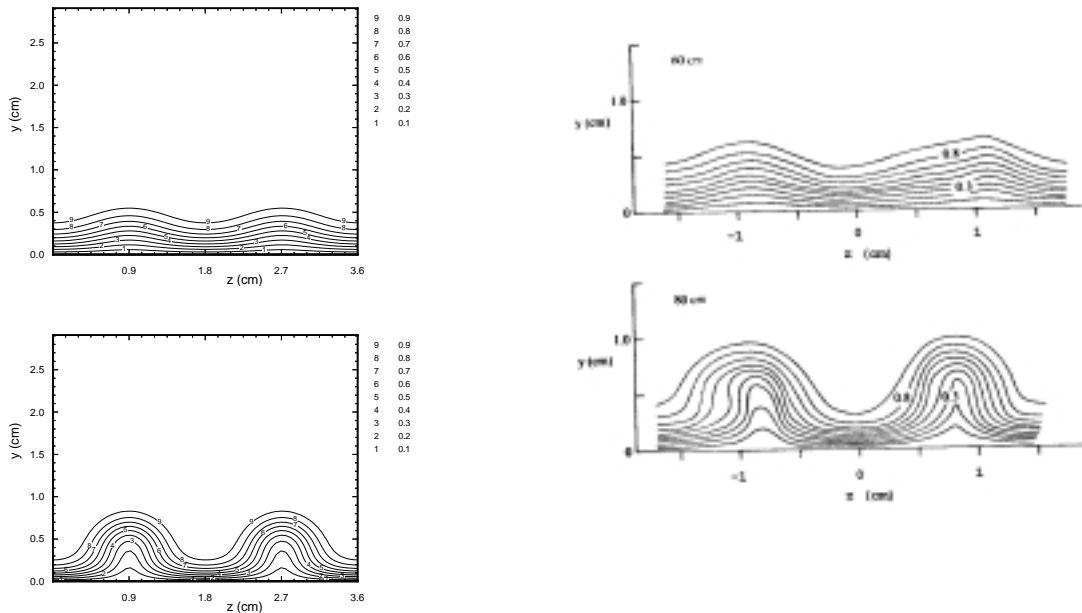


Figure 7: Nonlinear evolution of Görtler vortices. Comparison between PSE results (left) and experimental results (right) (Swearingen and Blackwelder, 1987) for the streamwise velocity distribution in the spanwise plane.

Figures 8 presents experimental results for the evolution of a 3D wave-train emanating from a harmonic point source. The nonlinear evolution is responsible for the development of streamwise streaks. These streaks evolve downstream and, at the centerline a negative streak splits into two. A positive streak grows between the two resulting streaks. A model problem consisting of a pair of oblique waves was used to represent the evolution of a wave-train. The computational result for this model problem shows the growth of longitudinal vortical structures given by Fourier modes  $(0,2)$  and  $(0,4)$ . The corresponding, spanwise periodic, longitudinal streaks are shown in Fig. 9. The figure shows a positive streak forming at the centerline, growing close to the wall and splitting a negative streak in a

way consistent with experimental results.

Detailed discussions for these results are presented elsewhere (Mendonça, 1997; Mendonça *et al.*, 2000b; Mendonça *et al.*, 2000a; Mendonça and Medeiros, 1999; Medeiros and Mendonça, 1999).

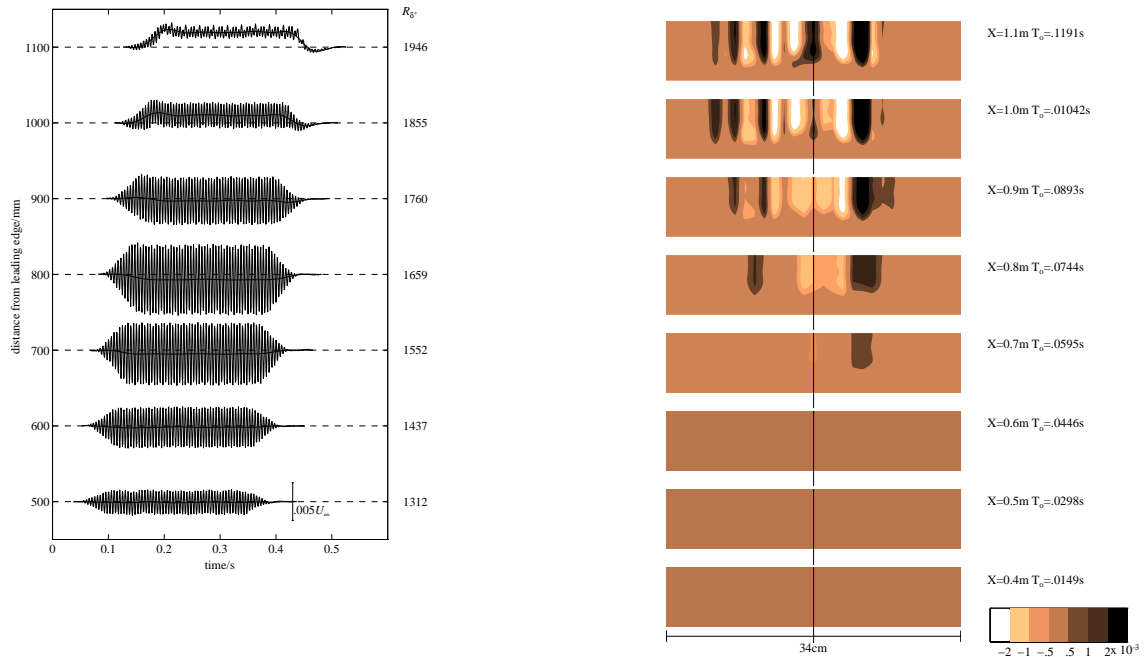


Figure 8: Experimental results for the evolution of a three-dimensional wave-train emanating from a point source. Left – the centerline evolution showing the growth of a mean flow distortion that changes from negative to positive. Right – downstream evolution of longitudinal streaks showing the spanwise structure with the splitting of a negative streak and the growth of a positive streak at the centerline.

## 6. CONCLUSIONS

The Parabolized Stability Equations can be used to study the propagation of traveling and stationary convected disturbances in slowly varying shear layers. They are able to take into account nonlinear, nonparallel effects in a consistent way. The PSE involves less analytical work than a multiple scales analysis and is much less computationally intensive than a direct numerical simulation.

A PSE code has been successfully implemented to study the nonlinear interaction of three-dimensional disturbances. This code has been used by the author and co-workers to investigate the evolution of longitudinal stationary structures due to centrifugal and nonlinear effects. The present review shows that the choice of the normalization condition does not affect the physical growth rate and wavenumbers. It also shows that nonparallel effects are significant for three-dimensional disturbances and should be taken into account in a stability analysis.

## 5. ACKNOWLEDGMENT

The author would like to acknowledge the financial support received from FAPESP for the participation in the CONEM 2000.

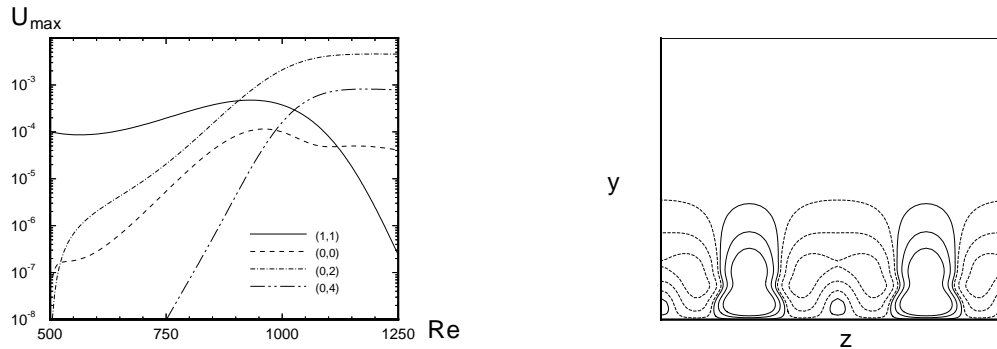


Figure 9: Evolution of a pair of oblique waves as a model problem. left – Amplitude variation of different Fourier modes showing the evolution of a mean flow distortion with spanwise periodicity given by Fourier modes (0,0), (0,2) and (0,4). right – Spanwise structure showing the splitting of a streamwise streak in a way consistent with the experimental results (solid lines - positive velocity, dashed lines - negative velocity).

## 7. REFERENCES

- Bertolotti, F. P., and Herbert, Th. 1991. Analysis of the Linear Stability of Compressible Boundary Layers Using PSE. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **3**, 117–124.
- Bertolotti, F. P., Herbert, Th., and Spalart, P. R. 1992. Linear and nonlinear stability of the Blasius Boundary Layers. *J. Fluid Mech.*, **242**, 441–474.
- Eckhaus, Wiktor. 1965. *Studies in Non-Linear Stability Theory*. springer Tracts in natural Philosophy. Springer–Verlag.
- Gaster, M. 1974. On the effect of boundary layer growth on flow stability. *J. Fluid Mechanics*, **s66**, 465–480.
- Herbert, Th. 1988. Secondary instability of boundary layers. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **20**, 487–526.
- Herbert, Th., and Bertolotti, F. P. 1987. Stability analysis of nonparallel boundary layers. *Bull. Am. Phys. Soc.*, **32**, 2079.
- Medeiros, M. A. F., and Mendonça, M. T. 1999. Nonlinear Three Dimensional Wavetrains of Small Amplitude in Boundary Layers: Experiments, Theory and Computations. *In: The IUTAM 99 Symposium on Laminar-Turbulent Transition*.
- Mendonça, M. T. 1997. *Numerical Analysis of Görtler Vortices Tollmien-Schlichting Waves Interaction With a Spatial Nonparallel Model*. Ph.D. thesis, The PennState University.
- Mendonça, M. T., and Medeiros, M. A. F. 1999. Numerical investigation of nonlinear evolution of three-dimensional wavetrains in flat plate boundary layers. *In: Proceedings of the XV COBEM, Brazilian Congress on Mechanical Engineering*.
- Mendonça, M. T., Pauley, L. L., and Morris, P. J. 2000a. Influence of Wave Frequency on Görtler Vortices, Three-dimensional Tollmien-Schlichting Waves Interaction. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas - RBCM*, **XXII**.

- Mendonça, M. T., Morris, P. J., and Pauley, L. L. 2000b. Interaction Between Görtler Vortices and 2D Tollmien-Schlichting waves. *Physics of Fluids*, **12**(5), 1–11.
- Saric, W. S., and Nayfeh, A. H. 1975. Nonparallel stability of boundary layer flows. *Physics of Fluids*, **18**, 945–950.
- Swearingen, J. D., and Blackwelder, R. F. 1987. The Growth and Breakdown of Streamwise Vortices in the Presence of a Wall. *J. Fluid Mechanics*, **182**, 255–290.



## ENSAIOS BIDIMENSIONAIS EM TÚNEL DE VENTO

**Luís Fernando Gouveia de Moraes**

**Matsuo Chisaki**

CTA / IAE / ASA-L (Túnel de Vento), Pça. Mal. Eduardo Gomes 50, Cep. 12228-904  
São José dos Campos –S.P, e-mail : [matsuo@iae.cta.br](mailto:matsuo@iae.cta.br) e [lfgmoraes@iae.cta.br](mailto:lfgmoraes@iae.cta.br) .

### RESUMO

Este artigo apresenta a metodologia empregada em ensaios de perfis aerodinâmicos no túnel de vento do Centro Técnico Aeroespacial (CTA). Utiliza-se um perfil NACA0012 entre paredes bidimensionais e obtém-se os valores das forças, momentos e distribuição de pressões no perfil. Utiliza-se também um rake de arrasto de modo a obter o arrasto viscoso. Compara-se os resultados obtidos por balança e integração de pressões àqueles apresentados na literatura. Comenta-se os aspectos de interferência e sua influência sobre os valores da sustentação máxima e arrasto.

**Palavras Chave :** Túnel de Vento, Bidimensional, Perfil, CTA, NACA0012

### 1. INTRODUÇÃO

A determinação dos coeficientes aerodinâmicos de uma asa, e portanto do seu desempenho, está diretamente relacionada aos coeficientes aerodinâmicos dos perfis (seções transversais da asas) que a compõe. A correta simulação do escoamento em um perfil requer a bidimensionalidade do escoamento. Ou seja, a inexistência de qualquer componente de velocidade, na direção da envergadura, induzida pelos vórtices de ponta de asa. Para obtenção de tal escoamento, seria necessário uma asa com envergadura infinita - o que seria impraticável.

Nos túneis de vento, a “eliminação” dos vórtices de ponta de asa é simulada unindo-se as extremidades da asa as paredes do túnel ou às paredes bidimensionais. Em algumas montagens, a asa é colocada na horizontal ou vertical, sendo a parte central instrumentada com uma balança. Todo o conjunto da asa pode ser movimentado em ângulo de ataque ( $\alpha$ ) e há uma pequena separação entre a seção central e as que compõem as pontas. Isto, com o intuito de evitar que qualquer interferência produzida na junção asa-parede possa comprometer a bidimensionalidade do escoamento e afetar a parte central.

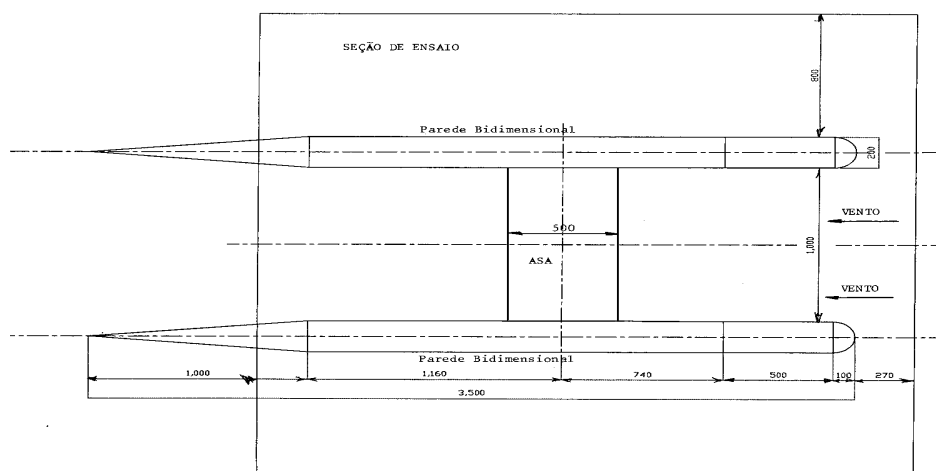
Em outros casos, empregam-se as “paredes bidimensionais” que são inseridas verticalmente na seção de ensaio ( S.E ) do túnel. Estas, possuem o objetivo básico de reduzir os custos de confecção do modelo e servir de carenagem aos mastros da balança externa e ao dispositivo de posicionamento em ângulo de ataque ( $\alpha$ ). Além do que, ela propicia uma espessura de camada limite inferior àquela existente na parede do túnel – para a mesma posição considerada. Entretanto, a razão entre a espessura da camada limite e a envergadura pode ser severa para a utilização das paredes bidimensionais. Em ambos os casos, há uma

distribuição de tomadas de pressão na superfície da asa – ou nas paredes do túnel - possibilitando a obtenção de forças e momentos por integração.

A aplicabilidade dos ensaios bidimensionais pode ser estendida às engenharias civil (vigas expostas ao vento) e automobilística ( aerofólios e distribuição de pressão na linha média de veículos).

## 2. METODOLOGIA

Os ensaios para levantamento dos coeficientes aerodinâmicos de perfis – denominados “ensaios bidimensionais” – são realizados no túnel de vento do CTA desde a década de cinquenta e fornecem dados importantes para a indústria aeronáutica nacional. Entretanto, à partir de 87, o ensaio passou a exigir a montagem de duas paredes verticais, ôcas, com vinte centímetros de espessura, distanciadas de um metro entre si e alinhadas com o escoamento. Estas, as chamadas “paredes bidimensionais”, no presente trabalho, suportam uma asa de 1m de envergadura e 0,5 m de corda pelas suas pontas, figura 1. O número de Reynolds do ensaio é da ordem de  $2,4 \cdot 10^6$  e a pressão dinâmica do túnel (à frente das paredes) de 250mmH<sub>2</sub>O. As paredes bidimensionais contêm em sua superfície interna um rasgo circular o qual acomoda (sem possibilidade de contato com elas) um disco de 0,95m de diâmetro que está solidário ao perfil (para evitar que sejam gerados vórtices de ponta de asa) e ao mastro da balança. Esta metodologia é similar à utilizada por Papadakis *et al.* (1999).



**Figura 1.** Disposição das paredes bidimensionais

### 2.1 MEDIDAS DE FORÇAS E MOMENTOS COM A BALANÇA

O túnel de vento do CTA - **maior da América Latina em operação comercial** – possui circuito fechado e seção de ensaios com 2,1m de altura, 3,0m de largura e 3,0m de comprimento. A razão de contração é de 15:1 apresentando velocidade máxima de 127 m/s e nível de turbulência da ordem de 2%.

A balança externa utilizada nas medições é a Taller & Cooper, situada sob a S.E, é do tipo piramidal com 6 componentes (3 forças e 3 momentos) possuindo em cada uma destas uma célula de carga – cuja capacidade varia conforme o ensaio. São empregados 8

condicionadores de sinal – 1 para cada célula de carga e os restantes para os sensores de temperatura e pressão dinâmica (tubo de Pitot). Estes condicionadores proporcionam um controle na alimentação elétrica (que em geral é de 10 Volts) dos sensores e reduzem os níveis de ruído destes e da linha de transmissão nos sinais eletrônicos.

Um *scanner* HP-3497A é responsável pela leitura dos sensores alternadamente (leitura “simultânea” de todas as componentes) e 30 vezes para cada uma delas. O sinal resultante é a média aritmética para cada componente. A conversão dos sinais eletrônicos, obtidos no ensaio, para forças e momentos e posterior adimensionalização é possível através de uma metodologia de calibração da balança desenvolvida e implementada no túnel na década de 70, segundo variações realizadas no exterior. No nosso caso, admite-se carregamentos simultâneos em duas componentes e obtém-se as saídas das células de carga. Isto cria uma matriz de calibração de dimensão 6x27.

## 2.2 MEDIDAS DAS PRESSÕES

As pressões foram obtidas graças a 60 captosres, igualmente distribuídos no intradorso e extradorso, e 93 no pente (*rake*) de arrasto. Estas, são conectadas a 3 *scanivalves* comandadas por um programa desenvolvido no ambiente *LabView* e em uso no PC com as placas SCXI 1121 e SCXI 1160.

O programa para redução e integração das pressões foi desenvolvido em Fortran para a integração numérica adotou-se inicialmente o método de ajuste de curvas por *splines*. No entanto, os resultados não foram coerentes e o método de integração passou a ser o trapezoidal (com resultados iguais ao da quadratura Gaussiana). Todos estes métodos apresentaram alguns problemas no cálculo do coeficiente de arrasto (Cd) quando o perfil estava em ângulos de ataque acima de 10 graus.

A elevação no ângulo de ataque – aumento do bloqueio - associado ao confinamento do escoamento, produz grandes variações de pressão dinâmica entre o chão e o teto da S.E; à frente do perfil. Surge então a seguinte dúvida: qual será o valor para a pressão dinâmica do escoamento não perturbado à frente do perfil ( $q_0$ ) ? Ficou clara a necessidade de definir um valor de  $q_0$  para cada ângulo de ataque e isto foi conseguido da seguinte forma: empregou-se um pente com 15 tubos de *Pitot* espaçados de 13cm entre si e posicionado à frente do perfil. Eliminando-se as leituras do primeiro e do último, devido à proximidade com a parede, obteve-se o valor médio, segundo :

$$q_0 = \frac{\sum_{i=2}^{14} q_i * 0,13}{1,69} \quad (1)$$

Os valores  $q_i$  referem-se à pressão dinâmica “sentida” por cada *Pitot* e  $q_0$  é a média do plano por eles formado. Note-se que os valores de  $q_i$  e  $q_0$  são médios (no sentido temporal) e obtidos para cada ângulo de ataque ( $\alpha$ ). Três posições à frente do perfil foram sondadas até obter-se um valor de  $q_0$  menos sensível à variações no ângulo de ataque (o que seria esperado no caso de um perfil não confinado) e flutuações na pressão dinâmica do túnel. Para o estudo em questão, obteve-se as seguintes expressões – admitindo  $q_0$  constante para cada ângulo de ataque - adotando um ajuste de curvas:

$$\text{para } -2 \leq \alpha \leq +4 \text{ graus} \\ q_0 = q_{\text{túnel}} \cdot (6,963E-5 \cdot \alpha^2 + 1,008E-3 \cdot \alpha + 1,418) \quad (2a)$$

para  $+6 \leq \alpha \leq +13$  graus

$$q_0 = q_{\text{túnel}} \cdot (-1,194E-4 \cdot \alpha^3 + 2,970E-3 \cdot \alpha^2 - 2,200E-2 \cdot \alpha + 1,473) \quad (2b)$$

Agora,  $q_0$  reflete o valor da pressão dinâmica **média** a ser utilizada nas adimensionalizações dos coeficientes aerodinâmicos e de pressão. O valor  $q_{\text{túnel}}$  é a pressão dinâmica do túnel numa seção a 4 m à frente das paredes bidimensionais. Note-se que o erro relativo entre os valores de  $q_0$  a zero graus e a 10 graus é da ordem de 0,89 % e que a presença das paredes, sem perfil, gera um aumento da pressão dinâmica – em relação à do túnel de 48 %.

Para obtenção do coeficiente de arrasto total, o pente de arrasto foi posicionado duas cordas atrás do NACA0012. Este coeficiente é obtido pelo método da variação da quantidade de movimento e apresentado em Pope *et al.* (1999) :

$$C_d = 2 * \int_0^h \left[ \sqrt{\frac{q}{q_0}} - \frac{q}{q_0} \right] * \frac{dy}{c} \quad (3)$$

Onde :

$h$  – distância entre o primeiro e o último “pitot” do “rake” de arrasto

$c$  – corda do perfil

$q = q(y)$  – pressão dinâmica na esteira

$y$  – coordenada vertical, perpendicular ao plano da esteira.

$q_0 = q_0(y)$  – pressão dinâmica à frente do perfil (constante)

A pressão dinâmica na esteira ( $q(y)$ ) decorre da subtração entre a pressão total - medida em cada tomada no “rake” de arrasto - e a pressão estática (esta, obtida por outro sensor em três posições neste mesmo “rake”). A expressão acima é válida, segundo comprovação experimental, na região da esteira compreendida nos 80 cm centrais da asa.

### 3. RESULTADOS

Os resultados serão confrontados da seguinte maneira :

- pressão com balança
- resultados deste trabalho com o de outros autores

#### 3.1 PRESSÃO E BALANÇA

Inicialmente, faremos uma análise dos erros relacionados às medições baseando-se em ensaios de repetitividade realizados com o NACA0012. São apresentados os resultados médios dos coeficientes de sustentação ( $C_l$ ), arrasto ( $C_d$ ) e momento de arfagem ( $C_m$ ); bem como os valores dos respectivos desvios padrões  $DC_l$ ,  $DC_d$  e  $DC_m$ . Obteve-se o seguinte conjunto de valores :

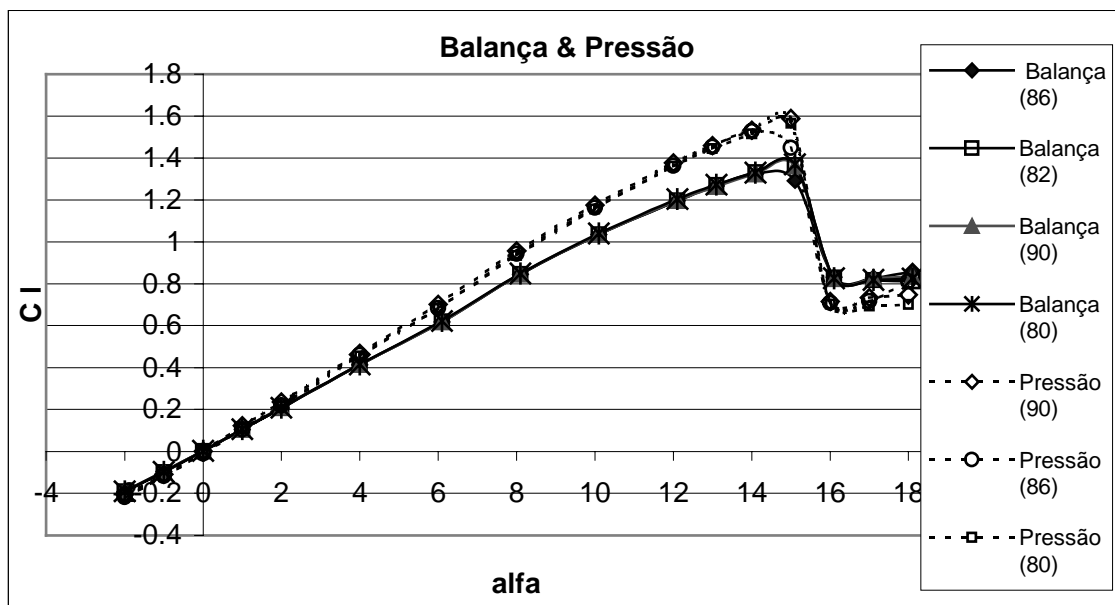
**Tabela 1.** Coef. Aerodinâmicos e desvios padrão para os ensaios de **pressão**

Cálculos da Integração dos Coef. De Pressão				Desvios Padrões		
Alfa	Cl medio	Cd medio	Cm medio	DCI	DCd	DCm
-2	-0,2161	0,0082	-0,00046	0,0072	0,0034	0,00274
-1	-0,1159	0,0076	0,00018	0,0072	0,0033	0,00236
0	-0,0047	0,0080	0,00109	0,0066	0,0014	0,00247
1	0,1105	0,0067	0,00164	0,0070	0,0049	0,00216
2	0,2235	0,0075	0,00227	0,0084	0,0029	0,00190
4	0,4590	0,0108	0,00246	0,0086	0,0025	0,00254
6	0,6900	0,0124	0,00646	0,0081	0,0034	0,00262
8	0,9440	0,0119	0,00101	0,0084	0,0041	0,00321
10	1,1611	0,0141	0,00446	0,0092	0,0040	0,00307
12	1,3630	0,0213	0,01103	0,0110	0,0057	0,00458
13	1,4518	0,0239	0,01482	0,0082	0,0067	0,00688
14	1,5263	0,0277	0,01791	0,0118	0,0045	0,00951
15	1,5799	0,0612	0,00173	0,0134	0,0792	0,01112
16	0,7583	0,2738	-0,1433	0,1184	0,0215	0,06952
17	0,7624	0,2768	-0,15282	0,0866	0,0366	0,06312
18	0,7726	0,2774	-0,14990	0,0890	0,0470	0,05542

Da tabela acima, constata-se que o coeficiente de sustentação máximo ( $C_{l\text{máx}}$ ) ocorre à uma incidência de 15 graus e a inclinação da curva  $C_l$  versus alfa ( $C_l\alpha$ ) vale 6,475. No gráfico abaixo, estabelece-se a comparação entre os resultados via pressão e via balança, evidenciando-se uma razoável distinção entre as duas metodologias.

**Tabela 2.** Coef. Aerodinâmicos e desvios Padrão para os ensaios de **balança**

Valores Médios da Balança				Incertezas		
	Cl médio	Cd médio	Cm médio	DCI	DCd	DCm
-2	-0.1895	0.0128	0.0068	0.0009	0.0001	0.0002
-1	-0.0971	0.0119	0.0063	0.0014	0.0001	0.0002
0	0.0032	0.0114	0.0056	0.0014	0.0001	0.0002
1	0.1057	0.0116	0.0047	0.0014	0.0001	0.0002
2	0.2077	0.0123	0.0040	0.0014	0.0001	0.0002
4	0.4139	0.0147	0.0025	0.0014	0.0001	0.0002
6.1	0.6195	0.0179	0.0017	0.0020	0.0001	0.0002
8.1	0.8455	0.0234	-0.0039	0.0036	0.0001	0.0004
10.1	1.0348	0.0304	-0.0039	0.0026	0.0002	0.0003
12.1	1.1976	0.0405	-0.0017	0.0032	0.0002	0.0003
13.1	1.2674	0.0467	-0.0003	0.0031	0.0002	0.0003
14.1	1.3255	0.0544	0.0010	0.0037	0.0002	0.0003
15.1	1.3018	0.0813	-0.0076	0.1436	0.0378	0.0198
16.1	0.8577	0.2143	-0.0671	0.0545	0.0125	0.0073
17.1	0.8529	0.2348	-0.0682	0.0515	0.0116	0.0072
18.1	0.8512	0.2572	-0.0684	0.0425	0.0141	0.0096



**Figura 2.** Curva Cl versus alfa ( $\alpha$ )

Em termos comparativos, observam-se :

a) os ensaios de pressão apresentaram valores de  $Cl_{m\acute{a}x}$  e  $Cl_{\alpha}$  superiores aos ensaios com balança.

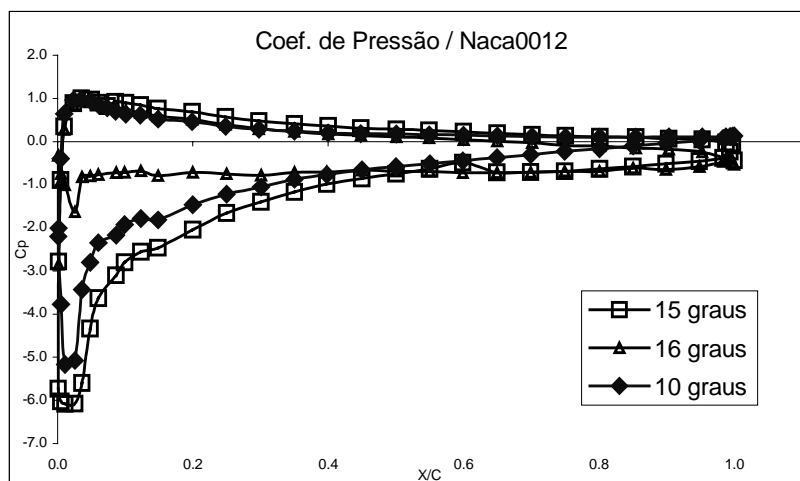
b) em alguns ensaios, o  $Cl_{m\acute{a}x}$  ocorre a 14 graus ao invés de 15 graus.

Note-se, que nos ensaios de balança não foi realizada a tara aerodinâmica. Esta correção não existe nos ensaios de pressão. Isto causa um valor bem elevado no coeficiente de arrasto.

A justificativa para a) é a complexa e prejudicial interferência parede-asa. A curva obtida por integração dos coeficientes de pressão ( $C_p$ ) é obtida na região central da asa, longe portanto dos efeitos da parede. Para a balança, que mede as cargas e a interferência, a interação entre a camada limite formada na parede com a asa cria uma região descolada sobre a asa reduzindo sua sustentação. Outro problema causado por esta interferência, é a destruição da bidimensionalidade da esteira, conduzindo a medidas errôneas de arrasto (método da equação 3). Esta interferência também é fortemente influenciada pelo aumento do bloqueio, ou seja, da incidência.

Para o item b), a presença do  $Cl_{m\acute{a}x}$  a 14 graus (tanto nos ensaios de balança como nos de pressão) é explicada pela ocorrência de estol dinâmico na região próxima ao bordo de ataque e à esquerda. Ensaios de visualização evidenciaram este fenômeno, que tem origem em alguma instabilidade no escoamento e altera a média das leituras.

Constata-se, também na figura 2, a ocorrência de um estol abrupto denominado “estol de bordo de ataque”. Segundo Polhamus (1996), este tipo de estol está associado à uma pequena bolha laminar, com comprimento de aproximadamente 1% da corda, que devido ao aumento do ângulo de ataque transiciona e explode, causando o estol. Esta bolha surge à partir dos 6 graus, está localizada próximo ao bordo de ataque tem  $C_p$  constante. Ela pode ser facilmente observada na figura 3.

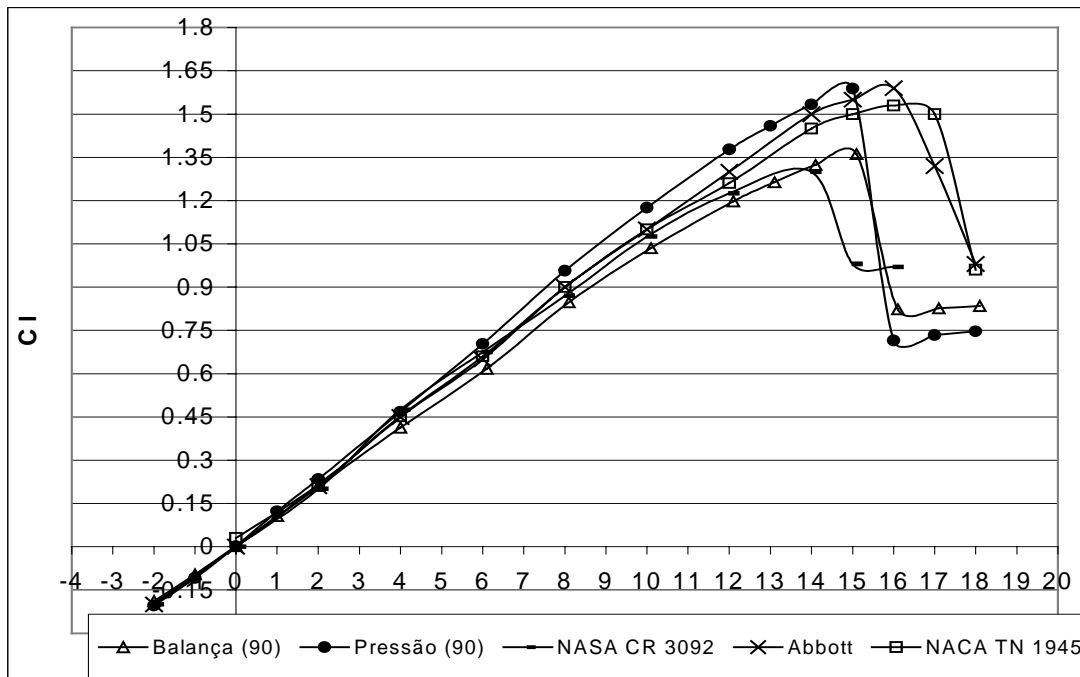


**Figura 3.** Distribuição de Cp sobre o perfil

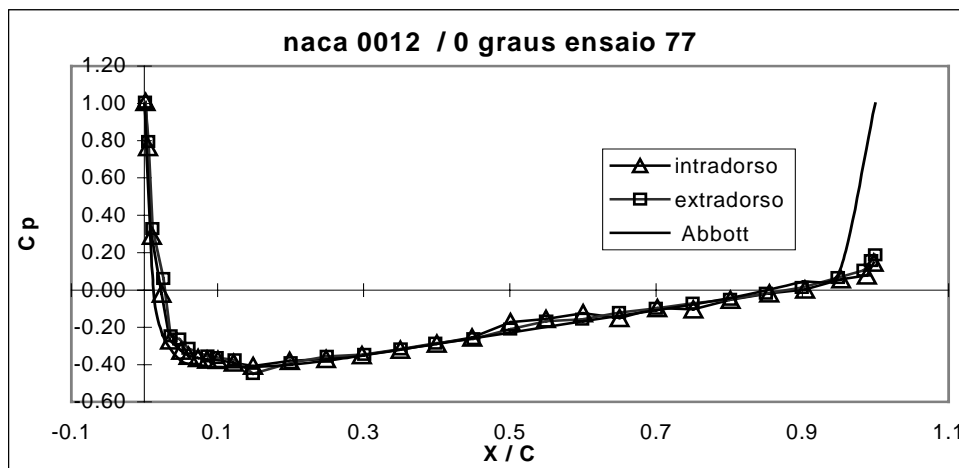
### 3.2 COMPARAÇÃO COM OUTROS AUTORES

O problema da interferência condena a maioria dos resultados de ensaios bidimensionais, principalmente aqueles empregando *slat*. O trabalho desenvolvido por Van de Berg (1970), além de restringir a corda da asa a 30% da altura do túnel, afirma ser imperativo a utilização de sopro ou aspiração da camada limite na parede junto ao modelo. Mesmo assim, as cargas só devem ser medidas no centro do modelo e, no caso da utilização do pente de arrasto, a bidimensionalidade da esteira deve estar assegurada (verificada). Para o NACA0012, a maioria dos resultados publicados: Abbott & Doenhoff (1959), St. Hilaire *et al.* (1979) (NASA CR 3092) e Polhamus(1996) não possuem – ou não fazem menção – à dispositivos para reduzir a interferência e as correções de túnel utilizadas. Os resultados apresentados em Loftin & Smith (1949) foram obtidos para um Reynolds de  $3,0 \cdot 10^6$  e são de balança e corrigidos. Por isso, é necessária uma certa reserva na análise e comparação dos coeficientes obtidos. Na figura 4 compara-se os resultados com outros autores (valores adquiridos diretamente dos gráficos das respectivas referências e estão sujeitos a erros). O estol apresentado no gráfico do Abbott é abrupto e, na figura 4 isso não é evidente. Aliás, é consenso entre as referências consultadas que o estol do NACA0012 é de bordo de ataque e, portanto extremamente abrupto.

Em termos da distribuição de pressões sobre o perfil, comparou-se os valores medidos àqueles do Abbott & Doenhoff (1959), vide figura 5. Observa-se boa concordância nos valores, atestando a semelhança entre os ensaios. Os valores obtidos no túnel do CTA pela pressão não estão corrigidos (quanto ao bloqueio, pressão dinâmica e curvatura de linhas de corrente – ângulo de ataque), podendo estar aí – além do Reynolds ter sido um pouco inferior - a diferença entre os trabalhos.



**Figura 4.** Comparação com outras referências



**Figura 5.** Comparação da curva de Cp do ensaio com o Abbot & Doenhoff

#### 4. CONCLUSÃO

Descreveu-se a metodologia adotada para o ensaio de perfis e evidenciou-se os efeitos nocivos da interferência asa-parede. A comparação dos resultados foi estabelecida revelando que a integração dos coeficientes de pressão fornece valores de Cl superiores ao da balança e que, em ambos os casos, estes resultados são compatíveis àqueles obtidos em outros túneis de vento.

Os ensaios bidimensionais são dos mais difíceis de serem realizados e algumas divergências são encontradas relativamente aos métodos numéricos. Por isso um trabalho experimental intenso deve ser conduzido de modo a evitar efeitos tridimensionais.



Como seria de se esperar, o gradiente de pressão estática entre as paredes bidimensionais é alterado em relação ao caso sem parede e isso influencia principalmente no arrasto.

O emprego de controle ativo (sopro ou aspiração) para redução da camada limite na parede é útil para os ensaios com *slat*, no entanto, a principal dificuldade é obter a vazão que fornece o valor real dos coeficientes. Assim como, para cada perfil, as fendas de sopro ou aspiração teriam de ser reposicionadas. Uma solução sugerida por vários autores mas, por vezes impraticável, é a diminuição da corda do perfil – com conseqüente redução do número de Reynolds. Esta redução no Reynolds é danosa pois reduz a similaridade do ensaio com as condições de vôo.

A não adoção de correções de túnel para os coeficientes obtidos por pressão foi proposital e estudo adicional será realizado em vistas à determinar as correções a serem adotadas. Já nos ensaios com balança, adotou-se as correções abordadas no Pope (1999).

Assim sendo, é apresentada uma ferramenta – que apesar de algumas limitações – é fundamental para o projeto de novos perfis.

**Agradecemos** o empenho e dedicação dos técnicos e analistas de sistema das seções de ensaios e instrumentação, da ASA-L, pelo apoio e dedicação durante o ensaio.

## 5. REFERÊNCIAS

- Abbott, I. H., Doenhoff, A. E., 1959, “ Theory of Wing Sections ”, ed. Dover, Estados Unidos, 693p.
- Loftin, L. K., Smith, H. A., 1949, “Aerodynamics of 15 NACA Airfoil sections at seven Reynolds number from  $0.7 \times 10^6$  to  $9,0 \times 10^6$ ”, NACA TN 1945, Estados Unidos, 75p.
- Papadakis M., Alansatan S., Seltman M., 1999, “Experimental Study of Simulated Ice Shapes on a NACA 0011 Airfoil”, paper AIAA 99-0096, 37<sup>th</sup> AIAA, Estados Unidos, 29p.
- Polhamus, E., 1996, “ A survey of Reynolds Number and wing Geometry effects on lift characteristics in the low speed stall region ”, NASA CR 4745, Estados Unidos, 94p.
- Pope A., Rae W. H., Barlow J. B., 1999, “Low Speed Wind Tunnel Testing”, Wiley-Interscience, Estados Unidos, 713p.
- St. Hilaire, A. O., Carta, F. O., Fint, M. R., Jepson, W. D., 1979, “ The Influence of Sweep on the Aerodynamic Loading of na Oscillating NACA0012 Airfoil – Vol I - Tech. Rep.”, NASA CR3092, Estados Unidos, 135p.
- Van den Berg, B., 1970, “Some notes on Two-dimensional High-Lift Tests in Wind Tunnels”, AGARD Lectures Series N. 43, França, 487p.

# CONTAGEM, MEDIÇÃO E DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS DE VELOCIDADES DE FITOPLANTOS POR PROCESSAMENTO DIGITAL DE IMAGENS (PDI).

**Sônia Magalhães dos Santos (\*)**

**Vilson Carlos da Silva Ferreira (\*\*)**

**Lucas Luís Gutkoski (\*\*)**

(\*) Fundação Universidade de Rio Grande, Departamento de Física - Rio Grande

(\*\*) Universidade federal do Rio Grande do Sul, Departamento de Engenharia Mecânica – 90050-170, Porto Alegre, RS, Brasil. E-mail: [vferreir@vortex.urgs.br](mailto:vferreir@vortex.urgs.br)

## Resumo

O desenvolvimento de *fitoplântos* (microalgas), nutrientes naturais de larvas de peixe e camarões criados em águas salgada ou doce, é acompanhado através do processamento digital de imagens. Imagens de microalgas são adquiridas por meio de um microscópio conectado a uma câmara de vídeo CCD, monitor e microcomputador com placa de aquisição de dados, sendo arquivadas para posterior processamento. Técnicas de caracterização de imagens permitem detectar os contornos, as discontinuidades, os eixos principais através da aplicação de operadores matemáticos. A velocidade de cada microalga é também obtida por meio de velocimetria por processamento de imagens de partículas (PIV). O reconhecimento e a interpretação de padrões permitem classificar os diferentes tipos de partículas existente num tanque de cultivo o que permite a análise das taxas de crescimento e sedimentação. O presente trabalho faz parte do projeto “Repovoamento do camarão rosa *Penaeus Paulensis* no estuário da Lagoa dos Patos, Rio Grande , RS”.

**Palavras-chave:** Aquisição de imagens, Processamento de Imagens, Velocimetria por imagem de partícula

## 1. INTRODUÇÃO

As matrizes do camarão rosa são obtidas por captura ou através do crescimento em laboratório. Conforme Marchiori (1996), as fêmeas são induzidas à maturação por técnicas que envolvem foto período, controle de temperatura, salinidade da água, alimentação específica e indução hormonal. Quando já estão maduras, elas são transportadas para os tanques de desova. Os ovos fertilizados produzem as larvas, que são transferidas para os tanques de larvicultura. Esta atividade, envolve os estágios de *náuplio*, quando a larva é vitelínica e ainda não precisa de alimentação, *protozoa*, quando ela se alimenta de *fitoplâncton*, *misis*, quando a alimentação é com *zooplâncton* e ração e, finalmente, a pós-larva, quando, já pequenos camarões, atingem o comprimento de 0,010 m. Neste estágio são levados para os berçários onde permanecem por aproximadamente 30 dias.

Esses berçários se constituem de 10 tanques de 12 mil litros, que têm capacidade para 300 mil pós-larvas. O passo seguinte é o transporte dos organismos para gaiolas e cercados no estuário da Lagoa dos Patos - RS, onde eles ficam para reduzir o *stress* ocasionado pela

transferência e para crescimento. Ao atingirem um tamanho de aproximadamente 0,03 m, os espécimes juvenis são liberados para o ambiente natural.

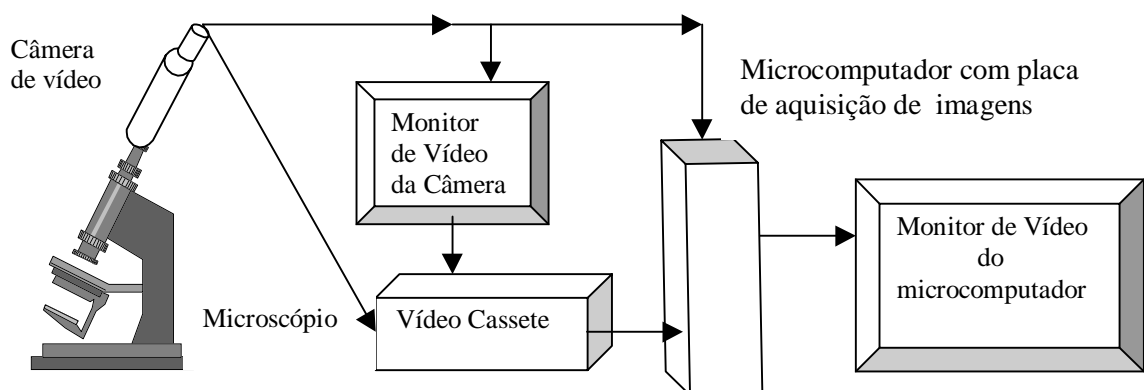
A importância do cultivo de *fitoplâncton* reside na grande variedade de finalidades em que podem vir a ser utilizados: estudos de morfologia, genética, fisiologia, ecologia, citologia, etc.... Entretanto, o aspecto mais importante na atualidade se concentra na sua utilização como alimento para a grande variedade de organismos aquáticos cultivados em nível comercial ou experimental. O alto conteúdo protéico e a presença de vários elementos essenciais tornam o *fitoplâncton* o alimento ideal para as primeiras fases do desenvolvimento de larvas de crustáceos, moluscos e peixes. Na produção como alimento de organismos cultivados em larga escala, deve-se proporcionar condições que permitam o rápido crescimento da espécie cultivada.

Este trabalho apresenta técnicas de monitoramento do desenvolvimento de amostras de *fitoplâncton* coletadas em tanques de cultivo empregando processamento digital de imagens. A finalidade do estudo é determinar parâmetros otimizados em função da velocidade de movimentação, da densidade de microalgas presente e da geometria dos tanques para as taxas de crescimento e de sedimentação permitindo a maximização do crescimento das larvas de peixe e camarões rosa. Os resultados promoverão um incremento nos sistemas de cultivos de organismos aquáticos, utilizando apenas espécies nativas da região, as quais apresentam potencialidade para o cultivo no Brasil e nos países do Prata.

## 2. AQUISIÇÃO DE IMAGENS

### 2.1 Caracterização geométrica das microalgas

Para a caracterização geométrica das imagens das microalgas, foram utilizados os seguintes equipamentos: microscópio epifluorescente, câmara de vídeo colorida CCD com luminosidade mínima de 2 lux, 30 quadros por segundo, com resolução de 510 (H) x 492 (V) pixels acoplada a monitor de vídeo de 14 polegadas, placa de aquisição de imagens com resolução máxima de 640 x 480 pixels, microcomputador Pentium II 400 MHz, e videocassete. A figura 1, abaixo, mostra esquematicamente o arranjo adotado.



**Figura 1** - Arranjos dos equipamentos utilizados para aquisição de imagens em microscópio.

Imagens de microalgas das espécies *Isochrysis galbana*, *Tetraselmis Chuii* e *Fibrocapsa japonica*, conforme Nézan (1997), com diâmetros de aproximadamente 3 $\mu$ m, 15 $\mu$ m e 28 $\mu$ m, respectivamente, foram adquiridas em movimento e estáticas. As imagens foram comparadas e conferidas suas similaridades com as de mesmas espécies, adquiridas por Nézan, (1997) usando um microscópio com aumento de 1000 vezes.

## 2.2 – Medição da velocidade das microalgas

Para a medida da velocidade das microalgas, imagens seqüenciais de planos de escoamento no interior de um tanque de cultivo foram feitas com auxílio de diversos equipamentos: fonte de laser de argônio (4w), cabos de fibra óptica e lente cilíndrica, câmara de vídeo monocromática CCD operando com velocidade de 30 Q/s, gravador de vídeo digital, microcomputador com placa de aquisição. Para o processamento das imagens foi utilizado um *software* (programa *FlowViewer*) desenvolvido no LTMF por Gutkoski (1999) especialmente para baixas velocidades de partículas em movimento num fluido. O programa, desenvolvido em linguagem C<sup>++</sup>, tem sua estrutura baseada na análise de duas imagens em seqüência de um mesmo campo de escoamento e o cálculo do deslocamento das partículas relacionadas entre estes dois campos. As medidas de velocidade podem ser feitas de duas formas, ON-LINE, onde o processamento acontece ao longo do ensaio, ou seja: a cada duas imagens capturadas, vetores velocidades instantâneos são obtidos para cada microalga e os valores médios acumulados são disponibilizados na tela do computador, não havendo a necessidade de gravador intermediário, tornando o processo extremamente ágil. Entretanto, nada impede que, com o auxílio de um gravador, haja uma posterior escolha qualitativa das imagens de captura e processamento, constituindo-se então num processo OFF-LINE.

O programa conta com uma estrutura básica que consiste em pré-processamento, processamento e pós-processamento. No pré-processamento, o sistema é configurado para o tipo de equipamento, ou seja, define-se o tipo de câmara a ser utilizado, os pontos onde o brilho é excessivo e que poderia prejudicar as medidas. Estes pontos são excluídos para todas as imagens definindo-se assim um limiar de brilho (nível de cinza) para a identificação das partículas. O processamento é a geração dos campos de vetores através de algoritmos elaborados para o acompanhamento das partículas através das imagens. Neste método, denominado “Velocimetria por Acompanhamento de Partículas”, a velocidade de cada partícula no plano de iluminação é determinada pela razão entre o deslocamento  $\Delta x$  (e  $\Delta y$ ) da partícula registrada em vídeo e o intervalo de tempo  $\Delta t$  correspondente à sua exposição. A velocidade assim medida é uma média no tempo e no espaço. Pode-se aproximá-la da velocidade instantânea local da partícula fazendo-se  $\Delta t$  e  $\Delta x$  pequenos o bastante para que a variação de velocidade no tempo e no espaço sejam desprezíveis.

Os deslocamentos das partículas são obtidos a partir de uma imagem contendo as partículas obtidas num determinado instante. Esta imagem é comparada com outra obtida no tempo  $\Delta t$  seguinte. O tempo  $\Delta t$  deve permitir deslocamentos cujos módulos sejam da ordem de alguns diâmetros das partículas. O resultado será formado por um conjunto de vetores velocidade, sendo o módulo destes vetores função da velocidade das partículas.

O pós-processamento consiste na geração de relatório indicando coordenadas de posição das partículas na imagem, componentes das velocidades médias, flutuações de velocidades e outras características do escoamento.

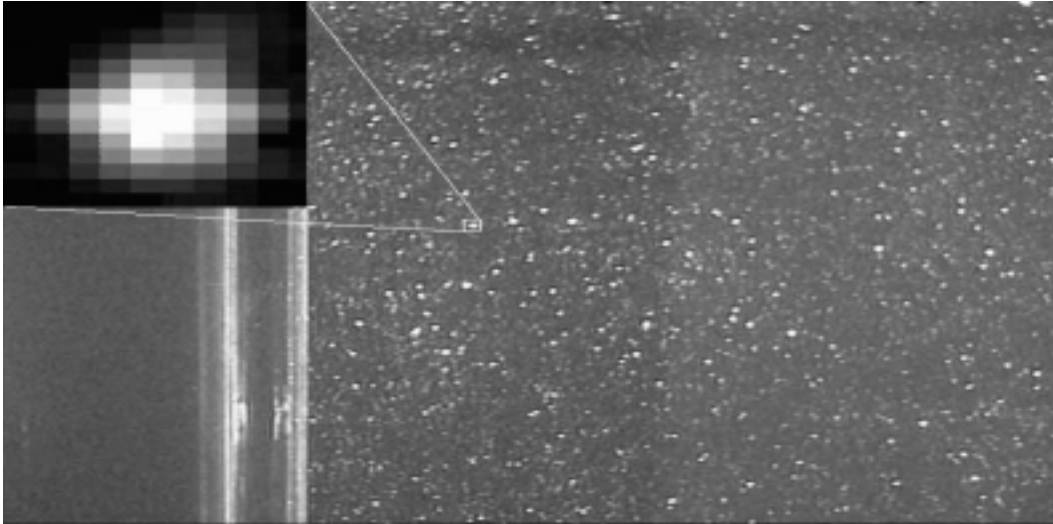
## 3. ALGORITMOS DE PROCESSAMENTO

O algoritmo utilizado foi desenvolvido e orientado, basicamente, pelas seguintes etapas:

### 3.1 Tratamento da imagem como matriz

O formato de trabalho de uma imagem terá extensão *filename.bmp* e conterá todas as informações relativas à imagem.

O elemento mínimo de uma imagem, o menor ponto que pode ser visualizado, é chamado de pixel. Por isso, a unidade básica para medidas de distâncias entre objetos numa imagem é dada em pixels. A figura 2 mostra a imagem de uma partícula genérica e sua ampliação no seu entorno onde pode ser visualizado os pixels.



**Figura 2.** Imagem de pixels ampliados

Os algoritmos usados tratam um conjunto de pixels de uma imagem, como uma matriz bidimensional passando as informações obtidas para o arquivo da imagem. Usualmente são empregadas três matrizes, uma para o vermelho (*red*), para o verde (*green*) e para o azul (*blue*) que correspondem a uma imagem RGB 24 bits. No presente caso, o processamento e os algoritmos trabalham com uma matriz de imagem, somente, em código de cinza (*gray*), que corresponde a 256 diferentes níveis de cinza variando do puro branco (255) a puro preto (0).

A aquisição das imagens é feita em 24 bits devido a placa de captura utilizada. Cada 8 bits geram 256 níveis de sua respectiva cor e a combinação destas geram a cor visualizada no monitor, muito próximo do real. Para que os algoritmos possam manipular esta imagem, necessita-se repassá-lo para o código de *gray*, feito da seguinte forma:

$$\text{Matriz\_gray}=[n][m] = (\text{Matriz\_blue}[n][m]+\text{Matriz\_green}[n][m]+\text{Matriz\_red}[n][m])/3 \quad (1)$$

Cada linguagem de programação tem uma forma peculiar de colocar os arquivos de imagens dentro de uma matriz. No presente caso os algoritmos desenvolvidos usam uma matriz de  $n$  linhas por  $m$  colunas contendo os pixels da imagem, em escala de *gray* a ser processada, possuindo 256 diferentes níveis de cinza.

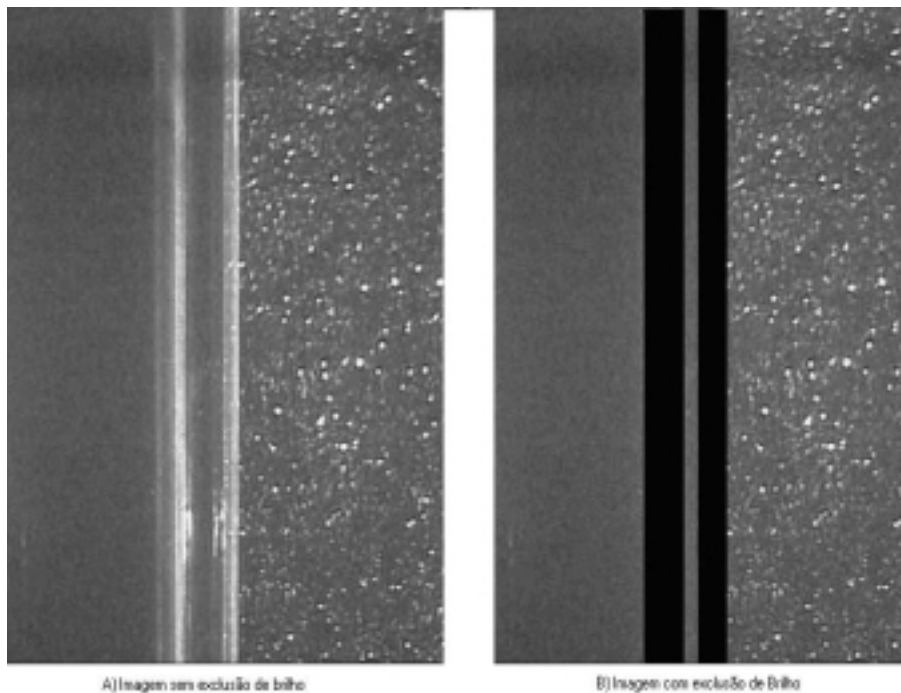
### 3.2 Limiar

Após a captura de uma imagem, o primeiro processamento a ser realizado é a identificação unívoca de uma verdadeira partícula (microalga) distinguindo de outros objetos que aparecem eventualmente e que poderiam confundir o processamento. Trata-se de eliminar pontos ou áreas de brilho excessivo ocasionado pela incidência de reflexões da luz de laser. Isto é feito identificando-se os brilhos excessivos fixos, ou seja, brilhos que permanecem em imagens consecutivas ocasionados por estruturas ou pelas próprias paredes do tanque. Como não se movimentam são relativamente fáceis de serem identificados numa imagem e

caracterizados pelos respectivos pixels que os compõem, sendo assim, eliminados do processamento.

A figura 3 mostra duas imagens, a primeira, do plano de laser sem a exclusão do brilho devido as bordas do tanque de cultivo e a segunda, após a exclusão do brilho indesejável.

Depois que o brilho excessivo for excluído da imagem de processamento, a próxima etapa é obter a separação das partículas iluminadas do fundo. Desta forma é aplicada na imagem uma equação de limiar. Esta equação é da seguinte forma:



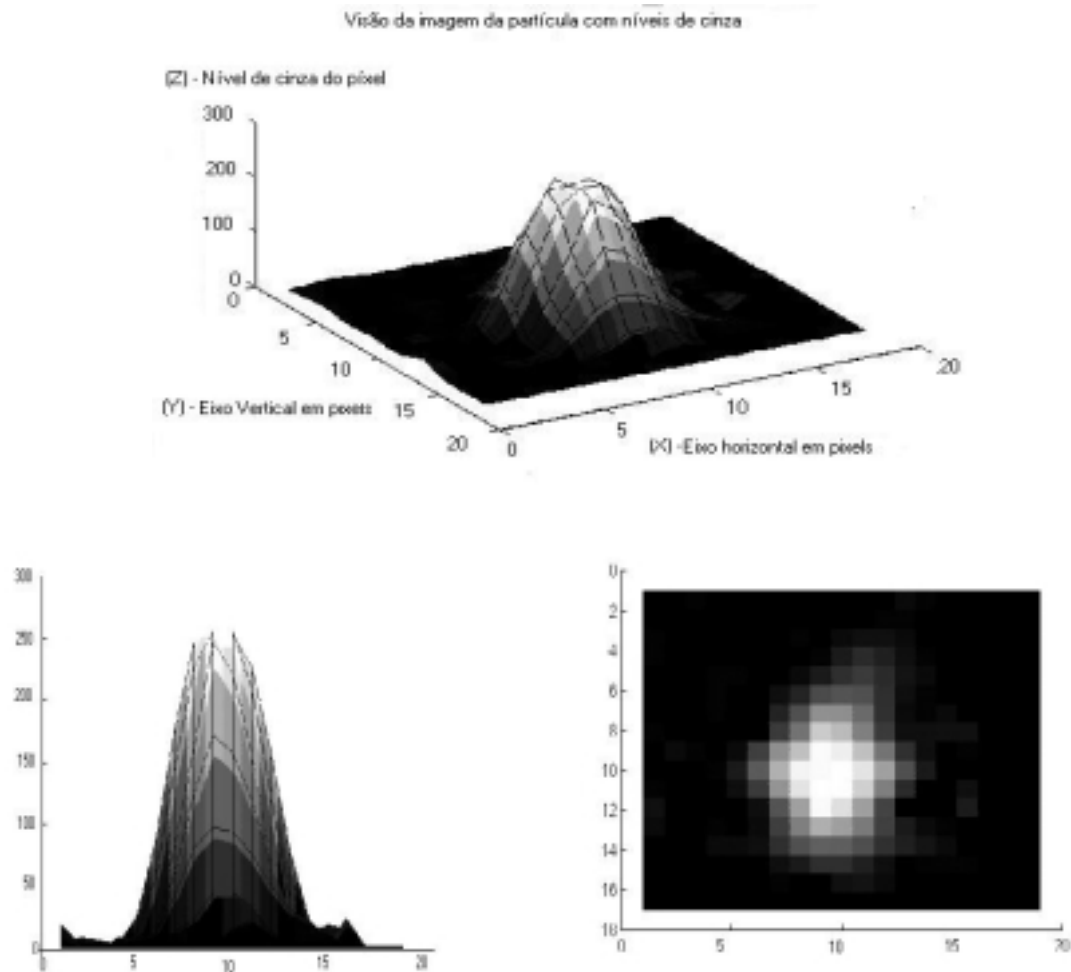
**Figura 3.** Brilho e exclusão

$$\begin{aligned} \text{Se } M[n][m] \leq \text{limiar} \quad M[n][m] &= 255 \\ \text{Senão } M[n][m] &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

O resultado desta formulação aplicada a uma imagem, na realidade inverte o fundo dando um valor 0 (preto) para as partículas, parte mais brilhante e de interesse, e um valor 255 (branco) para as demais regiões. Com isso a imagem binária, pode ser interpretada como “partícula” e “não partícula”.

### 3.3 Centro da Partícula

Para determinar a velocidade de uma partícula, deve-se conhecer a real posição do centro de sua imagem. A determinação deste centro é feita em função da forma da imagem com que cada partícula foi adquirida. A exatidão deste método, quando usado para a medição de velocidade de partículas, está intimamente relacionada com a exata determinação do centro da partícula. A figura 4, mostra uma representação gráfica de uma partícula iluminada. A figura mostra a partícula em três ângulos diferentes conforme seu nível de cinza e posição espacial. Conhecendo-se este nível pode-se determinar o centro da partícula usando-se a média das coordenadas dos pontos com maior intensidade de cinza, que são selecionados pela região de corte comandadas pelo limiar.



**Figura 4.** Gráfico de uma imagem da partícula.

### 3.4 Determinação dos vetores velocidades

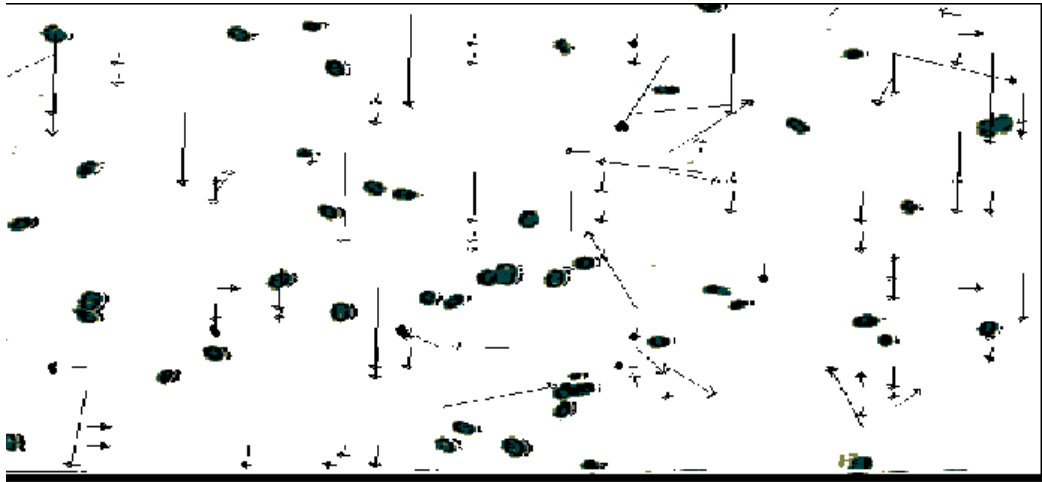
Tendo em vista a instrumentação de captura de imagens disponível e a concentração de partículas (microalgas) existente no tanque, foi utilizado o método de busca do traçado das partículas. O ponto de partida deste método está na identificação de uma partícula em duas imagens subsequentes (instantes diferentes) com a finalidade de medir seu deslocamento. Levando em consideração a densidade de partículas, foi possível definir uma área de busca ( $\eta \times \xi$  pixels, sub-matriz da imagem total  $n \times m$ ) onde uma partícula será identificada na imagem atual e na subsequente. Assim, se em num determinado instante  $t_1$  existir uma partícula, busca-se identificá-la novamente na imagem subsequente, instante  $t_2$ , numa nova região de busca aumentada de dez pixels ou seja  $(\eta+10) \times (\xi+10)$  pixels. A nova posição da partícula é determinada, identificando-se seus deslocamentos  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , bem como são calculadas as componentes da sua velocidade ( $u = \Delta x / \Delta t$  e  $v = \Delta y / \Delta t$ ). Caso não seja encontrada a segunda imagem da mesma partícula na nova região de busca ou ainda, existir mais de uma partícula na mesma área, descarta-se a primitiva área de busca e nenhuma componente do vetor velocidade é calculada. O processo de busca continua até que toda a matriz imagem ( $n \times m$ ) seja varrida.

### 3.5 Contagem e dimensão das microalgas

Determinado o centro de cada partícula, conta-se a quantidade de centros existente no quadro total (matriz  $n \times m$ ). Na determinação do centro das partículas conhece-se seus limites máximos e mínimos, permitindo assim o conhecimento das dimensões geométricas de cada partícula.

#### 4. RESULTADOS

A figura 5 apresenta os vetores velocidade de microalgas *tetraselmis chuii*, durante um intervalo de tempo correspondente a 12 quadros, superpostos. A imagem, em negativo, é proveniente de um microscópio com aumento de 400 vezes.



**Figura 5.** Vetores velocidade das microalgas *tetraselmis chuii*

A Tabela 1, abaixo, mostra a tela de contagem das partículas das duas últimas imagens da seqüência de quadros, com os deslocamentos e a localização das partículas na imagem, na barra de rolagem da tela do programa *FlowViewer*. Os valores das componentes  $u$  e  $v$  da velocidade em pixels são obtidos multiplicados por 30.

**Tabela 1.** Número de Partículas, velocidade e posição.

Número de partículas	Número de Partículas	Velocidade		Posição na matriz $n \times m$	
		$u$	$v$	x	y
51	49			1083	
[381 373]	[601 351]	-2.00	0.00	594	0
[396 390]	[256 353]	0.00	10.00	251	13
[308 399]	[384 360]	1.00	9.00	547	15
[410 396]	[226 363]	0.00	9.00	448	28
[556 406]	[380 377]	0.00	9.00	26	39
[256 415]	[396 390]	-4.00	9.00	401	53
[536 414]	[308 399]	1.00	9.00	615	54
[319 412]	[410 395]	0.00	9.00	635	59
[486 432]	[541 404]	0.00	8.00	119	112
[156 442]	[537 415]	0.00	9.00	597	133
[51 447]	[256 416]	-2.00	9.00	372	146
[214 463]	[319 412]	0.00	10.00	204	155
		1.00	9.00	283	165

#### 5- ANÁLISE DOS RESULTADOS



O programa *FlowViewer* permite capturar e processar imagens de microalgas adquiridas em microscópio e em tanque de cultivo e o processo de aquisição das imagens proporcionou suficiente contraste das partículas em relação ao fluido onde estão imersas.

O método de Velocimetria por Acompanhamento de Partículas é apropriado para o tipo de partículas analisadas que têm pequenos deslocamentos em relação às suas dimensões uma vez que após a aquisição de uma grande sequência de imagens, a partícula acompanhada ainda permanece na imagem. As várias ampliações possíveis no microscópio permitem acompanhar partículas mais lentas com imagens mais ampliadas e partículas mais velozes com imagens menos ampliadas, sem perder a partícula na sequência de imagens.

Para proporcionar a contagem de microalgas num volume conhecido em imagem de microscópio, imagens são adquiridas com aumentos de 4 vezes e 6 vezes, onde se observa partículas no interior de uma câmara com volume de  $1\text{mm}^3$ .

Os resultados obtidos no processamento das imagens estão sujeitos a erros sistemáticos como: não-ortogonalidade entre o eixo da câmera e o plano iluminado, deformação da imagem devido a refração do meio, movimento relativo entre a partícula e o fluido ao seu redor, contraste deficiente da imagem, resolução espacial da imagem e intervalo de tempo entre a aquisição de duas imagens, que serão tratados posteriormente e fogem do escopo deste trabalho.

## 6- CONCLUSÕES

O trabalho apresentado mostrou a grande potencialidade do processamento de imagens para o monitoramento do cultivo de microalgas num *habitat* natural, permitindo determinar as taxas de crescimento bem como as velocidades ótimas de movimentação para reduzir a sedimentação devido a sua mortalidade.

## 7. REFERÊNCIAS

- Marchiori, M.A., 1996, “Guia Ilustrado de Maturação e Larvicultura do Camarão Rosa *Penaeus paulensis*” Pérez – Farfante, Editora da FURG, Rio Grande, RS, Brasil.
- Nézan, E. & All, 1997, “PhytoQuiz 1- Marine flagellates”, IFREMER, Service das Editions et Techniques, Plouzané, France.
- Gutkoski, L.L., 1999, “FlowViewer - Medida de fluxo através de Imagens”, LTMF, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil.

# HIGH SPEED FLOW SIMULATIONS USING UNSTRUCTURED ADAPTIVE GRIDS

**Heidi Korzenowski**

UNIVAP – Universidade do Vale do Paraíba, Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento,  
12244-000, São José dos Campos, SP, Brasil. E-mail: [heidi@univap.br](mailto:heidi@univap.br)

## Abstract

A high-resolution flux-vector splitting scheme is used to obtain the solution over a blunt hypersonic body. The numerical simulations are concerned with the implementation of unstructured grid, mesh refinement techniques for two-dimensional inviscid fluid flow. The governing equations are discretized in a cell centered, finite volume procedure. Spatial discretization considered a second-order flux-vector splitting scheme. A MUSCL extrapolation of primitive variables is used in order to determine left and right states at the interfaces. An adaptive mesh refinement procedure, based on a sensor of flow property gradients, is performed to obtain a better resolution of strong discontinuities. Results for different freestream Mach number are obtained in order to determine by analysis the constitution of some phenomena presented in such high-speed flow.

**Key words:** adaptive mesh, unstructured grid, finite volume method

## 1. INTRODUCTION

The development of efficient numerical solvers is very important owing to the difficulties and high costs associated with the experimental work at high speed flows. The hypersonic fluid flow simulation over a blunt-nosed body is characterized by a strong detached shock ahead the body. This phenomenon is particularly interesting because the curved bow shock is a normal shock wave in the nose region, and away from this one has all possible oblique shock solutions for a given freestream Mach number. A good capture of fluid flow features is obtained by use of an appropriate refined mesh and an efficient fluid solver. The introduction of mesh adaptivity reduces the number of grid elements because the regions that need to be refined are small compared with the size of the complete computational domain. Therefore, one can reduce storage and CPU requirements by the use of adaptive refinement, when compared with a fixed fine mesh, which would yield the same resolution of the relevant flow features. Some strategies to determine the mesh refinement have been derived (Sonar, 1995; Marcum, 1995). In this work, a numerical sensor based on gradients of flow properties determines the regions that need to be refined.

A finite volume formulation of compressible Euler equations in conservative form has been considered. A high-resolution scheme is employed in order to obtain a good spatially resolution of the flow features. Many numerical upwind methods have been derived (van Leer, 1982; Osher, 1985). In this work the simulations are performed by using an AUSM<sup>+</sup> scheme (Liou, 1994). Liou states that this scheme achieve high accuracy over a wide range of problems described by Euler and Navier-Stokes equations.

The second-order AUSM<sup>+</sup> scheme is implemented in an unstructured grid context (Azevedo and Korzenowski, 1998). In this approach, the convective operator can be expressed as a sum of the convective and pressure terms. This scheme considers a MUSCL approach (Hirsh, 1990), that is, the interface fluxes are formed using left and right states at the interface, which are linearly reconstructed by primitive variable extrapolation on each side of the interface. The Euler equations are discretized in a cell centered based finite volume procedure on triangular meshes. Time march uses an explicit, 2<sup>nd</sup>-order accurate, five-stage Runge-Kutta time stepping scheme (Mavriplis, 1988).

The hypersonic flow simulations are performed over a blunt-nosed body. The freestream Mach number were varied from  $M_\infty=10$  until  $M_\infty=20$ . The fluid was treated as a perfect gas, and no chemistry was taken into account. The shock detachment distance obtained by numerical solutions was compared with the shock detachment distance estimated by Bylilig's correlation (Billig, 1967). Results indicate that the scheme could adequately capture the flowfield features.

## 2. THEORETICAL FORMULATION

The 2-D time-dependent Euler equations, in conservative form, can be written as

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V Q dV + \int_S (E dy - F dx) = 0, \quad (1)$$

where  $V$  represents the area of the control volume and  $S$  is its boundary. Expressions for the vector of conserved quantities,  $Q$ , and the convective flux vectors,  $E$  and  $F$ , are found in Azevedo and Korzenowski (1998).

If the equations are discretized using a cell centered based finite volume procedure, the discrete vector of conserved variables,  $Q_i$ , is defined as an average over the  $i$ -th control volume. In this context, the flow variables can be assumed as attributed to the centroid of each cell. The Equation (1) can then be rewritten for the  $i$ -th volume as

$$\frac{\partial}{\partial t} (V_i Q_i) + \int_S (E dy - F dx) = 0. \quad (2)$$

## 3. SPATIAL DISCRETIZATION ALGORITHM

The spatial discretization is concerned with finding a discrete approximation to the surface integral in Equation (2). This approximation is essentially the convective operator,  $C(Q_i)$ .

The numerical fluxes  $E$  and  $F$  can be expressed as the sum of the numerical convective flux and the numerical pressure flux at each cell interface (Liou, 1996). Therefore, the numerical convective flux is defined in terms of Mach number, speed of sound and the quantity  $\Phi$ , defined as  $\Phi = (\rho, \rho u, \rho v, \rho H)^T$ . For the AUSM<sup>+</sup> formulation, the Mach number and the pressure are splitting accordingly some properties, as described in Liou (1996).

The second-order method uses a MUSCL approach for the extrapolation of primitive variables. By this approach, left and right states at a given interface are linearly reconstructed

by primitive variable extrapolation on each side of the interface, together with some appropriate limiting process in order to avoid the generation of new extreme. In order to reconstruct interface properties, the unstructured grid case considers a local one-dimensional stencil normal to the edge considered.

The Liou scheme implemented in this work considers that the convective operator can be expressed as a sum of the convective and pressure terms, given by the expression.

$$C(Q_i) = (F_{ik}^{(c)} + P_{ik})\ell_{ik}, \quad (5)$$

where  $\ell_{ik}$  represents the length of the  $ik$  edge. Expressions of the terms  $F_{ik}^{(c)}$  and  $P_{ik}$ , as well as details of the formulations can be found in Azevedo and Korzenowski (1998).

#### 4. BOUNDARY CONDITIONS

The implementations of the boundary conditions were performed by using ghost cells. Three types of boundary conditions were considered in the simulations over a hypersonic body. They are entrance, wall and exit boundary conditions.

At the wall boundary, the flow must be tangent to the wall in the inviscid case. This is done by imposing that the velocity component normal to the wall in the ghost volume has the same magnitude and opposite sign of the normal velocity component in its adjacent interior volume, whereas the ghost volume velocity component tangent to the wall is exactly equal to its internal cell. Besides, a zero normal pressure gradient and a zero normal temperature gradient at the wall is assuming.

For supersonic/hypersonic flow, all quantities at the entrance must be given. In the present work, all flow properties are dimensionless. At the supersonic exit, all boundary quantities are obtained by extrapolation of interior information.

#### 5. GRID GENERATION AND ADAPTATION

The grid generation process is based on Pirzadeh (1993). In this approach a grid is generated by forming cells starting from the domain boundaries and marching toward the interior of the computational domain. The local grid characteristics, such as grid point distribution, are controlled by information stored at the nodes of a secondary coarse mesh referred as the background grid. The background grid consists of a structured grid that that encloses the entire domain without the requirement of conforming to the configuration. Its function is to guide a marching front for insertion of new points at proper locations. As the front advances into the field, the grid parameters defining the position of a new point are interpolated from the values stored at the nodes of the background grid cell that encloses the point.

The adaptive mesh refinement implemented in this work uses a sensor based on gradients of flow properties, which identify the regions that require grid refinement. The process consists of two steps. The first one is to compute the flow on an existing coarse mesh. With this preliminary solution, one can calculate the sensor for all triangles. All marked triangles are refined. A new finer mesh is then constructed by enrichment of the original grid.

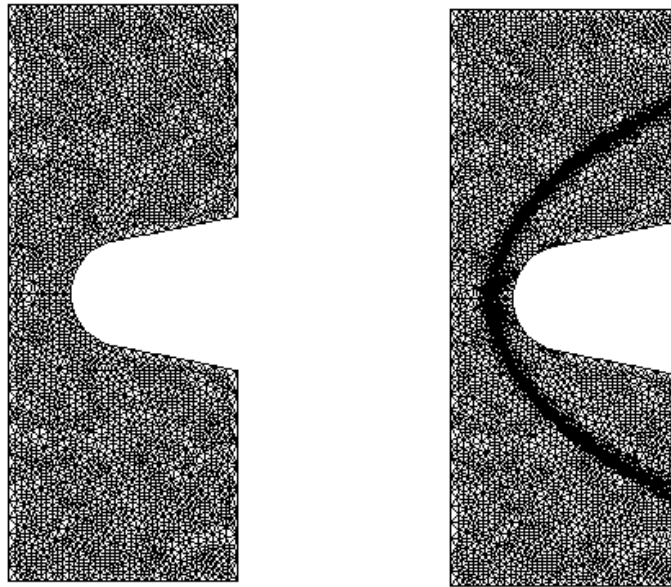
The mesh enrichment procedure introduces an additional node for each side of the triangle marked by refinement. Then, the code has to search all triangles to identify cells that have two or three divided sides. Each of these cells is subdivided into four new triangles. This subdivision may eventually mark new faces. Therefore, this process has to be performed until

there are no triangles with more than one marked face. In order to avoid hanging nodes, the triangles that have one marked face should be divided by halving.

The second step of the refinement process consists of identifying all triangles which were refined by halving. This information is stored for the next refinement step because, if there is again an attempt to subdivide these triangles by halving, this is not allowed. Therefore, if the next refinement step tries to divide by halving a triangle which was obtained by a previous division by halving, the logic in the code forces the original triangle to be divided into four new triangles before the refinement procedure is allowed to continue. When the mesh enrichment procedure has been completed, the new control volumes receive the property values of their “father” triangle and the flow solver is re-started.

## 6. RESULTS AND DISCUSSION

A blunt-nosed body was used to obtain the hypersonic fluid flow simulations. Although simulations were performed for  $M_\infty=10$  to  $M_\infty=20$ , only results for  $M_\infty=20$  were presented. The adaptive mesh adopted in the present simulations was obtained with one pass of refinement. This refined level was performed when the  $L_2$  norm of the change in density variable drops over two order of magnitude. Typically, around 2000 iterations are required to satisfy this convergence criterion. The sensor was based on all primitive variable gradients.

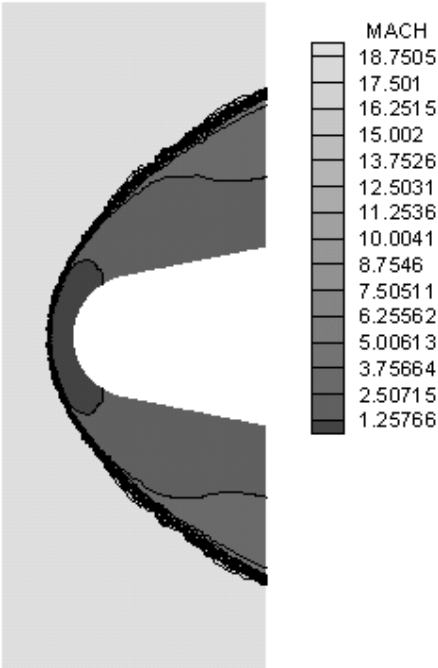


**Figure 1.** Initial and adaptive unstructured meshes used on simulations at  $M_\infty=20$ .

Meshes with more than one adaptive refinement pass were generated, but the adoption of more refined grids resulted in a bad convergence behavior. No freezing of limiters was used here. The initial mesh has 6072 nodes and 11780 volumes, while the adaptive mesh is composed of 7124 nodes and 12968 volumes. The initial and final meshes are shown in Figure 1.

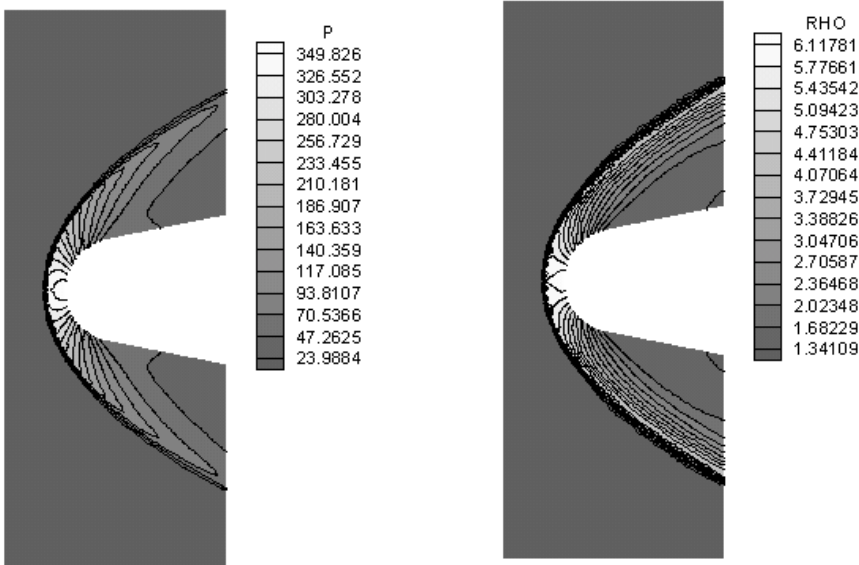
The Mach number contours obtained with the second-order Liou scheme are presented in Figure 2. The contours indicate that the flow features are well captured by this solution, the bow shock and the flow expansion over the body are well represented. One can see that at the nose of the body the shock is normal, and away from this the shock wave gradually becomes curved and weaker. The hypersonic flow ahead the shock becomes subsonic behind this one,

that is, there is a strong compression of the flow in this region. Slightly above the nose region, the shock is oblique and pertains to the strong shock-wave solution. As we move further along the shock, the wave angle becomes more oblique, and the flow deflection decreases until reach the maximum deflection angle. From the nose region until this point the flow is subsonic. Above this one, all points on the shock correspond to the weak shock solution. This region is characterized by supersonic flow.



**Figure 2.** Mach contours obtained with the Liou scheme at  $M_\infty=20$ .

The streamline that passes through this normal portion of the shock impinges on the nose of the body and controls the values of stagnation pressure and temperature at the nose. The pressure and the density contours are plotted in Figure 3.

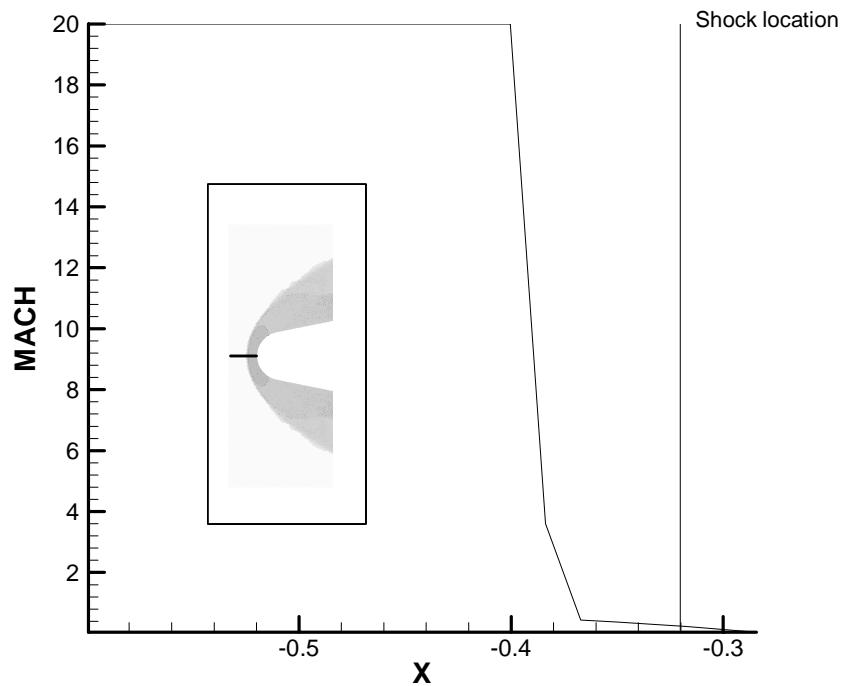


**Figure 3.** Pressure and density contours obtained with the Liou's scheme at  $M_\infty=20$ .

The contours indicate that the flow features are well captured by the Liou's AUSM<sup>+</sup> scheme can be observed in Figure 3. The oscillations presented in the strong shock ahead the body, observed in Mach and density contours, can be improved by use of a more refined mesh. However, one has some difficulties to obtain convergence to machine zero with refined meshes, as one still explains.

The pressure and density downstream of the wave, obtained by use of the basic normal shock equations, are  $p_2 = 33322$  and  $\rho_2 = 5,926$ , respectively. The properties obtained by the numerical simulations are  $p_2 = 34982$  and  $\rho_2 = 6,11$ . One can observe a minimal error between the analytical and numerical results, indicating that the scheme was adequate to assess the properties of the flow.

The shock detachment distance obtained by numerical solutions is 0,12m, and the shock detachment distance estimated by Byllig's correlation gives 0,05m. Figure 4 shows the Mach number contours along the centerline and the shock location given by the correlation. One can see the difference between these two approaches.



**Figure 4.** Computed Mach number on centerline surface.

Although the numerical shock location does not agree with the correlation, this result makes some sense, because the simulations were performed considering that the fluid is a perfect gas. If real gas effects are incorporated into computational solver, the shock location will place nearer to the body. Results for reactive flow simulations can be found in Drikakis and Tsangaris (1993).

## 7. CONCLUDING REMARKS

The present work performed hypersonic flow simulations over a blunt body. The governing equations are discretized in an unstructured triangular mesh by a cell centered finite volume algorithm. The spatial discretization considers an AUSM<sup>+</sup> flux-vector splitting scheme. A MUSCL reconstruction of primitive variables was used in order to obtain left and right states at interfaces. The equations are advanced in time by an explicit, 5-stage, 2<sup>nd</sup>-order accurate, Runge-Kutta time stepping procedure.

An inviscid formulation was used and the fluid was treated as a perfect gas. The solver has been coupled with a mesh adaptation algorithm. The adaptive refinement procedure uses a sensor based on gradients of flow properties. The mesh generation introduces new points automatically into computational domain by advancing front generation.

Results obtained with one pass of adaptive refinement are presented. Although the simulations could capture all flow features with good accuracy, more refined mesh are employed.

### 7.1 Acknowledgments

The author would like to acknowledge the support received from FAPESP through a Research Grant No. 98/09812-6.

## 8. REFERENCES

- Azevedo, J.L.F., Korzenowski, H., 1998, "Comparison of Unstructured Grid Finite Volume Methods for Cold Gas Hypersonic Flow Simulations", AIAA Paper 98-2629, pp. 447-463.
- Billig, F.S., 1967, "Shock-Wave around Spherical- and Cylindrical-Nosed Bodies", Journal of Spacecraft, Vol. 4, No.6, pp. 822-823.
- Drikakis, D., Tsangaris, S., 1993, "On The Accuracy and Efficiency of CFD Methods in Real Gas Hypersonics", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 16, pp. 759-775.
- Hirsh, C., 1990, *Numerical Computation of Internal and External Flows. Vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, Wiley, New York.
- Liou, M.-S., 1994, "A Continuing Search for a Near-Perfect Numerical Flux Scheme. Part I: AUSM", NASA TM-106524, NASA Lewis Research Center, Cleveland, OH.
- Liou, M.-S., 1996, "A Sequel to AUSM: AUSM", Journal of Computational Physics, Vol. 129, pp. 364-382.
- Marcum, D.L., 1995, "Adaptive Unstructured Grid Generation for Viscous flow Applications", AIAA Journal, Vol. 34, No. 11, pp. 2440-2443.
- Mavriplis, D.J., 1988, "Multigrid solution of the two-dimensional Euler equations on Unstructured Triangular Meshes, AIAA Journal, Vol. 26, No. 7, pp. 824-831.
- Osher, S., "Convergence of Generalized MUSCL Schemes", SIAM Journal Numerical Analysis", Vol. 22, No. 5.
- Pirzadeh, S., "Structured Background Grids for Generation of Unstructured Grids by Advancing-Front Method", AIAA Journal, Vol. 31, No. 2, pp. 257-265.
- Sonar, T., 1992, "Dem Fehler auf der Spur", DLR-Nachrichten, Heft 78, pp. 7-14.
- van Leer, B., 1995, "Flux-Vector Splitting for the Euler Equations", Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, E. Krause, editor, Lecture Notes in Physics, Vol. 170, pp. 507-512.



FACEPE pelo apoio ao GMFA-UFPE.

### **Referências**

GMFA-UFPE, 1998, “Levantamento da Propagação da Maré Hidráulica e Batimetria para a Navegabilidade do Rio Massangana – SUAPE” , Relatório Técnico para SUAPE – Complexo Industrial Portuário, Recife/PE, 100 p.

BORCHE, A., 1996, “IPH-A : Aplicativo para Modelação de Estuários e Lagoas - Manual de Uso”, Instituto de Pesquisas Hidráulicas – UFRGS – Porto Alegre/RS, 37 p.

BAGETTI, A. M. B. e ARAÚJO, A. M., 1998, “Desenvolvimento de Régua Linimétrica Auto- Suportada”, VI Congresso de Iniciação Científica, pp. 667, UFPE/PROPESQ, Recife/PE.

SILVEIRA, A.L.L. e TUCCI, C.E.M., 1998, “Simulação do escoamento Bidimensional no Guaíba”, in RBE – Revista Brasileira de Engenharia, 6(1):79-104.

MUNSON, B.R.; YOUNG, D.F. e OKIISHI, T.H., 1997, “Fundamentos da Mecânica dos Fluidos”, vol. 2, Editora Edgar Blücher, São Paulo, 600p.

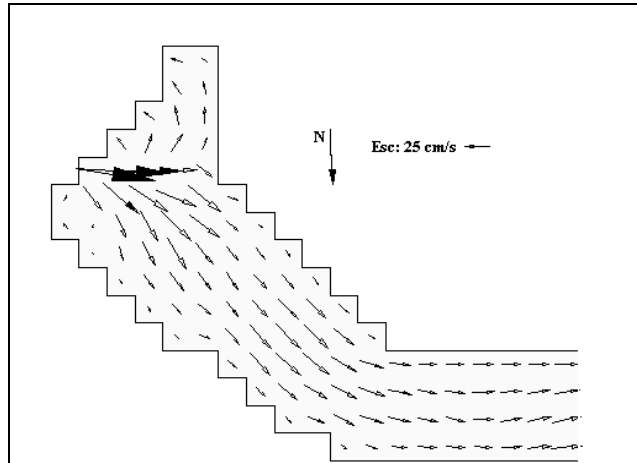


Figura 8 – Detalhe do mapa de correntes – instante 17:20 da simulação

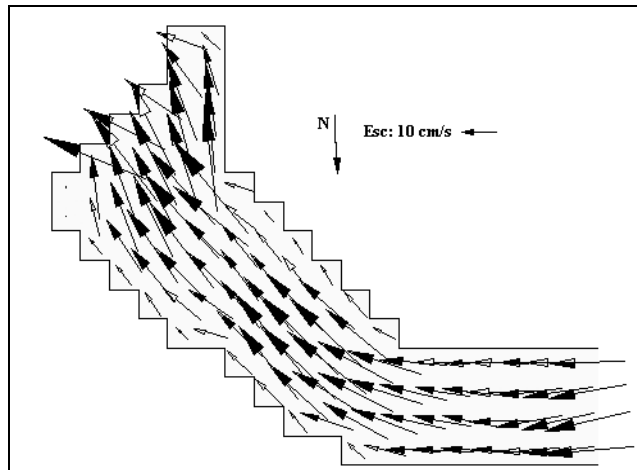


Figura 9 – Detalhe do mapa de correntes – instante 23:40 da simulação

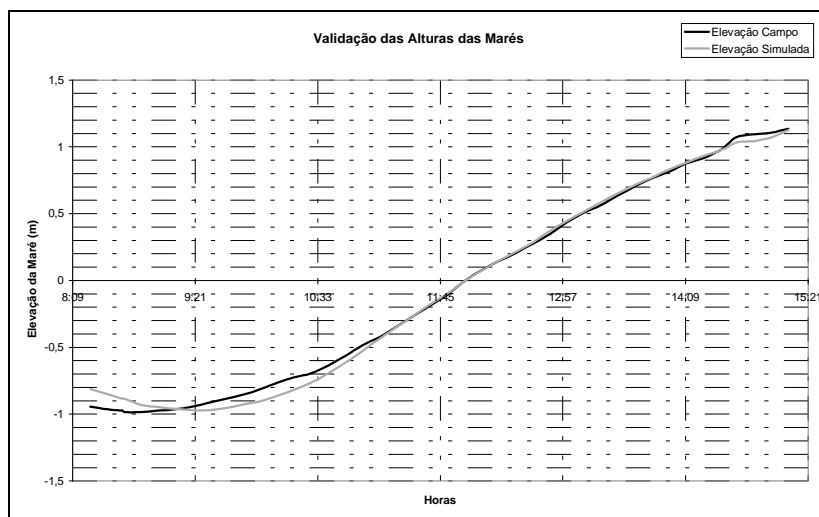
## Conclusões

O modelo bidimensional horizontal adotado neste trabalho para o estuário do Rio Massangana, com 789 células quadradas úteis de  $2500 \text{ m}^2$ , representou de maneira satisfatória um corpo d'água de escoamento complexo, que em sua circulação hidrodinâmica sofre grande influência das condições de contorno naturais (forçantes de maré em RM1 e RM3) e artificiais (desvio do escoamento pelo canal dragado).

A variação nos valores do parâmetro de ajuste do sistema computacional permitiu uma boa concordância das curvas de elevação de maré, medidas em dois locais distintos do estuário, com as curvas previstas pelo sistema. Assim, o sistema computacional usado estaria potencialmente apto para desenvolver prognósticos tanto do regime de elevações quanto do de circulações hidrodinâmicas no estuário, nas suas condições típicas de maré de sizígia, causados por intervenções de engenharia.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a SUAPE – Complexo Industrial Portuário, em especial à Gerência de Preservação Ecológica e Cultural (GEPE), pela oportunidade do trabalho e ao CNPq e à



**Figura 7 - Comparação da Altura de Maré Medida no dia 26-06-1998 com a Altura Simulada para a Régua RM4**

Os resultados apresentados indicam que com referência à régua RM2 ocorreu um desvio relativo médio à medida de campo de 4,3%, sendo que o menor desvio observado foi nulo e o maior desvio observado foi de 14,2%. Já na régua RM4 foi observado um desvio relativo médio à medida de campo de 5,1%, sendo que o menor desvio observado foi de 0,2% e o maior desvio observado foi de 13,8%. Estes resultados indicam que a discretização utilizada e o ajuste de parâmetro de rugosidade de fundo obtido ( $n= 0,0325$ ), constante em todo o estuário, representam de forma satisfatória a dinâmica de propagação daquela maré no estuário do Rio Massangana.

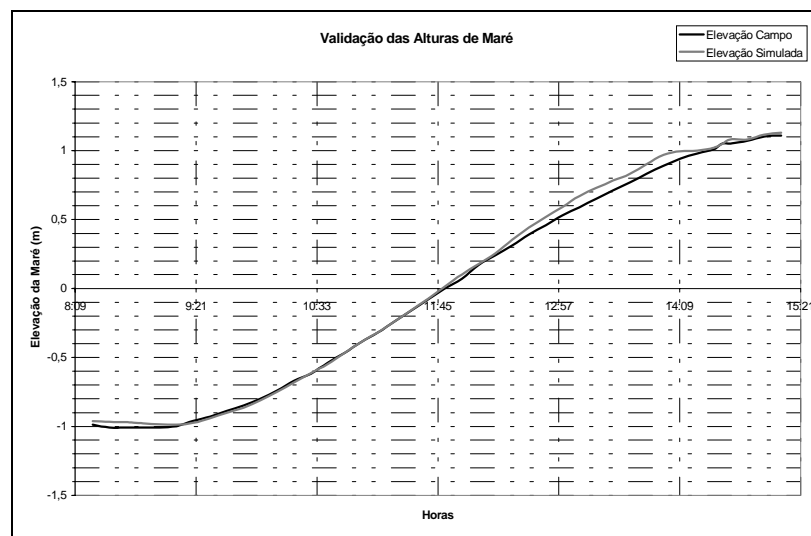
### **Aspectos dos Campos de Velocidades Obtidos**

Os sentidos das correntes em diferentes instantes de um mesmo ciclo de maré podem ser observados nas figuras abaixo. No instante 17:20h a velocidade do fluxo atinge seu máximo, escoando para dentro do estuário (Fig. 8). A situação aproximadamente simétrica ocorre às 23:40h (Fig.13). Os vórtices observados na entrada do estuário na Figura 8 pode ser causados tanto pela forma geométrica do estuário na sua entrada quanto por um processo de assoreamento local. Este depósito de material granular (banco de areia) pode ser originado pelo sentido do forçante de maré, que causa acúmulos na parte sul da boca do estuário.

A calibração do modelo foi realizada através do ajuste do parâmetro de rugosidade de fundo, sendo balizada pela aderência entre as elevações medidas em campo e as simuladas. Nas primeiras tentativas utilizou-se como condição de contorno de nível apenas os dados da régua na foz do estuário (seção RM1) na Figura 1, porém os resultados obtidos não se ajustaram aos outros 3 locais de controle de linimetria (níveis). Passando a considerar no modelo a existência de um outro forçante de maré, causado por um pequeno braço natural do rio na altura da seção RM3, e por esse motivo incluindo os dados da régua situada próximo à entrada do canal dragado (RM3, fluxo da direita para a esquerda da figura) como condição de contorno de nível, foi obtida uma calibração considerada satisfatória para o modelo. Esta última consideração poderia ser adicionalmente justificada pela antiga intervenção de dragagem realizada entre as estações RM3 e RM4 para o canal de testes da indústria de barcos Diamar (RM4), o que provavelmente alterou o regime original de propagação da maré no estuário. As setas na Figura 1 indicam a direção principal do forçante de maré observado no estuário do Massangana (RM1) e a seta na régua RM3 indica a condição de contorno de nível adicional imposta para a calibração do modelo.

Uma calibração mais rigorosa do modelo também exigiria dados dos campos de velocidades produzidos no estuário para efeito de comparações. Entretanto, o estado atual das condições práticas de medidas de campo ainda não permite a obtenção de dados, em qualidade e quantidade, para o ajuste do parâmetro velocidade.

Os gráficos de elevação *versus* tempo para as régua RM2 e RM4 mostrados nas Figuras 6 e 7 revelam, de forma comparativa, os resultados da alturas de maré simuladas com as medidas em campo.



**Figura 6 - Comparação da Elevação de Maré Medida no dia 26-06-1998 com a Altura Simulada para a Régua RM2**

## Régua RM4

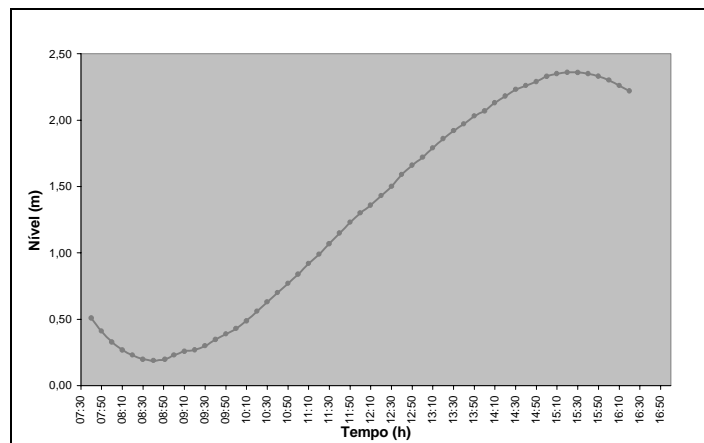


Figura 5 - Representação das leituras das régua linimétricas (RM4) no dia 22/06/98

## Representação Computacional do Massangana

O modelo bidimensional utilizado para simular o estuário do Rio Massangana foi constituído por uma malha formada por 789 elementos úteis, distribuídos em 64 linhas e 88 colunas de cálculo. Os elementos da malha são células quadradas (50mx50m) de 2500 m<sup>2</sup>. A orientação e a localização da malha de cálculo foi definida com sua latitude média, que é de 8° S, e pelo ângulo entre o eixo Y da malha e o norte geográfico, como se vê no sistema de coordenadas expresso na Figura 1.

As profundidades médias de cada célula foram estipuladas com base em trabalhos de levantamentos batimétricos realizados pelo GMFA-UFPE (1998), para o Complexo Industrial Portuário de Suape.

## Calibração do modelo

Inicialmente verificou-se a estabilidade numérica do modelo com a malha adotada, usando-se um teste prático preliminar para simular um forçante de maré no estuário, sendo utilizado para tal fim procedimento descrito em Silveira e Tucci (1988). Os resultados obtidos indicaram que a discretização espacial, adotada com a de tempo (30s) garantiriam uma boa representação espacial do sinal de propagação da maré pelo estuário, estando assim os resultados do modelo potencialmente livres de perturbações de origem numérica.

Escolheu-se a rugosidade do fundo como parâmetro de calibração do modelo pelo fato do mesmo ser variável no espaço e no tempo, tornando muito difícil a determinação de seus valores em cada elemento da discretização. Entretanto, o coeficiente de Chèzy utilizado pelo modelo é dado por  $C_h = H^{1/6}/n$ , onde H é a profundidade em cada elemento e n é o coeficiente de Manning. O sistema computacional IPH-A permite a entrada de dados de rugosidade de duas formas: entrar com um valor constante do coeficiente de Manning para todo o estuário – de modo que o coeficiente de Chèzy dependa somente da profundidade local – ou inserir para cada elemento da malha um valor arbitrado do coeficiente de Chèzy, procedimento indicado para estuários que possuam materiais de fundo diferentes em cada trecho analisado.

Devido à relativa uniformidade do material de fundo do Massangana, os valores de rugosidade foram introduzidos através do coeficiente de Manning (n) com valores constantes, tomando-se variações a partir de valores típicos para rios estuarinos, conforme Munson *et al.* (1997).

## Régua RM1

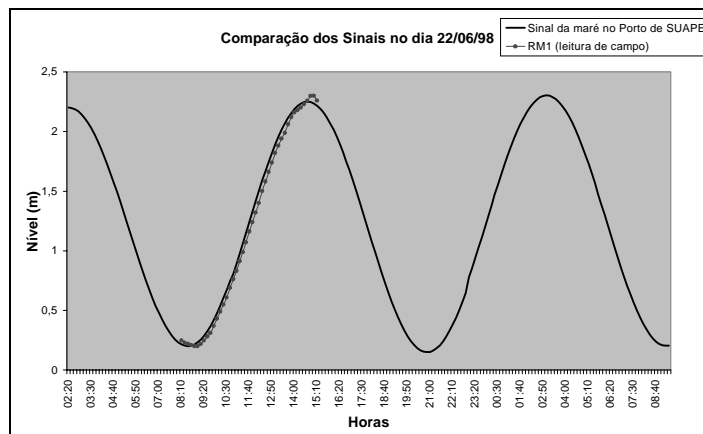


Figura 2 - Representação das leituras das régua linimétricas (RM1) no dia 22/06/98

## Régua RM2

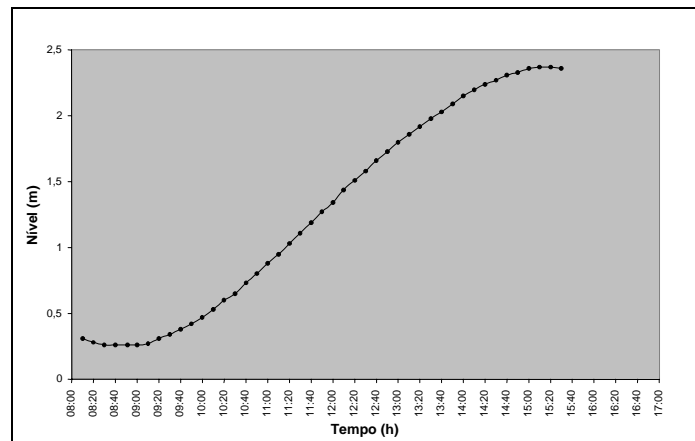


Figura 3 - Representação das leituras das régua linimétricas (RM2) no dia 22/06/98

## Régua RM3

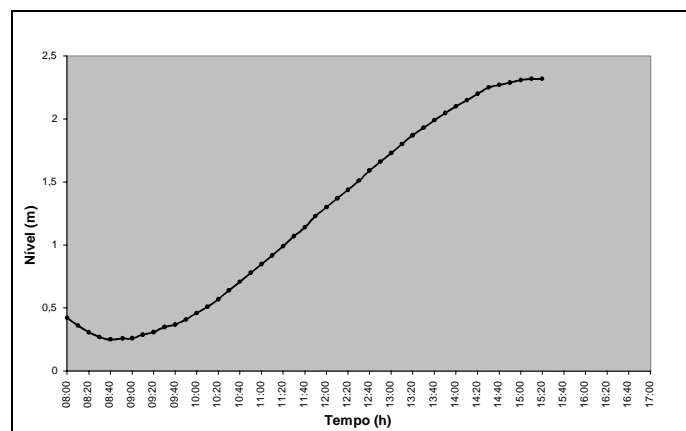


Figura 4 - Representação das leituras das régua linimétricas (RM3) no dia 22/06/98

## Equações dinâmicas

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - \Omega V + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{gU\sqrt{U^2 + V^2}}{C_h^2 H} - \frac{\tau_{sx}}{H} - v_t \Delta U = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \Omega U + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{gV\sqrt{U^2 + V^2}}{C_h^2 H} - \frac{\tau_{sy}}{H} - v_t \Delta V = 0 \quad (3)$$

onde:

- U, V componentes do vetor velocidade nas direções x e y ( $m s^{-1}$ )
- $\zeta$  nível medido a partir do plano de referência fixo (m)
- h profundidade referida a este plano (m)
- H profundidade total ( $H = h + \zeta$ ) (m)
- $\Omega U, V$  aceleração de Coriolis ( $m s^{-2}$ )
- $\tau_{sx}, \tau_{sy}$  componentes da tensão de cisalhamento na superfície (MPa)
- $C_h$  coeficiente de Chèzy ( $m^{1/2} s^{-1}$ )
- $v_t$  coeficiente de dissipação turbulenta ( $m^2 s^{-1}$ )
- $\Delta U, V$  operador laplaciano das velocidades ( $m^{-1} t^{-1}$ )

Em cada intervalo de tempo, o cálculo é realizado em duas etapas: primeiro é efetuado, em cada linha, o cálculo do nível e da componente U da velocidade através da resolução de um sistema linear tridiagonal pelo método de dupla varredura. A segunda etapa consiste na determinação das componentes V das velocidades e de novos níveis repetindo para as colunas o mesmo tipo de cálculo realizado para as linhas na primeira etapa (Borche, 1996).

## Resultados Obtidos

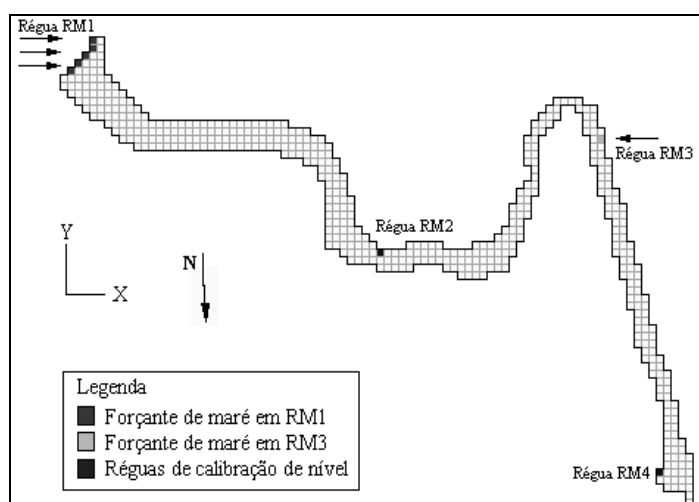
### Propagação da Maré Hidráulica

Da Figura 2 a seguir pode-se observar que o sinal de maré, na estação RM1, apresentou praticamente as mesmas características físicas (amplitude e fase) do sinal do Porto de Suape. A falta de aderência das medidas em RM1 ao sinal de Suape, apenas nos instantes próximos da preamar, pode ser explicada pela atuação do componente meteorológico local. De fato, neste período ocorreram fortes rajadas de vento que podem ter provocados ondas superficiais, as quais poderiam explicar as medidas de campo que estão indicadas no gráfico (GMFA-UFPE, 1998). Para as demais réguas RM2, RM3 e RM4 instaladas estuário adentro (ver Figura 1), as elevações medidas simultaneamente às de RM1 estão indicadas nas Figuras 3, 4 e 5 a seguir.

estação RM1 – Réguas Massangana 1, localizadas na foz do Rio Massangana; estação RM2 – Réguas Massangana 2 localizadas a cerca de 2800m a montante de RM1; estação RM3 – Réguas Massangana 3 localizadas a cerca de 2550m a montante de RM2; e a estação RM4 – Réguas Massangana 4 localizadas a cerca de 2200m a montante de RM3, em frente à rampa de acesso da fábrica de barcos Diamar (Figura 1).

Em cada estação foram instaladas 2 réguas linimétricas, sendo uma plana e outra auto-suportada, desenvolvida pelo GMFA-UFPE para os estudos em questão (Bagetti e Araújo, 1998). As leituras foram realizadas a intervalos de 10 minutos e os dados obtidos foram utilizados para o traçado das respectivas curvas de marés.

As sondagens batimétricas foram realizadas em seções perpendiculares ao eixo do estuário do Rio Massangana espaçadas por 50m entre si e os pontos batimétricos consecutivos de uma mesma seção são equidistantes de 10m.



**Figura 1- Representação da discretização do estuário do Rio Massangana (com suas condições de contorno)**

## Simulação Computacional

O método do sistema computacional utilizado neste trabalho para a resolução numérica das equações que modelam o escoamento tem como base as técnicas de diferenças finitas, semi-implícitas, de direções alternadas. As equações da continuidade e dinâmica, previamente integradas na vertical, consideram a perda de carga junto ao fundo, a ação do vento na superfície e a força de Coriolis.

A aplicação deste sistema é válido para corpos d'água que possuem dimensões horizontais predominantes relativamente às verticais, no qual as componentes horizontais da velocidade podem ser descritas por valores médios na vertical. Esta condição permite que se utilize modelos bidimensionais no plano horizontal (2D-H) para a simulação da sua circulação hidrodinâmica, simplificando em muito a modelação.

Para descrever matematicamente o escoamento em corpos d'água pouco profundos são utilizadas as seguintes equações para o caso bidimensional horizontal:

Equação da continuidade

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$



## CALIBRAÇÃO DE MODELO DE CIRCULAÇÃO HIDRODINÂMICA NO ESTUÁRIO DO RIO MASSANGANA / SUAPE – PE

**Alex Maurício Araújo<sup>1</sup>**

**Josafat Marinho Falcão Neto<sup>2</sup>**

**Carolina Caheté Silva<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, Departamento de Engenharia Mecânica, 50740-530, Recife, PE, Brasil. E-mail: ama@npd.ufpe.br

<sup>2</sup>Endereço atual: Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, Departamento de Oceanografia, 50740-540, Recife, PE, Brasil. E-mail: jfalcao@usa.net

### **Resumo**

Estudos de campo da propagação da maré hidráulica média anual de sizígia pelo estuário do Rio Massangana, próximo ao porto de Suape-PE, conduziram a uma calibração de um sistema de simulação computacional, voltado para a previsão da circulação hidrodinâmica induzida por marés no local. O sistema utilizado é bidimensional horizontal (2D-H), baseado nas equações de águas rasas, desenvolvido pelo Instituto de Pesquisas Hidráulicas da UFRGS. A calibração consistiu na comparação direta entre sinais de maré, usando-se como parâmetro de ajuste a rugosidade de fundo. Aproximou-se a área do espelho líquido do estuário por uma malha quadrada de diferenças finitas com 789 elementos. Inicialmente, utilizou-se como condição de contorno de nível apenas os dados linimétricos na foz do estuário, porém os resultados obtidos não se ajustaram aos outros locais de controle de linimetria. Entretanto, incluindo o contorno de nível da régua próxima ao canal dragado, obteve-se uma calibração satisfatória do modelo.

**Palavras-chave :** Circulação, Hidrodinâmica, Calibração, Suape.

### **Introdução**

Os estuários são corpos d'água governados hidráulicamente pela ação das marés e dos rios; particularmente, as marés resultam dos efeitos astronômicos e distúrbios meteorológicos locais. Os efeitos das forças gravitacionais (lua, sol e planetas) podem ser previstos com alta precisão, sendo que os meteorológicos são aleatórios e de difícil previsão, exceto nos casos de algumas tendências sazonais; no Nordeste do Brasil, em especial no verão, as marés são dominantes. Os objetivos deste artigo são os de apresentar os resultados dos levantamentos de campo da propagação da maré hidráulica e da calibração de um modelo de simulação computacional da circulação hidrodinâmica induzida por marés, para o caso do estuário do Rio Massangana, situado no Complexo Industrial Portuário de Suape, em Pernambuco.

### **Propagação da Maré Hidráulica**

A caracterização da propagação da maré média anual de sizígia ao longo do estuário do Rio Massangana foi baseada em leituras de régua linimétrica instaladas em 4 estações:

## **ELASTOHYDRODYNAMICS OF TENSIONED WEB ROLL COATING PROCESS**

**Márcio da S. Carvalho**

Department of Mechanical Engineering, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.  
Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea. Rio de Janeiro, RJ, 22453-900, Brazil.

Email: [msc@mec.puc-rio.br](mailto:msc@mec.puc-rio.br)

### **Abstract**

Coating process is an important step in the manufacturing of different products, such as paper, adhesive and magnetic tapes, and photographic films. The tensioned web roll coating is one of the several methods used by different industries. It relies on the elastohydrodynamic action between the fluid and the deformable substrate for transferring and applying the liquid. The main advantage of this method is its ability to apply very thin liquid layers at relative small cost. This work analyzes this elastohydrodynamic action by solving the differential equations that govern the liquid flow and the web deformation. The goal is to determine the operating conditions at which the process is two-dimensional and defect free. The equations are discretized by the Galerkin / finite element method. The resulting non-linear system of equations is solved by Newton's method coupled with pseudo-arc-length continuation in order to be able to obtain solutions around turning points.

**Key words:** elastohydrodynamics, finite element method, coating process, tensioned web.

### **1. INTRODUCTION**

In industrial coating processes, one or several liquid layers are deposited on a substrate and are then dried to form a solid film that serves a specific function. This process is vital in the manufacturing of different products, like paper, adhesive and magnetic tapes, magnetic disks, photographic films, and many others. The different ways of depositing a liquid on the substrate lead to different coating methods. Some of these methods rely on the interaction between hydrodynamic forces exerted by the flowing coating liquid and forces exerted by a deformable solid boundary that confines the flow, i.e. an elastohydrodynamic interaction. The main advantage of elastohydrodynamic coating system is their ability to apply very thin liquid layers with less sensitivity to mechanical tolerances at a relative small cost, when compared to more sophisticated pre-metered coating method, such as slot, slide and curtain coating (Pranckh and Coyle, 1997).

Of the many examples of elastohydrodynamic coating systems, the tensioned web roll coating uses only the deformable substrate without any external mechanical support to provide the elastic boundary for the liquid flow and to impose load in the coating bead. In tensioned web roll coating, the liquid is transferred to the substrate as it passes over a rotating roll, as illustrated in Fig.1. The roll and the substrate can be moving in the same direction, i.e. forward mode, or in opposite directions, called a reverse mode. The film thickness deposited

on the web is a function of the roll and web speeds, liquid viscosity, substrate stiffness and tension, and the wrapping angle of the substrate over the rotating roll. It is important to understand this elastohydrodynamic action in order to be able to predict and optimize this important industrial process.

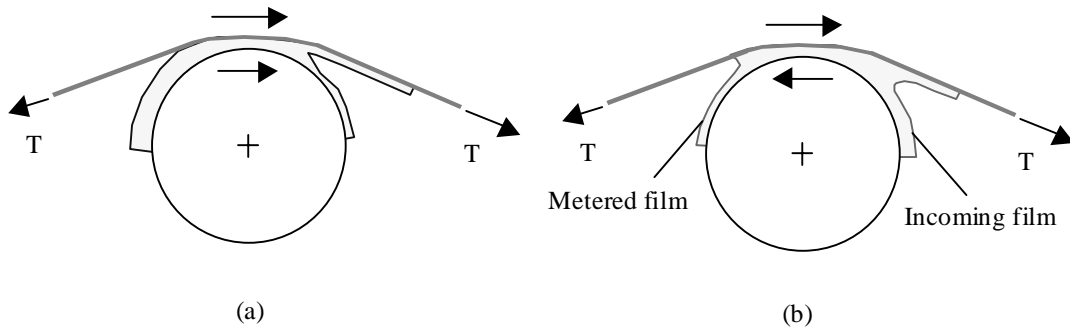


Figure 1: Tensioned web roll coating: (a) forward mode; (b) reverse mode.

This work analyzes the flow in a tensioned web roll coating bead operating in the reverse mode, as shown in Fig.1(b). The liquid is brought to the bead as a layer in the applicator roll, referred as the incoming layer. It is supplied to the roll by dip coating or by a slot die located upstream the coating bead. Part of the liquid is transferred to the substrate and the remaining stays on the roll creating what is usually called the metered film. The goal of this work is to determine the metered film thickness as a function of the operating parameters and the operating conditions at which the process is two-dimensional and defect free.

The differential equations that govern the liquid flow and the substrate deformation are discretized by the Galerkin / finite element method. The resulting non-linear system of equations is solved by Newton's method coupled with pseudo-arc-length continuation in order to be able to obtain solutions around turning points. The theoretical results are used to construct an operating window for the process that is in agreement with some experimental data available.

## 2. ELASTOHYDRODYNAMIC MODEL

### 2.1. Governing Equations

The configuration of the problem analyzed in this work is illustrated in Fig.2. The roll that brings the liquid into the transfer region is moving from right to left in the figure. The substrate is moving in the opposite direction and takes part of the liquid with it. The remaining liquid stays in the roll and is later removed from it by a scraper, not analyzed here. The liquid traction deforms the tensioned substrate. The flow and the deformation are coupled in what is called elastohydrodynamic behavior. This type of problem was first analyzed by Eshel and Elrod (1965, 1967).

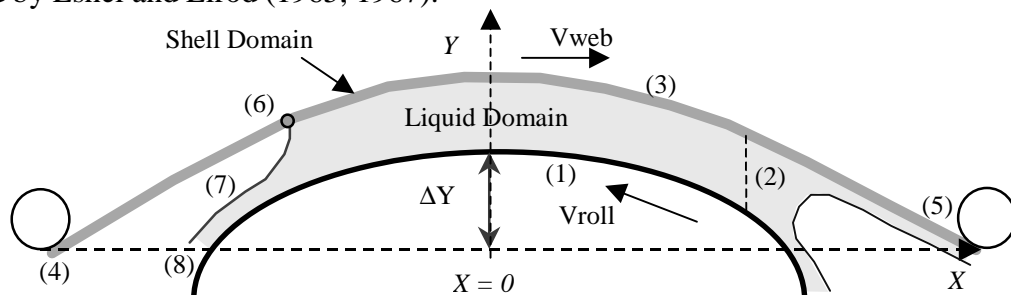


Figure 2: Sketch of domain of calculation.  $\Omega_f$  is the fluid domain and  $\Omega_s$  is the shell domain.

It is important to characterize the position of the moving roll relative to the upstream and downstream idlers that guide the moving web. The relative position can be characterized by the distance  $\Delta Y$  from the top of the roll to the axis that passes through the idlers, called here the x-axis. The coordinate  $x = 0$  is defined in the middle of the line that connects the two idlers, as indicated in the figure. When  $\Delta Y < 0$ , the web does not touch the roll. When  $\Delta Y > 0$ , the web wraps around a portion of the roll.

The web is assumed to be infinitely wide, and therefore the flow in the transverse direction is neglected. The motion of the liquid is described by the Navier-Stokes equation and continuity equation for incompressible Newtonian fluid:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \left[ -p \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \right] = 0 \quad \text{and} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

together with appropriate boundary conditions.  $\rho$  and  $\mu$  are the liquid density and viscosity, respectively. The deformation of the web is modeled by the equations of cylindrical shells:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\xi} + \kappa \frac{d}{d\xi} (\kappa D) + P_t + W_t &= 0 \\ -\frac{d^2}{d\xi^2} (\kappa D) + \kappa T + P_n + W_n &= 0 \\ \frac{d^2 x}{d\xi^2} + \kappa \frac{dy}{d\xi} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \kappa \frac{dx}{d\xi} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

$\xi$  is the coordinate along the web.  $T$  and  $\kappa$  are the web tension and curvature at each position, and  $x$  and  $y$  are the Cartesian coordinates of points on the web. The web stiffness  $D \equiv Et^3 / 12(1 - \nu^2)$  is a function of the Elastic Modulus  $E$ , Poisson ratio  $\nu$ , and thickness of the web  $t$ .  $P_t$  and  $P_n$  are the forces on the web in the tangential and normal direction.

The goal of this work is to analyze the amount of liquid that remains on the roll, i.e. the metered film thickness, at different operating conditions. Because the flow between the roll and the substrate is almost rectilinear far from the free surfaces and this work is only interested in the behavior of the metered film, the free surface in the upstream side of the coating gap is removed from the problem for simplicity. In the analysis presented here, it is substituted by what is called a flooded inlet, i.e. an artificial boundary condition used to reduce the side of the domain of calculation, which is shown in Fig.2. The domain is divided into two different subdomains: One where the Navier-Stokes equation is solved ( $\Omega_f$ ), and the other where the cylindrical shell equations are solved ( $\Omega_s$ ). At the roll surface, labeled (1) in Fig.2, the no-slip and no-penetration conditions apply. The artificial inlet boundary (2) was located far enough that its location had no effect on the predictions reported here. On that position, the liquid pressure is assumed to be constant (atmospheric). At the interface between the liquid and the flexible substrate (3), the liquid velocity is equal to the web velocity, and the loading force responsible for the web deformation is the traction exerted by the liquid. In one extreme of the substrate (4), the position, curvature and web tension have to be specified; in the other (5), only the position and curvature are specified. The point where the liquid first wets the substrate (6) is called the dynamic contact line. There, a local Navier-slip condition has to be used, otherwise a stress singularity would appear. At the free surface (7), the kinematic condition and a force balance in the form of the Young-Laplace equation, that takes into account the effect of surface tension, are imposed. At the artificial outlet place, the liquid traction is assumed to vanish.

This situation is governed by the following dimensionless groups:

$$\text{Reynolds number : } \text{Re} \equiv \frac{\rho V R}{\mu};$$

$$\text{Capillary number: } \text{Ca} \equiv \frac{\mu V}{\sigma};$$

$$\text{Speed ratio: } S \equiv \frac{V_{\text{web}}}{V_{\text{roll}}};$$

$$\text{Tension number : } \tau \equiv \frac{\mu V}{T};$$

$$\text{Elasticity number : } N_{ES} \equiv \frac{D}{TR^2} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)TR^2};$$

$$\text{Wrapping position : } \alpha \equiv \frac{\Delta Y}{R}.$$

## 2.2. Solution Method

The governing equations and the boundary conditions give rise to a free boundary problem. The location of the web and the free surface are unknown a priori. The basis of treating such problems is recounted briefly here. Fuller accounts were given by Kistler and Scriven (1983, 1984), Sackinger et al. (1996), and Carvalho and Scriven (1997).

In order to solve a free boundary problem using standard techniques for boundary value problems, the set of differential equations posed in the unknown physical domain has to be transformed to an equivalent set defined in a known, fixed reference domain. This approach has been extensively used to solve viscous flow with liquid / air interface. In that class of problem, the position of the interface is implicitly located by imposing the kinematic boundary condition at the free surface. In the situation studied here, the position of the web is implicitly located by imposing the system of ordinary differential equations (3). The transformation of the set of differential equations that governs the problem is made by a mapping  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$  that connects the physical domain, parameterized by the position vector  $\mathbf{x} = (x, y)$ , and the reference domain, parameterized by  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$ . The inverse of the mapping is governed by a pair of elliptic differential equations identical with those encountered in the dilute regime of diffusional transport. The coordinate potentials  $\xi$  and  $\eta$  satisfy

$$\nabla \cdot (D_{\xi} \nabla \xi) = 0 \quad \text{and} \quad \nabla \cdot (D_{\eta} \nabla \eta) = 0 \quad (3)$$

The Navier-Stokes equation (1), the substrate deformation (2) and the mesh generation equations (3) together with the respective boundary conditions were solved by the Galerkin / finite element method. Biquadratic basis functions were used to represent both the velocity and the mapping from the reference to the physical domain. The basis functions used to represent the pressure field were piecewise, linear and discontinuous.

The resulting non-linear system of algebraic equations for the coefficients of the basis functions was solved by Newton's method. The domain was divided into 484 elements with 9144 unknowns. The computations were performed in a HP model J-200 workstation, and each solution took approximately 6 minutes to be computed.

In order to obtain solutions at large wrapping angles, i.e., large values of  $\Delta Y$ , a good initial guess is vital. The procedure adopted was to first obtain solutions with the roll far from the web, i.e.,  $\Delta Y < 0$ . At these conditions, the pressure that builds up in the liquid is very small leading to small web deformation. A solution can be obtained even with a poor initial guess. After a solution is computed, a first-order, arc-length continuation on the position of

the roll was used to obtain solutions at the relevant set of parameters and to determine turning points on the solution path.

### 3. THEORETICAL PREDICTIONS

The domain configuration of a sequence of solutions at  $Ca = 0.1$  and  $\Delta Y / R = -10^{-3}$  (the web does not touch the roll) and rising speed ratio is shown in Fig.3. As the web speed increases, the dynamic contact line is pulled close and then through the plane of  $x = 0$ . This behavior occurs at all Capillary Numbers, as illustrated in Fig.4.

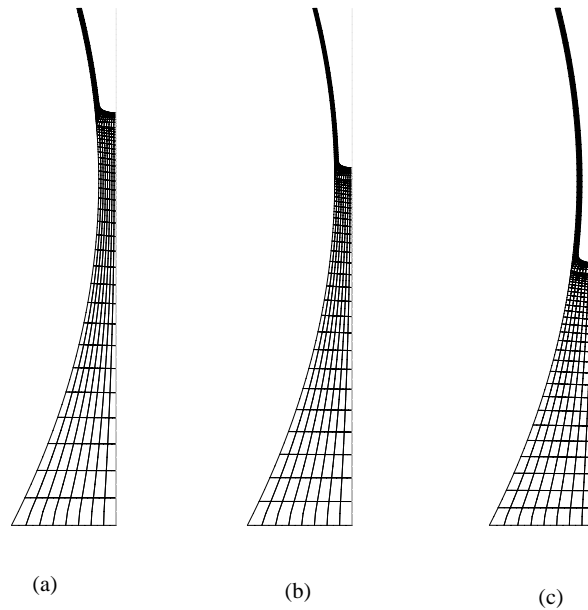


Figure 3: Flow states at  $Ca = 1$ ,  $\Delta Y / R = -10^{-3}$  and (a)  $S = 0.6$ ; (b)  $S = 0.7$ ; and (c)  $S = 0.8$ .

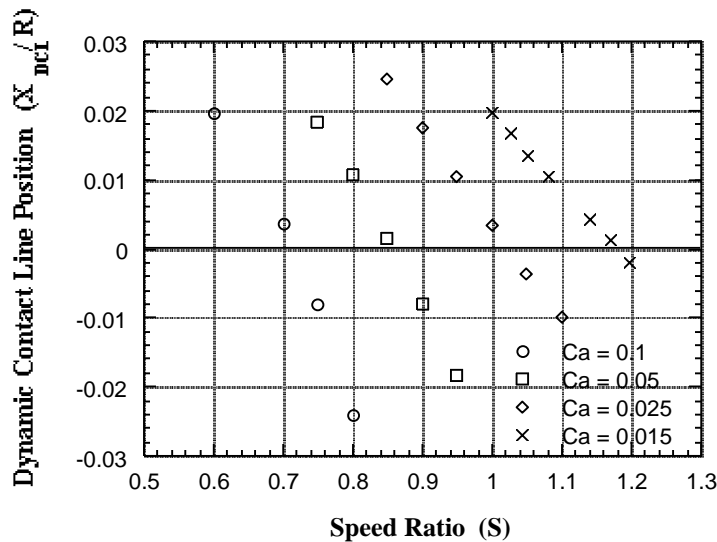


Figure 4: Dynamic contact line position as a function of speed ratio and Capillary number.

The metered film thickness at all the flow states shown in Fig.4 is plotted in Fig.5. First the film thickness decreases as the speed ratio is raised: As the web speed increases, the substrate carries more liquid with it and less liquid is left on the roll surface. However, above the speed ratio at which the dynamic contact line passes through the plane  $x = 0$ , the behavior

of the metered film changes completely. Its thickness increases with speed ratio. At each Capillary Number there is a minimum metered film thickness possible.

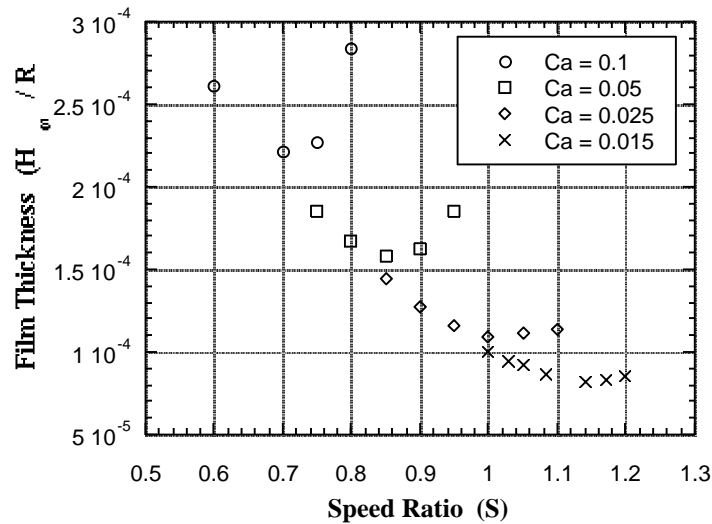


Figure 5: Film thickness of the metered film as a function of speed ratio and Capillary number.

When tensioned web is used to transfer a film to a substrate, it is desired to transfer all or most of the liquid deposited on the roll. Therefore, the metered film thickness has to approach zero. As it is clear from Fig.5, this can not be achieved with the configuration where the web is not wrapping part of the roll. The effect of pushing the roll against the substrate is examined in the following two figures. Figure 6 shows the free surface profile at  $Ca = 0.1$  and  $S = 0.7$  and different roll positions ( $\Delta Y/R$ ). As the roll is pushed against the substrate, the meniscus moves away from the plane  $x = 0$ .

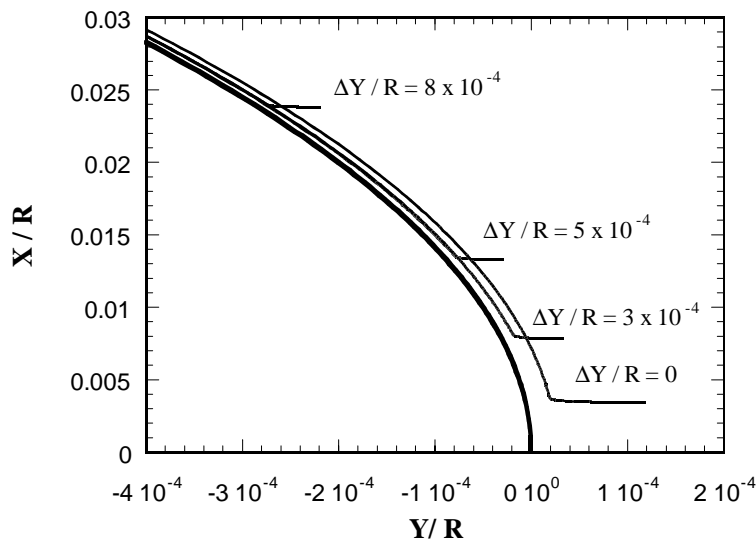


Figure 6: Free surface profile at  $Ca = 0.1$  and  $S = 0.7$  as a function of  $\Delta Y/R$ .

The film thickness at different wrapping angles and speed ratio is shown in Fig. 7. At small wrapping angles, i.e.  $\Delta Y/R < 10^{-4}$ , solutions could be obtained at all speed ratio, and there was a minimum thickness. It occurred at the speed ratio at which the dynamic contact line passed through the place  $x = 0$ , as discussed before. At large wrapping angles, a minimum film thickness was not observed, however there was always a speed ratio above which no two-dimensional, steady state solution could be obtained.

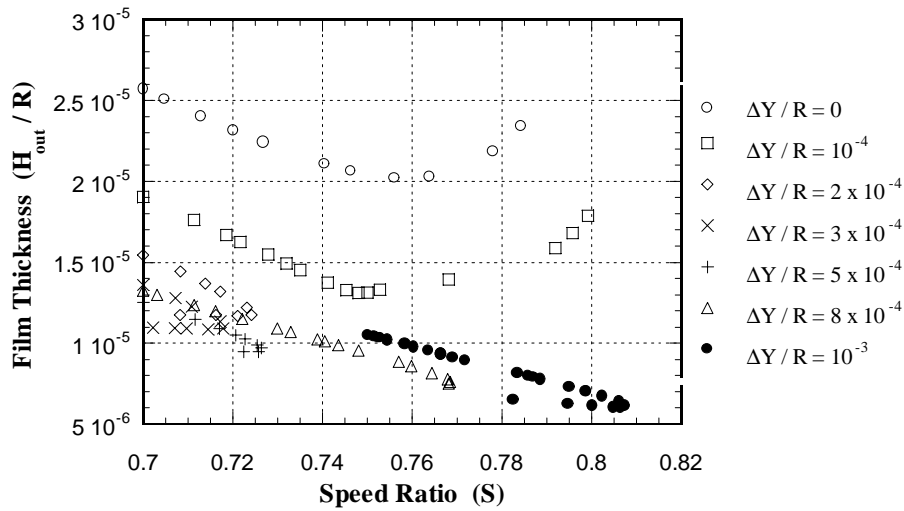


Figure 7: Film thickness of metered film as a function of speed ratio and wrapping angle.

The theoretical predictions are used to construct an operating window for this coating process, i.e. a diagram that shows the process condition as a function of wrapping angle and speed ratio, as shown in Fig.8. The speed ratio at which the turning point occurs is associated with the condition at which the metered film ceases to be continuous in the transverse direction (the flow is not two-dimensional) and breaks into stripes of liquid, generally called rivulets. The speed ratio at which the dynamic contact line passes through the plane  $x = 0$  is associated with the onset of an unstable bead that leads to a coating defect known as seashore. In the figure, the clear region represents the area of stable and two-dimensional flow.

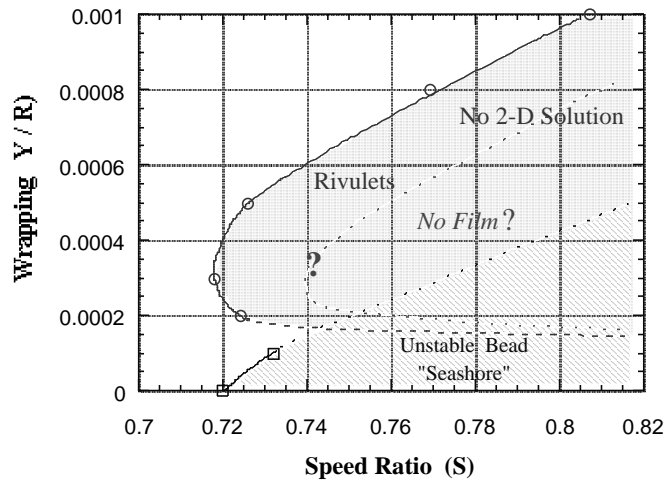


Figure 8: Coating window for the tensioned web roll coating process.

#### 4. FINAL REMARKS

Tensioned web roll coating is used to produce very thin liquid layers at relative small cost. Another important advantage of this method is that the film thickness and quality is fairly insensitive to mechanical tolerances. This work presented a theoretical approach to determine the operating window of this process operating in a reverse mode. The equations



that describe the liquid motion and substrate deformation were solved by the Galerkin / finite element method.

The results show the speed ratio at which the metered film breaks into rivulets and the conditions at which the bead becomes unstable, leading to a coating defect known as seashore. These two limits of operation determined theoretically were validated with some experimental evidences. Figure 9 illustrates flow visualization of the coating bead looked from the back of a transparent applicator roll at two different speed ratio. At speed ratio  $S = 0.75$ , the metered film left on the roll is in the form of rivulets, as predicted by the theoretical model. Rising the speed ratio to even higher values,  $S = 1$ , in Fig.9(b), the coating bead becomes unstable, also as predicted by the model.

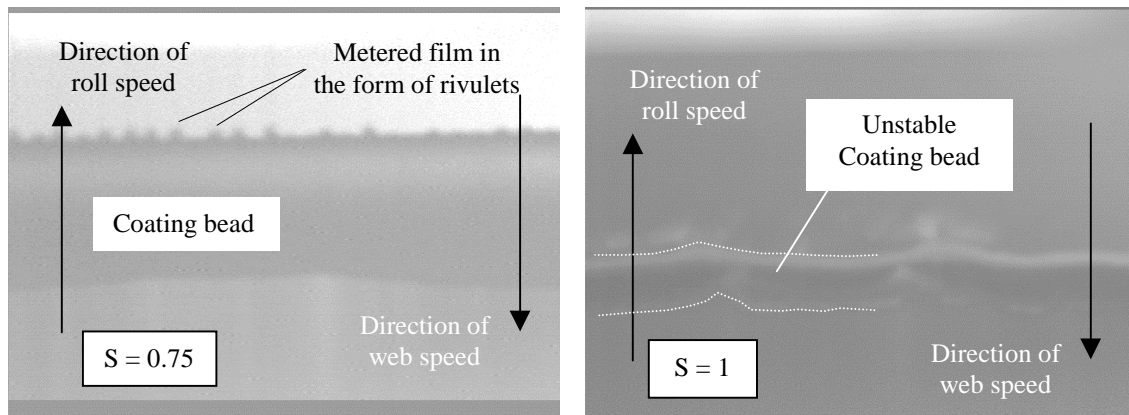


Figure 9: Flow visualization of metered film in the form of rivulets ( $S = 0.75$ ) and unstable coating bead ( $S = 1$ ).

## 5. REFERENCES

- Carvalho M. S. and Scriven L. E. 1997. "Flows in Forward Deformable Roll Coating Gaps: Comparison Between Spring and Plane Strain Model of Roll Cover". *Journal of Computational Physics*, vol.138(2), pp.449-479.
- Eshel A. and Elrod H.G. 1965. "The Theory of Infinitely Wide, Perfectly Flexible, Self-Acting Foil Bearing". *Journal of Basic Engineering*, vol. 87, pp. 831-836.
- Eshel A. and Elrod H.G. 1967. "Stiffness Effects on the Infinitely Wide Foil Bearing". *Journal of Lubrication Technology*, vol. 89}, pp.92-97.
- Kistler S.F. and Scriven L.E. 1983. "Coating Flows. Computational Analysis of Polymer Processing" (Eds. J.R.A. Pearson and S.M. Richardson). Applied Science Publishers, London, pp.243.
- Kistler S.F. and Scriven L.E. 1984. "Coating flow theory by finite element and asymptotic analysis of the Navier-Stokes system". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 4, pp.207.
- Pranckh F.R. and Coyle D.J. 1997. "Elastohydrodynamic Coating Systems", in *Liquid Film Coating: Scientific Principles and their Technological Implications* (ed. S.F. Kistler and P.M. Schweizer).
- Sakinger P.A., Schunk P.R. and Rao R.R. 1996. "A Newton-Raphson Pseudo-Solid Domain Mapping Technique for Free and Moving Boundary Problems: A Finite Element Implementation". *Journal of Computational Physics*, vol. 125, pp.83-103.

# METODOLOGIA DE IMPOSIÇÃO DE OBSTÁCULOS AO ESCOAMENTO PARA A SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA CAMADA LIMITE ATMOSFÉRICA

**Taygoara Felamingo de Oliveira**

**Luis Felipe de Aguilar Paulinyi**

**Roberto Francisco Bobenrieth Miserda**

Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica,  
CEP: 70910-900, Brasília, DF, Brasil. E-mail: [roberto@enm.unb.br](mailto:roberto@enm.unb.br)

## Resumo

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma metodologia de imposição de transicionadores de turbulência que permita a obtenção de um perfil médio de velocidades o mais próximo possível da camada limite atmosférica. Para isso um código bidimensional, baseado no método explícito de MacCormack desenvolvido por Bobenrieth (1996), foi adaptado de forma a se conseguir uma metodologia que permitisse a fácil imposição de obstáculos retangulares de dimensões quaisquer em um escoamento de ar, simulado segundo uma discretização em malha única e estruturada. São apresentados resultados para dois casos com disposições diferentes dos obstáculos com a finalidade de mostrar a viabilidade da metodologia obtida.

**Palavras-chave:** Transicionador de turbulência, Camada limite atmosférica

## 1. INTRODUÇÃO

O conhecimento do comportamento da camada limite atmosférica é de grande interesse no projeto de estruturas e edificações pois, uma vez que se conheça o perfil médio de velocidades, pode-se conhecer o tipo de carregamento ao qual a estrutura estará sujeita.

A camada limite atmosférica, além de possuir dimensões muito acima das convencionais, é influenciada pela força de Coriolis induzida pelo movimento de rotação da Terra. Tais fatos implicam em um comportamento tridimensional bastante complexo e de difícil análise. As medidas experimentais realizadas em campo, ficam, sempre, muito prejudicadas sobretudo devido às suas grandes dimensões. Os estudos em túneis aerodinâmicos também são dificultados pois, além da espessura, a intensidade de turbulência e o tamanho característico dos vórtices devem estar em escala com os modelos utilizados, o que nem sempre é fácil de se conseguir. Ainda há o problema da força de Coriolis que em túneis de vento é praticamente impossível de ser reproduzida.

A simulação numérica surge, então, como uma solução eficiente e poderosa, uma vez que permite a adaptação das condições locais, nas quais se deseja analisar o fenômeno de maneira rápida e bastante precisa, sendo possível adicionar o efeito de Coriolis sem problemas. Também é possível através de métodos numéricos chegar aos parâmetros de espessura da camada limite, intensidade de turbulência e tamanho de vórtices já na escala real do problema e, em se tendo facilidade na alteração da rugosidade do terreno, pode-se variar as características dos casos estudados com maior velocidade e precisão.

Inserido nesse contexto, o objetivo deste trabalho é desenvolver uma metodologia computacional de imposição de transicionadores de turbulência no plano vertical, perpendicular à superfície da Terra. A simulação é feita segundo uma discretização em malha única e estruturada através do método explícito de MacCormack que será discutido posteriormente. Deseja-se, sobretudo, que a metodologia obtida facilite a variação dos parâmetros topológicos dos transicionadores, e conseqüentemente a rugosidade relativa do

terreno, possibilitando a obtenção de um perfil médio de velocidades, típico da camada limite atmosférica.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático adotado é o sugerido por Bobenrieth (1996). É um modelo compressível para baixos números de Mach aplicado às grandes escalas do escoamento. Nele são resolvidas as equações da continuidade, quantidade de movimento e energia, considerando que o gás em questão é térmica e caloricamente perfeito. As variáveis são todas adimensionalizadas segundo a proposta de Anderson *et al.* (1984), onde:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}, & y^* &= \frac{y}{L}, & u^* &= \frac{u}{U_\infty}, & v^* &= \frac{v}{U_\infty}, & t^* &= \frac{t}{L/U_\infty}, \\ \bar{p}^* &= \frac{\bar{p}}{\rho_\infty U_\infty^2}, & \bar{\rho}^* &= \frac{\bar{\rho}}{\rho_\infty}, & \underline{T}^* &= \frac{\underline{T}}{T_\infty}, & \underline{e}^* &= \frac{\underline{e}}{U_\infty^2}, & \underline{\mu}^* &= \frac{\underline{\mu}}{\mu_\infty} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Neste texto, as variáveis sublinhadas são filtradas (por um filtro de caixa clássico) e as sobrelinhadas são filtradas e ponderadas pela densidade. O subíndice  $\infty$  representa propriedades do fluido não perturbado.

As equações que compõem o modelo são escritas na forma vetorial como segue:

$$\frac{\partial \bar{U}^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \bar{E}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \bar{F}^*}{\partial y^*} = 0; \quad (2.2)$$

onde:

$$\bar{U}^* = \begin{bmatrix} \bar{\rho}^* \\ \bar{\rho}^* \underline{u}^* \\ \bar{\rho}^* \underline{v}^* \\ \bar{\rho}^* \left( \underline{e}^* + \frac{(\underline{u}^*)^2 + (\underline{v}^*)^2}{2} \right) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\bar{E}^* = \begin{bmatrix} \bar{\rho}^* \underline{u}^* \\ \bar{\rho}^* \underline{u}^* \underline{u}^* + \bar{p}^* - (\underline{\mu}^* - \underline{\mu}_t^*) \underline{S}_{xx}^* \\ \bar{\rho}^* \underline{u}^* \underline{v}^* - (\underline{\mu}^* - \underline{\mu}_t^*) \underline{S}_{xy}^* \\ \bar{\rho}^* \underline{u}^* \left( \underline{e}^* + \frac{(\underline{u}^*)^2 + (\underline{v}^*)^2}{2} \right) + \bar{p}^* \underline{u}^* - (\underline{\mu}^* \underline{S}_{xx}^*) \underline{u}^* - (\underline{\mu}^* \underline{S}_{xy}^*) \underline{v}^* - \left( \underline{k}^* + \frac{1}{\gamma} \underline{k}_t^* \right) \frac{\partial \underline{T}^*}{\partial x^*} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\bar{F}^* = \begin{bmatrix} \bar{\rho}^* \underline{v}^* \\ \bar{\rho}^* \underline{v}^* \underline{u}^* - (\underline{\mu}^* - \underline{\mu}_t^*) \underline{S}_{xy}^* \\ \bar{\rho}^* \underline{v}^* \underline{v}^* + \bar{p}^* - (\underline{\mu}^* - \underline{\mu}_t^*) \underline{S}_{yy}^* \\ \bar{\rho}^* \underline{v}^* \left( \underline{e}^* + \frac{(\underline{u}^*)^2 + (\underline{v}^*)^2}{2} \right) + \bar{p}^* \underline{v}^* - (\underline{\mu}^* \underline{S}_{xy}^*) \underline{u}^* - (\underline{\mu}^* \underline{S}_{yy}^*) \underline{v}^* - \left( \underline{k}^* + \frac{1}{\gamma} \underline{k}_t^* \right) \frac{\partial \underline{T}^*}{\partial y^*} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Desta forma, a equação (1) tem no seu primeiro termo a equação da continuidade, nos dois termos seguintes, as duas componentes da equação de Navier-Stokes e no seu último

termo, a equação da energia. O modelo de turbulência adotado é o de submalha de Smagorinsky que é baseado na hipótese de equilíbrio termodinâmico das pequenas escalas. A partir desse modelo, pode-se chegar a uma viscosidade turbulenta adimensional dada por:

$$\mu_t^* = R_{e_L}^2 \bar{\rho}^* (C_S \Delta^*)^2 (\underline{S}_{xx}^* + \underline{S}_{yy}^* + \underline{S}_{xy}^*)^{1/2} \quad (2.6)$$

onde  $\Delta$  é o comprimento da aresta do volume de controle,  $C_S$  é a constante de Smagorinsky e  $R_{EL}$  é o número de Reynolds. As componentes do tensor taxa de deformação em forma adimensional são dadas por:

$$\underline{S}_{xx}^* = \frac{2}{3R_{E_L}} \left( 2 \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial y^*} \right); \quad \underline{S}_{yy}^* = \frac{2}{3R_{E_L}} \left( 2 \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial y^*} - \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial x^*} \right); \quad (2.7), (2.8)$$

$$\underline{S}_{xy}^* = \frac{1}{R_{E_L}} \left( \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial y^*} - \frac{\partial \underline{v}^*}{\partial x^*} \right); \quad (2.9)$$

Também são necessárias as equações de estado e a relação entre condutividade e viscosidade que pode ser obtida com a hipótese de número de Prandtl constante, todas adimensionalizadas. Desta forma, o modelo matemático fica completo.

### 3. MÉTODO NUMÉRICO

No presente trabalho é utilizado o método explícito de MacCormack na sua formulação de volumes finitos proposta por Hirsch (1990). Neste método, as equações governantes filtradas e adimensionalizadas que foram condensadas na equação (2.1) são escritas na seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{U}^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot \bar{\Pi}^* = 0 \quad (3.1)$$

onde:

$$\bar{\Pi}^* = \bar{E}^* \otimes \hat{i} + \bar{F}^* \otimes \hat{j} \quad (3.2)$$

Definindo-se o vetor  $U$  e o tensor  $\Pi$  como sendo as médias volumétricas dos vetor  $\bar{U}^*$  e do tensor  $\bar{\Pi}^*$  em um volume finito genérico e  $S$  como o vetor de superfície, o método propõe que a variação temporal do vetor  $U$  seja calculada em dois passos: preditor e corretor. No primeiro passo, esta variação no intervalo adimensional  $\Delta t$  é predita a partir do valor conhecido do vetor  $U$  no instante de tempo adimensional  $n$ , como:

$$\Delta U_{i,j}^n = \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \left( \Pi_{i+1,j}^n S_{i+1/2} + \Pi_{i,j}^n S_{i-1/2} + \Pi_{i,j+1}^n S_{j+1/2} + \Pi_{i,j}^n S_{j-1/2} \right) \quad (3.3)$$

desta forma, o valor predito do vetor  $U$  no instante de tempo adimensional  $n+1$ , é dado por:

$$\bar{U}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \Delta U_{i,j}^n \quad (3.4)$$

Conhecida esta predição, a variação temporal do vetor  $U$ , neste mesmo intervalo de tempo, é corrigida como:

$$\Delta U_{i,j}^{\overline{n+1}} = \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \left( \Pi_{i,j}^{\overline{n+1}} S_{i+1/2} + \Pi_{i-1,j}^{\overline{n+1}} S_{i-1/2} + \Pi_{i,j}^{\overline{n+1}} S_{j+1/2} + \Pi_{i,j-1}^{\overline{n+1}} S_{j-1/2} \right) \quad (3.5)$$

E, finalmente, o valor do vetor  $U$  no instante de tempo  $n+1$  é dado por:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \frac{1}{2} \left( \Delta U_{i,j}^n + \Delta U_{i,j}^{\overline{n+1}} \right) \quad (3.6)$$

A precisão do método explícito de MacCormack é de segunda ordem tanto no espaço quanto no tempo e a condição necessária e suficiente para garantir a estabilidade do método é que o número de CFL seja sempre menor do que a unidade.

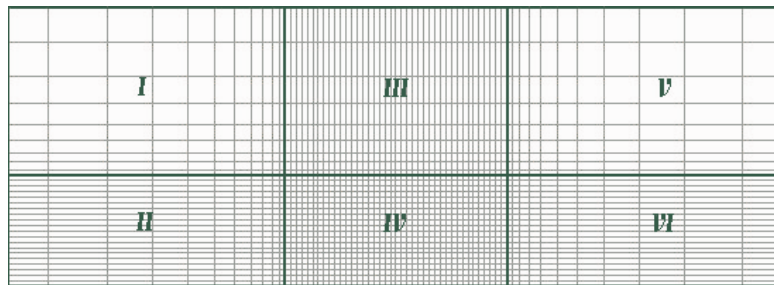
## 4. METODOLOGIA

### 4.1 Domínio e malha computacional

O domínio computacional usado representa o plano vertical perpendicular à superfície da Terra, no qual será desenvolvida uma camada limite turbulenta. É um domínio retangular bastante comprido a fim de proporcionar espaço suficiente para a colocação dos transicionadores além de permitir um desenvolvimento completo da camada limite. A malha usada na discretização do domínio é formada de volumes retangulares de tamanho variável e, de acordo com o formato desses, pode ser subdividida em seis regiões, como está ilustrado na figura 1.

A região IV é onde serão posicionados os transicionadores, é uma região regular, formada por elementos quadrados. Cada uma das outras regiões é constituída de elementos retangulares que vão tornando-se cada vez maiores à medida que se afastam do trecho regular. O tamanho e os fatores de crescimento em cada trecho são independentes.

É preciso que o domínio computacional seja suficientemente grande para que o escoamento não perturbado não sofra a influência dos transicionadores e para que nas fronteiras do domínio as variações das propriedades entre um volume e outro não sejam muito bruscas. Desta forma, obtém-se um domínio computacional muito extenso se comparado com a região de interesse e, conseqüentemente, se o mesmo grau de refinamento de malha fosse utilizado em todo o espaço ter-se-ia uma grande quantidade de pontos de cálculo desnecessários. E por ter isso em vista é que se optou pela utilização de uma malha com as características supra mencionadas.



**Figura 1.** Esquema das malhas utilizadas na discretização do domínio.

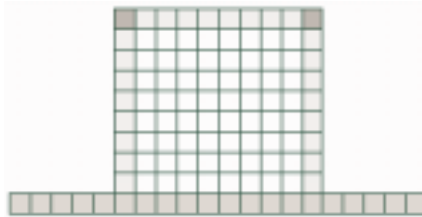
## 4.2 Condições iniciais e de contorno

Inicialmente, todo o domínio está nas condições do escoamento não perturbado. As condições de contorno na fronteira são aplicadas através de volumes virtuais posicionados fora do domínio. Na fronteira referente ao solo, no trecho IV, foi aplicada a condição de não escorregamento do fluido. Para isso, as componentes de velocidade nos volumes virtuais referentes a essa região são sempre opostas às dos volumes reais correspondentes, de forma que a velocidade na fronteira é sempre nula. A massa específica e a energia total nos volumes virtuais são impostas como sendo iguais às dos reais, forçando assim uma fronteira impermeável. Nos trechos II e VI a atualização dos volumes virtuais quanto a massa específica, energia total e a componente vertical da velocidade foi totalmente análoga à feita no trecho IV, no entanto, a componente horizontal não foi anulada, estabelecendo-se assim uma fronteira impermeável mas de livre escorregamento do fluido. Essa condição de contorno, não convencional, foi usada porque o modelo de submalha de Smagorinsky gera uma viscosidade turbulenta muito acima do normal quando utilizado em trechos de malha onde os volumes finitos são muito delgados e a taxa de deformação é muito acentuada, como é caso das primeiras iterações, se a condição fosse de aderência total do fluido à superfície. Na fronteira vertical, à esquerda do domínio, é imposta a condição de escoamento não perturbado e as demais fronteiras são livres ao escoamento.

## 4.3 Imposição dos transicionadores de turbulência

A metodologia de imposição de transicionadores de turbulência consiste em definir regiões da malha (sempre no trecho regular) nas quais serão impostas condições que simulem a presença de um corpo rígido. Para o caso bidimensional, as informações necessárias para a definição do espaço ocupado pelos obstáculos são a coordenada “x” do início da região do transicionador (a coordenada “y” é desnecessária uma vez que pressupõe-se que os obstáculos estão sobre o solo), o comprimento e a altura do mesmo. Essas informações são fornecidas pelo usuário por meio de um arquivo texto cuja primeira linha deve trazer o número de transicionadores e as linhas subseqüentes as informações de localização, comprimento e altura de cada um, sempre em número de volumes.

Uma vez adquiridos os dados a subrotina responsável pela simulação de obstáculos é chamada dentro da rotina de atualização das condições de contorno, tantas vezes quantos forem os transicionadores de turbulência. Internamente, a subrotina de imposição de transicionadores faz a atualização das propriedades, na região referente ao obstáculo, de forma a simular a presença de um corpo rígido. Esta simulação envolve a definição de paredes impermeáveis nas quais o fluido adere completamente e a definição de uma região interna com propriedades constantes. A simulação das paredes do obstáculo é feita através de uma atualização de propriedades semelhante à realizada na região referente ao solo no trecho IV da malha. As propriedades termodinâmicas do fluido da região interna dos obstáculos são as mesmas do escoamento não perturbado, no entanto, sua velocidade é nula.



**Figura 2.** Esquema dos transicionadores

A figura 2 mostra as partes dos transicionadores de turbulência. A região branca é a interna, as paredes impermeáveis são representadas pelo cinza mais claro e, em um tom intermediário, estão representados os volumes virtuais. Nos cantos, destacados pelo cinza mais escuro, as propriedades termodinâmicas são impostas como sendo iguais a média das propriedades dos três volumes reais ao redor deles e a velocidade é sempre nula. Apesar desta condição de contorno acarretar em certa permeabilidade a esses volumes, uma vez que a velocidade na fronteira não é exatamente zero, confere ao programa maior estabilidade, sobretudo nas primeiras iterações.

É importante ressaltar que com essa metodologia os transicionadores são impostos na quantidade que se queira, em qualquer topologia, com extrema facilidade, uma vez que a entrada de dados relativos aos obstáculos é feita de forma muito simplificada.

## 5. RESULTADOS

Foram realizadas duas simulações nas quais usaram-se transicionadores de geometria constante e disposição espacial diferentes. Em ambos os casos, a razão de aspecto (base/altura) dos transicionadores foi de 6/25 e o número de obstáculos é dez, variando-se apenas a distância entre eles. No primeiro caso o espaçamento era de um vez a altura dos obstáculos e, no segundo, de três vezes. A altura dos transicionadores é 100m. As condições do escoamento não perturbado também são iguais para os dois casos.

### 5.1 Primeiro Caso: Distância relativa entre transicionadores de 1H

**Tabela 1.** Condições do escoamento não perturbado.

$P_{\infty}$	101325 Pa
$T_{\infty}$	300 K
$U_{\infty}$	35 m/s
$R_{EL}$	$2.23 \times 10^8$

**Tabela 2.** Características da malha computacional para o caso 1H.

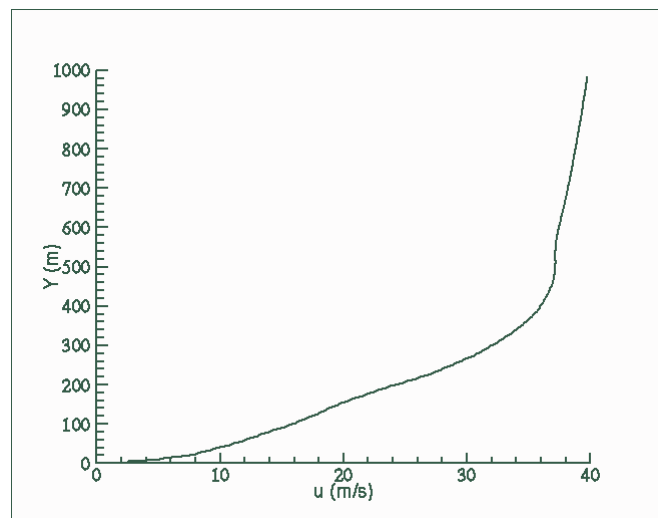
Dimensões do trecho regular (x,y)	(2000 ,300) m
Dimensões das extensões da malha (direita, esquerda e acima)	(1000, 1000, 700) m
Fatores de crescimento em cada trecho estendido	1.2, 1.05, 1.05
Número de volumes do trecho regular	500 x 75

A título de ilustração é apresentado um campo de vorticidade adimensional obtido desta simulação. Originalmente a figura era colorida tendo em seu espectro de cores a indicação da intensidade da propriedade. Também é utilizado o recurso de “gráfico em zebra” a fim de tornar mais clara a visualização.



**Figura 3.** Campo de vorticidade adimensional no instante  $t = 266.4 H/U_\infty$

Apesar de não se ter a mesma riqueza de informações que fornece a versão colorida deste gráfico, pode-se notar a ação dos transicionadores na geração de turbulência. A figura 3 não mostra o domínio computacional inteiro, sendo que toda a parte de malha não regular, anterior aos obstáculos, foi suprimida.



**Figura 4.** Perfil médio de velocidade da camada limite obtida no caso 1H.

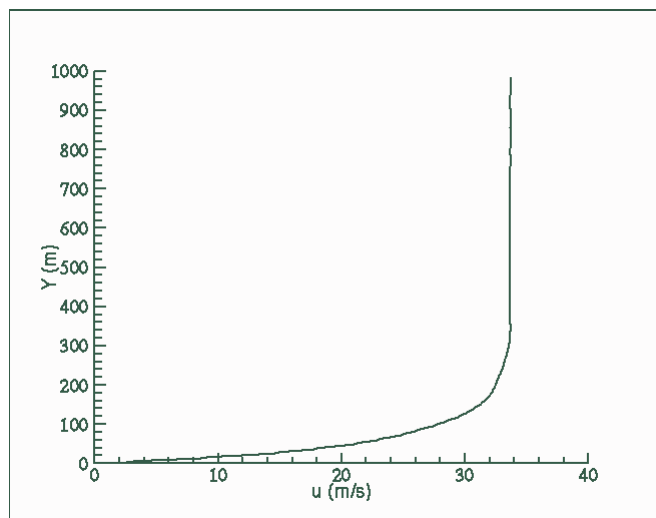
## 5.2 Segundo Caso: Distância relativa entre transicionadores de 3H

**Tabela 3.** Características da malha computacional para o caso 3H.

Dimensões do trecho regular (x,y)	(6480 ,300) m
Dimensões das extensões da malha (direita, esquerda e acima)	(1000, 1000, 700) m
Fatores de crescimento em cada trecho estendido	1.2, 1.05, 1.05
Número de volumes do trecho regular	1620 x 75

Neste caso foi necessário uma malha computacional mais comprida para que não se alterasse o número de transicionadores.





**Figura 5.** Perfil médio de velocidade da camada limite obtida no caso 3H.

## 6. CONCLUSÕES

Em outras metodologias de imposição de obstáculos retangulares utilizadas para este mesmo método, a simulação de apenas um transicionador necessitaria de quatro malhas: uma seria o transicionador em si, as demais preencheriam os espaços à direita, à esquerda e acima dele. Já para a imposição de vários obstáculos o número de malhas necessárias seria impraticável. Também deve-se levar em consideração que uma alteração no número de malhas utilizadas significa uma série de alterações no código do programa. Somando-se ao tempo gasto com essa atividade, o de definição e geração das malhas, uma pesquisa sobre a influência da topologia dos transicionadores nas características da camada limite seria muito demorada e desnecessariamente laboriosa. Levando em conta esses fatores, a metodologia proposta e implementada demonstrou ser muito eficiente devido a facilidade da colocação de transicionadores de turbulência e, conseqüentemente, pelo tempo economizado na definição dos casos e no processamento.

A cerca das malhas utilizadas, pode-se dizer que foram eficientes na economia de pontos do domínio computacional; no entanto é preciso enfatizar que a tomada de dados para pesquisa deve ser feita sempre no trecho regular, pois as estruturas turbulentas deterioram-se rapidamente quando submetidas à variações do tamanho dos volumes.

## 7. REFERÊNCIAS

Bobenrieth, R. F. M., 1996, “Simulação Numérica de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos Através de uma Formulação Compressível para Baixos Números de Mach”, Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, São Paulo.

Anderson, D. A., Tannehill, J. C., Pletcher, R., 1984, “Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer”, Hemisphere Publishing Company, New York.

Hirsch, C., 1990, “Numerical Computation of Internal and External Flows”, John Wiley and Sons, New York.

## ANÁLISE DO VAZAMENTO DE LÍQUIDOS E GASES ISOTÉRMICOS EM TUBULAÇÕES

**Oldrich Joel Romero**

**Angela Ourivio Nieckele**

Pontifícia Universidade Católica – PUC/Rio, Departamento de Engenharia Mecânica,  
22453-900, Rio de Janeiro, RJ, BR E-mail: oldrich@mec.puc-rio.br e nieckele@mec.puc-rio.br

### Resumo

A simulação numérica do escoamento em regime transiente de líquidos e gases compressíveis e isotérmicos através de tubulações com vazamento, é apresentada. As equações de conservação de massa e quantidade de movimento linear, escritas na forma conservativa, são resolvidas utilizando o método dos volumes finitos. O algoritmo foi validado utilizando resultados disponíveis na literatura. Duas formas de prescrever a perda de massa é considerada: como função da vazão na entrada, e como sendo proporcional à diferença de pressão entre o fluido e o meio externo. A influência da perda de massa nos campos de velocidade e pressão foi analisada mediante a simulação de diversos tamanhos de furos e diferentes localizações dos mesmos ao longo de tubulações de comprimentos e diâmetros variados. Constatou-se que o vazamento introduz perturbações nos campos de velocidade e pressão. Verificou-se que, o instante em que o vazamento ocorre é claramente identificado, mediante o monitoramento contínuo da pressão ou da vazão mássica em diversos pontos ao longo da tubulação. Finalmente observou-se que para localizar o ponto onde a perda de fluido acontece, é necessário realizar balanços de massa entre diversos trechos da tubulação.

**Palavras-chave:** vazamento, isotérmico, transiente, conservativo, compressível.

### 1. INTRODUÇÃO

O vazamento em linhas de transporte de líquidos ou gases é uma causa de preocupação constante para os operadores. O derramamento do fluido pode causar sérios acidentes e danos consideráveis podem ir acontecer pela quantidade de produto liberado ao meio ambiente. Isto origina que regulamentos mais rigorosos por parte dos governos sejam emitidos para diminuir estes acidentes (Liou & Tian, 1994).

Mas levando em conta que são diversas as causas que podem originar o vazamento numa tubulação, por exemplo corrosão, erosão, falhas em juntas e soldas, fadiga, ruptura, falhas em equipamentos, etc., o monitoramento contínuo mediante instrumentação e *softwares* adequados da linha de transporte, é essencial.

Diversos métodos foram desenvolvidos para detectar o vazamento, mas em geral podem ser classificados, como mencionado por Watanabe & Himmelblau (1986), em dois tipos: diretos e indiretos. Os primeiros são aqueles que se servem da inspeção visual, do cheiro, do som e do estado anormal da vegetação para localizá-los. No caso dos indiretos, a detecção é feita mediante medições de pressão e vazão ao longo da tubulação, e em operação conjunta com *softwares* desenvolvidos utilizando diversas técnicas computacionais. Whaley & Ellul (1994) apresentam uma importante discussão em relação aos métodos indiretos, classificando-os em: métodos baseados em *hardware* (sistemas sensíveis ao fluido e sistemas SCADA), métodos acústicos, métodos de reconhecimento padrão e métodos baseados em modelos.

Uma outra abordagem é apresentada por Iserman (1984), segundo ele as seguintes distinções devem ser feitas para classificar os métodos de detecção: (i) médio (líquido – gás – múltiplas fases), (ii) operação (parado – estacionário – pequenas mudanças – não estacionário), (iii) tamanho (grande – médio - pequeno), (iv) desenvolvimento do vazamento (abrupto – lento – já existente) e (v) monitoramento (contínuo – intermitente).

Existem vários trabalhos publicados que estudam o problema do vazamento, a maioria deles utilizam o método das características para resolver numericamente o conjunto de equações diferenciais que regem o escoamento.

Estas metodologias baseiam-se no fato de que um vazamento existe quando há discrepâncias entre os valores computados pelo modelo (basicamente pressão e vazão) e os medidos no campo, esta diferença é vista como sendo proporcional ao tamanho do vazamento. Uma ampliação destes conceitos, podem ser encontrados em Whaley *et al.* (1992).

No presente trabalho, o princípio de conservação da massa aplicado ao escoamento é utilizado. Este deve ser perfeitamente satisfeito no caso de não existir derramamento. Em outras palavras a diferença entre as vazões em massa da saída e entrada da tubulação, deve ser igual à taxa de variação da massa no interior da linha. Romero, O.J. (1999) efetua um desenvolvimento detalhado desta formulação, utilizando o método dos volumes finitos.

## 2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

As equações de conservação de massa e quantidade de movimento linear, que governam o escoamento de um fluido com propriedades constantes, com exceção da massa específica, escoando unidimensionalmente em um duto de paredes não rígidas; podem ser escritas na forma conservativa, ou divergente (Anderson, 1995), de acordo com o volume de controle elementar ilustrado na Figura 1, como

$$\frac{1}{dV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\rho AU) + \frac{1}{dV} F_{\text{perda}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{dV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho U dV) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\rho AUU) = - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{f \rho U |U|}{2D} - \rho g \sin \alpha \quad (2)$$

onde  $U$  é a velocidade do fluido,  $p$  é a pressão,  $\rho$  a massa específica,  $A$  é a área da seção transversal ( $A = \pi D^2 / 4$ ),  $\alpha$  o ângulo que o eixo faz com a horizontal,  $f$  é o fator de atrito,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $t$  o tempo.  $dV = A dx$  é o diferencial de volume.  $F_{\text{perda}}$  representa o vazamento (vazão em massa de fluido que perde-se para o meio externo, o qual é considerado saindo perpendicularmente à parede da tubulação através dos furos localizados na sua superfície, ver Figura 1.

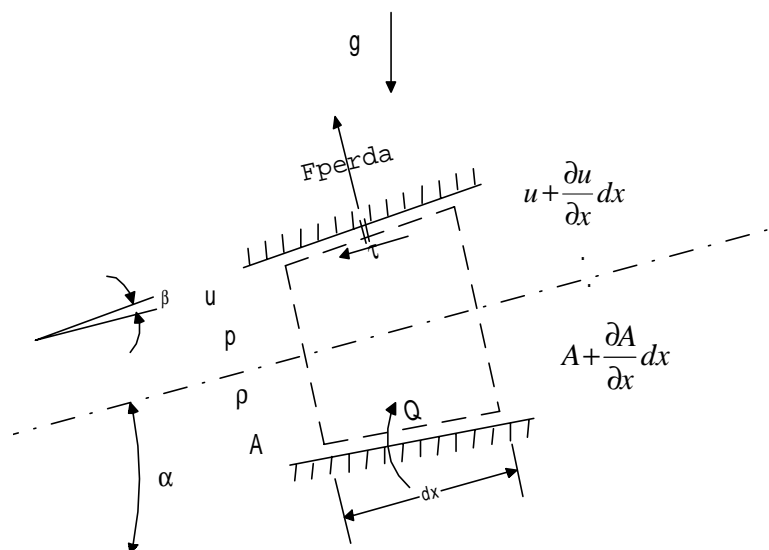


Figura 1. Volume de Controle Elementar

Duas formas de modelar o termo  $F_{\text{perda}}$  são consideradas:

(i) em função da vazão mássica prescrita na entrada,  $\dot{m}_{\text{in}}$

$$F_{\text{perda}} = \xi * \dot{m}_{\text{in}} \quad (3)$$

(ii) em função da diferença de pressão entre a linha e o ambiente,  $p - p_{\text{atm}}$ .

$$F_{\text{perda}} = \rho C_d A)_{\text{furo}} \sqrt{2(p - p_{\text{atm}}) / \rho} \quad (4)$$

a variável  $\xi$  pode assumir diversos valores entre 0 e 1,  $C_d A)_{\text{furo}}$  é o produto do coeficiente de descarga através do furo e a área do mesmo.

A área pode variar por causa da utilização de tubulações diferentes ou por deformações da tubulação devido à pressão interna, resultando na seguinte dependência do diâmetro com a pressão, a partir de um diâmetro de referência  $D_{\text{ref}}$ , avaliado a pressão atmosférica ( $p_{\text{atm}}$ ).

$$D = \frac{D_{\text{ref}}}{[1 - C_D (p - p_{\text{atm}})]} \quad , \quad C_D = \frac{(1 - \mu^2) D_{\text{ref}}}{2eE} \quad (5)$$

e é a espessura da parede da tubulação, E o módulo de elasticidade de Young e  $\mu$  coeficiente de Poisson.

Considerou-se a dependência da massa específica com a pressão como:

para líquidos

e para gases

$$\rho = \frac{(p - p_{\text{ref}})}{a^2} \quad \text{onde } a = \text{constante} \quad , \quad \rho = \frac{p}{a^2} \quad \text{onde } a^2 = z R T_{\text{ref}} \quad (6)$$

onde z é o coeficiente de compressibilidade, R a constante do gás, o subscrito ref indica valores de referência e a é a velocidade do som.

O fator de atrito de Darcy f, depende do número de Reynolds,  $Re = \rho U D / \mu_{\text{fl}}$  e da rugosidade relativa da tubulação  $\epsilon/D$  (Fox & McDonald, 1995),  $\mu_{\text{fl}}$  representa a viscosidade absoluta do fluido, considerada constante.

$$f = \frac{64}{Re} \quad \text{para } Re \leq 2300 \quad \text{e} \quad f = 0,25 \left[ \log \left( \frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^{-2} \quad \text{para } Re > 2300 \quad (7)$$

### 3. MÉTODO NUMÉRICO

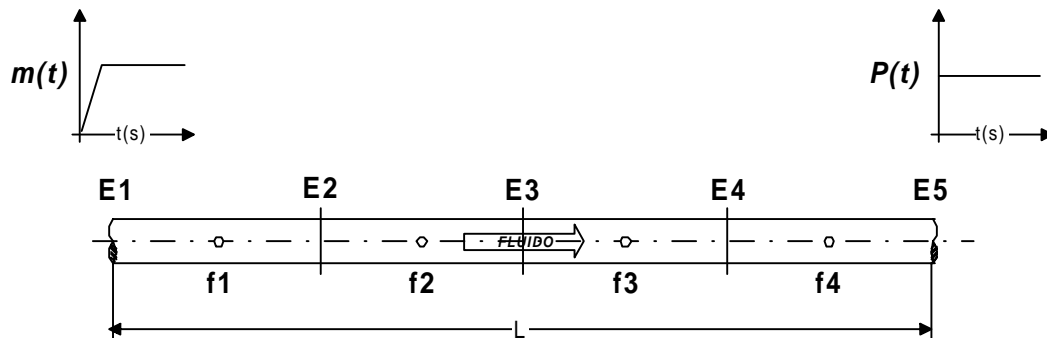
Para a discretização das equações (1) e (2), utilizou-se o método dos volumes finitos (Patankar, 1980). A velocidade é localizada nas faces do volume de controle, enquanto que a pressão foi armazenada no ponto nodal central. Utilizou-se integração temporal totalmente implícita, o método “Upwind” para a integração dos termos espaciais convectivos e diferenças centrais para os outros termos.

Para a solução do sistema algébrico resultante utilizou-se um procedimento direto, resolvendo-se a velocidade e pressão com um algoritmo hepta-diagonal, baseado no algoritmo SIMPLER (Patankar, 1980), onde uma equação para a pressão é construída combinando-se a equação de conservação de massa e quantidade de movimento linear. Uma vez que o problema é não linear, diversas iterações deste procedimento, com atualização das propriedades relevantes, são realizadas a cada passo de tempo até obtenção da convergência.

## 4. RESULTADOS

O código computacional implementado foi validado efetuando-se comparações com soluções disponíveis na literatura (Wylie & Streeter, 1978) e com outros códigos computacionais. A concordância entre os resultados do presente modelo e os dados da literatura foram muito boas. Os detalhes destas comparações podem ser encontradas em Romero e Nieckele (1999).

Devido a limitação de espaço, somente dois casos de escoamento com vazamento serão apresentados. Considerou-se escoamento isotérmico ( $T_{ref} = 293 \text{ K}$ ) de um gás e de um líquido ao longo de uma tubulação horizontal não rígida com furos, como esquematizado na Figura 2.



**Figura 2.** Tubulação horizontal com furos

Considera-se que a tubulação, de comprimento L e diâmetro D, é composta por quatro trechos e possui cinco estações de monitoramento (E1,...,E5) onde são feitas leituras de vazão e pressão. Para efeitos de simulação, furos podem existir ao longo da linha, em cada um dos trechos. Os furos serão denominados de (f1,...,f4) dependendo do trecho onde estão localizados.

Os dados referentes a tubulação válidos para os dois ensaios são

- ⊙ Modulo de Young,  $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$
- ⊙ Coeficiente de Poisson,  $\mu = 0,3$
- ⊙ Espessura da parede,  $e = 2,54 \text{ cm}$
- ⊙ Rugosidade,  $\epsilon = 0,002 \text{ mm}$

Em ambos os testes considerou-se que a pressão é sempre mantida constante na saída e a vazão em massa é prescrita na entrada. Inicialmente o fluido está em repouso com distribuição uniforme de pressão igual ao valor da saída. A vazão cresce linearmente até um determinado valor e permanece constante após disso.

O objetivo é analisar o comportamento do escoamento quando o vazamento ocorre. Este vazamento é prescrito na simulação somente após o regime permanente ter sido atingido.

### 4.1 Escoamento de um Gás Isotérmico numa Tubulação Horizontal com Vazamento

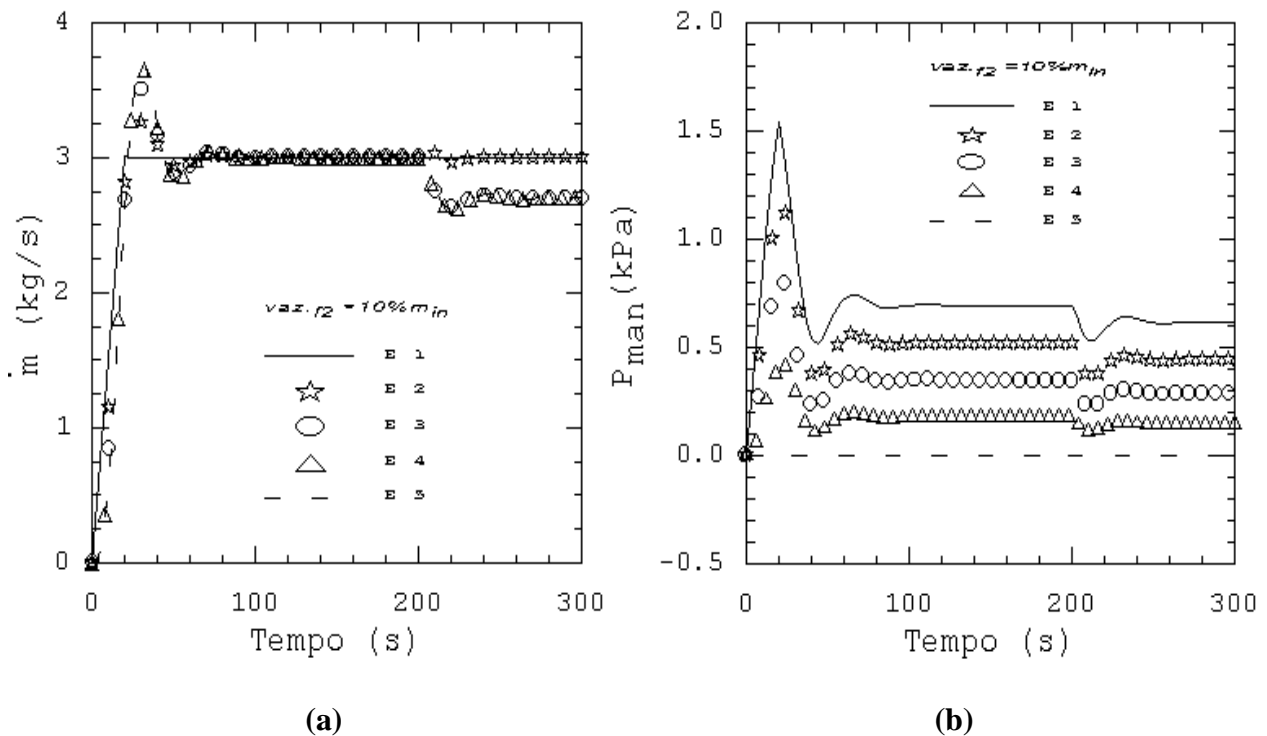
Para este caso, considerou-se um gás ideal isotérmico escoando através de uma tubulação com  $L = 3 \text{ km}$  e  $D = 85 \text{ cm}$ . As propriedades do gás são:  $R = 287 \text{ N m}/(\text{kg K})$ ;  $z = 1,04$ ;  $\mu_{fl} = 1,5 \times 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m s})$ .

A pressão na saída foi mantida constante e igual a pressão atmosférica  $P_{atm}$ . A vazão em massa da entrada levou 20 s para atingir o valor constante de 3 kg/s.

O tempo total de simulação foi de 300 s, e o vazamento foi prescrito 200 s após ter-se

iniciado o processo.

A Figura 3 ilustra a variação temporal da vazão e pressão nos cinco pontos da linha quando o vazamento é prescrito através do ponto f2 (Figura 2), considerando-se que este é igual a 10 % da vazão em massa da entrada, de acordo com a equação (3). Observa-se que no instante em que começa o vazamento, ocorre uma sensível diminuição da vazão mássica nas estações a jusante do furo, permanecendo inalteradas as leituras a montante. Com relação a pressão, pode-se identificar o instante em que o incidente ocorre, porém, não é possível identificar o trecho, já que uma leve queda de pressão é detectada em todas as direções.



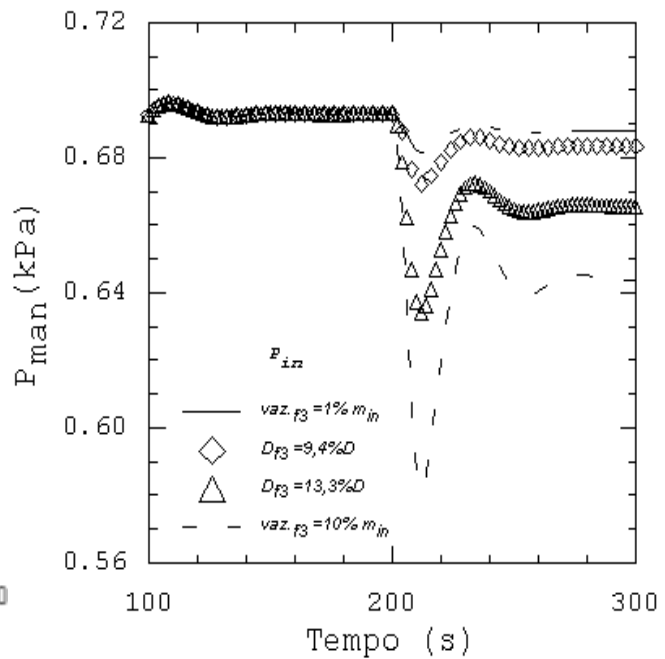
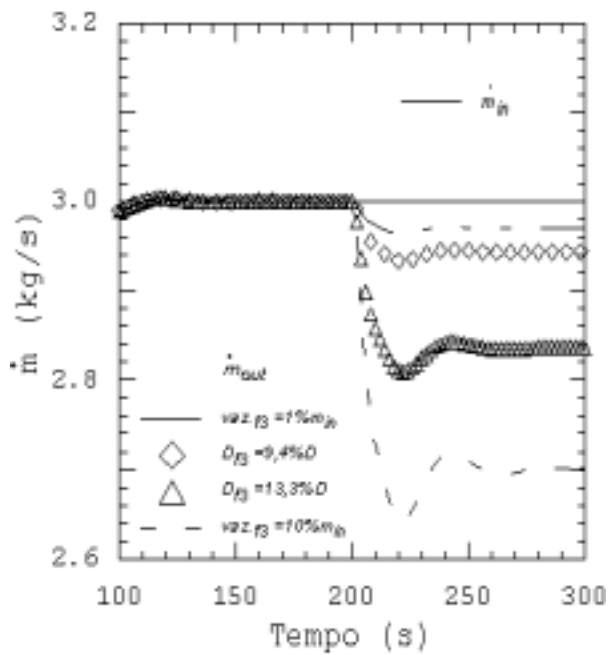
**Figura 3.** Escoamento de gás na tubulação com vazamento em f2. Variação temporal da (a) vazão em massa e (b) pressão

Visando verificar se é possível detectar pequenas perdas, prescreveu-se um vazamento no ponto f3 (Figura 2) como sendo 1 % da vazão na entrada. Os resultados são ilustrados na Figura 4. Na mesma figura ilustra-se o comportamento do escoamento quando outra forma de impor o vazamento, via equação (4), é utilizada. Considerou-se um  $C_d = 0,5$  e dois valores diferentes para a área do furo:

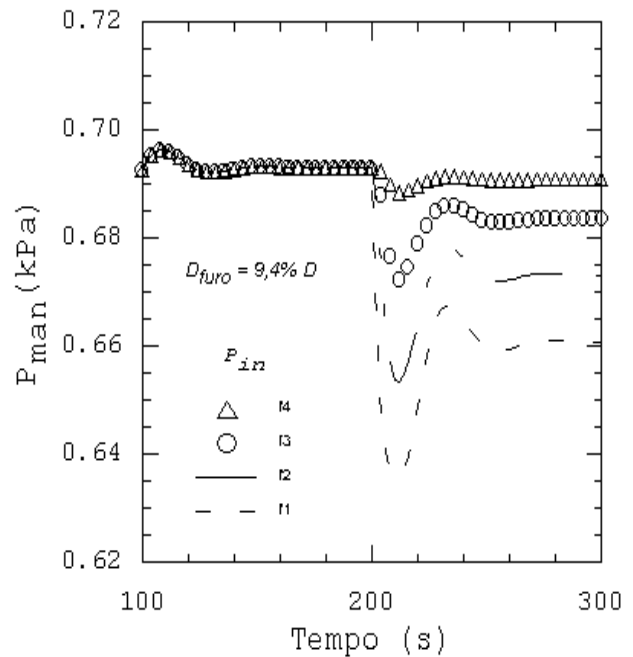
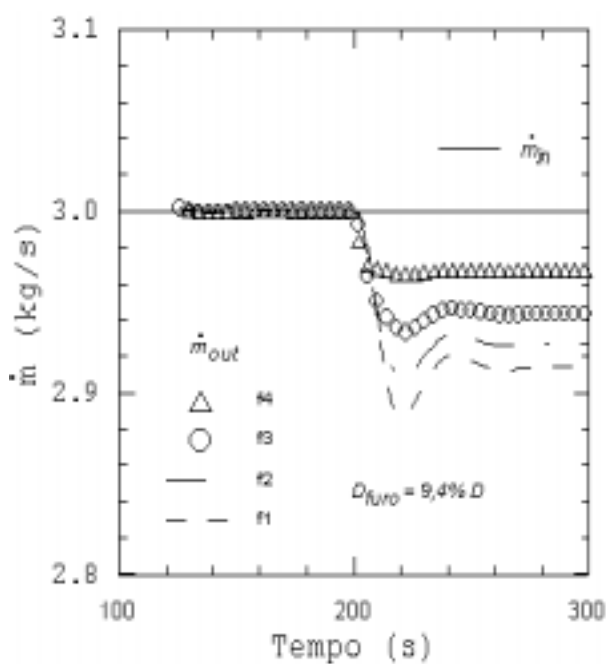
- (a)  $D_f = 9,4 \% D = 7,98 \text{ cm}$ , o que equivale a uma área do furo de  $A_f = 0,005 \text{ m}^2$ , sendo  $C_d A_f = 0,0025 \text{ m}^2$ .
- (b)  $D_f = 13,3 \% D = 11,28 \text{ cm}$ ;  $A_f = 0,010 \text{ m}^2$ ,  $C_d A_f = 0,0050 \text{ m}^2$ .

Analisando-se a Figura 4 observa-se uma variação brusca na vazão da saída assim como na pressão da entrada quando inicia-se o vazamento. As duas formas de prescrever a perda de fluido apresentam respostas similares. Naturalmente que quanto menor o vazamento, menor a discontinuidade, e quanto menor o furo, menor é o vazamento.

A influência da localização do furo na perda de massa é investigada na Figura 5. Considera-se o aparecimento de um furo ( $D_f = 9,4 \% D = 7,98 \text{ cm}$ ,  $C_d A_f = 0,0025 \text{ m}^2$ ) em diversas pontos da tubulação (f1, f2, f3, f4) localizados a 375m; 1,125 m; 1,875 m e 2,625 m respectivamente, da seção de entrada.



(a) (b)  
**Figura 4.** Escoamento de gás na tubulação com diferentes vazamentos em f3.  
 Variação temporal da (a) vazão em massa na saída e (b) pressão na entrada



(a) (b)  
**Figura 5.** Escoamento de gás na tubulação com vazamento em diferentes localizações.  
 Variação temporal da (a) vazão em massa na saída e (b) pressão na entrada

Analisando-se a Figura 5a, observa-se que quanto menor for a distância do furo à entrada, maior é a perda de massa, o que corresponde a uma vazão em massa menor na saída. Este comportamento já era esperado, pois próximo à entrada os níveis de pressão são mais altos, e como estamos considerando sempre uma perda para um ambiente a pressão atmosférica, o forçamento de pressão é maior. Examinando a Figura 5b, observa-se que quando maior a

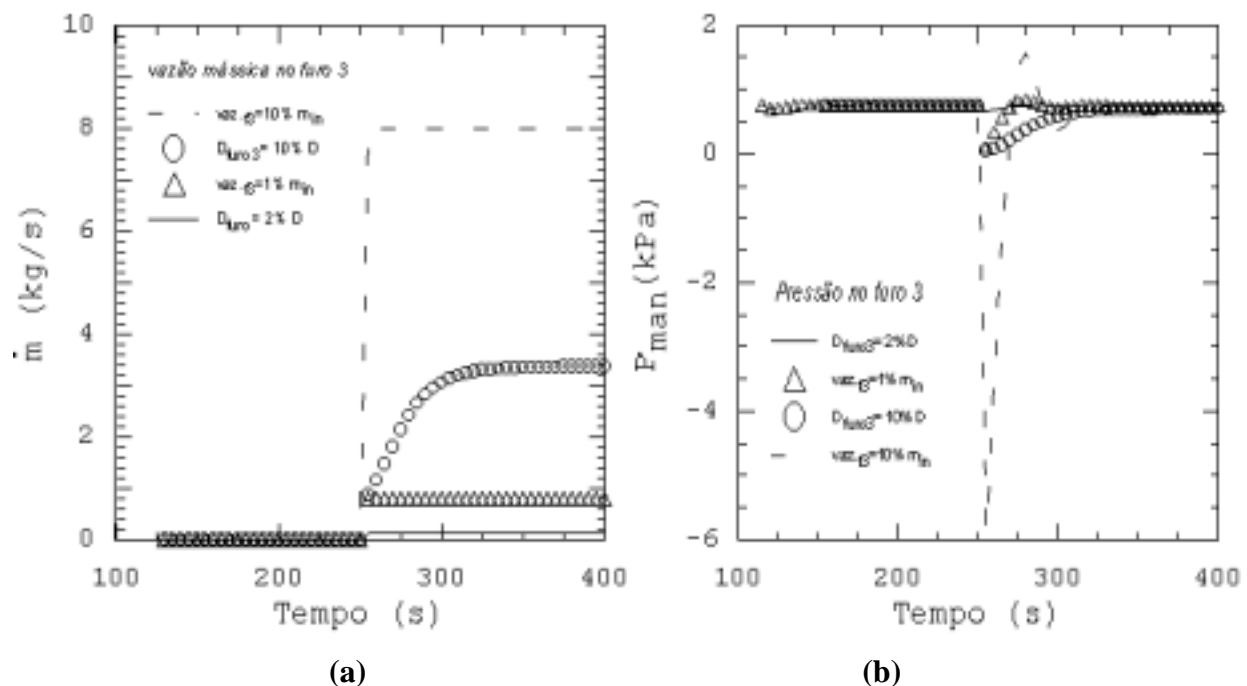
perda de massa, maior a queda de pressão, conseqüentemente, quando o furo ocorre próximo à entrada a queda da pressão na entrada é maior, sendo mais facilmente identificável.

#### 4.2 Escoamento de um Líquido Isotérmico numa Tubulação Horizontal com Vazamento

Este teste é análogo ao caso anterior, porém o fluido de trabalho é água. Neste caso a vazão em massa na entrada demora 20 s em atingir o valor constante de 80 kg/s. Na saída a pressão continua sendo a pressão atmosférica  $p_{atm}$ . O comprimento da tubulação foi alterado para  $L = 10$  km. A velocidade do som para o líquido é  $a = 1200$  m/s e a viscosidade  $\mu_{fl} = 10^{-3}$  kg/(m s). Considerou-se 400 s de simulação, com o surgimento do vazamento 250 s após o início do processo, quando o regime permanente já havia sido atingido.

Resultados similares ao caso do gás foram obtidas quando condições semelhantes foram impostas sendo que os transientes neste caso são mais acentuados.

A Figura 6 ilustra a variação da massa e pressão na coordenada (f3) onde a perda de fluido ocorre, para duas vazões diferentes de vazamento ( $1\% \dot{m}_{in}$  e  $10\% \dot{m}_{in}$ ) e dois tamanhos de furos,  $D_f = 10\% D$  e  $D_f = 2\% D$ , com  $Cd_f = 0,5$  ( para  $D_f = 10\% D = 8,5$  cm,  $A_f = 0,0057$  m<sup>2</sup>; tem-se  $Cd A_f = 0,00284$  m<sup>2</sup>; e para  $D_f = 2\% D = 1,7$  cm,  $A_f = 0,00027$  m<sup>2</sup>, obtém-se  $Cd A_f = 0,000113$  m<sup>2</sup> ). O comportamento de todas as situações é análogo e como era de se esperar, quanto maior o furo, maior o vazamento e a queda de pressão associada.



**Figura 6.** Escoamento de líquido através do local do furo (f3) para diversos tamanhos dos furos. Variação temporal da (a) vazão em massa e (b) pressão

#### 5. CONCLUSÕES

O objetivo de elaborar um modelo com o enfoque conservativo para simular o transiente do vazamento de líquidos e gases foi atingido. A influência da perda de massa nos campos de velocidade e pressão foi analisada mediante simulação de diversos tamanhos de furos e diferentes localizações dos mesmos ao longo de tubulações de diferentes comprimentos e diâmetros, tanto para gases quanto para dos líquidos.

Constatou-se que a presença de vazamentos introduz perturbações na vazão em massa e pressão. O instante que começa o vazamento é claramente identificado. No entanto, o monitoramento da pressão ao longo da tubulação não permite identificar a localização do



furo, pois uma queda de pressão similar é verificada tanto a montante quanto a jusante do furo. No entanto, no registro contínuo da vazão mássica, pode-se observar claramente o trecho da tubulação na qual o vazamento acontece, já que sendo um modelo que conserva massa em cada ponto, a perda através do furo origina um desbalanceamento na massa, a qual é rapidamente captada pelas estações localizadas a jusante do furo.

O comportamento do escoamento impondo uma vazão em massa conhecida de vazamento ou uma perda de massa proporcional a uma queda de pressão associada a um tamanho de furo, é similar. Obviamente que, quanto menor o furo, menor a vazão através dele e menor também a queda de pressão.

Quanto mais próximo o furo é da entrada da tubulação maior a queda de pressão associada a ele, já que os níveis de pressão são mais elevados, tendo-se portanto, uma perda de massa mais acentuada, e por conseqüência, vazamentos detectáveis com maior segurança.

Dado que os efeitos de compressibilidade no líquido são pequenos em relação ao gás, a perda de massa numa linha transportando este tipo de fluido é mais fácil de ser detectada, pois a queda de pressão devido ao surgimento do vazamento é mais acentuada do que no caso de gases. Esta característica do escoamento com líquidos faz com que vazamentos através de furos pequenos sejam detectáveis, ou o que é equivalente, menores perdas de massa são mais fáceis de serem identificadas para o caso de líquidos.

## Agradecimentos

O autores agradecem ao CNPq pelo apoio recebido durante a realização deste trabalho.

## 6. REFERÊNCIAS

- Anderson JR., J.D., 1995, *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*. McGraw-Hill International Editions.
- Fox, R.W. and McDonald, A.T., 1995, *Introdução a Mecânica dos Fluidos*. Editora Guanabara S.A., 4ª. Edição.
- Isermann, R., 1984, “*Process Fault Detection Based on Modeling and Estimation Methods- A Survey*”, *Automatica*, Vol. 20, No. 4, pp. 387-404.
- Liou, J.C.P. and Tian, J. 1994, “*Leak Detection: A Transient Flow Simulation Approach*”, PD-Vol 60, *Pipeline Engineering*, pp. 51-58.
- Liou, J.C.P., 1983, “*A Numerical Model for Transients in Petroleum Products Pipelines*”, *Joint ASME Conference*, Houston, Texas, USA, pp. 61-66.
- Patankar, S.V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, Washington, U.S.A.
- Romero, O.J., 1999, “*Um Método Conservativo para Análise de Transientes de Gases/Líquidos em Tubulações*”, Dissertação de Mestrado, PUC-RJ, Brasil.
- Romero, O.J. e Nieckele, A.O., 1999, “*Estudo do Regime Transiente de Fluidos Compressíveis em Tubulações com Área Variável*”, Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM99, CD-ROM, Águas de Lindóia, São Paulo, SP, Brasil.
- Waley, R.S. and Ellul, I.R., 1994, “*Consideration in Choosing a Leak Detection Method*”, PD-vol 60, *Pipeline Engineering*, ASME, pp. 39-44.
- Waley, R.S., Nicholas, R.E. and Van Reet, J.D., 1992, “*Tutorial on Software Based Leak Detection Techniques*”, *Pipeline Simulation Interest Group*, pp. 1-19.
- Watanabe, K. and Himmelblau, D.M., 1986, “*Detection and Location of a Leak in a Gas transport pipeline by a New Acoustic Method*”, *AIChE Journal*, Vol 32, No 10.
- Wylie, E. B. and Streeter, V.L., 1978, *Fluid Transients*, McGraw-Hill.

# AValiação DE MODELOS DE TURBulência DE BAIXO REYNOLDS NA PREDIÇÃO DE ESCOAMENTOS COMPLEXOS

José Diniz Mesquita Abrunhosa

Angela Ourivio Nieckele

Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/RJ, CEP 22453-900, RJ, RJ, Brasil

e-mail: nieckele@mec.puc-rio.br e diniz@mec.puc-rio.br

## Resumo

*Diferentes modelos de turbulência de baixo Reynolds, são avaliados em um escoamento em degrau ('backstep'). Sabe-se que alguns modelos de baixo Reynolds apresentam dificuldades em prever regiões de separação. Esta dificuldade é efetiva em modelos com funções de amortecimento relacionadas a distância adimensional  $y^+$ , a qual baseia-se sobre a tensão cisalhante local na parede. Neste artigo, investiga-se modelos que não fazem uso de  $y^+$  em suas funções de amortecimento. A capacidade de predição dos modelos de baixo Reynolds são avaliadas face as estatísticas obtidas em simulação direta e a medidas experimentais.*

**Palavras-chave:** Turbulência; Baixo Reynolds, Capacidade de predição, 'Backstep'.

## 1. INTRODUÇÃO

Um grande número de escoamentos turbulentos de interesse prático, tem sido preditos, à nível de engenharia, pelos modelos de turbulência de duas equações, sendo o modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  certamente o mais popular modelo de turbulência em uso hoje. Este modelo tem sido largamente aplicado na solução de uma variedade de problemas, devido a sua simplicidade e eficiência computacional.

O êxito do modelo  $\kappa$ - $\epsilon$  na predição de escoamentos cisalhantes internos é, em grande parte, dependente da aplicação das funções empíricas de parede. Estas relacionam as condições de fronteira na superfície sólida ao escoamento fora da subcamada laminar, evitando desta forma o problema da modelagem direta da influência da viscosidade. A validade deste procedimento é, naturalmente, restrita a situações com altos números de Reynolds, onde os efeitos viscosos tornam-se sem importância, ou onde funções de parede universais sejam bem estabelecidas. Contudo, em muitas aplicações tecnologicamente importantes, esta abordagem falha, como, por exemplo, em camadas limites turbulentas com baixo Reynolds, escoamentos separados e problemas onde as propriedades de transporte na parede são importantes. Necessita-se, nestes casos, estender os modelos de turbulência para baixos números de Reynolds e conseqüentemente descrever o escoamento próximo a parede.

Efetivamente, a modelagem de escoamentos incompressíveis turbulentos, na região da parede, iniciou-se, em 1956, com o trabalho de Van Driest. Uma função de amortecimento, para o comprimento de mistura, foi então introduzida, buscando-se considerar os efeitos viscosos próximo à parede. Posteriormente, modificações nas equações de transporte de turbulência, inicialmente obtidas para altos Reynolds, foram introduzidas por Jones e Launder (1972), Launder e Sharma (1974) e muitos outros pesquisadores.

Deste modo, inúmeros modelos de baixo número de Reynolds foram propostos, aplicando-se a condição da fronteira sólida diretamente, sem uso das funções de parede. Em muitos destes modelos, as funções de amortecimento são relacionadas a coordenada de parede  $y^+ = (y u_\tau / \nu)$ , onde  $u_\tau$  é a tensão cisalhante local na parede. Sendo a tensão cisalhante na parede nula, no ponto de reatamento, os resultados computacionais, obtidos com estes modelos, são duvidosos ao redor do referido ponto.

Neste contexto, este trabalho se propôs avaliar, em escoamento complexo, a capacidade de alguns modelos de turbulência de duas equações, para baixo Reynolds, que não fazem uso de  $y^+$  em suas funções de amortecimento. O escoamento turbulento em degrau ('backstep') é um escoamento complexo vastamente documentado na literatura. Uma extensiva simulação direta

deste escoamento, para baixo número de Reynolds, validada pela investigação experimental de Jovic e Driver (1994), foi conduzida por Le et al (1997). Em consequência, o escoamento turbulento em degrau, como simulado diretamente por Le et al., foi aqui utilizado, para se examinar o desempenho dos modelos escolhidos.

Alguns artigos, ao descreverem o escoamento em degrau, fazem referência somente ao número de Reynolds, baseado na velocidade de corrente livre ou na linha de centro do canal de entrada. Este procedimento não especifica a espessura da camada limite da quantidade de movimento, permitindo uma variedade de perfis de velocidade como condição de entrada. Em consequência, outro objetivo do presente estudo é avaliar os efeitos da especificação do perfil de velocidade na entrada sobre o comprimento de reatamento e coeficientes de pressão e atrito.

## 2. SITUAÇÃO FÍSICA

O problema aqui considerado é o escoamento turbulento de um fluido viscoso e incompressível, através de um canal de placas infinitas, com dupla expansão de área. O movimento médio é bidimensional e está em regime permanente. A figura 1 mostra esquematicamente o domínio computacional utilizado na simulação. A entrada foi especificada a uma distância de dez vezes a altura do salto ( $10H$ ), a montante do mesmo. Adotou-se um comprimento de canal, após o salto, de trinta vezes a altura do salto ( $30H$ ). É importante especificar uma distância suficiente à jusante do ponto de recolamento, antes de impor as condições de saída, evitando-se deste modo severos efeitos destas sobre as regiões de recirculação e recuperação do escoamento (Thangam e Speziale, 1992).

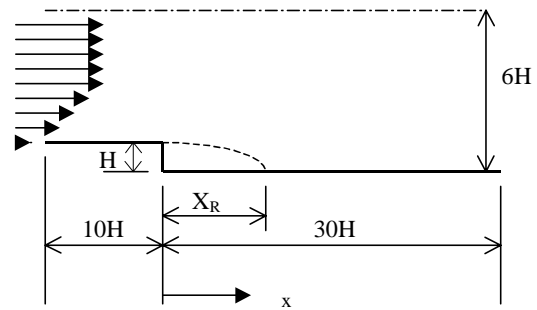


Figura 1 - Canal com salto de área

O canal tem uma altura de cinco vezes a altura do salto ( $5H$ ) na entrada e uma altura correspondente a seis vezes a altura do salto ( $6H$ ) na saída.

A razão de expansão (altura do canal na saída: altura do canal na entrada) é 1,20 e o número de Reynolds é  $Re = (\rho U_c H) / \mu = 5100$ , onde  $U_c$  é a velocidade máxima na entrada e  $H$  altura do salto. Enquanto, o número de Reynolds, baseado na espessura da camada limite da quantidade de movimento ( $Re_\theta = \rho U_c \theta / \mu$ ), é  $Re_\theta = 670$ . As predições dos modelos foram comparadas com os dados experimentais de Jovic e Driver (1994) e os resultados da simulação direta de Le et al. (1997). Deste modo, a situação física, utilizada neste trabalho, reproduz a configuração adotada pelos citados autores.

## 3. MODELOS MATEMÁTICOS

As equações de governo, para tratar o escoamento turbulento médio, com decomposição de Reynolds, de um fluido viscoso e incompressível, são dadas como:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 0 \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \right] \quad (1)$$

onde  $\bar{u}_i$  são os componentes da velocidade média;  $\bar{P}$  é a pressão;  $\nu$  é a viscosidade cinemática; e  $\tau_{ij}$  é o tensor das tensões de Reynolds ( $\tau_{ij} = -\overline{u'_i u'_j}$ ). Nos modelos, baseados sobre a clássica hipótese de Boussinesq, o tensor de tensões de Reynolds toma a forma:

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} + 2 C_\mu f \mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon} S_{ij}; \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

onde  $S_{ij}$  é a taxa média do tensor de deformação,  $f_\mu$  é uma função de amortecimento e  $C_\mu$  é uma constante dos modelos.

As equações de governo das quantidades turbulentas, equações modeladas para a energia cinética e sua taxa de dissipação, podem ser expressas genericamente como:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \kappa)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right] + P_\kappa - \varepsilon + \chi ; \quad P_\kappa = \tau_{ij} S_{ij} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_1 \frac{1}{T_t} P_\kappa - C_2 f_2 \frac{E}{T_t} + \xi \quad (4)$$

onde  $T_t$  é a escala de tempo da turbulência,  $E$  é a dissipação  $\varepsilon$  modificada,  $\chi$  e  $\xi$  são funções de correção das respectivas equações de  $\kappa$  e  $\varepsilon$ , para a região próxima a parede, e  $f_2$  é uma função de amortecimento.  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\sigma_\kappa$ ,  $\sigma_\varepsilon$  são coeficientes dos modelos. É a especificação de todos estes parâmetros e funções que estabelecerá os diferentes modelos de baixo Reynolds aqui empregados. A fim de satisfazer a restrição de não empregar funções de amortecimento com  $y^+$ , foram selecionados os modelos  $\kappa$ - $\varepsilon$  de baixo Reynolds de Launder e Sharma (1974), referenciado por LS, de Sakar (Sakar & So, 1997), referenciado por SA, de Myong e Kasagi modificado (Chen et al., 1998), referenciado por MKM, e o modelo de Yang e Shih (1993), referenciado por YS. Para adotar um valor nulo de  $\varepsilon$  na parede, Launder e Sharma essencialmente não resolvem a equação 4, para a dissipação verdadeira  $\varepsilon$ . A variável efetivamente resolvida no modelo LS é a pseudo dissipação  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu(\partial\sqrt{\kappa}/\partial x_j)^2$ . Os diferentes parâmetros e funções de cada modelo estão resumidos nas tabelas 1 e 2. Os números de Reynolds que aparecem nestas tabelas são definidos como  $Ret = \kappa^2/\nu\varepsilon$ ,  $Rey = y\sqrt{\kappa}/\nu$  e  $Red = (\varepsilon\nu)^{1/4}y/\nu$ . Na tabela 1,  $\varepsilon^*$ , utilizado pelo modelo SA em  $\xi$ , é dado por  $\varepsilon^* = \varepsilon - 2\nu\kappa/y^2$ .

Tabela 1. Funções de correção para parede e constantes dos modelos avaliados

Modelo	LS	SA	YS	MKM
$T_t$	$\kappa/\varepsilon$	$\kappa/\varepsilon$	$(\kappa/\varepsilon) + (\nu/\varepsilon)^{1/2}$	$\kappa/\varepsilon$
$\chi$	$-2\nu(\partial\sqrt{\kappa}/\partial x_j)^2$	0,0	0,0	0,0
$E$	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varepsilon}$	$\varepsilon$	$\varepsilon$
$\xi$	$2\nu_t\nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) \right]^2$	$\exp[-(Ret/40)^2] * [-0,57(\varepsilon E)/\kappa + 0,5(\varepsilon^*)^2/\kappa - 2,25 \varepsilon/\kappa P_\kappa]$	$2\nu_t\nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) \right]^2$	0,0
$\sigma_\kappa$	1,00	1,00	1,00	1,40
$\sigma_\varepsilon$	1,30	1,45	1,30	1,30
$C_1$	1,44	1,50	1,44	1,40
$C_2$	1,92	1,83	1,92	1,80
$C_\mu$	0,090	0,096	0,090	0,090

Tabela 2. Funções de amortecimento dos modelos avaliados

Modelo	$f_\mu$	$f_2$
LS	$\exp[-3,4/(1,0+Ret/50)^2]$	$1,0 - 0,3\exp(-Ret^2)$
SA	$\left(1 + 3/Ret^{3/4}\right) \left[1 + 80\exp(-Red)\right] \left[1 - \exp\left(-Red/43 - Red^2/330\right)\right]^2$	1,00
YS	$\left[1 - \exp\left(-1,5 \times 10^{-3}Rey - 5,0 \times 10^{-7}Rey^3 - 10^{-10}Rey^5\right)\right]^{1/2}$	1,00
MKM	$\left(1 + 3,45/\sqrt{Ret}\right) \left[1 - \exp\left(-1,85 \times 10^{-3}Rey - 1,05 \times 10^{-4}Rey^2\right)\right]^{1/2}$	1,00

#### 4. CONDIÇÕES DE CONTORNO

Em todas as superfícies sólidas, utilizou-se a condição de contorno de não deslizamento, para as velocidades e energia cinética turbulenta ( $\bar{u} = \bar{v} = \kappa = 0$ ), enquanto a condição para  $\varepsilon$  é específica de cada modelo. Como o modelo LS resolve a forma reduzida da dissipação, sua condição de contorno é  $\varepsilon_w = 0$ . A condição  $\varepsilon_w = 2\nu \left( \frac{\partial \sqrt{\kappa}}{\partial n} \right)_w^2$  é adotada pelos modelos YS e SA, enquanto o modelo MKM utiliza  $\varepsilon_w = (4\nu \kappa_1 / y_1^2) - \varepsilon_1$ , onde 'w' e '1' denotam, respectivamente, parede e primeiro ponto interno da malha. Já 'n' é a coordenada normal a parede. Na linha de simetria, fronteira superior ( $y=6H$ ), impôs-se variação nula na direção transversal para  $\bar{u}$ ,  $\kappa$ , e  $\varepsilon$  e nula a componente transversal da velocidade ( $\bar{v} = 0$ ). O perfil de velocidade média axial na entrada, ( $\bar{u}(y)$ ), é obtido do perfil de camada limite, para  $Re_\theta = 670$ , onde  $\theta$  é espessura da camada limite da quantidade de movimento. A espessura da camada limite é  $\delta_{99} = 1,2H$ . O número de Reynolds, baseado na velocidade de corrente livre e altura do salto, é  $Re = 5100$ . Os perfis de  $\kappa$  e  $\varepsilon$  foram impostos como  $\kappa = 0,005(\bar{u}(y))^2$  e  $\varepsilon = 4,0 \times 10^2 \kappa^2$ . O perfil de velocidade uniforme e o perfil com  $Re_\theta = 595$  foram especificados para estudo comparativo dos resultados. Na saída adotou-se como condição de contorno a hipótese de difusão nula.

#### 5. MÉTODO NUMÉRICO

As equações de governo (Eq. 1 a 4) foram resolvidas utilizando o método de volumes finitos (Patankar, 1980). A solução em regime permanente foi obtida pela resolução do sistema de equações algébricas, utilizando-se a técnica da sub-relaxação, com aplicação repetida do algoritmo TDMA linha por linha (Patankar, 1980). Para aumentar a velocidade de convergência, utilizou-se o algoritmo de correção por blocos (Settari e Aziz, 1973).

Uma malha não uniforme, com 222x132 pontos nodais, foi utilizada nos cálculos. Concentrou-se os pontos nas regiões próximas a parede, garantindo-se um mínimo de 8 pontos na região de  $y^+ < 11$  e 22 pontos na região de  $y^+ < 50$ .

Para a convergência da solução numérica, controlou-se os resíduos da equação da continuidade e das equações de conservação de todas as outras variáveis. A solução foi considerada convergida, quando o resíduo da equação de conservação de massa foi da ordem de  $10^{-11}$ . No caso das outras equações de conservação, requereu-se que a razão entre o resíduo máximo de cada equação e o valor do resíduo inicial fosse da ordem de  $10^{-4}$ .

#### 6. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Inicialmente serão apresentados os resultados dos diversos modelos referentes ao ponto de recolamento, recirculação secundária, perfis de velocidade média, tensões de Reynolds, coeficiente de atrito e coeficiente de pressão, os quais foram obtidos com o perfil de velocidade de camada limite para  $Re_\theta = 670$ . Os resultados são comparados aos dados experimentais de Jovic e Driver (1994) e aos resultados da simulação direta de Le et al (1997).

A posição, na qual a tensão de cisalhamento na parede se anula ( $\tau_w = 0$ ), indica os seguintes pontos de recolamento, para a recirculação principal: (a) modelo LS: 5,43H; (b) modelo SA: 6,41H; (c) modelo MKM: 5,17H; (d) modelo YS: 5,04H. O ponto de recolamento medido experimentalmente varia entre 6,0H e 6,1H, enquanto a simulação direta obteve 6,28H. Da análise dos resultados, verificou-se que o modelo YS é o que apresenta a menor região de recirculação principal. Já o modelo SA é o que prediz a maior região, sendo esta inclusive maior que a experimental e a da simulação direta.

Experimentalmente observou-se a existência de uma região de pequena recirculação, girando no sentido anti-horário, junto a parte inferior da parede vertical do salto, a chamada região de recirculação secundária. Na simulação direta esta região se estende até 1,76H na

direção  $x$  e até  $0,8H$  na direção  $y$ . Nos modelos testados foram obtidos os seguintes limites, em  $x$  e  $y$  respectivamente, para a referida região: (a) modelo LS:  $0,88H$  e  $0,32H$ ; (b) modelo SA:  $0,64H$  e  $0,11H$ ; (c) modelo MKM:  $0,45H$  e  $0,11H$ ; (d) modelo YS:  $0,55H$  e  $0,11H$ . Verifica-se assim que todos os modelos subpredizem a região de recirculação secundária, sendo o modelo de Launder e Sharma aquele que mais se aproxima da simulação direta. O modelo SA, apesar de prever uma região de recirculação principal maior que a simulação direta, subavalia a recirculação secundária.

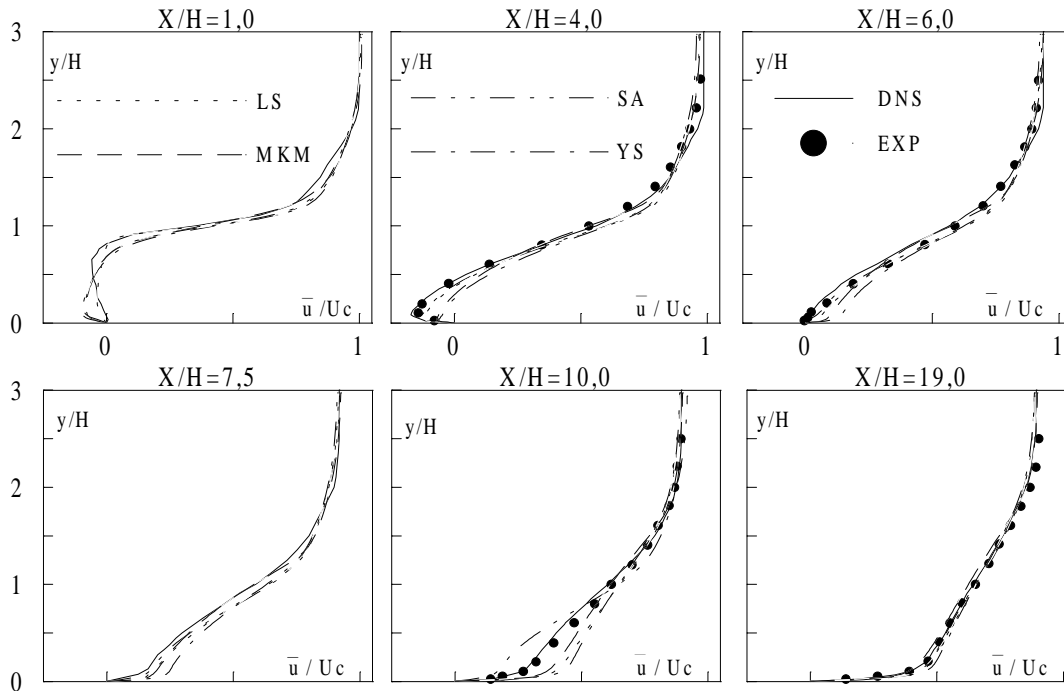


Figura 2 – Perfil de velocidade média ( $\bar{u}/U_c$ )

A Figura 2 apresenta, em seis seções transversais selecionadas, a comparação dos perfis de velocidade média, preditos pelos modelos, com os dados experimentais e com os resultados da simulação direta (Le et al., 1997). Na seção  $x/H=1,0$ , a simulação direta ainda apresenta recirculação secundária, sendo que os modelos não conseguem reproduzir este comportamento. No modelo LS as velocidades negativas são menores, em relação aos outros modelos, mas a espessura da recirculação principal é a maior, aproximando-se da espessura gerada pela simulação direta. Isto talvez se dê pelo fato da simulação direta ainda ter recirculação secundária. De um modo geral, verifica-se que, próximo à parede, os modelos não conseguem reproduzir o comportamento obtido na simulação direta. Na altura correspondente à camada de cisalhamento, o modelo MKM é o que mais se aproxima da simulação direta. Na seção  $x/H=4,0$ , observa-se que, dentro da região de recirculação, os modelos MKM e YS afastam-se acentuadamente do padrão experimental e da simulação direta. Os melhores resultados, junto a parede, são os preditos pelos modelos LS e SA, sendo o último superior. Em  $x/H=6,0$ , todas as velocidades dos modelos YS, MKM e LS são positivas, já tendo sido iniciada, nestes modelos, a recuperação do escoamento. A antecipação da recuperação é mais efetiva no modelo YS. Em contrapartida, o modelo SA, a simulação direta e os dados experimentais ainda apresentam velocidades negativas, junto à parede, nesta seção. Na seção  $x/H=7,5$ , a recuperação do escoamento é efetiva em todos os modelos e na simulação direta. O comportamento do modelo SA é aquele que mais se aproxima da simulação direta, enquanto o modelo YS, ao gerar velocidades maiores junto a parede, se afasta efetivamente desse comportamento. Em  $x/H=10,0$ , o modelo LS, diferentemente das outras seções, apresenta, junto à parede, velocidades positivas maiores que as geradas pelo modelo MKM, mostrando assim uma maior recuperação do escoamento. O modelo SA, junto

à parede, se mostra, agora, atrasado em relação ao perfil da simulação direta. O seu comportamento, junto à parede, é totalmente diferente dos outros modelos, função destes terem uma recuperação antecipada do escoamento. Em  $x/H=19,0$ , os modelos reproduzem bem os dados experimentais e da simulação direta, sendo que os modelos SA e LS são os que predizem melhor o comportamento dos dados. O modelo SA, que em  $x/h=10,0$  encontrava-se atrasado face aos referidos dados, prediz agora velocidades maiores, enquanto o modelo MKM está atrasado, confirmando uma tendência de recuperação lenta do perfil neste modelo.

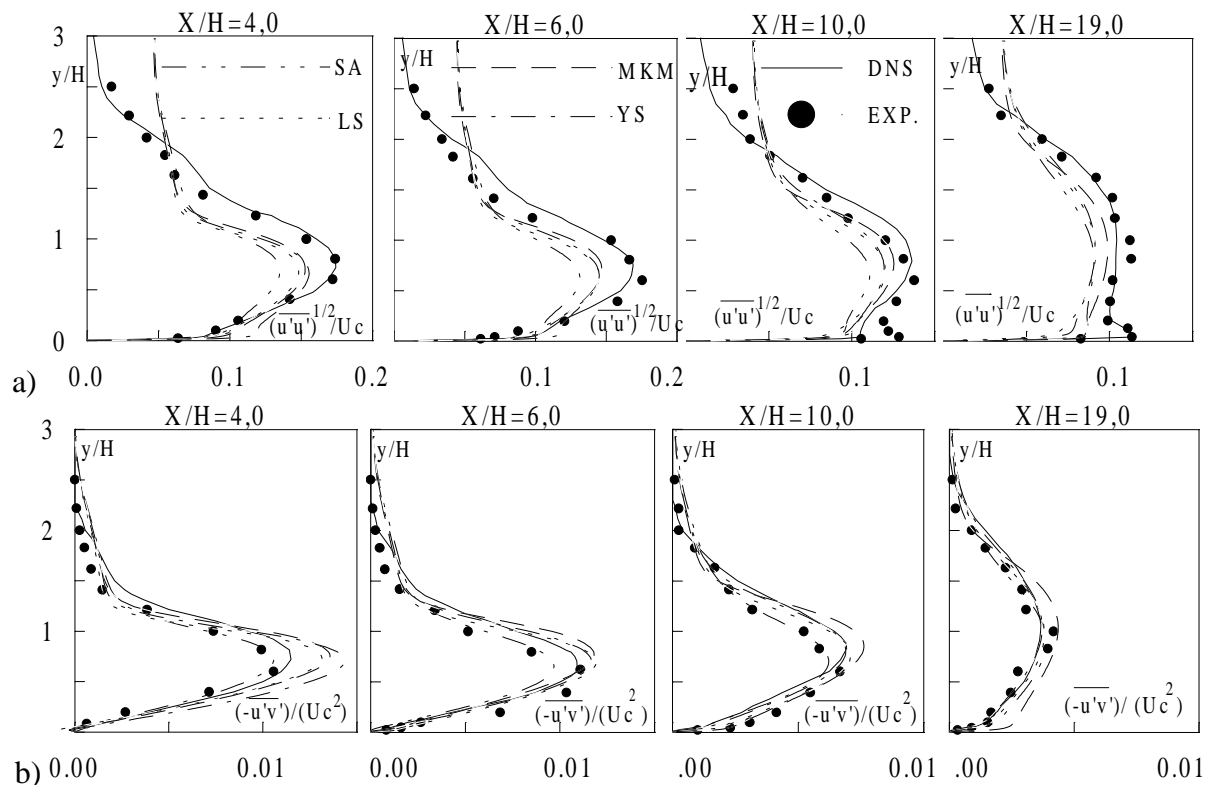


Figura 3 – Perfis de tensão de turbulência: a)  $(\overline{u'u'})^{1/2}/U_c$ ; b)  $(-\overline{u'v'})/(U_c^2)$

As predições dos modelos, para a tensão de turbulência  $(\overline{u'u'})^{1/2}/U_c$ , são apresentadas na figura 3:a). Na seção  $x/H=4,0$ , o modelo YS tem um pico relativo, junto à parede. Este comportamento não está presente na simulação direta, nos dados experimentais e nos outros modelos. Na região da parede, os modelos predizem tensões maiores que a simulação direta e os dados experimentais. Contudo, na região de recirculação, os modelos subavaliam esta estatística, embora qualitativamente os perfis reproduzam o perfil da simulação direta. Acima da ordenada  $y/H=2$ , os modelos voltam a gerar tensões maiores. Em  $x/H=6,0$ , junto à parede, os modelos, com exceção de YS, geram valores próximos aos preditos pela simulação direta. O modelo YS, nesta região, produz perfis maiores que o experimental e o da simulação direta. Já para  $x/H=10,0$ , na região da parede, a tensão é subavaliada por todos os modelos. O pico relativo, agora previsto tanto experimentalmente como na simulação direta, não é reproduzido pelos modelos LS e MKM, enquanto os modelos SA e YS o predizem levemente. Em  $x/H=19,0$ , o modelo SA reproduz qualitativamente o comportamento dos dados experimentais. Os modelos LS e YS subavaliam fortemente a referida tensão junto a parede.

Os perfis da tensão cisalhante turbulenta  $(-\overline{u'v'})/(U_c^2)$ , são comparados na figura 3:b). De um modo geral os modelos tem um bom desempenho na região da parede. As exceções são o perfil gerado por YS em  $x/H=4,0$  e o perfil gerado pelo modelo MKM em  $x/H=19,0$ . Em  $x/H=4,0$ , os modelos LS e SA geram perfis próximos do experimental e da simulação direta, enquanto o modelo YS prediz as maiores tensões, afastando-se destes dados. Na região de máxima tensão, os modelos LS, YS e MKM predizem tensões maiores que os resultados da

simulação direta. Já o modelo SA obtém tensões menores, embora reproduza qualitativamente o comportamento da simulação direta e concorde com os dados experimentais. Em  $x/H=6,0$ , mais uma vez, as tensões dos modelos LS, YS e MKM são maiores que os dados experimentais e da simulação direta, enquanto o modelo SA subavalia esta estatística na região da camada de cisalhamento. Já para  $x/H=10,0$ , o máximo do modelo SA está próximo do experimental, enquanto o máximo dos outros modelos aproxima-se do previsto pela simulação direta. Na seção  $x/H=19,0$ , o modelo MKM não reproduz a tendência dos resultados obtidos por Le et al. (1997). Suas tensões são maiores que os dados experimentais e os resultados da simulação direta. Os outros modelos obtém bons resultados nesta seção.

O coeficiente de atrito ( $C_f$ ), definido como  $C_f = (2u_\tau^2 / \rho U c^2)$ , onde  $u_\tau$  é velocidade de atrito, foi levantado na parede inferior após o salto. As variações deste coeficiente identificam a localização das regiões de recirculação (principal e secundária) e refletem a precisão do processo difusivo junto à parede. Na figura 4:a), os resultados obtidos pelos modelos são representados. Verifica-se que tanto na região de recirculação secundária quanto na parte inicial da região de recirculação principal, os modelos não reproduzem bem a simulação direta. A partir do máximo inferior até aproximadamente  $x/H=10$ , o modelo SA prediz corretamente o comportamento obtido pela simulação direta. Na parte final do domínio, os modelos LS e YS aproximam-se da curva da simulação direta, enquanto o modelo SA afasta-se dessa curva. O modelo MKM é o que mais se distancia do padrão da simulação direta.

O coeficiente de pressão foi definido como  $C_p = (P - P_c) / (U c^2)$ , onde  $P_c$  é a pressão sobre a linha de centro na entrada. As variações deste coeficiente obtidas pelos modelos, na região após o salto, são comparadas, nas Figura 4:b). Os modelos LS e SA apresentam os melhores resultados. O modelo SA prediz muito bem os dados experimentais e o comportamento da simulação direta a partir de  $x/H=2,5$ . O modelo LS reproduz melhor o comportamento até  $x/H=2,5$ , afastando da curva de referência na região do ponto de recolamento.

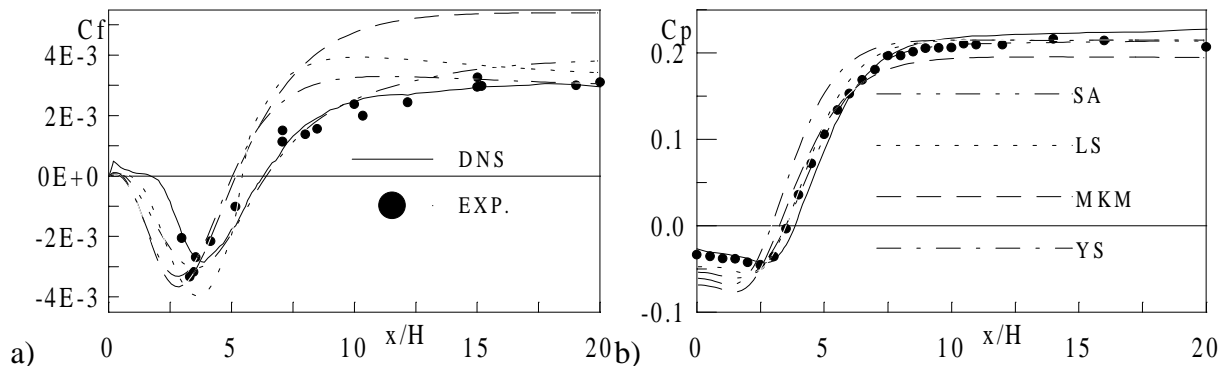


Figura 4 – Comparação dos coeficientes para  $Re_\theta=670$ : a) atrito; b) pressão

Na simulação do escoamento, tendo o perfil de velocidade uniforme e o correspondente a  $Re_\theta=595$ , como condição de entrada, utilizou-se somente os modelos LS e SA. Para o perfil uniforme, o modelo SA obteve um recolamento em  $x/H=6,59$  e, para  $Re_\theta=595$ , o final da recirculação se deu em  $x/H=6,33$ , enquanto no caso original o modelo prediz  $6,41$ . O mesmo comportamento ocorreu com o modelo LS: a) perfil uniforme:  $5,20H$ ; b)  $Re_\theta=595$ :  $5,47H$ ; c)  $Re_\theta=670$ :  $5,43H$ . As figuras 5:a) e 5:b) mostram as curvas de coeficiente de atrito e pressão obtidas pelo modelo SA, para os diversos perfis. Verifica-se destas figuras que, para  $Re_\theta=595$ , as diferenças são pequenas, enquanto para o perfil uniforme a diferença é acentuada. O mesmo comportamento ocorreu com o modelo LS. O fato dos resultados apresentarem pequena diferença, entre  $Re_\theta=670$  e  $Re_\theta=595$ , deve-se a extensão utilizada no canal de entrada, antes do salto ( $10H$ ). Ensaios realizados com o modelo LS, em um configuração sem canal de entrada, mostraram diferenças mais efetivas. Investigou-se também a condição de entrada de  $\kappa$  e  $\epsilon$ , verificando-se, neste caso, que praticamente não há influência sobre o escoamento.



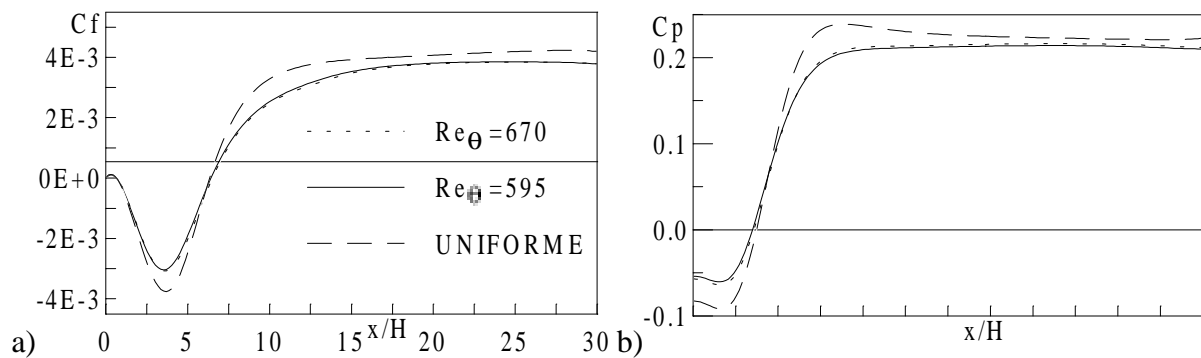


Figura 5 – Comparação dos coeficientes para dois  $Re_\theta$ , modelo SA: a) atrito; b) pressão

## 7. CONCLUSÕES

Quatro modelos de turbulência de duas equações, tipo  $\kappa$ - $\epsilon$ , com extensão para a região da parede, foram empregados, para calcular um escoamento turbulento complexo ('backstep'), do qual dados experimentais e resultados de simulação direta encontravam-se disponíveis (Le et al.,1997). Os resultados indicam claramente um limitado desempenho dos vários modelos, para descrever, junto à parede, este tipo de escoamento. A análise global dos resultados revela uma performance superior dos modelos SA e LS. Contudo, registra-se que mesmo estes modelos obtiveram sucesso parcial na região da parede. Da simulação direta, sabe-se que o termo do gradiente de pressão-velocidade, da equação de  $\kappa$ , é muito significativo na região da parede ( $y^+ < 10$ ) neste tipo de escoamento. É a difusão de pressão que irá contrabalançar a dissipação e os termos de transporte de turbulência, na região da parede (Le et al.,1997). Talvez a deficiência efetiva dos modelos venha do fato da difusão de pressão ser basicamente desprezada nestes modelos. Já do estudo comparativo dos resultados, obtidos com diversos perfis de velocidade na entrada, verificou-se que mesmo pequenas perturbações no perfil de velocidade provocam diferenças sensíveis nos resultados. Esta constatação indica que a definição do perfil de velocidade na entrada é fundamental para análise deste tipo escoamento.

## 8. REFERÊNCIA

- Chen, S., Lai, J., Milthorp, J., Mudford, N.,1998, A New modified Low-Reynolds-Number  $\kappa$ - $\epsilon$  Model, 29<sup>th</sup> AIAA Fluid Dynamics Conference;
- Jones, W. P., and Launder, B. E., 1972, The Prediction of Laminarization with Two-eq. Model of Turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, 15, pp. 178-203;
- Jovic, S., and Driver, D., 1994, Backward-facing step measurement at low Reynolds number,  $Re_h = 5000$ . NASA Tech. Mem. 108807;
- Launder, B. E., and Sharma, B. I., 1974, Application of the Energy Dissipation Model of Turb. to the Calc. of Flow Near a Spinning Disc, Lett.Heat Mass Transfer, 1, pp. 131-138;
- Le, H., Moin, P., and Kim, J., 1997, Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow Over a Backward Facing Step, J. Fluid Mech., vol. 330,pp.349-374;
- Patankar, S. V., 1980, Numerical Heat Transfer e Fluid Flow, Mcgraw-Hill;
- Sakar, A., and So, R. M. C., 1997, A Critical Evaluation of Near-wall Two-Eq. Models Against Direct Numerical Simulation Data, Int. J. Heat and Fluid Flow 18, pp. 197-208;
- Settari, A., and Aziz, K., 1973, A Generalization of the Additive Correction Methods for the Iterative Solution of Matrix Eq., SIAM J. of numerical Analysis, Vol. 10, pp. 506-521
- Thangam, S., and Speziale, C. G., 1992, Turbulent Flow Past a Backward Facing Step: A Critical Evaluation of Two-Eq. Models , AIAA Journal, Vol. 30, n° 5, pp. 1314-1320;
- Yang, Z., and Shih, T. H., 1993, New Time Scale Based  $\kappa$ - $\epsilon$  Model for Near-Wall Turbulence, AIAA J., 31, pp. 1191-1198.

Ao iniciar estudo em fluidização foi proposta a verificação do modelo de Gibilaro – Rowe para previsão de concentração de partículas ao longo da altura do leito.

A literatura tem mostrado que a mistura ou segregação dentro de um leito fluidizado é promovida pela passagem de bolhas através do leito de partículas.

Ao subir pelo leito as bolhas formadas carregam nas respectivas esteiras partículas das regiões inferiores para as regiões superiores. Também são movimentadas partículas na parte frontal das bolhas que ao chegarem na superfície são espalhadas. Partículas mais pesadas tendem a descer através do leito devido à vazios deixados pelo deslocamento das bolhas. Esses fenômenos associados são os promotores da mistura ou segregação no leito fluidizado.

Com a movimentação do leito provocado pela elevação da bolha no leito produz-se um perfil de concentrações ao longo da altura, caracterizando, após determinado período, num índice de mistura. Esse perfil pode apresentar-se num dos tipos mostrados na figura 2 dependendo da natureza dos particulados e das condições de operação.

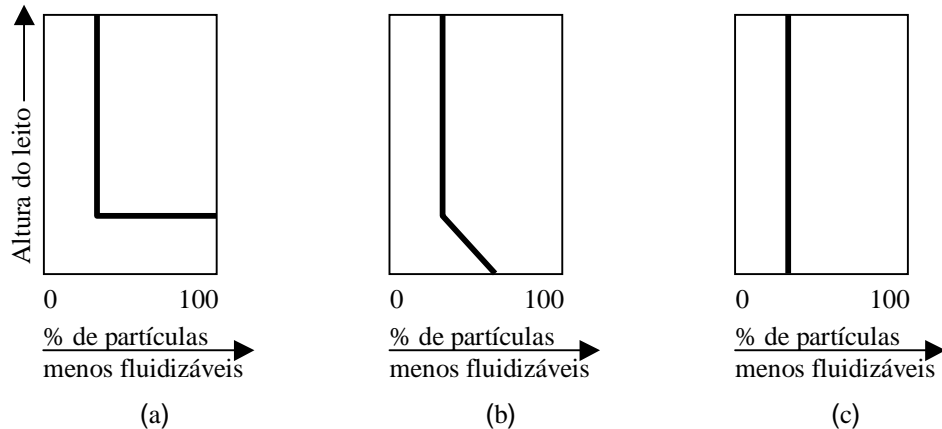


Figura 2 – Perfis produzidos em diversas situações de fluidização. (a) sistema fortemente segregado, (b) caso intermediário, (c) mistura perfeita.

## 2. MODELO DE GIBILARO & ROWE

O modelo para segregação ou mistura proposto por Gibilaro & Rowe (1974), utiliza quatro mecanismos; três para descrever a mistura e um para a segregação. Esses mecanismos são: a circulação, o intercâmbio, a mistura axial e a segregação. A figura 3 esquematiza os quatro mecanismos.

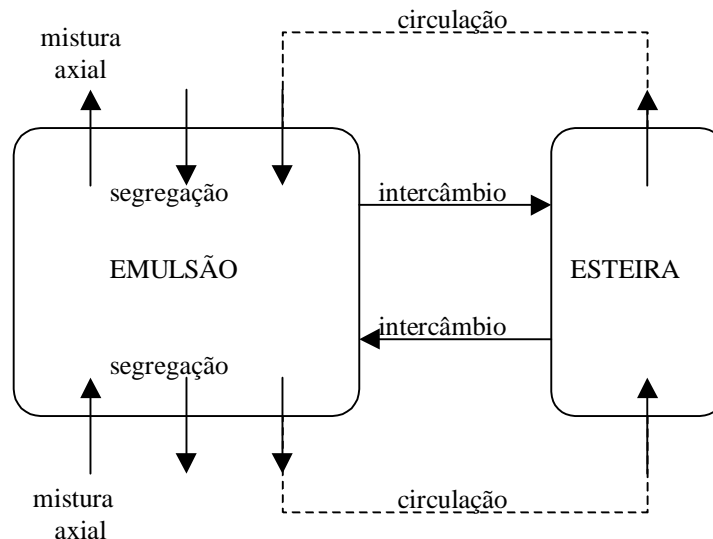


Figura 3 – Representação dos mecanismos do modelo de Gibilaro – Rowe.

Para esse modelo foram definidos quatro parâmetros com base na área da seção transversal da fase de emulsão:

- taxa constante de dispersão axial ( $T_{DA}$ );
- taxa constante de segregação ( $T_{SE}$ );
- taxa de circulação ( $T_{CI}$ ) nas fases, ascendente nas esteiras e descendente no topo;
- taxa constante de intercâmbio entre as fases ( $T_{IN}$ ).

Foram previstas três formas distintas de atuação do modelo de segregação ou mistura chamadas pelos autores de “casos”;

Caso 1 : Sistemas fortemente segregados.

Caso 2 : Efeito adicional do intercâmbio entre fases.

Caso 3 : Efeito adicional da mistura axial na fase de emulsão.

No caso 1 consideraram apenas os mecanismos de circulação e segregação, sendo um de mistura e outro de segregação.

No caso 2 levaram em conta os mecanismos de circulação, de segregação e de intercâmbio, sendo dois de mistura e um de segregação.

No caso 3 propuseram os mecanismos de circulação, de segregação e de mistura axial, sendo dois de mistura e um de segregação.

Nesse trabalho o estudo baseou-se no caso (2) do modelo de Gibilaro-Rowe o qual despreza o parâmetro de dispersão axial ( $T_{DA}$ ) na fase de emulsão, justificado pelos autores por não haver razão física para sua inclusão. Trabalhos experimentais mostram que a dispersão axial das partículas mais densas não ocorre na fase de emulsão do leito.

Gibilaro & Rowe propuseram equações para prever o movimento das partículas menos fluidizáveis nas fases de emulsão e de esteira.

No caso (2) do modelo os perfis de concentração das partículas mais densas ou menos fluidizáveis e da fase de esteira na parte mais alta do leito contendo ambas espécies de sólidos, são fornecidos respectivamente por:

$$\left( \frac{C_B}{C_{B0}} \right)^{1+\lambda} \left( \frac{1-C_B}{1-C_{B0}} \right)^{1-\lambda} = e^{-\gamma z} \quad (01)$$

$z$  é a altura adimensional em relação ao fundo do leito ( $z=h/H$ )

$h$  é a altura dos pontos de coleta das amostras

$H$  é a altura total do leito de partículas

$C_B$  é a fração em volume das partículas menos fluidizáveis na emulsão

$C_{B0}$  é a fração de partículas menos fluidizáveis na emulsão no fundo do leito ou lâmina

$\lambda$  é definido na equação 03 e  $\gamma$  é definido na equação 04

e

$$C_w = C_B + \frac{C_B(1-C_B)}{\lambda} \quad (02)$$

$C_w$  é a fração em volume das partículas menos fluidizáveis nas esteiras das bolhas

$$\lambda = \frac{T_{CI}}{T_{SE}} \quad (03)$$

$$\gamma = \frac{T_{IN}}{T_{CI}} H \quad (04)$$

## 2.1 – DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DO MODELO

Como consequência de considerações feitas pelos autores do modelo, o caso 1 tem apenas o parâmetro  $\lambda$  e o caso 2 tem os parâmetros  $\lambda$  e  $\gamma$ .

Naimer *et al.* (1982) determinaram os parâmetros do modelo de Gibilaro – Rowe,  $T_{CI}$ ,  $T_{SE}$ ,  $T_{IN}$  e  $T_{DA}$ , em função das condições de operação do leito, do sistema de partículas e da formação e desenvolvimento das bolhas.

O leito foi dividido em lâminas horizontais de alturas iguais conforme a figura 4 e um método iterativo verificou a convergência para prever o padrão de segregação ou mistura.

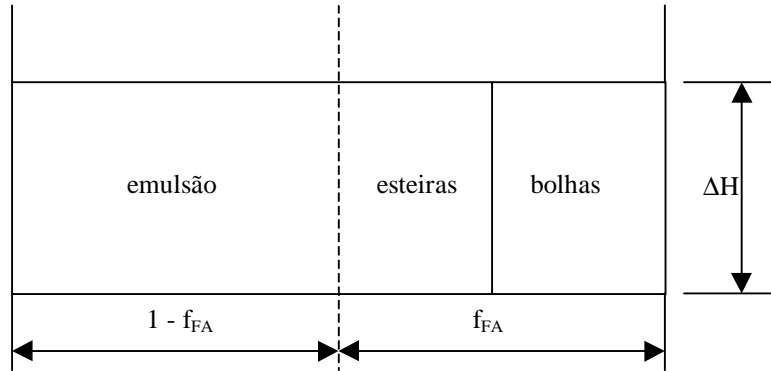


Figura 4 – Área da seção transversal de bolhas e esteiras.

$f_{FA}$  é a fração de esteiras e bolhas no leito

$\Delta H$  é a altura de uma lâmina do leito

O leito fluidizado deve ser mantido em condições de operação que favoreçam mistura ou segregação adequadas, dependendo da utilização, pois a competição entre os dois mecanismos leva a uma diferença de composição ao longo da altura do leito.

### Parâmetro taxa de circulação ( $T_{CI}$ )

Pode ser relacionada às condições de operação através do balanço do fluxo de sólidos ascendentes e descendentes no interior do leito, sendo determinada por,

$$T_{CI} = U_{BL} \cdot F_{WB} \left( \frac{f_{FA}}{1 - f_{FA}} \right) \quad (05)$$

$U_{BL}$  é a velocidade de subida da bolha

$F_{WB}$  é a fração de esteira em relação à soma de esteira e bolha

$$F_{WB} = \frac{1}{2} - \frac{9}{16} \cos \frac{\theta_{WK}}{2} + \frac{1}{16} \cos \frac{3\theta_{WK}}{2} \quad (06)$$

$\theta_{WK}$  é o ângulo da esteira

$$f_{FA} = \frac{U_{FL} - U_{MF}}{U_{BL} (1 - F_{WB})} \quad (07)$$

$U_{FL}$  é a velocidade de fluidização

$U_{MF}$  é a velocidade de mínima fluidização

$$\theta_{WK} = 160 - 160 \exp(-60 \cdot d_{BL}) \quad (08)$$

$d_{BL}$  é o diâmetro da bolha

### Parâmetro taxa de intercâmbio ( $T_{IN}$ )

Determinada através do fluxo de sólidos entrando e saindo da esteira. Por hipótese, é assumido que o fluxo de partículas para a esteira é proporcional tanto à fração em volume da esteira, quanto ao fluxo de partículas na nuvem de gás na superfície frontal da bolha. Com base na fase de emulsão, a taxa de intercâmbio resultou em:

$$T_{IN} = \frac{3 F_{WB} U_{MF}}{2 d_{BL} \varepsilon_{MF}} \left( \frac{f_{FA}}{1 - f_{FA}} \right) \quad (09)$$

$\varepsilon_{MF}$  é a porosidade na condição de mínima fluidização

### Parâmetro taxa de segregação ( $T_{SE}$ )

Pode ser considerado como o fluxo líquido descendente, por unidade de área da seção transversal da fase de emulsão, das partículas menos fluidizáveis em relação às mais fluidizáveis. Foi determinado por:

$$T_{SE} = \frac{3}{4} Y_{DS} \cdot U_{BL} \left( \frac{f_{FA}}{1 - f_{FA}} \right) \quad (10)$$

$Y_{DS}$  é a distância adimensional de segregação

Tanimoto *et al.* (1981) observaram que a segregação ocorre na direção vertical, principalmente quando existem diferenças razoáveis na densidade e no tamanho das partículas. Sob condições de operação do leito, a comprovação da ocorrência de segregação pode ser feita pelo exame do perfil vertical de concentrações dos componentes.

Existem na literatura várias expressões para a distância de segregação adimensional, Tanimoto *et al.* (1981) recomendam a equação:

$$Y_{DS} = 0,6 \left( \frac{\rho_{PJ}}{\rho_{PF}} \right) \left( \frac{d_{PJ}}{d_{PF}} \right)^{1/3} \quad (11)$$

$\rho_{PJ}$  é a massa específica das partículas menos fluidizáveis

$\rho_{PF}$  é a massa específica das partículas mais fluidizáveis

$d_{PJ}$  é o diâmetro das partículas menos fluidizáveis

$d_{PF}$  é o diâmetro das partículas mais fluidizáveis

Hoffmann *et al.* (1993) apresentaram um trabalho mostrando que o modelo de Gibilaro – Rowe, inicialmente proposto para um leito pobre em partículas menos fluidizáveis, poderia ser utilizado para leitos ricos nesse tipo de partículas.

Mostraram também que o modelo pode ser aplicado tanto para sistemas binários com diferenças de densidades quanto para sistemas com densidades semelhantes.

## 3. MATERIAL E MÉTODOS

Para realizar a parte experimental foi construído um leito fluidizado com diâmetro interno de 196mm e altura de 1000mm em aço inoxidável.

Foram utilizados dois sistemas particulados de areia e sal na realização dos experimentos. O primeiro com diâmetros médios de 225 $\mu$ m para a areia e de 450 $\mu$ m para o sal e o segundo com diâmetros médios de 450 $\mu$ m para a areia e de 450 $\mu$ m para o sal.

As proporções da areia e do sal usados foram respectivamente 6 kg e 2 kg, ou seja, 75% e 25% em todos os experimentos. A altura estática do leito foi de aproximadamente 190mm.

As velocidades de fluidização utilizadas para o sistema com areia de diâmetro médio 225 $\mu$ m e sal com 450 $\mu$ m foram 0,13m/s, 0,15m/s e 0,18m/s. Para o sistema com areia de diâmetro médio 450 $\mu$ m e sal com 450 $\mu$ m as velocidades foram 0,28m/s, 0,34m/s e 0,40m/s.

Amostras foram retiradas em várias posições do leito e em vários tempos de fluidização. Cada posição de coleta das amostras é representada pela distância adimensional ( $z$ ) que é a razão entre a altura de coleta ( $h$ ) e a altura total do leito de partículas ( $H$ ). As concentrações de areia e sal nas amostras foram determinadas por dissolução do sal. Uma descrição completa dos experimentos pode ser encontrada em Palma (1998).

Para os cálculos da concentração das partículas menos fluidizáveis na emulsão ( $C_B$ ) partiu-se dos parâmetros  $\lambda$ ,  $\gamma$ ,  $C_{BO}$  e  $z$ , experimentais, substituindo-os na Eq. (01) adotando um procedimento iterativo. Calculou-se o lado direito da Eq. (01) para um determinado valor de  $z$  e  $C_{BO}$ . Atribuiu-se os valores para  $C_B$  nos dois termos do lado esquerdo da mesma equação até convergirem para o valor do lado direito.

No caso de  $C_W$ , Eq. (02), seu valor pode ser verificado apenas teoricamente uma vez que esse tipo de experimentação não permitiu sua avaliação para comparação. Esse termo tem influência mínima nos resultados pois o material carregado nas esteiras é pequeno.

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A tabela 1 resume os resultados obtidos com o modelo de Gibilaro - Rowe e mostra que o valor experimental desvia do modelo no máximo em 15% para essa série de ensaios, sendo que o desvio médio ficou em 7,4% abaixo dos experimentos.

Tabela 1. Comparação de resultados utilizando o modelo e o experimento.

Diâmetro médio das partículas ( $\mu\text{m}$ )	Velocidade fluidização (m/s)	Altura adimensional ( $z$ )	$\lambda$ (adimensional)	$\gamma$ (adimensional)	$C_B$ experimento (%)	$C_B$ modelo (%)	Desvio (%)
225 /450	0,13	0,55	4,351	3,367	78,98	69,54	13,57
225 /450	0,13	0,89	6,874	3,702	69,87	69,17	01,01
225 /450	0,15	0,55	6,047	2,295	72,01	68,77	04,71
225 /450	0,15	0,89	8,311	2,564	71,86	65,86	09,11
225 /450	0,18	0,55	7,036	1,824	72,41	70,23	03,10
225 /450	0,18	0,89	9,061	2,023	73,42	68,07	07,86
450 /450	0,28	0,55	6,061	3,614	74,16	66,50	11,52
450 /450	0,28	0,89	7,475	3,801	73,81	64,04	15,25
450 /450	0,34	0,55	7,710	2,405	74,84	71,27	05,00
450 /450	0,34	0,89	8,298	2,585	74,91	68,94	08,66
450 /450	0,40	0,55	8,869	1,763	75,36	73,00	03,23
450 /450	0,40	0,89	8,702	1,910	75,42	71,33	05,73

A figura 5 representa a variação das concentrações de areia em função das velocidades de fluidização para uma altura adimensional de 0,55. A figura mostra concordância entre o modelo e o experimento principalmente em velocidades maiores de fluidização.

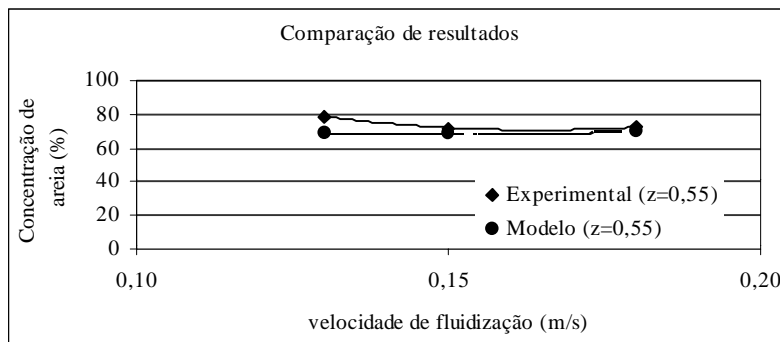


Figura 5 – Experimentos realizados com areia 225  $\mu\text{m}$  e sal 450  $\mu\text{m}$ .

A figura 6 é semelhante à figura anterior, concentrações de areia em função das velocidades de fluidização, agora para uma altura adimensional de 0,89 do mesmo ensaio. Também é observado concordância entre o modelo e o experimento. Houve, nesse caso desvio, maior nas maiores velocidades de fluidização.

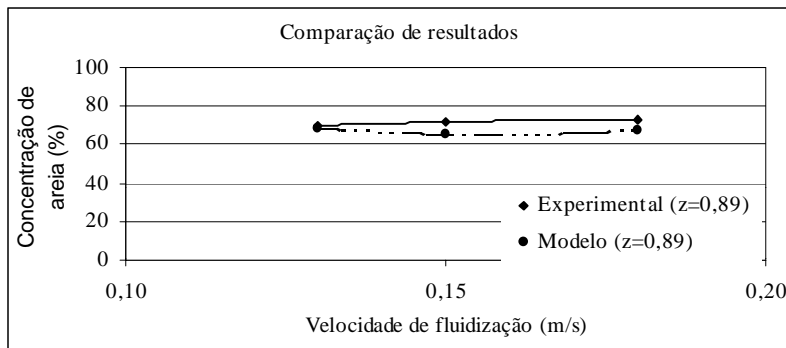


Figura 6 – Experimentos realizados com areia 225  $\mu\text{m}$  e sal 450  $\mu\text{m}$ .

A figura 7 mostra o mesmo tipo de variação das figuras 5 e 6 para velocidades de fluidização mais elevadas. A altura adimensional ( $z$ ) é de 0,55. Como nas figuras anteriores a concordância entre o modelo e o experimento é visível.

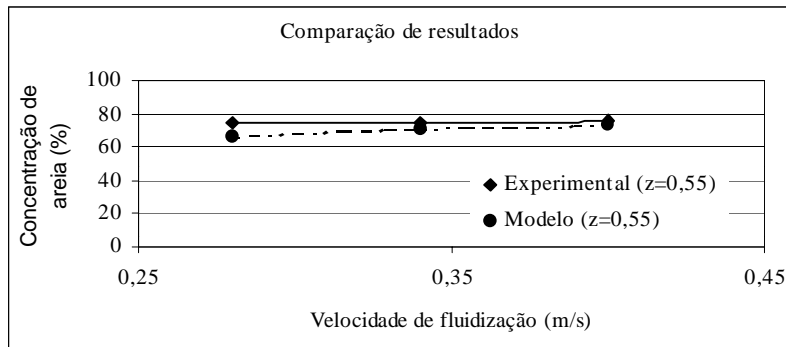


Figura 7 – Experimentos realizados com areia 450  $\mu\text{m}$  e sal 450  $\mu\text{m}$ .

A figura 8 é semelhante à figura anterior para uma altura adimensional de 0,89 do mesmo leito de partículas. Também é observado concordância entre o modelo e o experimento. Existe uma tendência de comportamento similar ao da figura 7.

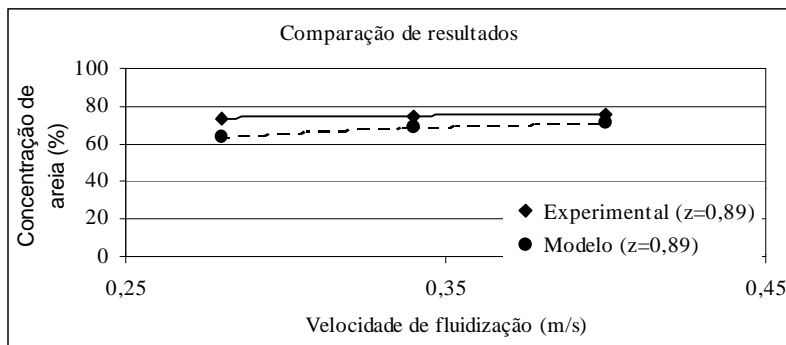


Figura 8 – Experimentos realizados com areia 450  $\mu\text{m}$  e sal 450  $\mu\text{m}$ .

## 5. CONCLUSÕES

Para os sistemas binários utilizados o modelo previu, com pequeno desvio, o comportamento do processo de mistura na fluidização.

Para as velocidades de fluidização mais elevadas o processo de mistura tende a ser mais eficiente.

Em relação à concentração ao longo da altura do leito, em  $z = 0,55$  e  $z = 0,89$ , o processo com maiores velocidades tem comportamento mais similar que em menores velocidades.

A semelhança de comportamento mostrado nos ensaios com as maiores velocidades pode ser atribuído à maior movimentação do leito de partículas provocado pelas bolhas.

É necessário ainda a realização de novos experimentos para melhor avaliar o modelo em relação à outros sistemas particulados com diferenças de tamanho e densidade além de outras condições de fluidização.

## 6. AGRADECIMENTOS

Agradecemos a colaboração da FUNDUNESP – Fundação para o desenvolvimento da Unesp.

## 7. REFERÊNCIAS

- Fan, L. T. & Chen, Y. M., 1990, Recent developments in solids mixing, Powder Technology, vol. 61, pp. 255-287.
- Gibilaro, L. G. & Rowe, P. N., 1974, A model for a segregating gas fluidised bed, Chemical Engineering Science, vol. 29, pp. 1403-1412.
- Gourdon, J. L., Charonnat, Y. and Robin, P., 1988, Évaluation par échantillonnage des procédés de mélange de grains, Bulletin Liaison Laboratoire des Ponts et Chaussées, vol. 153, pp. 117-121.
- Hoffmann, A. C., Janssen, L. P. B. M. and Prins, J., 1993, Particle segregation in fluidized binary mixtures, Chemical Engineering Science, vol. 48, pp. 1583-1592.
- Naimer, N. S., Chiba, T. and Nienow, A. W., 1982, Parameter estimation for a solid mixing / segregation model for gas fluidized beds, Chemical Engineering Science, vol. 37, pp. 1047-1057.
- Palma, G. L., 1998, Um estudo de mistura em leito fluidizado para sistemas particulados sólidos, Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos, São Paulo, Brasil.
- Poux, M., Fayolle, P., Bertrand, J., Bridoux, D. and Bousquet, J., 1991, Powder mixing: some practical rules applied to agitated systems, Powder Technology, vol. 68, pp. 213-234.
- Tanimoto, H., Chiba, S., Chiba, T. and Kobayashi, H., 1981, Jetsam descent induced by a single bubble passage in three-dimensional gas-fluidized beds, Journal of Chemical Engineering of Japan, vol. 14, n. 4, pp. 273-276.



# **INVESTIGAÇÃO EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO DO ESCOAMENTO BIFÁSICO (ÁGUA-AR) EM REGIME DE BOLHAS DISPERSAS ATRAVÉS DE PROCESSAMENTO DIGITAL DE IMAGENS E DE ENSAIO ULTRASÔNICO**

**Manolo Pires**

**Vilson Carlos da Silva Ferreira**

**Flávio van der Laan**

**Lucas Gutkoski**

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Laboratório de Turbo-Máquinas e Medições de Fluxo, Departamento de Engenharia Mecânica, 90030-170, Porto Alegre, RS, Brasil.

E-mail: manolo@mecanica.ufrgs.br

## **Resumo**

O presente trabalho investiga, experimentalmente, as flutuações de pressão provocadas por descontinuidades e instabilidades internas em ambas as fases do escoamento bifásico. Especificamente, analisa-se os efeitos da resposta dinâmica de nuvens de bolhas no escoamento transiente bifásico. Os efeitos interativos que a variação no volume das bolhas tem na distribuição de pressão e, todavia, no campo de velocidade do escoamento são muitos significativos quando a concentração das bolhas torna maior e a possibilidade do movimento global da mistura surge. Os resultados desta investigação revelam que a presença das bolhas de ar afetam a natureza do meio através dos quais a onda está progredindo, alterando a massa específica e a compressibilidade do meio, e assim, alterando drasticamente a velocidade do som no meio, a qual diminui e torna-se dispersiva. Observou-se que um aumento na fração de vazios causa uma redução substancial na amplitude de resposta da bolha (atenuações).

**Palavras chaves:** Grupo de Bolhas, Escoamento Bifásico, Descontinuidades, Atenuações

## **1. INTRODUÇÃO**

Com o advento da Segunda Guerra mundial, as pesquisas teóricas e experimentais sobre escoamento bifásico foram intensificadas, devido a sua aplicação em reatores nucleares e a aceleração dos programas de pesquisas nucleares para fins bélicos.

O grande interesse pelo escoamento bifásico é devido, principalmente, ainda, a sua aplicação em foguetes, instalações industriais, como por exemplo, nas indústrias químicas e petroquímicas. Estão presentes ainda na natureza, como no caso de fontes geotérmicas para geração de energia.

Assim, uma quantidade apreciável de problemas em processos industriais (por exemplo, em evaporação, condensação, separação de componentes usando destilação) envolvem a medição de fluxos que, intencionalmente ou não, apresentam mais de uma fase e que normalmente envolvem altos custos.

Este tipo de escoamento possui estruturas espaciais complexas e mudam sua forma com o tempo. Estas peculiaridades são as principais razões das flutuações aleatórias em todos os parâmetros hidrodinâmicos do escoamento.

Bolhas de gás suspensas em líquidos sofrem vários fenômenos complexos demais para uma formulação matemática adequada. Nos modelos físico-matemático existentes (modelos homogêneos e separados) as peculiaridades hidrodinâmicas do meio bifásico não são levadas em consideração. Eles negligenciam totalmente os processos internos transientes (como no caso de modelos de escoamentos homogêneos ou modelos avaliados num tempo médio).

Nenhum modelo teórico que os autores pesquisaram, descreve a evolução da estrutura do escoamento bifásico enquanto muda parâmetros importantes da mistura bifásica, tais como, o conteúdo de gás (ar) injetado no escoamento nos limites de seu título  $0 < x < 1$ . Assim as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e de energia não são suficientes para descrever a complexa estrutura espacial e temporal do escoamento bifásico. É necessário suplementá-las com equações constitutivas, expressando as leis de transferência interfacial em termos das variáveis dependentes.

No escoamento bifásico em regime de bolhas dispersas surgem complicadas interações como: colisões, coalescência entre bolhas adjacentes, interações entre bolhas e a parede do tubo e variações instantâneas da geometria das bolhas, que afetam o potencial hidrodinâmico local do escoamento, causando flutuações na pressão estática na velocidade, e violento movimento turbulento do líquido. A variação resultante do campo do escoamento induz mudanças no movimento das bolhas, e estas podem resultar em uma flutuação mais violenta ou heterogeneidade do escoamento. Muitos esforços têm sido despendidos analiticamente, tais como, os trabalhos de Hsieh & Plesset (1961), Wijngaarden (1966, 1968, 1976 e 1984), Scott (1981), D'Agostino & Brennen (1989), Nakoryakov et al (1994), Takahira et al (1994), Ferreira (1997) e muitos outros, mas tais modelos não podem representar a situação do escoamento como ele realmente existe e podem somente ser aplicado para escoamento em condição estritamente limitada ou bem definida. Por outro lado, embora uma grande quantidade de trabalhos experimentais tem sido realizadas sobre escoamento com bolhas em diferentes sistemas líquido-gás, comparações de resultados de muitas pesquisas fornecem pouca informação básica de forma a dar uma visão do fenômeno físico. Isto é devido ao fato que tais pesquisas foram confinadas na medida de um ou dois parâmetros sob diferentes condições do escoamento e da complexa natureza estatística dos movimentos aleatórios do fluido induzido por bolhas movimentando de forma aleatória. Assim, o conhecimento básico sobre o mecanismo deste complexo escoamento é ainda muito limitado, embora bolhas de gás em líquido seja uma visão muito familiar.

O presente trabalho é uma investigação experimental das flutuações de pressão local do escoamento bifásico em regime de bolhas dispersas. Escoamento este através de uma tubulação horizontal de 50 mm de diâmetro interno sob pressões aproximadamente atmosférica. Ênfase será dada no seguinte:

- 1) Medidas de flutuações de pressão;
- 2) Cálculo das intensidade das flutuações de pressões provocadas pelas bolhas;

## **2. EQUIPAMENTO E PROCEDIMENTO**

Os dados experimentais foram obtidos de um circuito de teste mostrado na Figura 1. O circuito de teste faz parte da bancada de calibração de medidores de fluxo do tipo gravimétrica, existente no Laboratório de Turbo-Máquinas e Medições de Fluxo (UFRGS-LTMF) usada para calibrar medidores de fluxo de 0,1 até 5 kg/s com incerteza de  $\pm 1\%$  de

fundo de escala (FS). Este circuito compreende três seções diferentes: (1) Seção de entrada; (2) Seção de desenvolvimento e (3) Seção de teste.

A seção de entrada é um dispositivo denominado “condicionador de fluxo” constituído de uma expansão da seção transversal do tubo de seção de teste de 50 mm para 150 mm, onde foram instalados um orientador de escoamento tipo “favo de abelha” e um respiro. O objetivo da instalação do condicionador associado ao orientador do escoamento é eliminar possíveis escoamentos secundários e flutuações provocadas pela bomba ou pelos acessórios da tubulação. O respiro foi instalado para extrair o ar presente no escoamento (possível cavitação provocada pela bomba) e que pode alterar os dados.

A seção de desenvolvimento consiste de uma tubulação reta, sem acidentes de 50 mm de diâmetro, com um comprimento equivalente a 60 diâmetros (3000 mm), com o objetivo de promover o pleno desenvolvimento do perfil de velocidades.

A seção de teste consiste de um tubo horizontal de acrílico de 50 mm de diâmetro interno, instalado externamente sobre o mesmo, 2 sensores piezoelétricos diametralmente opostos, (o sensor superior é o sensor transmissor de sinal ultra-sônico de rádio-frequência e o inferior o receptor). O sensor do tipo piezoelétrico possui uma frequência de ressonância de 140 KHz, saída do sinal de 4 a 20 mA.

A injeção de ar é feita através de um tubo de cobre em forma de “L” com 10 mm de diâmetro com vários pequenos orifícios ao redor da perna inferior do “L”. Com esta solução o ar é misturado radialmente dentro d’água.

Utilizando-se de um gerador de funções, o sensor piezoelétrico transmissor da seção de teste foi excitado por uma onda senoidal na frequência de 140 KHz (correspondente a frequência de ressonância do sensor). Este sinal ultrasônico de 140 KHz foi modulado aleatoriamente em amplitude e fase durante a passagem de bolhas pela seção de teste e excita o sensor piezoelétrico receptor diametralmente oposto. Os sinais do sensor piezoelétrico receptor foram amplificados e posteriormente demodulados para remover as componentes de alta frequência do sinal. Os sinais assim demodulados e filtrados com filtros passa – baixa representam as flutuações aleatórias de pressão provocadas pelas bolhas no escoamento. Estes sinais de pressão foram adquiridos via software, numa frequência de aquisição de 100 KHz, taxa de aquisição de 100.000 pontos num intervalo de tempo de 1 segundo. Simultaneamente e de forma sincronizada com os sinais de pressão foram capturados e gravadas em fitas magnéticas as imagens do movimento das bolhas no intervalo de tempo correspondente ao de aquisição (1 segundo). Para isto utilizou-se de uma câmera digital CCD monocromática, com velocidade de obturação de 1/100 segundo. As imagens foram digitalizadas em 30 quadros por segundo.

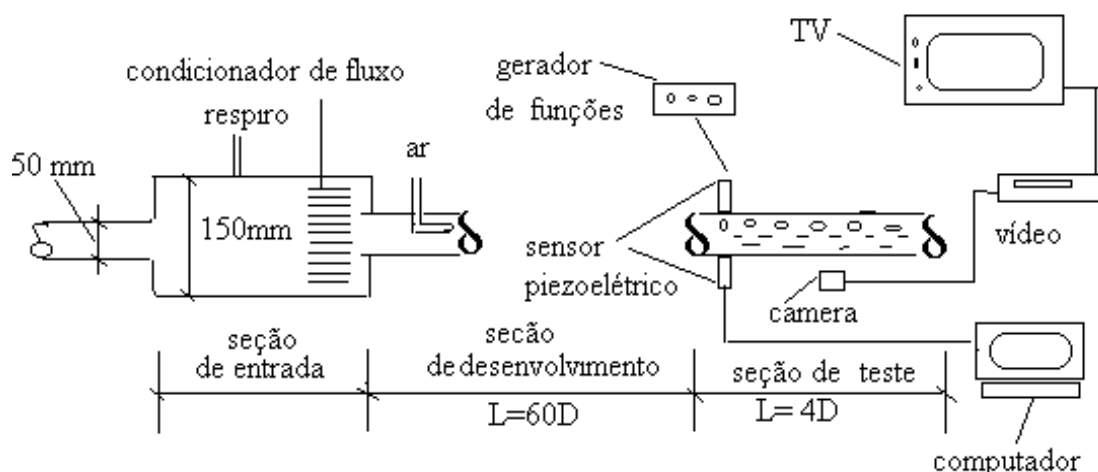


Figura 1 Seção de Testes

### 3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS E ANÁLISE

As medições foram efetuadas para diferentes fluxos mássicos água e ar. Esta seção apresenta alguns resultados obtidos. A Figura 2 mostra as flutuações de pressão no domínio do domínio do tempo para o escoamento unifásico com fluxo mássico de água de 1,03 kg/s e

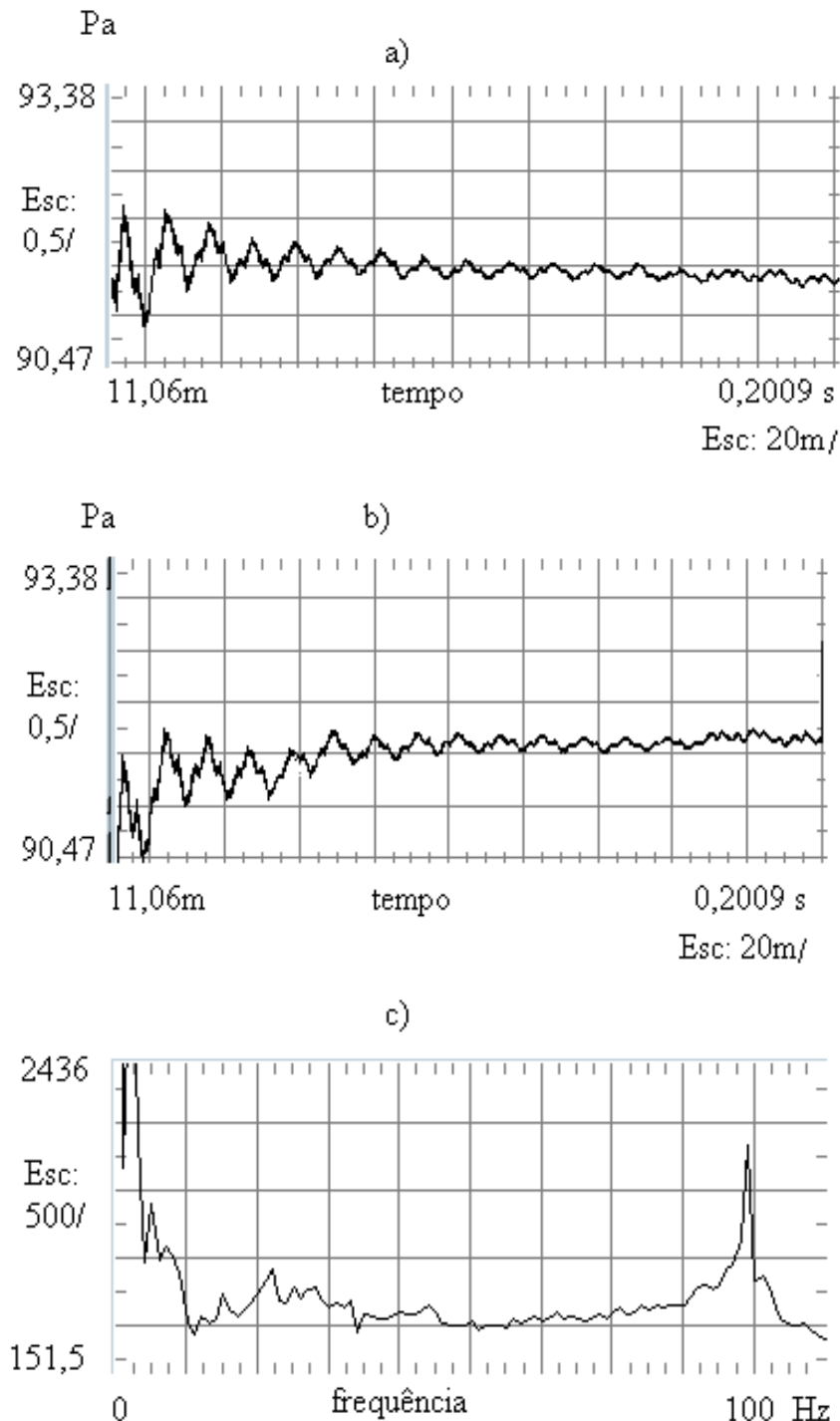


Figura 2 Flutuações de pressão correspondente a : a) Escoamento unifásico com Fluxo Mássico  $m = 1,03 \text{ kg/s}$  (água) b) Escoamento Bifásico com Fluxo Mássico  $m = 1,03 \text{ kg/s}$  (água) e  $m = 0,000010775 \text{ kg/s}$  (ar) c) Espectro de Frequência correspondente ao Escoamento Bifásico .

para escoamento bifásico com um fluxo mássico de 1,03 kg/ s de água e 0,000010775 kg/ s de ar, tanto no domínio do tempo e o espectro de frequência correspondente.

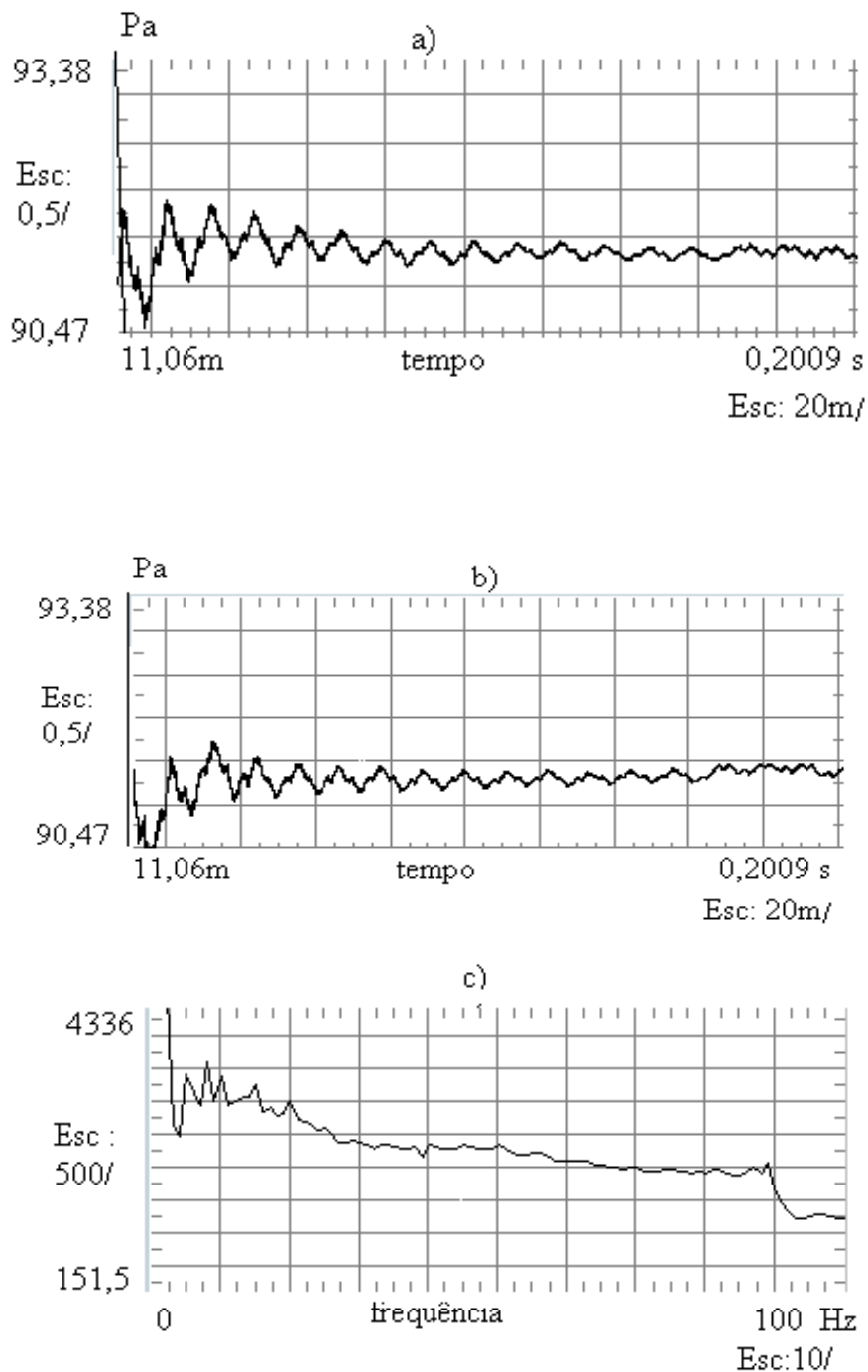


Figura 3 Flutuações de pressão correspondente a: a) Escoamento Unifásico com Fluxo Mássico  $m = 1,37$  kg/s (água) b) Escoamento Bifásico com Fluxo Mássico  $m = 1,37$  kg/s (água) e  $m = 0,00002155$  kg/s (ar) c) Espectro de Frequência correspondente ao Escoamento Bifásico

A Figura 3 mostra as flutuações de pressão no domínio do tempo para o escoamento unifásico com fluxo mássico de água de 1,37 kg/s e para o escoamento bifásico com fluxo mássico de 1,37 kg/s de água e 0,00002155 kg/s de ar no domínio do tempo e o espectro de frequência correspondente.

Foram adquiridos diversos sinais de flutuações de pressões para diferentes fluxos mássicos de água e ar. Iniciou-se com  $m = 0,5 \text{ kg/seg}$  água (escoamento unifásico) e o correspondente escoamento bifásico  $m = 0,5 \text{ kg/seg}$  (água) e  $m = 0,1 \text{ kg/seg}$  ar. A partir daí variou-se o fluxo de mássico de água tanto para o escoamento unifásico quanto para o bifásico de 0,5 kg/seg em 0,5 kg/seg até o fluxo mássico de  $m = 2,0 \text{ kg/seg}$  de água e o de ar 0,2 em 0,2 kg/seg até 2kg/seg.

Os autores fizeram diversas análises, tanto no domínio do tempo, quanto no da frequência, para diferentes frações de vazio testadas, utilizando-se de software de aquisição e análise estatística dos dados. Embora as Figuras 2 e 3 sejam casos particulares, elas são representativas e muito similares aos demais testes efetuados. Dos gráficos das Figuras 2 e 3, foi observado que com a introdução da fase dispersa (bolhas de ar) no escoamento com água :

- A intensidade das flutuações no escoamento bifásico é maior uma ordem de grandeza ou mais do que a do escoamento unifásico;
- O espectro de frequência do escoamento bifásico é mais estreito do que o do unifásico para o mesmo fluxo mássico. Há alguns picos bem definidos de frequências em ambos escoamentos, os quais provavelmente representam alguns efeitos da própria bancada de medições de fluxo ;
- Em contraste com o escoamento unifásico, o espectro de flutuações de cada parâmetro hidrodinâmico é caracterizado por uma queda máxima em baixa frequência da ordem de 1-10 Hz.

Análise de diversos diagramas de oscilações de pressão no escoamento bifásico obtidos no laboratório de turbo-máquinas da UFRGS revelam a presença nos escoamentos bifásicos de ondas progressivas ligada com sua estrutura espacial temporal.

A Figura 4 mostra as flutuações de pressão provocadas pela adição da fase dispersa (bolhas) nos escoamentos correspondentes aos das Figuras 2.

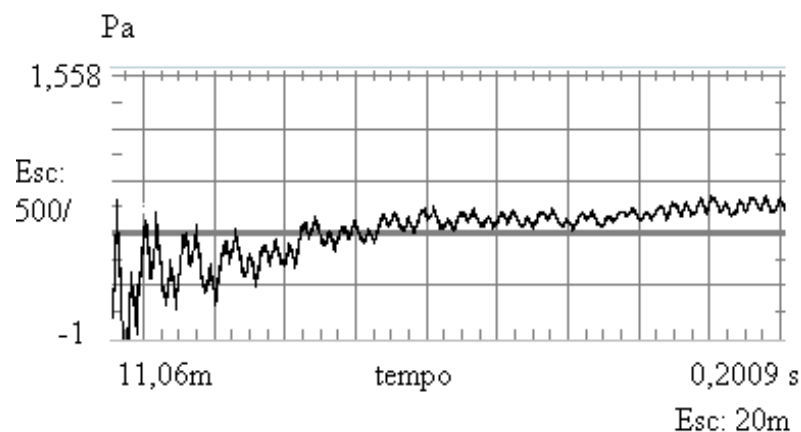


Figura 4 Flutuações de Pressão Provocada pela Fase Dispersa (Bolhas):) Sinal obtido da diferença entre o Escoamento Bifásico e Unifásico da Figura 2.

As flutuações de pressão reais representam uma superposição de um processo harmônico e um ruído aleatório.

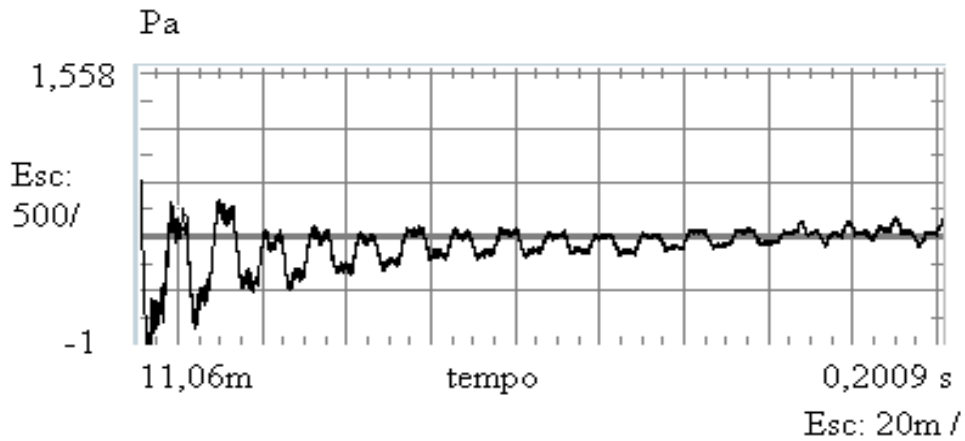


Figura 5 Flutuações de Pressão Provocada pela Fase Dispersa (Bolhas): Sinal obtido da diferença entre o Escoamento Bifásico e Unifásico da Figura 3.

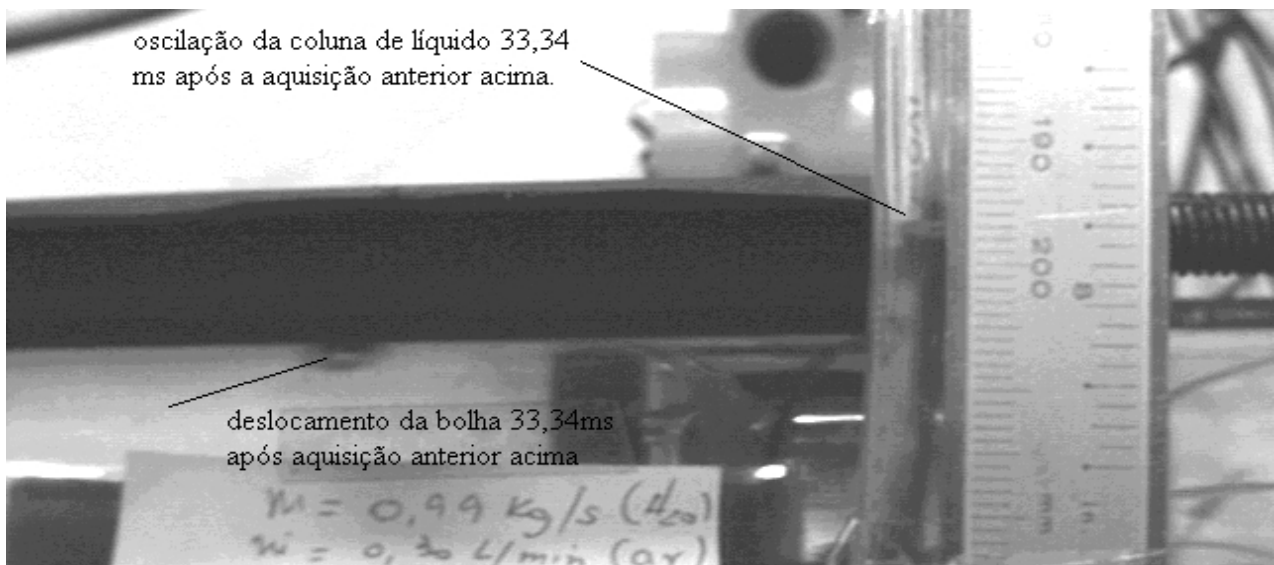
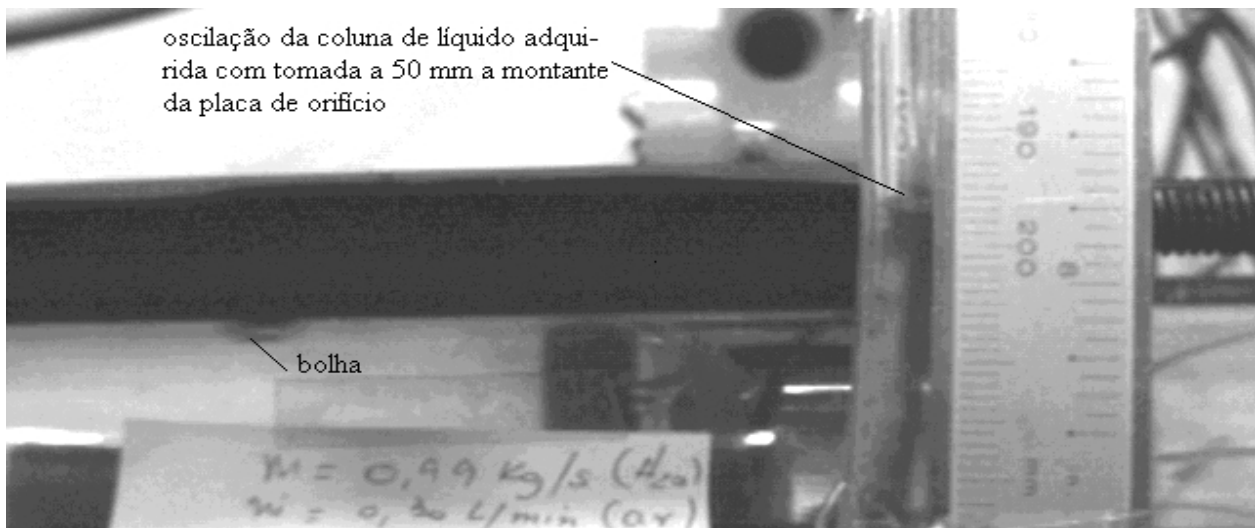


Figura 6 Flutuações de Pressão Obtidas num Intervalo de Tempo Correspondente a 33,34 ms

Utilizando-se de expressões analíticas propostas por Fokin, (1995), para o escoamento bifásico em regime transiente, foi calculada a intensidade das flutuações de pressões em forma de valores médios quadráticos. Os valores utilizados foram os correspondentes aos fluxos mássicos de água e ar das Figuras 2 e 3. Os valores médios quadráticos calculados, são da ordem de 0,81213 Pa. Verificou-se, que os valores obtidos experimentalmente estão em concordância com os analíticos.

Os resultados mostram efeitos não lineares e dispersivos, causados pela pulsações radiais das bolhas no líquido. Oscilações provocadas por grupo de bolhas afetam o escoamento básico tornando impossível um tratamento analítico do escoamento unifásico.

Conforme, Scott, (1991), oscilações provocadas por bolhas são descritas por certos problemas de autovalores, os quais dão os modos normais e correspondentes frequências de oscilações. Estes modos representam oscilações coletivas do sistema de bolhas, e não podem em geral, ser atribuída a bolhas particulares.

#### **4. CONCLUSÕES**

Embora a presente análise não permita uma exatidão dos resultados quantitativos, não havendo dados suficiente para ser conclusivo, os resultados desta investigação revelam um número de importantes efeitos em escoamentos confinados com bolhas. Atenuações extremamente altas são produzidas em água contendo bolhas suspensas de ar. A presença das bolhas de ar afetam a natureza do meio através dos quais a onda esta progredindo, alterando a massa específica e a compressibilidade do meio, e assim, alterando drasticamente a velocidade do som no meio, a qual diminui e torna dispersiva.

Efeitos de inércia na dinâmica das bolhas são importantes quando a frequência de excitação é comparável com a frequência natural da bolha. Observou-se que um aumento na fração de vazios causa uma redução substancial na amplitude de resposta da bolha (atenuações). Constatou-se ainda, que quando uma bolha flui na esteira da outra a mesma tende a acelerar-se mais do que a sua predecessora e coalescer com a mesma.

Gradientes de velocidades e aumento de turbulência tendem a aumentar a taxa com que as pequenas bolhas colidem, promovendo aglomerações, também tendem a fragmentar as bolhas em bolhas menores, produzindo um espectro muito grande de frequência, onde a maioria das bolhas entram em ressonância.

#### **5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

Biesheuvel, Wijngaarden L. van, 1984, "Two Flow Equations for a Dilute Dispersion of Gas Bubble in Liquid", J. Fluid Mech., Vol.148, pp. 301-318.

D'ágostino L., Brennen C.E., 1989, "Linearized Dynamics of Spherical Bubble Clouds", J. Fluid Mech. Vol. 1. 199, pp.155-176.

Ferreira V.C.S., 1997, "Differential Pressure Spectral Analysis for Two-Phase Floe trough an Orifice Plate", Int. J.Press.& Piping, Vol.73, pp.19-23.

Hsieh D.Y., Plesset M.S., 1961, "On Propagation of Sound in a Liquid Containing Gas Bubble", Phys. Fluid, Vol.4, N. 8-pp. 970-975.



Nakoryakov V., Dontsov V.E. , Pouasaev B.G.,1994, “ Propagation of Pressure Waves in Liquid with Gas Bubbles and Solid Particles”, Russian Journal of Engineering Thermophysics, Vol. 4, pp 173.

Scott J.F. ,1981,” Singular Perturbation Theory Applied to the Collective Oscillation of Gas Bubbles in a Liquid”, J. Fluid Mech, Vol.113, pp. 487 –511.

Takahira H, Akamatsua T, Fujikawa S . ,1994,”Dynamics of a Cluster of Bubble in a Liquid”, JSME, International Journal, serie B, V.37, N. 2 pp.

Wijngaarden , L. van ,1976 a, “Hydrodynamics Interaction between Gas Bubbles in Liquid”, J. Fluid Mech, Vol.77, pp. 27- 44.

Wijngaarden , L. van ,1966, “Linear na Non Lineart Dispersion of Pressure Pulses in Liquid“, Technische Hogeschool Twente Afdelnig der Werktuigbounddunde, Postbus 217, Enschede, Netherlands, pp. 115-135.

Wijngaarden , L. van.,1968, “ On the Equations for motion of Mixtures of Liquid and Gas Bubbles”, J. Fluid Mech, Vol.33, part3, pp. 465-474.

## ENSAIOS AERODINÂMICOS EM VÔO DO FOGUETE SUBORBITAL VS-40

André Luiz Pereira, Paulo Moraes Jr.  
Centro Técnico Aeroespacial/Instituto de Aeronáutica e Espaço  
Divisão de Sistemas Espaciais  
12228-904 São José dos Campos-SP, Brasil, E-mail: [andrel@iae.cta.br](mailto:andrel@iae.cta.br)

### RESUMO

O VS-40 é um foguete de sondagem de alto desempenho constituído por dois estágios propulsores, sendo desenvolvido pelo Instituto de Aeronáutica e Espaço do Centro Técnico Aeroespacial. A missão principal deste veículo é a de realizar vôos suborbitais de longa duração, para fins de atendimento de experimentos científicos e tecnológicos de microgravidade, e já foi lançado por duas vezes. O projeto aerodinâmico do VS-40 foi realizado utilizando *engineering calculation methods*. Ensaios aerodinâmicos em túnel de vento não foram feitos por limitação orçamentária e de tempo disponível para conclusão do projeto. No vôo do segundo protótipo do VS-40, foram feitas medições de pressões sobre a parte superior do veículo nos regimes de velocidades subsônica, transônica e supersônica, com o objetivo de obter dados para validação dos cálculos realizados. O artigo descreve as técnicas utilizadas para medição e aquisição de dados e discute os resultados obtidos em vôo.

**Palavras-chave:** Ensaios em vôo, Vôo suborbital, Medição de pressões, Aerodinâmica

### 1. INTRODUÇÃO

O VS-40, mostrado na figura 1, é um foguete de sondagem de alto desempenho constituído por dois estágios propulsores, desenvolvido pelo IAE-Instituto de Aeronáutica e Espaço do CTA-Centro Técnico Aeroespacial (Boscov, 1995). Este veículo, inicialmente desenvolvido para qualificar em vôo o quarto estágio propulsor do VLS-Veículo Lançador de Satélites (Boscov et al, 1990), já foi lançado por duas vezes. Atualmente objetiva-se qualificá-lo para um desempenho que possibilite um longo tempo de vôo suborbital tornando-o assim bem adequado a realização de experimentos científicos e tecnológicos sob condições de microgravidade.

O projeto aerodinâmico do VS-40, configurado por uma ogiva esférico-cônica, seguida de cilindros de seção circular, os quais formam os dois estágios propulsores, e acrescido de superfícies de estabilização na sua parte posterior, foi realizado utilizando *engineering calculation methods*. Dá-se a denominação "engineering methods" aos métodos de cálculo de resposta rápida, empregados em estimativas preliminares de coeficientes, no presente caso, aerodinâmicos. Tais métodos são baseados em formulações analíticas e/ou semi-empíricas, validados com resultados experimentais, e



**Figura 1.** Foguete de Sondagem VS40

portanto adequados ao uso para configurações que não exijam o uso de métodos numérico-computacionais mais elaborados. São largamente utilizados e referenciados como "engineering methods".. Ensaio aerodinâmicos em túnel de vento, de baixa e de alta velocidade, não puderam ser considerados tanto por questões de limitação orçamentária como de tempo disponível para conclusão do projeto.

No lançamento e vôo do segundo protótipo do VS-40, ocorrido em abril de 1998, foram feitas medições de pressões sobre a superfície da parte frontal do veículo, coifa (ogiva) e módulo de carga-útil, com o objetivo de obter dados para uma validação dos cálculos realizados com os métodos de engenharia ou mesmo simulações numéricas. As medidas em vôo foram tomadas nos regimes de velocidades subsônica, transônica e supersônica durante a fase de vôo atmosférico.

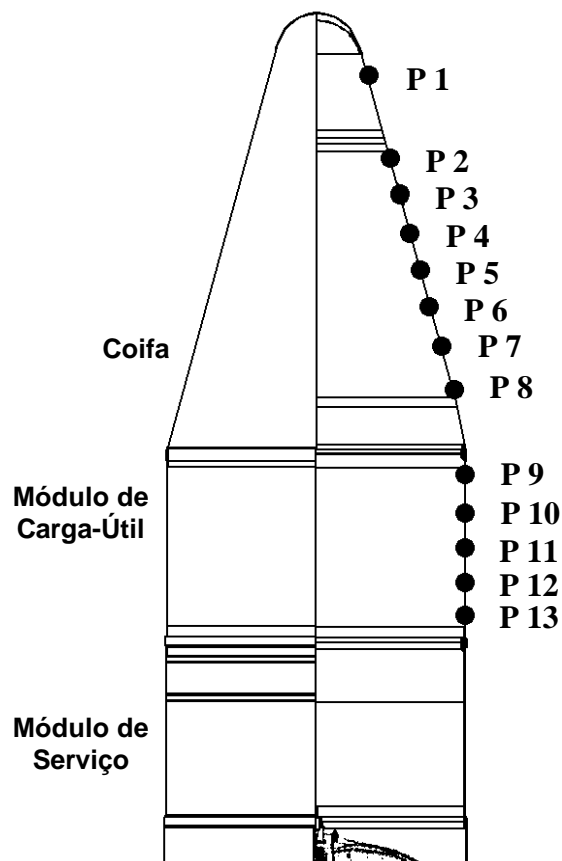
O presente artigo descreve as técnicas utilizadas para medição e aquisição de dados e discute detalhadamente os resultados obtidos em vôo.

## 2. PLANO DE MEDIDAS E INSTRUMENTAÇÃO

O plano de medidas em vôo é descrito detalhadamente em (Eleutheriadis, 1996), e considera medidas de pressão na superfície externa da parte alta do veículo, distribuídas conforme segue:

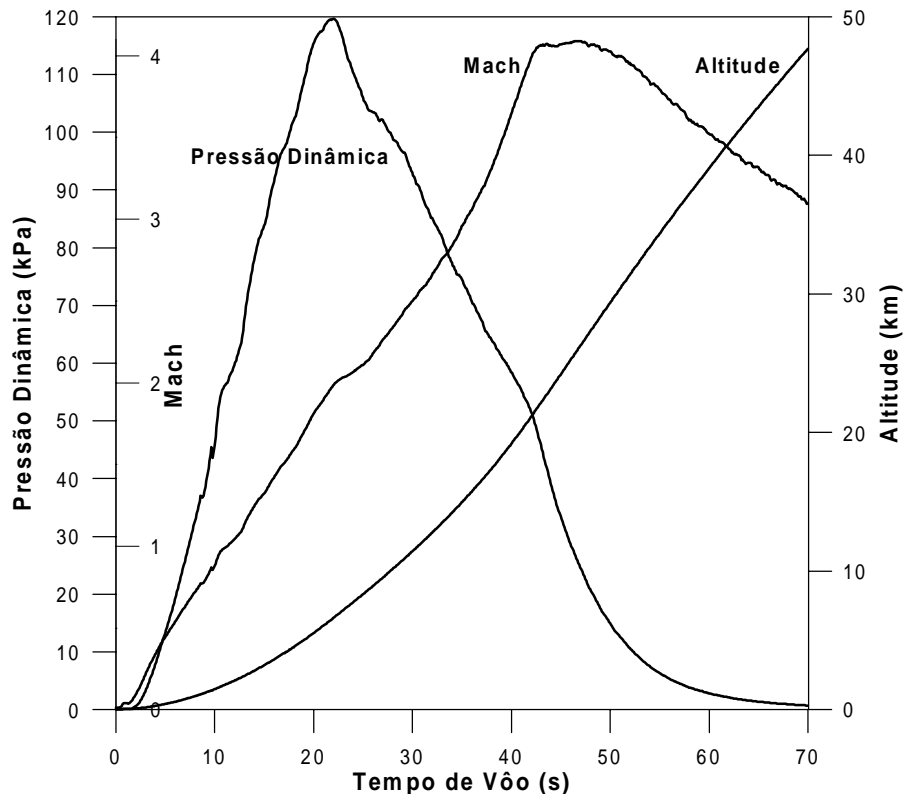
- 8 tomadas de pressão sobre a coifa e
- 5 tomadas de pressão sobre o módulo de carga-útil.

A figura 2 ilustra a distribuição solicitada para os pontos de medida de pressão



**Figura 2.** VS 40/ PT02: Localização das tomadas de Pressão.

Para bem especificar os transdutores de pressão utilizados no ensaio em vôo, foi necessário conhecer previamente os níveis de pressão que estariam atuando sobre a superfície do veículo, ao longo de sua trajetória ascendente, figura 3. Assim, considerou-se primeiramente uma trajetória nominal do veículo, determinando-se a altitude e a velocidade em função do tempo de vôo, e com estas as correspondentes pressões atmosféricas a partir de um modelo de uma atmosfera padrão (NASA, 1976), e o número de Mach, que denota a razão da velocidade do veículo sobre a velocidade do som na altitude na qual se encontra.



**Figura 3.** VS 40/ PT02: Parâmetros de Vôo

Para obter-se no entanto os valores esperados de pressão local, i.e sobre a superfície do veículo, fez-se necessário o uso de resultados de cálculos oriundos de simulações numérico-computacionais do escoamento sobre o veículo, para regimes transônico e supersônico, até a condição de máxima pressão dinâmica. A simulação numérico-computacional fez uso de uma formulação viscosa das equações de Navier-Stokes de camadas finas, acrescidas de um modelo de turbulência algébrico do tipo viscosidade de vórtice, apresentada e descrita em (Azevedo, 1996).

Conhecidos os valores a serem esperados, ao longo da trajetória, foram definidos pontos de interesse para as medidas a serem realizadas, de forma a caracterizar o escoamento ao longo de segmentos e junto às mudanças de geometria. Assim, foram especificadas as faixas de medidas para os sensores a serem colocados em cada ponto para a realização do ensaio aerodinâmico em vôo do foguete suborbital VS-40

Os transdutores de pressão utilizados para estas medidas foram do tipo Piezo-resistivo, com uma faixa de medida de 0 a 103,4 kPa (0 a 15 psi). O sinal de saída desses transdutores é linear e apresenta, para uma tensão de excitação de 5 VDC, um valor de 1,088 mV/Pa ou 112,5 mV para fundo de escala. Este sinal é levado a um amplificador que aplicará um ganho de 44,44 vezes, apresentando na saída um sinal na faixa de 0 a 5 V. O sinal amplificado é levado, então, para um Codificador de Telemetria (PCM) e transmitido para a estação de solo por radiofrequência, em Banda S (2275,5 MHz).

Uma vez selecionados os transdutores a serem utilizados, estes foram adquiridos e aferidos. A aferição dos transdutores foi feita no Laboratório de Confiabilidade Metrológica do IFI-Instituto de Fomento e Coordenação Industrial, do CTA-Centro Técnico Aeroespacial, seguindo procedimento próprio do laboratório (Siqueira, 1998). Tal procedimento define os equipamentos a serem utilizados, o processo de aplicação de cargas e a climatização do ambiente onde a aferição é realizada.

O processo de aferição é executado em Balança de Peso Morto, com Conjunto de Massas Padrão, tomando-se os valores de medida em carregamento e descarregamento, para garantir que não haja qualquer imperfeição do elemento sensor que possa provocar desproporcionalidade ou histerese consideráveis. Para ter-se a confiabilidade necessária à aferição, são tomados 10 pontos da escala, sendo: o valor inicial da escala, o fundo da escala e mais 8 pontos intermediários. Dessa forma, tem-se confirmado o coeficiente angular de cada transdutor e confirmada uma precisão melhor que 0,15% do fundo de escala, garantindo a precisão das medidas e irrelevância da propagação do erro sobre os coeficientes daí calculados.

Durante o vôo os dados são transmitidos e recebidos em solo por antena dedicada, esta acoplada ao Radar que monitora o movimento do veículo, armazenados em fita magnética e, concluído o vôo do veículo e aquisição dos dados, convertidos para unidades de engenharia, por modelos matemáticos, e disponibilizados para análise.

### 3. ANÁLISE DOS DADOS

Uma primeira análise dos dados obtidos mostrou ter havido um problema durante o vôo, interrompendo ou alterando a aquisição dos dados das medidas, 21,3 segundos após o lançamento. Tais alterações puderam ser observadas no *off set* (relevante salto do valor, alterando ou não o comportamento desta) apresentado em algumas das medidas e no comportamento de outras.

Com tal problema, as análises ficaram limitadas à consideração de um valor máximo do número de Mach igual a 1,8. Ainda assim, foi possível fazer-se a análise da passagem do veículo pelo regime transônico, que é de extrema importância para a avaliação de qualquer veículo espacial, bem como do início do regime supersônico.

Considerando a limitação imposta, a análise foi iniciada pelo *set up* (ajuste inicial) das cadeias de medição, pois as medidas de pressão não tiveram um mesmo valor inicial, o que poderia acarretar um mascaramento da distribuição das pressões ao longo do veículo, durante o vôo. Este problema exige um acerto dos valores, a partir da pressão atmosférica externa medida no instante do lançamento. Tal medição é feita 5 minutos antes deste evento.

A partir das pressões encontradas foram calculados os Coeficientes de Pressão ( $C_p$ ), para cada ponto de medida do veículo e valores desejados do número de Mach.

O coeficiente de pressão  $C_p$  é calculado usando-se a equação:

$$C_p = \frac{P_x - P_\infty}{q_\infty} \quad (1)$$

onde

$P_x$  = pressão local (Pa)

$P_\infty$  = pressão atmosférica (Pa)

$q_\infty$  = pressão dinâmica,  $= \frac{1}{2} \rho_\infty \cdot V_\infty^2 = \frac{2}{\gamma \cdot M_\infty^2} \left( \frac{P_x}{P_\infty} - 1 \right)$  (Pa)

$\gamma$  = constante adimensional,  $= \frac{c_p}{c_v}$

$c_p$  = calor específico a pressão constante

$c_v$  = calor específico a volume constante

No cálculo da Pressão Dinâmica,  $\rho$  é a massa específica do ar, dada em  $\text{kg/m}^3$ ;  $V$  é a velocidade do veículo, dada em  $\text{m/s}$ ;  $M$  é o Número de Mach e  $P$  é a pressão, dada em Pa. O índice subscrito  $x$  indica a propriedade tomada no ponto de medida e  $\infty$  indica propriedade tomada no escoamento não perturbado.

A distribuição do coeficiente de pressão  $C_p$  é representada sobre um comprimento adimensional, expresso por  $X/L$  onde  $X$  é a posição do ponto, a partir da ponta da ogiva, e  $L$  é o comprimento total do veículo. Isto é feito, tanto na representação dos resultados experimentais como em cálculos e simulações computacionais, permitindo uma similaridade referencial para comparações, desde que seja observada a similaridade geométrica entre as configurações em estudo.

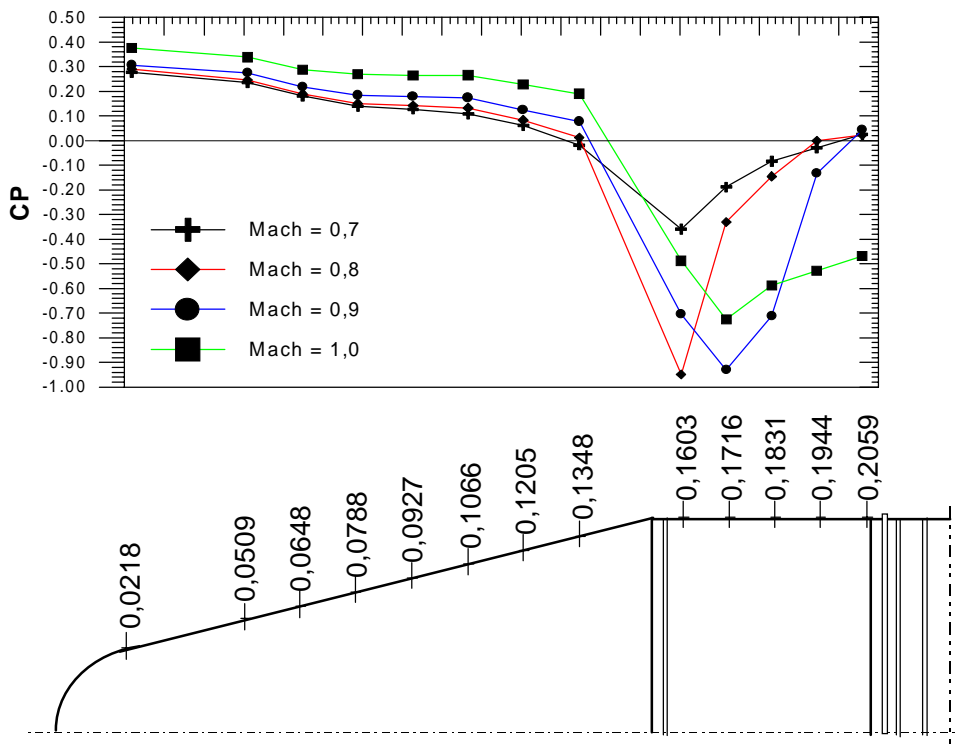
A determinação dos valores do  $C_p$  foi feita a partir dos dados obtidos experimentalmente, nos 13 pontos de medidas, da trajetória real do veículo e de valores obtidos de tabelas de atmosfera padrão, para o número de Mach  $M$  variando de 0,7 a 1,8.

#### 4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

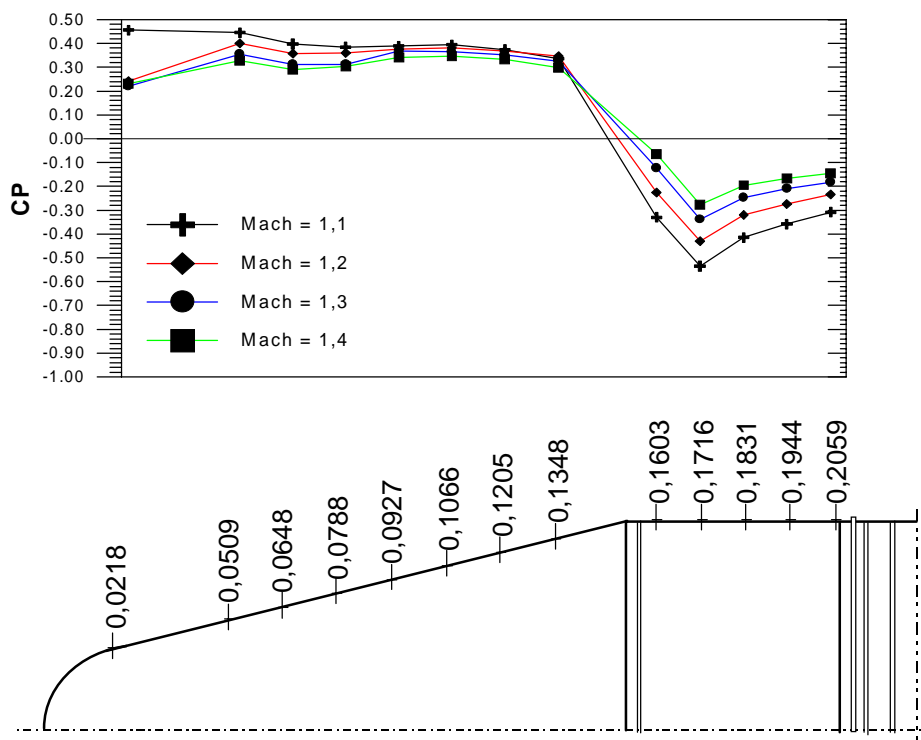
Os resultados obtidos são apresentados a seguir em gráficos, figuras 4, 5 e 6, na forma de distribuição do coeficiente de pressão local ao longo da superfície do segmento superior do veículo, para números de Mach variando de 0,7 a 1,8.

Para o regime de velocidades subsônicas com  $0,7 \leq \text{Mach} < 1,0$ , figura 4, observa-se dos resultados que o coeficiente de pressão varia acompanhando as características de escoamento sobre cada segmento geométrico da configuração. Portanto, apresenta pequena variação sobre o segmento cônico, forte expansão na junção cone-cilindro, e acentuada recuperação da pressão sobre o segmento cilíndrico. Observa-se também das distribuições apresentadas na figura 4 que para número de Mach igual a 0,8 e 0,9, fenômenos transônicos já se fazem presentes, o que sinaliza a formação de uma região de escoamento supersônico no início do segmento cilíndrico. Esta região supersônica é posteriormente fechada por uma onda de choque de média intensidade. Esta constatação é comprovada pelos valores de  $C_p = -0,44$ , para  $M = 0,8$  e de  $C_p = -0,19$ , para  $M = 0,9$  os quais, sendo alcançados, indicam o estabelecimento de velocidade sônica,  $M = 1,0$ , sobre a superfície da configuração, nas respectivas posições.

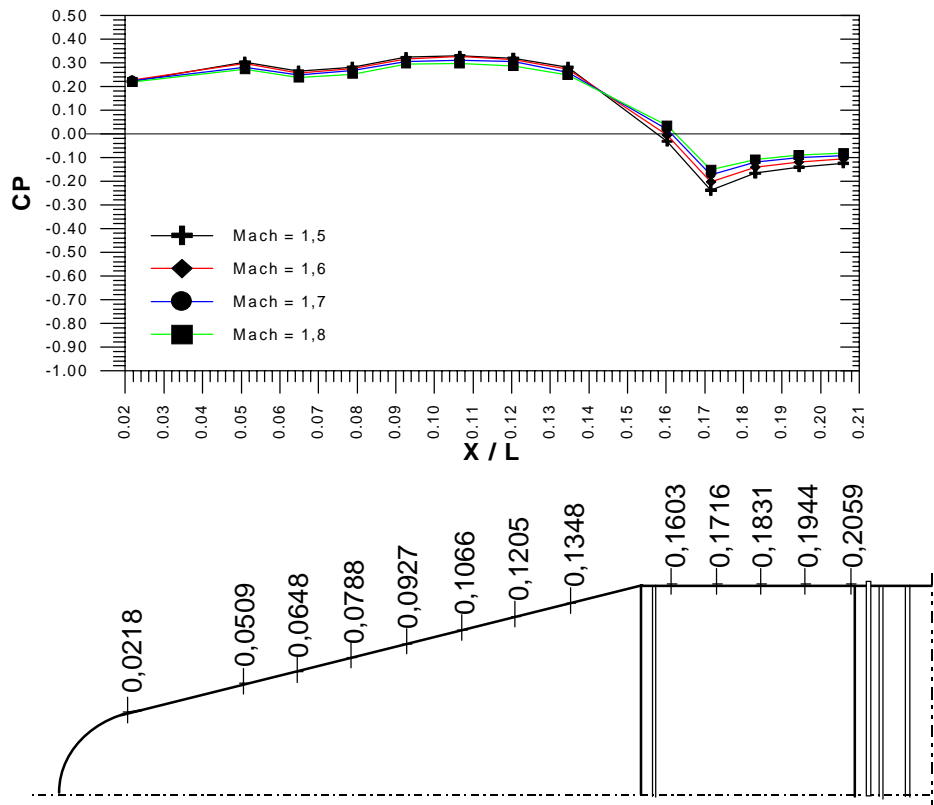
Na figura 5 tem-se a distribuição de pressões para velocidades em regime de baixo supersônico,  $1,1 \leq \text{Mach} \leq 1,4$ . Embora tenha-se aqui um regime de velocidades transônicas, as distribuições de pressão mostradas não indicam a existência de ondas de choque localizadas, flutuação de pressão, etc., que bem caracterizam tais tipos de escoamento.



**Figura 4.** Distribuição do Coeficiente de Pressão para  $0,7 \leq \text{Mach} \leq 1,0$ .



**Figura 5.** Distribuição do Coeficiente de Pressão para  $1,1 \leq \text{Mach} \leq 1,4$ .



**Figura 6.** Distribuição do Coeficiente de Pressão para  $1,5 \leq \text{Mach} \leq 1,8$ .

As distribuições apresentadas na figura 6 denotam escoamentos tipicamente supersônicos. Observa-se uma lenta e gradual recuperação da pressão para valores iguais a da pressão do escoamento não perturbado, embora a recuperação só deva ocorrer, para geometrias similares, a uma distância de 6 a 8 diâmetros da calota esférica, contados a partir do nariz do veículo.

É ainda importante ressaltar que a obtenção detalhada da distribuição de pressões sobre a superfície do veículo não é só de importância para validação de cálculos e simulações numérico-computacionais, mais também encontra aplicação no dimensionamento estrutural dos segmentos do veículo, principalmente quando considerado que sobre sua estrutura (casca), e se não houver equalização entre as pressões externa e do interior da coifa, um alto diferencial de pressão se estabelecerá.

## 5. CONCLUSÕES

Com o objetivo de adquirir dados para validação de cálculos e de simulações numérico-computacionais de escoamentos de alta velocidade sobre configurações de foguetes de sondagem e de veículos similares, foi feita a aquisição de pressões sobre o segmento superior do foguete de sondagem VS40, durante o vôo do seu segundo protótipo.

As pressões foram adquiridas durante o vôo atmosférico do veículo, em sua trajetória ascendente, nos regimes de velocidades subsônica, transônica e supersônica.

Os resultados mostraram que a técnica e os sensores utilizados para as medidas foram adequados para os regimes de velocidades e condições de vôo. Além de permitir agora a validação de resultados obtidos por meio de cálculos de engenharia ou através de simulações numérico-computacionais, as pressões, distribuídas ao longo do segmento superior do veículo, servirão também para uma mais precisa e detalhada análise estrutural deste segmento. É



importante salientar que o regime de vôo coberto, especificamente no que diz respeito as velocidades transônicas, representa o instante de maior sollicitação estrutural de um foguete de sondagem da classe do VS40.

## 6. REFERÊNCIAS

- Azevedo, J. L. F. et al., 1996, "Distribuições de Pressão para Segmento Superior do VS-40/PT-02", Nota Técnica NT-115/ASE-N/96, CTA/IAE, São José dos Campos-SP, Brasil, Ago 96
- Boscov, J., 1995, "Les Fusées Sondes pour le Programme Spatial Bresilien", 12<sup>th</sup> ESA Symposium on Rocket and Balloon Programs & Related Research, Lillehamer, Norway, 458p.
- Boscov, J. , Moraes, P. Jr., et al., 1990, "Development Status of the Brazilian VLS Satellite Launcher Program", 17<sup>th</sup> International Symposium on Space Technology and Science, Tokyo, Japan.
- Eleutheriadis, A., 1996, "VS-40/PT-02. Plano de Medidas em Vôo", Nota Técnica NT-119/ASE-N/96, CTA/IAE, São José dos Campos-SP, Brasil, Out 96
- NASA, NOAA, USAF, 1976, "U.S. Standard Atmosphere, 1976", NASA, Washington, EUA
- Siqueira, A. J. A., 1998, "Calibração de Transdutores de Pressão", Procedimento Interno PI/FCM-7025, CTA/IFI, São José dos Campos-SP, Brasil, Out 96

# AVALIAÇÃO DE PARÂMETROS FÍSICOS DE MEIOS POROSOS RÍGIDOS EFETIVOS

**Emerson Freitas Jaguaribe**

**Marcos Antonio Ramos Andrade**

Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Tecnologia Mecânica, Centro de Tecnologia, Campus I da UFPB, 58059-900, Paraíba, PB, Brasil. E-mail: ejaguaribe@uol.com.br e marandrade@bol.com.br

## Resumo

Neste trabalho o escoamento em um meio poroso unidimensional foi associado ao de um fluxo através de uma vena contracta. Equacionando, ainda, a perda de carga em termos da energia cinética, e em função do comprimento longitudinal do meio poroso, foi possível compor um sistema formado por três equações. O modelo foi aplicado a situações onde a porosidade média efetiva era conhecida ( $\epsilon = 0,436$ ), para as amostras formadas por tubos capilares de vidro. Os dados numéricos advindos dos experimentos serviram para complementar a formulação do modelo, “Andrade (1999)”, que passou a ter o caráter semi-empírico. O modelo completo foi também empregado para determinar parâmetros físicos de um meio constituído de carvão vegetal. Comentários pertinentes aos resultados desta aplicação estão incorporados a este trabalho.

**Palavras-chave:** Meios porosos, Vena contracta, Parâmetros físicos.

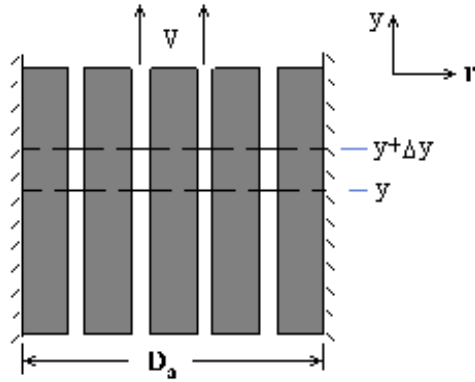
## 1. INTRODUÇÃO

De uma maneira geral, entende-se por meio poroso, um corpo formado por uma complexa rede de poros, passagens e fissuras através dos quais um fluido poderá escoar. É óbvio, que apenas os poros interligados, que vão de uma interface a outra, participam desse escoamento.

Sabemos que existem à disposição de engenheiros, químicos e outros usuários, métodos e teorias para determinação da área superficial de sólidos. O método BET “Brunauer et al.(1938)”, bem como porosímetros de mercúrio são exemplos destes recursos. Entretanto, para se avaliar a porosidade contínua ou efetiva de um meio, isto é, aquela que conecta duas interfaces distintas, fica-se a depender do empirismo. Este trabalho de caráter teórico-experimental, tem por objetivo maior discutir com o detalhe necessário, uma forma de identificar a porosidade efetiva de materiais porosos. Particularmente, a natureza dos materiais aqui discutidos foram o vidro, dos tubos capilares, que constituíram um dos meios, e o carvão vegetal, embora a técnica e o modelo proposto possam ser aplicados a outros materiais.

## 2. MODELO PROPOSTO

Dada a grande complexidade em relação ao estudo de leitos porosos, utilizamos, como uma primeira simplificação, o modelo unidimensional “Sissom et al.(1979)”, formado por tubos capilares uniformemente distribuídos, tal como é mostrado na **Figura 1**.



**Figura 1.** Leito formado por tubos capilares uniformemente distribuídos

Em termos de parâmetros do modelo unidimensional, a equação de *Darcy-Weisbach* é dado por:

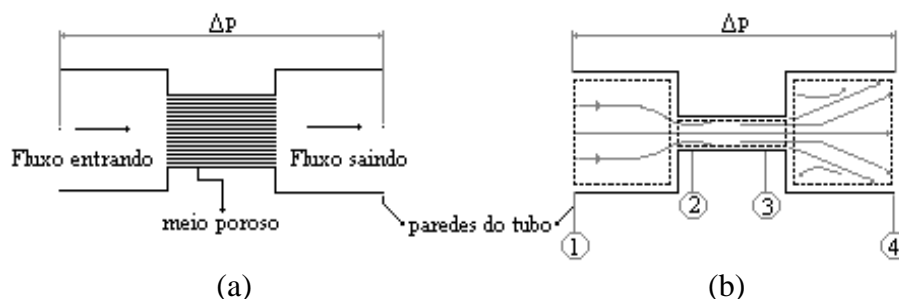
$$\Delta p = f \frac{8 ha}{di^5} \frac{\rho Q^2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}}{np^2 \pi^2} \quad (1)$$

Onde  $\Delta p$  é o diferencial de pressão, em Pascal (Pa),  $f$  o fator de atrito,  $ha$  a altura da amostra,  $di$  o diâmetro de um veio capilar,  $\rho$  a massa específica do fluido,  $Q$  a vazão,  $\varepsilon$  a porosidade efetiva e  $np$  o número de veios capilares.

Considerando a Eq. (1), observa-se que mesmo determinando-se experimentalmente  $\Delta p$  e  $Q$ , e conhecendo-se  $\rho$ ,  $ha$  e o diâmetro da amostra  $Da$ , três parâmetros,  $np$ ,  $f$ , e  $\varepsilon$ , restam a ser determinados, e portanto duas outras equações tornam-se necessárias.

## 2.1 Determinação das Três Incógnitas

Na determinação das três incógnitas, “Andrade (1999)”, imaginou um meio poroso de altura  $ha$ , obstruindo parcialmente a passagem de um fluxo  $Q$ , de um fluido de massa específica  $\rho$ , que chega através de uma tubulação de diâmetro  $Di$ , causando uma queda de pressão  $\Delta p$ . Associando ainda, a queda de pressão causada pelo meio, a de uma vena contracta, ou seja, pela existência, em um escoamento, de uma contração seguida de uma expansão, como mostra a **Figura 2.** (a) e (b).



**Figura 2.** (a) Representação de um meio poroso obliterando um escoamento; (b) Representação gráfica de uma vena contracta, bem como os volumes de controle correspondentes as seções 1-2, 2-3 e 3-4.

A composição desta idéia lança mão do diâmetro equivalente,  $Di$ , do cilindro vazio contendo todos os veios contínuos agrupados, é definido da seguinte forma:

$$Di^2 = \varepsilon Da^2 \quad (2)$$

## 2.2 Determinação da Segunda Equação

A segunda equação necessária a solução do problema em questão é conseguida aplicando-se as equações da quantidade de movimento linear, da energia e da continuidade aos volumes de controle ilustrados na **Figura 2** (b), considerando-se o escoamento estacionário de um fluido incompressível, e desprezando-se as tensões de cisalhamento ao longo dos volumes de controle, nas seções 1-2, 2-3 e 3-4, chegamos as equações:

$$A_3^2 (A_1 - \xi A_1 A_2^2 - 2 A_2) + (\xi A_1 A_2^3 + 2 A_2^2) A_3 - A_1 A_2^2 = 0 \quad (3)$$

onde  $\xi = \frac{2 g h_t}{Q^2}$

e

$$A_3^2 (\lambda A_2^2 - 2 A_2^2 + 2 A_1 A_2 - A_1^2) + (2 A_1 A_2^2) A_3 - A_1^2 A_2^2 = 0 \quad (4)$$

onde  $\lambda = \frac{2 g h_t}{Q^2} A_1^2$ .

Sabendo que  $h_3 \ll h_2$ ,  $h_3 \ll h_4$ , e portanto  $h_t = h_2 + h_4$ .

Sendo  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , as áreas das seções transversais e  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $h_4$ , as perdas de carga, em metro (m). Tanto as áreas quanto as perdas de carga são correspondentes as seções 1-2, 2-3 e 3-4 respectivamente e  $h_t$  a perda de carga total.

De posse das equações (3) e (4), podemos facilmente determinar a área total de poros  $A_3$ . A fração de vazios ou porosidade total  $\varepsilon$ , é calculado da seguinte forma

$$\varepsilon = \frac{A_3}{A_a} \quad (5)$$

sendo  $A_a$ , a área da seção transversal da amostra cilíndrica.

## 2.3 Determinação do Fator de Atrito

De uma maneira geral considera-se que as perdas de carga em um duto, podem ser dadas em função da energia cinética. O mesmo ocorre quando se busca perdas de carga envolvendo contrações e expansões em dutos. Procurando desenvolver uma formulação que fosse expressa também em termos de  $ha$ , chegou-se a

$$\frac{\Delta p}{\rho g ha} = \alpha \left( \frac{A_3}{A_i} - 1 \right)^\beta \frac{V^2}{2 g di} \quad (6)$$

onde  $\beta$  é uma constante a ser avaliada. Sendo  $A_3 = np \cdot A_i$ , a Eq. (6), resulta

$$\frac{\Delta p}{ha} = \alpha (np - 1)^\beta \frac{V^2}{2 di} \rho \quad (7)$$

onde  $\alpha$  é o fator de correção e  $A_i$  a área da seção transversal de um veio capilar.

Comparando a Eq. (7) com a de *Darcy-Weisbach*, podemos concluir que o fator de atrito será dado por

$$f = \alpha (np - 1)^\beta \quad (8)$$

## 2.4 Determinação da Terceira Equação

Sabendo que,  $V_\infty = \varepsilon V$ , sendo  $V_\infty$  a velocidade superficial do fluido e  $V$  a velocidade média, que  $np di^2 = \varepsilon Da^2$  e com o auxílio da Eq. (8), a equação de *Darcy-Weisbach* gera:

$$np(np - 1)^{2\beta} - \left[ \frac{\pi^2 Da^5 \varepsilon^{\frac{5}{2}} \Delta p}{8 \alpha \rho Q^2 ha} \right]^2 = 0 \quad (9)$$

## 3. O EXPERIMENTO

### 3.1 Preparo das Amostras de Carvão Vegetal

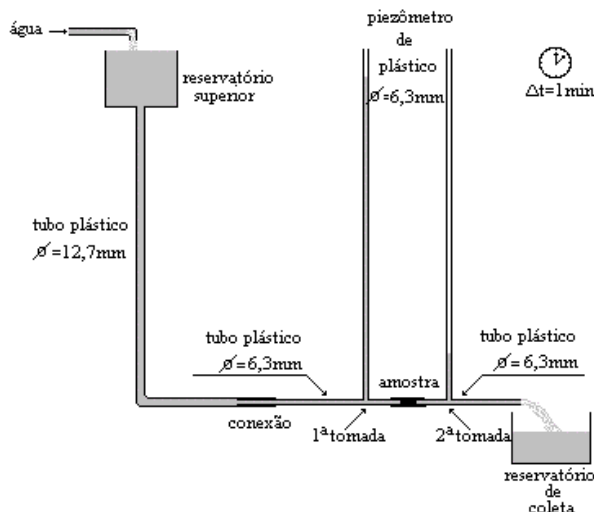
A madeira “açacur”, previamente escolhida, foi transformada em carvão vegetal, após ter sido colocada em um forno tubular rotativo, a uma temperatura de 400 °C, com uma taxa de aquecimento de 5 graus por minuto. O carvão vegetal obtido foi transformado em dois tipos de amostras cilíndricas com 7,5 mm e 15 mm de altura e 10 mm de diâmetro.

### 3.2 Preparo das Amostras de Tubos Capilares de Vidro

Para a confecção dessas amostras empregou-se tubos capilares de vidro transparentes, com 1,1 mm de diâmetro interno e 1,5 mm de diâmetro externo. Todas elas foram produzidas com 18 tubos de mesmo comprimento, agrupados com o auxílio de uma fita veda rosca. Foram preparadas três tipos de amostras, que se distinguiam pela altura ou comprimento dos tubos, sendo estas alturas iguais a: 7,5 mm, 15 mm e 30 mm.

### 3.3 Experiência Realizada

Neste experimento, de acordo com a **Figura 3.**, utilizamos um reservatório situado na laje superior do Laboratório de Termoenergética, gerando uma altura de coluna d’água de 7,95 m, mantida constante através de um fluxo de água proveniente da rede de abastecimento. Este, por sua vez, foi interligado, através de tubos plásticos, a um piezômetro. Sendo o diferencial de pressão  $\Delta p$ , produzidos pelas diversas amostras, determinado pela diferença entre a primeira tomada de pressão do piezômetro, antes da amostra de carvão e a segunda tomada, após o fluido ter percolado a amostra. Passada a segunda tomada, um outro reservatório faria a coleta do líquido escoado.



**Figura 3.** Desenho esquemático do experimento realizado ao ar livre

## 4. RESULTADOS

### 4.1 Amostras com Tubos Capilares de Vidro

Levando em conta os valores de vazões  $Q$ , e de quedas de pressão obtidas através dos experimentos, considerando os diâmetros das amostras de tubos capilares igual a 6,3 mm, a Eq. (5), e com o auxílio do programa Mathcad 8.0, para resolver o sistema formado pelas Eqs. (3) e (4), nos foi possível determinar os valores da porosidade efetiva,  $\varepsilon$ , nos três casos examinados, conforme **Tabela 1**, primeira coluna. O valor determinado teoricamente foi de  $\varepsilon = 0,436$ .

**Tabela 1.** Parâmetros físicos de meios formados por tubos capilares de vidro.

	$\varepsilon$	$\alpha$	$hh(\text{m})$	$f$	$d_i (\text{m})$	$Re'/(1-\varepsilon)$
ha = 7,5 mm	0,433	0,03481	5,295	0,086	$651,5 \times 10^{-6}$	$12,10 \times 10^3$
ha = 15 mm	0,42	0,01795	5,480	0,045	$643,2 \times 10^{-6}$	$11,67 \times 10^3$
ha = 30 mm	0,361	0,01044	6,050	0,026	$581,4 \times 10^{-6}$	$9,259 \times 10^3$

### 4.2 Determinação do Parâmetro $\alpha$

Observando a Eq. (9) verifica-se que o parâmetro  $\alpha$  será determinado caso se conheça  $\beta$ . De fato,  $\beta$  é praticamente um valor arbitrário, e o valor aqui escolhido foi  $\frac{1}{4}$ . Deste modo, chegou-se aos seguintes valores de  $\alpha$ , para os casos examinados, relacionados na segunda coluna, **Tabela 1**.

Levando-se em conta, outra vez a Eq. (9) e observando o comportamento de  $\alpha$ , em função de  $ha$  e da altura de carga na primeira tomada,  $hh$ , pode-se reescrever esta última equação de uma forma mais geral, resultando

$$np(np-1)^{0.5} = 3,648 \cdot 10^4 \left[ \frac{Da^5 \varepsilon^{\frac{5}{2}} \Delta p G(ha)}{\rho Q^2 hh ha} \right]^2 \quad (10)$$

onde

$$G(ha) = 120,3 ha^{0,979} \quad (11)$$

$$\alpha = 6,4797 \cdot 10^{-3} \frac{hh}{G(ha)} \quad (12)$$

#### 4.3 Avaliação dos Números de Reynolds Modificados Divididos por (1-ε)

Os números de Reynolds modificados “Ergun (1952)”, divididos por (1-ε), nos possibilita a classificar o regime de escoamento que ocorre em cada um dos casos acima referidos.

Fazendo uso da Eq. (5), e já havendo avaliado a porosidade efetiva, se determina os valores dos diâmetros internos capilares dos veios contínuos, que formam o meio poroso. Estes valores são apresentados na **Tabela 1**, quinta coluna.

A equação que calcula o número de *Reynolds* modificado em função da vazão é dada por

$$Re'' = \frac{\rho di Q}{\mu np Ai} \quad (13)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade absoluta do fluido. Substituindo os valores já calculados na Eq. (13), e dividindo o resultado por (1-ε), chega-se aos valores observados na **Tabela 1**, sexta coluna.

#### 4.4 Amostras de Carvão Vegetal

As tabelas abaixo nos mostra os resultados de alguns parâmetros físicos, obtidos utilizando-se amostras de carvão vegetal com alturas de 7,5 mm e 15 mm.

**Tabela 2.** Valores da porosidade efetiva ,ε, com ha=7,5 mm.

Amostra	A28	A25	A24	A23	A26	A30	A27	A22
1ª Medida	0,071	0,037	0,048	0,072	0,054	0,066	0,060	0,048
2ª Medida	0,071	0,039	0,049	0,072	0,054	0,066	0,060	0,046
3ª Medida	0,071	0,037	0,049	0,072	0,053	0,065	0,059	0,046

**Tabela 3.** Valores da porosidade efetiva, ε, com ha=15 mm.

Amostra	A21	A27	A44	A45	A40
1ª. Medida	0,061	0,060	0,054	0,046	0,042
2ª. Medida	0,063	0,063	0,054	0,046	0,042
3ª. Medida	0,062	0,063	0,053	0,045	0,042

**Tabela 4.** Quantidade  $np$ , de veios porosos efetivos na amostra de carvão,  $ha=7,5$  mm

Amostra	A28	A25	A24	A23	A26	A30	A27	A22
1ª Medida	17,239	11,484	13,586	14,934	14,478	16,800	15,676	13,593
2ª Medida	17,239	11,769	13,699	14,934	14,478	16,800	15,687	13,217
3ª Medida	17,209	11,513	13,828	14,848	14,421	16,763	15,656	13,169

**Tabela 5.** Quantidade  $np$  de veios porosos efetivos na amostra de carvão,  $ha=15$  mm.

Amostra	A21	A27	A44	A45	A40
1ª. Medida	13,437	13,33	14,316	12,842	12,237
2ª. Medida	15,64	15,763	14,282	12,842	12,237
3ª. Medida	15,605	15,822	14,167	12,779	12,237

**Tabela 6.** Fator de Atrito,  $f$ , para amostras de carvão com  $ha=7,5$  mm.

Amostra	A28	A25	A24	A23	A26	A30	A27	A22
1ª. Medida	0,10	0,09	0,094	0,096	0,096	0,10	0,098	0,094
2ª. Medida	0,10	0,091	0,094	0,096	0,096	0,10	0,098	0,094
3ª. Medida	0,10	0,091	0,095	0,096	0,096	0,099	0,098	0,094

**Tabela 7.** Fator de Atrito,  $f$ , para amostras de carvão com  $ha=15$  mm.

Amostra	A21	A27	A44	A45	A40
1ª. Medida	0,048	0,047	0,048	0,047	0,047
2ª. Medida	0,050	0,050	0,048	0,047	0,047
3ª. Medida	0,050	0,050	0,048	0,047	0,047

**Tabela 8.** Número de Reynolds modificado dividido por  $(1-\epsilon)$ , com  $ha=7,5$  mm.

Amostra	A28	A25	A24	A23	A26	A30	A27	A22
1ª Medida	$4,113 \times 10^3$	$3,525 \times 10^3$	$3,712 \times 10^3$	$4,753 \times 10^3$	$3,829 \times 10^3$	$3,962 \times 10^3$	$3,887 \times 10^3$	$3,711 \times 10^3$
2ª Medida	$4,113 \times 10^3$	$3,548 \times 10^3$	$3,725 \times 10^3$	$4,753 \times 10^3$	$3,829 \times 10^3$	$3,962 \times 10^3$	$3,885 \times 10^3$	$3,668 \times 10^3$
3ª Medida	$4,110 \times 10^3$	$3,519 \times 10^3$	$3,73 \times 10^3$	$4,753 \times 10^3$	$3,823 \times 10^3$	$3,941 \times 10^3$	$3,876 \times 10^3$	$3,620 \times 10^3$

**Tabela 9.** Número de Reynolds modificado dividido por  $(1-\epsilon)$ , com  $ha=15$  mm

Amostra	A21	A27	A44	A45	A40
1ª. Medida	$4,509 \times 10^3$	$4,462 \times 10^3$	$3,833 \times 10^3$	$3,728 \times 10^3$	$3,654 \times 10^3$
2ª. Medida	$4,012 \times 10^3$	$4,003 \times 10^3$	$3,838 \times 10^3$	$3,728 \times 10^3$	$3,654 \times 10^3$
3ª. Medida	$4,004 \times 10^3$	$3,980 \times 10^3$	$3,812 \times 10^3$	$3,706 \times 10^3$	$3,654 \times 10^3$

## 5. ANÁLISE DE RESULTADOS

Ao considerarmos os valores que aparecem na **Tabela 1**, constata-se que as magnitudes das porosidades, de uma forma geral e sobretudo para alturas de amostra formadas por tubos capilares iguais a 7,5 mm e 15 mm, se identificam, com aquele determinado de forma teórica



( $\varepsilon = 0,436$ ). Basta verificar que quando a  $ha < 30$  mm, a diferença entre os resultados, na pior das hipóteses, atinge apenas 3,8%. Observa-se, ainda, que houve um crescimento no percentual das razões entre os valores fornecidos pelo modelo, e o teórico, o que nos pareceu lógico, uma vez que na prática, o crescimento da altura dos tubos capilares é traduzido em resistência ao escoamento, e portanto, pode ser interpretado como uma redução da porosidade efetiva.

Vimos que o conhecimento da porosidade efetiva não garante a determinação, por exemplo, do diâmetro do veio capilar da amostra, uma vez que tal elemento, no presente modelo, é função do parâmetro  $\alpha$ . Graças, todavia, ao conhecimento do número de capilares que formavam o meio composto por tubos de vidro, a **Tabela 1**, colunas 2 e 3, nos deixa antever a dependência deste parâmetro com relação a altura da amostra, bem como constatar que  $\alpha$  é uma função da altura de carga medida, na primeira tomada. Esta observação permitiu que o parâmetro  $\alpha$  fosse correlacionado com aquelas variáveis e conseqüentemente possibilitou que o número de veios capilares de um meio qualquer possa ser avaliado através da Eq. (10). Depreende-se, ainda, que  $\alpha$  é aproximadamente uma função linear de  $ha$ .

Examinando as **Tabelas 1**, colunas 2 e 4, **6** e **7** é possível notar que, tanto o valor do fator de correção,  $\alpha$ , bem como o fator de atrito,  $f$ , decrescem quase que linearmente com o aumento da altura da amostra, de acordo com a Eq. (8).

Observando as **Tabelas 1**, coluna 6, **8** e **9**, fica claro que o número de Reynolds modificado, calculado para amostras de tubos capilares é maior do que aquele que se origina quando a amostra é de carvão vegetal. E, como também já era esperado, o aumento da altura da amostra com tubos capilares de vidro, reduziu o valor do número de *Reynolds* modificado. Com relação as amostras de carvão, também pode-se observar uma certa tendência nesta diminuição, com o crescimento do tamanho da amostra, mas tendo em vista a complexidade do arranjo poroso e das reais diferenças entre elas, mesmo quando feita da mesma madeira, esta tendência, nestes casos examinados, nem sempre foi confirmada. Examinando as **Tabelas 2** e **3**, percebemos que as amostras de carvão com alturas de 7,5 mm e 15 mm, possuem mesma ordem de porosidade. É óbvio que à medida que a altura da amostra cresce, torna-se incontestável a redução da vazão através da mesma, causado pela diminuição do número de veios porosos efetivos,  $np$ , a ponto de não ter sido possível trabalhar com amostras de carvão com 30 mm de altura. Vê-se ainda que, para todas as amostras, o número de *Reynolds* modificado “Ergun (1952)”, dividido por  $(1-\varepsilon)$ , definiu os escoamentos como altamente turbulento.

Verifica-se, outrossim, que a maior quantidade de veios porosos efetivos entre as amostras de carvão ocorreu naquelas com alturas iguais a 7,5 mm, embora, de uma forma geral, o número médio de poros tenha sido parecido para as duas alturas. Constatou-se, também, que o carvão fabricado e trabalhado nesta pesquisa apresenta pequena quantidade de poros contínuos.

## 6. CONCLUSÃO

A porosidade efetiva, calculada geometricamente, não espelha a realidade física do escoamento, uma vez que ela é fixa. Na prática, como vimos, ela deve variar.

A porosidade efetiva foi determinada por meios analíticos. O experimento nos deu condições de mostrar a validade do modelo proposto.

Verificou-se que os valores do fator de atrito para os meios porosos rígidos, são diferentes daqueles indicados para os meios porosos granulares, para os mesmos regimes.

Constatamos, ao cabo deste trabalho, que é possível a determinação, de forma mais analítica, de parâmetros físicos de meios porosos rígidos efetivos.

## **7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Andrade, M. A. R., 1999, “Estudo Teórico-Experimental de Parâmetros Físicos de Meios Porosos Rígidos Efetivos”. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, Brasil, 61p.
- Brunauer, S., Emmett, P. H. and Teller, E., *J. Am. Chem. Soc.*, **60** (1938)309.
- Ergun, S., 1952, “Fluid Flow Through Packed Columns”, *Chemical Engineering Progress*, 48, 2, pp 89-94.
- Sissom, L. E., Pitts, D. R., 1979 “Fenômenos de Transporte”, Ed. Guanabara Dois S. A., Rio de Janeiro, Brasil, 765p.

## A MODIFIED LOGARITHMIC LAW FOR FLOWS OVER LOW HILLS UNDER NEUTRAL ATMOSPHERE

**Cláudio C. Pellegrini**

FUNREI – Departamento de Ciências Térmicas e dos Fluidos

Praça Frei Orlando 170, São João del-Rei, MG, 36.300-000. E-mail: [pelle@serv.com.ufrj.br](mailto:pelle@serv.com.ufrj.br)

**Gustavo C. R. Bodstein**

COPPE/UFRJ – Departamento de Engenharia Mecânica

C.P. 68503, 21.945-970, Rio de Janeiro, RJ. E-mail: [gustavo@serv.com.ufrj.br](mailto:gustavo@serv.com.ufrj.br)

### **Abstract**

In this work, a new modified logarithmic law for flows over 2D hills under neutral atmosphere is proposed. A simplified form of the averaged x-momentum equation is solved using a mixing length turbulence closure. The solution is expressed in the form of a power series correction to the classic logarithmic law, valid for the flat terrain case. As a result of the use of streamline co-ordinates, a new flow parameter appears: the *radius length* of the hill, which is shown to be a function of the hill's geometry. Results for the speed-up are compared with a small set of 'control' field data and agreement is considered to be rather good.

**Key-words:** flow over hills, logarithmic law, atmospheric boundary layer.

### **1. INTRODUCTION**

The ability to predict the atmospheric boundary layer (ABL) flow over hills has long been of great interest to meteorologists, environmentalists and engineers, among others. To meteorologists, the main interest is probably the development of precise models to forecast weather and climate in large scale. Those models depend critically on some parameterisations adopted for the ABL. In particular, expressions like the logarithmic law, valid for flow over flat terrain, are widely used as a lower boundary condition in those models. The reason is to avoid the integration to be carried out all the way down to the surface, where strong velocity gradients would demand great refining of the computational mesh, making computation slower.

The first description of the vertical wind profile at the ABL over a hill was probably due to Jackson and Hunt (1975). Their linear theory divides the flow field in three regions and provides specific wind profiles for each one of them. Their expressions are, however, not easy to use. The logarithmic law, on the other hand, was always known to represent well the atmospheric flow over flat terrain, under neutral atmosphere and ignoring changes in the wind direction. Panofsky (1973) shows that the logarithmic law remains valid through the lower 150 m of the atmosphere under neutral conditions. Even in the case of very rough surfaces (say for  $z_0 > 0.1$  m), with individual roughness elements close enough, the velocity profile can still be correctly represented if we displace the origin by  $d$ . This success suggests that the logarithmic law may be extended to flows over hills.

Few attempts to extend the logarithmic law for flows over hills can be found in the literature. Finnigan (1992) assumes the existence of buoyancy-curvature and acceleration-curvature analogies and obtains a modified logarithmic law, which depends on the curvature Richardson number,  $R_c$ , and on the curvature of the  $z$ -axis (in streamline co-ordinates),  $L_a$ . His results were compared to a restricted set of observational data and were encouraging. The drawback of Finnigan's law is its dependence on  $L_a$  and  $R_c$ , which, in turn, depend on the horizontal velocity,  $u$ , forming thus an implicit equation. Another result was proposed by Taylor and Lee (1984) and revised by Walmsley et al. (1989) and by Weng et al. (to appear). It appears in the form of an empirical exponential damping of the maximum speed-up over the hilltop. The resulting expressions, however, depend crucially on the calculated value for the maximum speed-up.

In the present work, we propose a modified logarithmic law for the atmospheric flow over a low, 2D hill under neutral stratification conditions. As in the flat terrain case, our expression appears in the form of a flux-profile relationship, establishing a relation between the vertical velocity profile and the momentum flux at the surface. The associated flux-gradient relation and expressions for the velocity speed-up are also derived. The result for the vertical speed-up profile is compared with field data from the Askervein hill (Taylor and Teunissen, 1983 and 1985).

## 2. DEFINITION OF THE PROBLEM

Consider an isolated 2D hill in the middle of an otherwise flat terrain, of constant roughness and under a neutrally stratified atmosphere. For our purposes, we consider a hill to be a topographical variation with characteristic length about 5 Km and height less than 500m. A hill is called low when its slope never exceeds  $20^\circ$ . Fig. 1 illustrates the main features of a typical low hill. The vertical co-ordinate  $z$  is defined as the height above the local terrain, rather than the vertical height above sea level. For the cases of very large roughness elements,  $z$  is considered to be the displaced height above the local terrain.

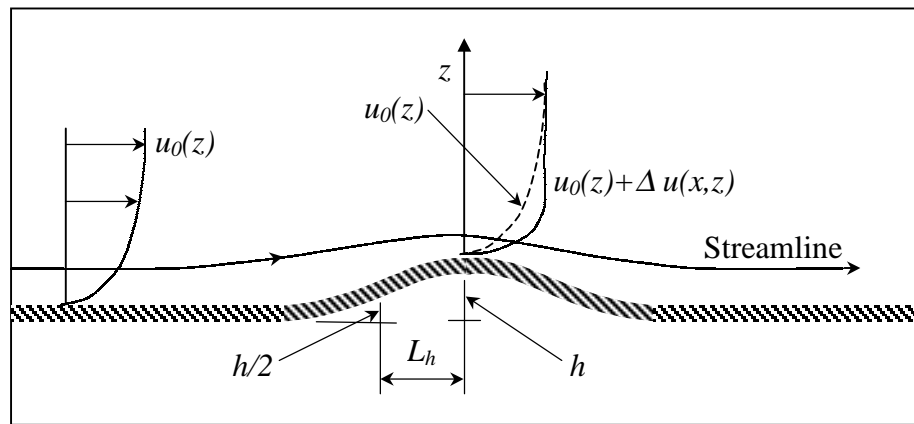


Fig.1. Definitions of  $h$ ,  $L_h$ ,  $\Delta u$ ,  $u_0$  and  $z$ .

In the case under study, we assume that the vertical profile of the mean horizontal wind is essentially logarithmic far from the hill. Hereafter, we refer to this profile as  $\bar{u}_0(z)$ , and the location upwind of the hilltop (HT) where it is found as the reference site (RS). The RS profile suffers the influence of the hill in such a way that it is modified by a speed-up quantity  $\Delta\bar{u}(x, z)$  and becomes  $\bar{u}(x, z)$  at a given point over the hill. Thus, we have

$\bar{u}(x, z) \equiv \bar{u}_0(z) + \Delta\bar{u}(x, z)$ , where  $\Delta\bar{u}$  is positive at HT, because the flow is accelerated to satisfy the continuity equation. If we divide the speed-up by the RS velocity, we have the relative speed-up,  $\Delta S(x, z) \equiv \bar{u}(x, z)/\bar{u}_0(x, z) - 1$ .

Many researchers over the last two decades focused their attention on obtaining the vertical profiles of  $\Delta\bar{u}$  and  $\Delta S$  and on calculating the maximum value of  $\Delta S$ , called  $\Delta S_{\max}$ , and the height of maximum  $\Delta\bar{u}$ , called  $l$ . The series of publications known as the *Guidelines project*, (Taylor and Lee, 1984; Walmsley et al., 1989 and Weng et al., to appear) present a very successful way of estimating  $\Delta S_{\max}$ .

### 3. SIMPLIFIED SOLUTION FOR THE GOVERNING EQUATIONS

First, we shall choose an appropriate co-ordinate system. Kaimal and Finnigan (1994) recommend the use of streamline co-ordinates for distorted flows of this type. The most convenient consequence of adopting streamline co-ordinates is the fact that the wind components in the directions perpendicular to the streamline vanish. Finnigan (1983) gives the  $x$ -momentum turbulent equation, for 2D stationary flow in this system as

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z} + \frac{\bar{u}^2 - \bar{w}^2}{L_a} + 2 \frac{\bar{u}'w'}{R} - g_x \frac{\bar{T}}{\bar{T}_0} + V_x. \quad (1)$$

In eq. (1),  $x$  is the direction parallel to the streamlines and  $\bar{u}$  and  $u'$  are the mean and turbulent velocities in this direction, respectively. The direction normal to the streamlines is  $z$ , and  $\bar{w}$  and  $w'$  are the corresponding velocities. The thermodynamic mean pressure is denoted by  $\bar{p}$ , the mean density by  $\bar{\rho}$ , the mean temperature by  $\bar{T}$ , the reference mean temperature by  $\bar{T}_0$ , the  $x$ -component gravity acceleration by  $g_x$  and the  $x$ -component mean viscous force by  $V_x$ .  $R$  and  $L_a$  are flow length scales and they are related to the mean variables through  $R = \bar{u}/(\Omega + \partial\bar{u}/\partial z)$  and  $L_a = \bar{u}/(\partial\bar{u}/\partial z)$ , where  $\Omega$  is the mean vorticity component in the  $z$  direction, expressed in the original Cartesian co-ordinate system.

The first simplification of interest to be done on eq. (1) is a boundary layer order-of-magnitude analysis. The classic assumptions are:  $u' \sim w'$ ,  $\bar{u} \gg u'$ ,  $\bar{w} \gg w'$  and  $\partial(\ )/\partial x \ll \partial(\ )/\partial z$ . As a result,  $(\bar{u}^2 - \bar{w}^2)/L_a = (\bar{u}^2 - \bar{w}^2)(1/\bar{u})\partial\bar{u}/\partial x \ll \bar{u}\partial\bar{u}/\partial x$  and  $\partial\bar{u}'w'/\partial z \gg \partial\bar{u}'w'/\partial x$ . If we neglect buoyancy and viscous effects and assume a statically neutral atmosphere, eq. (1) reduces to

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z} + 2 \frac{\bar{u}'w'}{R}. \quad (2)$$

The second step in the simplification of the  $x$ -momentum equation comes from an order of magnitude analysis of the remaining terms as we approach the surface. Initially, turbulence and curvature are smaller than inertia and pressure because of the presence of the turbulence quantities.  $R$ , also makes the curvature term vanishingly small as we move away from the surface to regions of undisturbed flow. As  $z \rightarrow 0$ , the inertia and pressure terms keep their orders, but turbulence and curvature grow larger because of  $\partial z$  and  $R$  at the denominators, respectively. Therefore, we assume that there exists a region close to the surface where inertia and pressure can be neglected, and eq. (2) becomes

$$\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = 2 \frac{\overline{u'w'}}{R}. \quad (3)$$

We observe that as  $z \rightarrow 0$ , the turbulent term grows unbounded whereas the curvature tends to a limit as the local radius of curvature,  $R$ , tends to its surface value,  $R_h$ . We can infer that close enough to the ground turbulence must dominate curvature. Therefore, there seems to be a region where turbulence and curvature effects balance.

Let us now suppose that the region we are studying is close enough to the surface so that  $R(x, z) \approx R_h(x)$ . Equation (3) can then be rewritten as

$$\partial \phi / \partial z - p(x) \phi = 0, \quad (4)$$

where  $\phi(x, z) = \overline{-u'w'}$  and  $p(x) = 2/R_h$ . In this form, we notice it is the classic linear first-order differential equation. Multiplying both sides by the integrating factor  $\exp(-\int pdz)$  and integrating in  $z$ , we obtain

$$\phi = C_1(x) e^{2z/R_h}. \quad (5)$$

If we assume that turbulence can be appropriately represented by the mixing length theory with the mixing length  $l_m = kz$ , where  $k$  is von Karman's constant, we have

$$\left( kz \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 = C_1(x) e^{2z/R_h}, \quad (6)$$

Equation (6) is separable in  $\bar{u}$ , and can thus be integrated. The resulting integral can be found in integral tables and reads

$$\bar{u} = \frac{\sqrt{C_1}}{k} \left[ \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z/R_h)^n}{n \cdot n!} \right] + C_2(x), \quad (7)$$

where the power series converges for any  $z$  in the interval  $[-\infty, +\infty]$ .  $C_2$  may be obtained assuming that  $u=0$  at  $z=z_0$ , as in the flat terrain case. In order to obtain  $C_1$ , we rewrite eq. (6) in the form  $-\overline{u'w'} = C_1(x) e^{2z/R_h}$ , and suppose that the turbulent flux of momentum does not vary much in the region. So,  $-\overline{u'w'}(x, z) = -\overline{u'w'}(z_0, x) = u_*^2$ , where the friction velocity,  $u_*$ , is defined as  $u_* = (\tau_s / \rho)^{1/2}$ , with  $\tau_s$  the surface stress. Therefore, we have  $u_*^2 = C_1(x) e^{2z/R_h}$  in the region and, supposing that this expression is valid at  $z=z_0$ , we have  $u_*^2 = C_1(x) e^{2z_0/R_h} \approx C_1(x)$ , because  $z_0 \ll R_h$ . Equation (7) can now be written

$$\bar{u} \approx \frac{u_*}{k} \left[ \ln \frac{z}{z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z/R_h)^n - (z_0/R_h)^n}{n \cdot n!} \right]. \quad (8)$$

This is the modified logarithmic law for flows over hills. We call it, hereafter, the *logarithmic-polynomial* law in analogy to the logarithmic linear law of the non-neutral flat case. Substituting equation (7) in the definitions for  $\Delta\bar{u}$  and  $\Delta S$ , we have

$$\Delta\bar{u} \approx \frac{u_* - u_{*0}}{k} \ln \frac{z}{z_0} + \frac{u_*}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z/R_h)^n - (z_0/R_h)^n}{n \cdot n!}, \quad (9)$$

$$\Delta S \approx \frac{u_*}{u_{*0}} \left[ 1 + \frac{1}{\ln(z/z_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z/R_h)^n - (z_0/R_h)^n}{n \cdot n!} \right] - 1. \quad (10)$$

It is easy to verify that expressions (8)—(10) reduce to their flat terrain forms when  $R_h \rightarrow \infty$ . In equations (9) and (10) we used the symbol  $u_{*0}$  to represent the friction velocity at RS. This calls attention to the fact that  $u_{*0} \neq u_*$  and suggests that equations (8)—(10) may be valid for the up and down-slopes as well as for the HT.

#### 4. COMPARISON WITH OBSERVATIONAL DATA

Comparison of eq. (8), (9) or (10) with field data depends on the parameters  $z_0$ ,  $\kappa$ ,  $u_*$  and  $R_h$ , which are not known *a priori* for the HT and the rest of the hill. As in the flat terrain case, they must be estimated before the logarithmic-polynomial law can be applied. The value of  $z_0$  is considered to be the same observed at the RS. A great number of cases investigated along the years suggest  $\kappa$  to lie between 0.35 and 0.41. A recent work by Frenzen and Voguel (1995) proposes that  $\kappa$ , in fact, varies with a roughness Reynolds number, defined as  $Re^* = u_* z_0 / \nu$ , with  $\nu$  the kinematic viscosity. They suggest an average value of  $\kappa = 0.39$  for common applications, valid for  $0.007 < z_0 < 0.087$  m, which we shall adopt here. The third parameter,  $u_*$  must be calculated from the observational data. Theoretically,  $R_h$  could be estimated from the topographical maps of the hill. We did this tentatively but the results were inconsistent. A different method was then employed. The procedure we used is described bellow. Following the method for the flat case, we define

$$Z = \ln(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (z/R_h)^n / n \cdot n! \quad \text{and} \quad Z_0 = \ln(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (z_0/R_h)^n / n \cdot n!, \quad (11)$$

so that the logarithmic-polynomial law, can be rewritten as

$$u \approx \frac{u_*}{\kappa} (Z - Z_0). \quad (12)$$

Equation (12) is linear in  $Z$ , with linear coefficient  $b = -(\kappa/u_*)Z_0$  and angular coefficient  $m = \kappa/u_*$ . Using the observational data available, a best fit could be performed to provide the values of  $b$  and  $m$ , if the value of  $R_h$  could be determined in advance.  $z_0$  could then be calculated through  $Z_0 = -b(u_*/\kappa)$  and eqs. (11), and  $u_*$  through  $u_* = \kappa/m$ , assuming  $\kappa = 0.39$ . Since  $R_h$  was still unknown, we carried out the best fit on the RS velocity profiles, where  $R_h \rightarrow \infty$  and, therefore,  $Z = \ln(z)$  and  $Z_0 = \ln(z_0)$  on eqs. (11). This analysis provided values for  $z_0 = \exp(Z_0) = \exp(-bu_*/\kappa)$  and for  $u_{*0} = \kappa/m$ . After that, we obtained,

by trail and error, a value for  $R_h$  that guaranteed at the same time the best fit to the HT velocity profiles and a value of  $z_0$  identical to the one at RS. With the calculated value of  $R_h$  we finally obtained  $u_* = \kappa / m$ .

The analysis we have just described was applied to seven wind profiles over the hill of Askervein. The profiles were directly scanned from the reference work of Mickle et al. (1988) (all available profiles were scanned). The Askervein results were chosen because they are believed to be the most complete field experiment to date (Kaimal and Finnigan, 1994) and they still represent a benchmark for such studies (Walmsley and Taylor, 1996).

Fig. 2 shows the results obtained for  $R_h$  as a function of  $L_h$  over the Askervein hill. As the incident wind direction varies, the half-length of the hill varies too. Therefore, different values of  $L_h$  are possible for the same hill. The first remarkable fact about  $R_h$  is that it is *at least one order of magnitude smaller than the radius of curvature of the hill,  $R_{h0}$* . This is exactly what happens with  $z_0$  and  $h_0$ . For this reason, we shall refer to  $R_h$  hereafter as the *radius length of the hill*, in analogy to the roughness length,  $z_0$ .

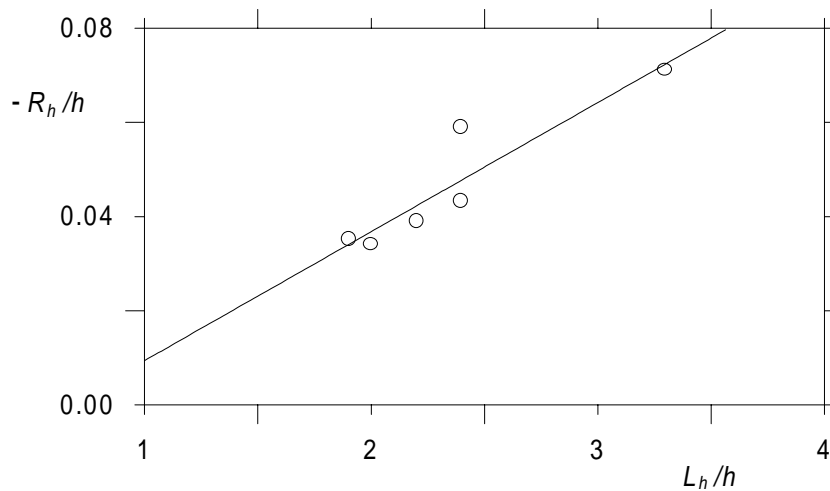


Fig.2. Non-dimensional radius length for the Askervein hill:  $\circ\circ\circ\circ$ : calculated; —: best fit

An initial analysis of the Askervein data showed it was possible to establish a one-to-one correspondence between  $R_h$  and  $R_{h0}$  (as with  $z_0$  and  $h_0$ ). Because  $R_{h0}$  is a function of the hill's geometry, it should thus be possible to obtain a correspondence between  $R_h$  and the hill's geometry through some appropriate set of non-dimensional parameters. In fact, a simplified analysis through the Buckingham  $\Pi$  theorem shows possible scaling variables to be  $R_h/h$  and  $L_h/h$ , for a given hill (where  $R_{h0}$  is fixed). Fig. 2 shows a plot of the relation between them, confirming (up to the range of data used) that  $R_h/h = f(L_h/h)$  indeed. Only one case was excluded from the plot of fig.2: run TU30-B, for wind direction  $130^\circ$ . The result seemed far out of the trend, indicated by the best-fit line, and we suspect this case to be anomalous due to the incident wind direction nearly parallel to the major axis of the hill. Therefore, no simple 2D modelling could appropriately describe the real flow for run TU30-B. At the subsequent comparisons, this case also showed poor agreement with observational data and a different trend from the remaining six cases.

Figs. (3.a) to (3.g) show a comparison between expression (10) and the Askervein data for the relative speed-up. On average, good agreement is observed. In all cases, rather good agreement is observed below 15 m. Cases (3.a), (3.e), (3.f) and (3.g) deviated from the field results less than 15% almost up to their higher measurement points. Cases (3.b), (3.c) and (3.d) showed poor agreement on higher altitudes. In cases (3.b) and (3.c) the problem appears



to be the non-logarithmic behaviour of the wind velocity at RS, as pointed out by the Mickle et al. (1988) who measured the profiles. In case (3.d), the discrepancy may be attributed to the occurrence of 3D effects in the flow, which are not taken into account in our 2D analysis.

The maximum height where predictions could be considered good seems to depend directly on the maximum height where the RS profile could still be considered logarithmic, as one would expect. All results showed some sensitivity to the calculated values of  $u_*$  and  $R_h$ , but almost no sensitivity to the choice of  $z_0$ . In all cases, the power series converged rather slowly. It was also observed that the number of terms necessary for convergence increased as  $z/R_h$  increased.

Good predictions were obtained for the maximum value of the speed-up. A detailed analysis of expression (10) has also shown that the maximum value of  $\Delta S$  occurs at  $z=z_0$ , as suspected by many field studies (e.g. Mickle et al., 1988).

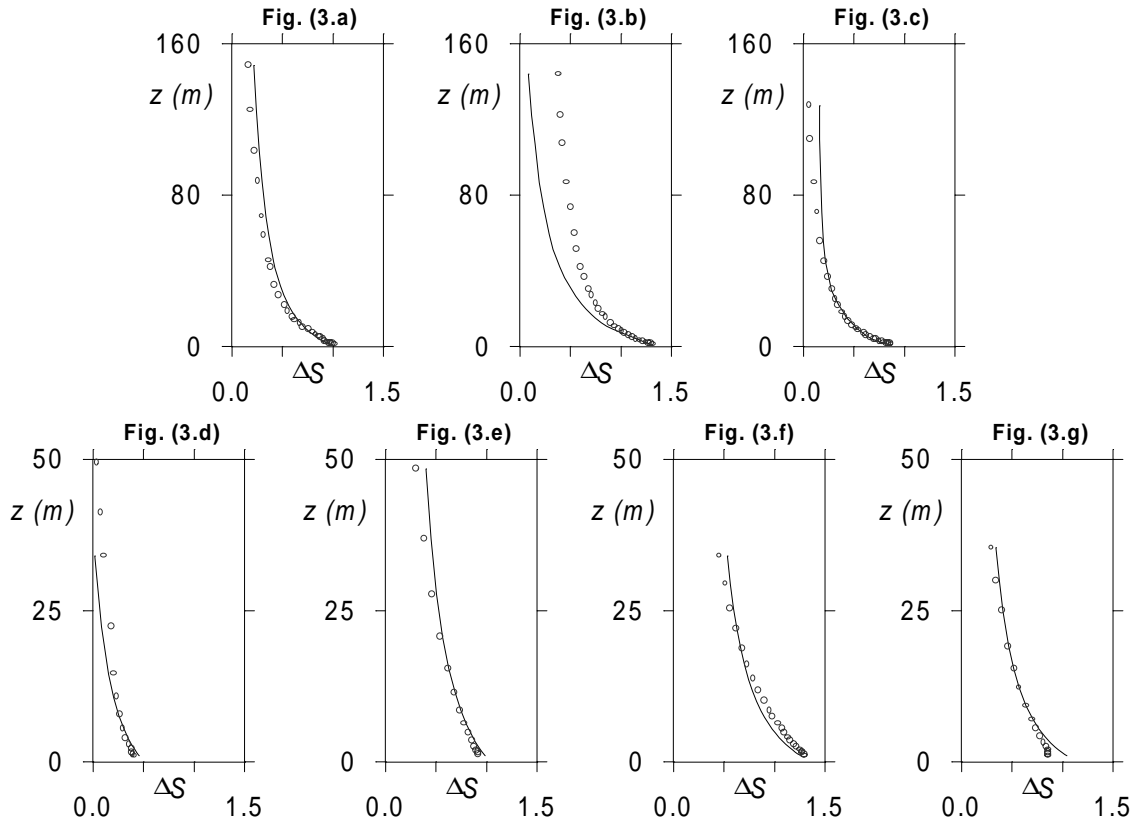


Fig. 3. Relative speed-up. Observation (Askervein hill):  $\circ\circ\circ\circ$ ; (2.a): run TK02-A, direction,  $\varphi=165^\circ$ ; (2.b): TK01-B,  $\varphi=180^\circ$ ; (2.c): TK07-B,  $\varphi=260^\circ$ ; (2.d): TU30-B,  $\varphi=130^\circ$ ; (2.e): TU01-B,  $\varphi=180^\circ$ ; (2.f): TU07-A,  $\varphi=210^\circ$ ; (2.g): TU05-B,  $\varphi=305^\circ$ ; Eq. (9): —.

## 5. SUMMARY AND CONCLUSIONS

In this work, we propose a new modified logarithmic law for flows over 2D low hills under neutral atmosphere. The results for the velocity profiles were found to depend on a new parameter: *the radius length*,  $R_h$ . In fact,  $R_h$  is expected to depend on the flow characteristics and on the hill's geometry, through parameters such as  $R_{h0}$  and  $L_h$ , for example. For a given fully-developed turbulent flow over a fixed hill, where there is no Reynolds number dependence and  $R_{h0}$  is fixed, we have shown that  $R_h$  is strongly dependent on  $L_h$ . However, more data analysis is needed to provide a general relationship among all these parameters. In

the future, we expect to be able to show that in the turbulent ABL,  $R_h$  can, in fact, be univocally related to the hill's geometry. This suggests that  $R_h$  might come to be tabulated once and for all as  $z_0$  is.

Comparison of expression (10) with observational data was performed and showed overall good agreement. More data analysis is needed to explain the poor agreement in cases (3.b), (3.c) and (3.d). In case (3.d), we believe that 3D effects may be important, since Askervein is an elliptical hill and in this run the flow is nearly aligned with its major axis. In cases (3.b) and (3.c) the problem appears to be the non-logarithmic behaviour of the RS profiles. The results are encouraging, but a more thorough analysis is needed.

## ACKNOWLEDGEMENTS

One of the authors would like to acknowledge the financial support from CNPq, through grant No. 143041/97-5 and FAPERJ, grant No. E-26/171.284/99.

## 6. REFERENCES

- Finnigan, J. J.: 1992, 'The logarithmic wind profile in complex terrain', CSIRO environmental mechanics technical report No. T44, CSIRO, Canberra, Australia, 69 pp.
- Finnigan, J. J.: 1983, 'A streamline co-ordinate system for distorted turbulent shear flows', *J. Fluid Mech.*, 130, 241—258.
- Frenzen, P. and Voguel, C. A.: 1995, 'On the magnitude and apparent range of variation of von Karman constant in the atmospheric surface layer', *Boundary Layer Meteorology*, 72, 371—392.
- Jackson, P. S. and Hunt, J. C. R.: 1975, 'Turbulent wind flow over a low hill', *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 106, 929—955.
- Kaimal, J. C. and Finnigan, J. J.: 1994, 'Atmospheric boundary layer flows: their structure and measurement', Oxford Univ. Press, New York, 289 pp.
- Panofsky, H. A.: 1973, 'Tower micrometeorology', Ch. 4 of the Workshop on micrometeorology, ed. D. A. Haugen, AMS, Boston, 151—176.
- Taylor, P. A., and Teunissen, H. W.: 1983, 'Askervein '82: an initial report on the September/October 1982 experiment to study boundary-layer flow over Askervein, South Uist, Scotland', Internal report MSRB—83—8, Atm. Environ. Service, Downsview, Ontario.
- Taylor, P. A., and Teunissen, H. W.: 1985, 'The Askervein hill project: report on the September/October 1983 main field experiment, Internal report MSRB—84—6, Atm. Environ. Service, Downsview, Ontario.
- Taylor, P. A. and Lee : 1984, 'Simple guidelines for estimating wind speed variations due to small scale topographic features', *Climatological bulletin*, 18(2), 3—22.
- Walmsley, J. L and Taylor, P. A.: 1996, 'Boundary layer flow over topography: impacts of the Askervein study', *Boundary Layer Meteorology*, 78, 291—320.
- Walmsley, J. L., Taylor, P.A. and Salmon, J. R.: 1989, 'Simple guidelines for estimating wind speed variations due to small scale topographic features—an update', *Climatological bulletin*, 23(1), 3—14.
- Weng, W., Taylor, P. A. and Walmsley, J. L.: to appear on the *J. Appl. Meteorol.*

# ON THE HEIGHT OF MAXIMUM SPEED-UP IN ATMOSPHERIC BOUNDARY LAYERS OVER LOW HILLS

**Cláudio C. Pellegrini**

FUNREI – Departamento de Ciências Térmicas e dos Fluidos

Praça Frei Orlando 170, São João del-Rei, MG, 36.300-000. E-mail: [pelle@serv.com.ufrj.br](mailto:pelle@serv.com.ufrj.br)

**Gustavo C. R. Bodstein**

COPPE/UFRJ – Departamento de Engenharia Mecânica

C.P. 68503, 21.945-970, Rio de Janeiro, RJ. E-mail: [gustavo@serv.com.ufrj.br](mailto:gustavo@serv.com.ufrj.br)

## Abstract

In this paper, we present a study on the height of maximum speed-up,  $l$ , for flows over low hills under neutral atmosphere. We consider the four most well known expressions to calculate  $l$ , due to Jackson and Hunt (JH), Jensen (JEN), Claussen (CL) and Beljaars and Taylor (BT). In the analysis, we present a formal demonstration of the fact that  $l$  can, in fact, be calculated as the inner layer depth, where inertia and turbulent forces balance. The need for such a demonstration has received little attention by researchers over the years. We also propose a new value for the constant in CL's expression and confirm that JEN's expression gives better results than JH's one. Regarding this fact, we suggest that JH's expression should definitively be substituted by JEN's or CL's with the proposed constant.

**Key-words:** inner-layer depth, maximum speed-up, flow over hills, atmospheric boundary layers.

## 1. INTRODUCTION

There has been a remarkable interest over the years on estimating the height above the ground where wind speed-up is a maximum in the atmospheric boundary layer (ABL) over low hills. The idea is strongly appealing for wind power specialists and for those who want to calculate wind loads on various kinds of structures.

Many expressions to calculate this height, often denoted by  $l$ , have been proposed since the idea appeared. The most well known expressions come from the pioneering work of Jackson and Hunt (1975) and from later works by Jensen et al., (1984) Claussen (1988) and Beljaars and Taylor (1989) (hereafter JH, JEN, CL and BT, respectively). The expressions obtained by these authors, respectively, read

$$(l/L_h)\ln(l/z_0) = 2\kappa^2, \quad (1)$$

$$(l/L_h)\ln^2(l/z_0) = 2\kappa^2, \quad (2)$$

$$(l/L_h)\ln(l/z_0) = \text{const.}, \quad (3)$$

$$(l/L_h)\ln^n(l/z_0) = \text{const.}, \quad (4)$$

where  $L_h$  is the half-length of the hill, defined following JH as ‘the distance from the hilltop to the upstream point where the elevation is half its maximum’;  $z_0$  is the roughness length and  $k$  is the von Karman’s constant, adopted as 0.39, as suggested by a recent work by Frenzen and Voguel (1995). A comparative study of the relative merits of the four expressions can be found in Walmsley and Taylor (1996). If we divide the four expressions by  $z_0$  and rewrite the constants in (3) and (4) as  $C_1 k^2$  and  $C_n k^2$ , respectively, we get:

$$l^+ \ln(l^+) = 2\kappa^2 L_h^+, \quad (5)$$

$$l^+ \ln^2(l^+) = 2\kappa^2 L_h^+, \quad (6)$$

$$l^+ \ln(l^+) = C_1 \kappa^2 L_h^+, \quad (7)$$

$$l^+ \ln^n(l^+) = C_n \kappa^2 L_h^+, \quad (8)$$

where  $l^+ \equiv l/z_0$  and  $L^+ \equiv L/z_0$ . Based on only one experimental result, CL suggests that  $C_1(x)k^2 = 0.09$ , which means that  $C_1 = 0.59$  for  $\kappa=0.39$ . After comparison with model results, BT suggests that  $n=1.4$  to  $1.6$ , depending on the turbulence closure assumed, and that  $C_n(x)\kappa^2 = 0.26$  to  $0.55$  (also depending on closure), which yields  $C_n = 3.62$  to  $1.71$ .

In his work, JH divides the ABL in two regions. In the first, more external region, the effects of inertia dominate and in the second, more internal, turbulent forces have to be considered too. In the same work, they identify  $l$  as the depth of the inner layer. Although this idea was adopted in most of the works that followed, none of the works we had access to demonstrate that  $l$ , calculated as the inner layer depth (where inertia and turbulent forces balance), was also the height of maximum speed-up (hereafter called  $l_{\max}$ , to avoid confusion). All works considered restricted themselves to verify that the field data for  $l_{\max}$  confirmed the proposed expressions for  $l$ . In a review paper, Taylor et al. (1987) state that ‘ $l$  is probably best considered as a scale height for the inner layer rather than the height at which something specific occurs.’ The authors, however, follow JH’s hypothesis and compared the results of their expression for  $l$  with field data for  $l_{\max}$ . In a more recent paper, Beljaars and Taylor (1989) say that ‘since the inner-layer depth,  $l$ , has been introduced by means of order of magnitude considerations, its practical definitions is somewhat arbitrary’. Apart from that, a lot of discussion is found in the literature about the relative merits of expressions (1)-(3). The following points were summarised from Walmsley and Taylor (1996):

- independent of which expression is used,  $l$  is always considered to be the height of maximum speed-up;
- values predicted by the JH expression are too high when compared to field results and no reasonable adjustment of  $z_0$  can fix the problem;
- values predicted by the JEN expression agree very well with observed values in the whole range of variation of  $L_h/z_0$ ;
- CL’s expression gives better agreement to observed values than JEN’s at the specific value of  $L_h/z_0$  with which it was calibrated;
- Model results suggest a value for  $n$  between 1 and 2 in the BT expression;
- More observational data is required to solve definitively the question.

In this work, we present a new deduction for the JEN’s expression obtained through slightly modified order of magnitude arguments applied to the hypothesis that  $l$  is the height where inertia and turbulence forces balance in the ABL. To our present knowledge, this

deduction is both new and simpler than the previous ones. We also present, for the first time, a formal demonstration that  $l$ , calculated this way is, in fact, the height of maximum speed-up. We compare our results to JH's, CL's and observational data showing that JEN's expression agrees better with observational data than JH's and that the constant in CL's expression can be calibrated to agree well with field data. We also ratify Walmsley and Taylor's conclusion that more observation is needed at some ranges of the parameter  $L_h/z_0$ .

## 2. DEFINITIONS

Consider one isolated 2D hill in the middle of an otherwise flat terrain, of constant roughness and under a neutrally stratified atmosphere. For our purposes, we consider a hill to be a topographical variation with characteristic length about 5 Km and height less than 500m. A hill is called low when its slope never exceeds  $20^\circ$ . Fig. 1 illustrates the main features of a typical low hill. The vertical co-ordinate  $z$ , is defined as the height above the local terrain rather than the vertical height above sea level.

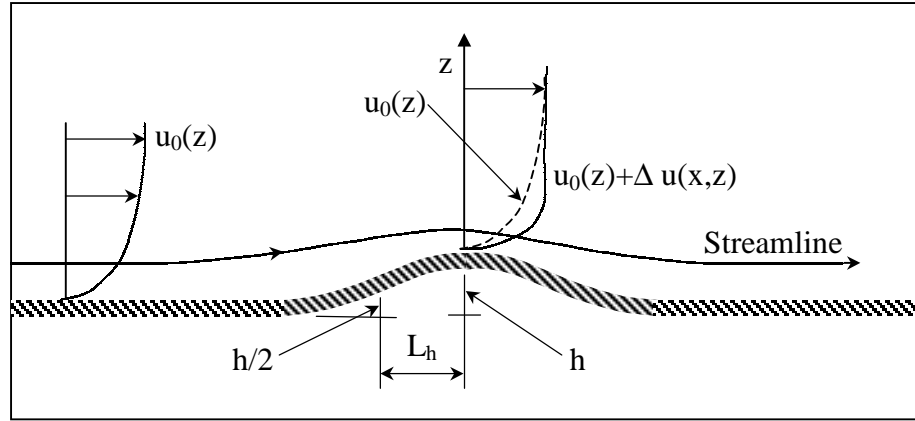


Fig.1. Definitions of  $h$ ,  $L_h$ ,  $\Delta u$ ,  $u_0$  and  $z$ .

In the case under study, we assume that the vertical profile of the horizontal mean wind is essentially logarithmic far from the hill. Hereafter we refer to this profile as  $\bar{u}_0(z)$ , and the location upwind of the hilltop (HT) where it is found as the reference site (RS). The RS profile suffers the influence of the hill in such a way that it is modified by a speed-up quantity  $\Delta\bar{u}(x, z)$  and becomes  $\bar{u}(x, z)$  at a given point over the hill. Thus:

$$\bar{u}(x, z) \equiv \bar{u}_0(z) + \Delta\bar{u}(x, z), \quad (9)$$

where  $\Delta u$  is positive at HT, because the flow is accelerated to satisfy the continuity equation. If we divide the speed-up by the RS velocity, we have the relative speed-up,  $\Delta S$ :

$$\Delta S(x, z) \equiv \frac{\bar{u}(x, z)}{\bar{u}_0(x, z)} - 1. \quad (10)$$

The height where  $\Delta\bar{u}$  is maximum,  $l_{\max}$ , is defined as

$$l_{\max} \equiv z(\Delta\bar{u} = \Delta\bar{u}_{\max}). \quad (11)$$

Conversely, we can write  $\Delta\bar{u}_{\max} \equiv \Delta\bar{u}(x, l_{\max})$ .

In the next section, we develop an order of magnitude analysis of the governing equations to obtain an expression for  $l_{\max}$ . We also establish the co-ordinate system most appropriate for our purposes.

### 3. ORDER OF MAGNITUDE ANALYSIS

To obtain the expression for the height of maximum speed-up we proceed in two steps: first we obtain the expression for the inner layer depth,  $l$ , and second, we show that this depth is really the maximum speed-up height,  $l_{\max}$ . In order to establish a co-ordinate system suitable for the task, we follow the work of Kaimal and Finnigan (1994), which recommends the use of the streamline co-ordinates for distorted flows of this type. The work of Finnigan (1983) gives the mean mass conservation and the mean x-momentum equations for 2D flows in this system, respectively, as

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (12)$$

$$\bar{u} \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial\bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z} + \frac{\overline{u'^2} - \overline{w'^2}}{L_a} + 2 \frac{\overline{u'w'}}{R} - g_x \frac{\bar{T}}{T_0} + V_x. \quad (13)$$

In eqs. (12) and (13),  $x$  is the direction parallel to the streamlines and  $\bar{u}$  and  $u'$  are the mean and turbulent velocities in this direction, respectively. The direction normal to the streamlines is  $z$ , and  $\bar{w}$  and  $w'$  are the corresponding velocities. The thermodynamic mean pressure is denoted by  $\bar{p}$ , the mean density by  $\bar{\rho}$ , the mean temperature by  $\bar{T}$ , the reference mean temperature by  $\bar{T}_0$ , the x-component gravity acceleration by  $g_x$  and the x-component mean viscous force by  $V_x$ .  $R$  and  $L_a$  are flow length scales and they are related to the mean variables through  $R = \bar{u}/(\Omega + \partial\bar{u}/\partial z)$  and  $L_a = \bar{u}/(\partial\bar{u}/\partial z)$ , where  $\Omega$  is the mean vorticity component in the  $z$  direction in the original Cartesian co-ordinate system.

Supposing the existence of a region where inertia and turbulence terms balance we write

$$\bar{u} \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} \sim \frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}. \quad (14)$$

To evaluate expression (14) we assume that  $x \sim L_h$  and that inertia and turbulence terms balance in the region where  $z \sim l$ . We also assume that  $\bar{u} \sim \bar{u}_0$  which means that  $\Delta\bar{u} \ll \bar{u}$ . Finally, we assume that  $u' \sim w' \sim u_*$ , where  $u_*$  is the friction velocity. With these assumptions we have

$$\frac{\bar{u}_0^2(l)}{L_h} \sim \frac{u_*^2}{l}. \quad (15)$$

To transform this order of magnitude relation in an equality, we introduce an unknown function  $C_2(x)$  of order one, such that  $\bar{u}_0^2(l)/L_h = C_2(x) \cdot u_*^2/l$  and, thus,

$$\frac{l}{L_h} = C_2 \frac{u_*^2}{\bar{u}_0^2(l)}. \quad (16)$$

This relation is presumably valid for all incident wind profiles. For a logarithmic profile of the form  $\bar{u}_0/u_* = (1/\kappa)\ln(l/z_0)$ , we can write  $l/L_h = C_2 \kappa^2/\ln^2(l/z_0)$  which, upon dividing and multiplying by  $z_0$ , gives

$$l^+ \ln(l^+) = C_2 \kappa^2 L_h^+. \quad (17)$$

This equation is identical to that of JEN except for the constant  $C_2$ , to be determined. In the mainframe of an order of magnitude analysis, this can only be accomplished through a comparison with observational data. We do that in the next section. First, however, we shall show that  $l$ , calculated from (17), is indeed the maximum speed-up height.

Consider the mass conservation and x-momentum equations in Cartesian co-ordinates. They are essentially the same as eqs. (12) and (13), except for the curvature terms containing  $R$  and  $L_a$  in eq. (13). Returning to the hypothesis that the inertia and turbulence terms balance in the inner region, we have

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \sim \overline{\partial u' w'}. \quad (18)$$

As we now want to obtain results about the height where  $\Delta \bar{u}$  is maximum, we substitute  $\bar{u} = \bar{u}_0 + \Delta \bar{u}$  into (18) to obtain

$$\bar{u}_0 \frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z} \sim \overline{\partial u' w'}, \quad (19)$$

after considering that  $\partial \bar{u}_0(z)/\partial x = 0$  and that  $\Delta \bar{u} \ll \bar{u}$ . If we are to obtain the height where  $\Delta \bar{u}$  is maximum, we must impose that  $\partial \Delta \bar{u}/\partial z = 0$  at  $z = z_h + l_{\max}$  (in Cartesian co-ordinates). Differentiating (19) with respect to  $z$  allows us to substitute this condition in the resulting equation and find

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z} \frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial z^2} \sim \frac{\partial^2 \overline{u' w'}}{\partial z^2}, \quad (20)$$

at  $z = z_h + l_{\max}$ . Substituting for the orders of the individual terms yields

$$\frac{\bar{u}_0}{(z_h + l) L_h} \frac{\Delta \bar{u}}{(z_h + l)^2} + \frac{\bar{w} \bar{u}_0}{(z_h + l)^2} \sim \frac{u_*^2}{(z_h + l)^2}. \quad (21)$$

The magnitude order for  $w$  can be obtained from the mass conservation equation as  $\bar{w} \sim \bar{u}_0 (z_h + l_{\max})/L_h$ . Substituting this expression on eq. (21), multiplying by  $(z_h + l_{\max})^2$  and introducing a function  $C_3(x)$  to obtain an equality, we get

$$\bar{u}_0 (\Delta \bar{u} + \bar{u}_0) \frac{(z_h + l_{\max})}{L_h} = C_3 u_*^2. \quad (22)$$

Recalling that  $u_0 \gg \Delta u$  and returning to the streamline co-ordinate system, where  $z_h + l_{\max}$  is simply equal to  $l$ , we finally get

$$\frac{1}{L_h} = C_3 \frac{u_*^2}{\bar{u}_0^2 (l_{\max})}. \quad (23)$$

Eq. (23) is identical to eq. (16), except for the constant to be determined. As the constant value is entirely arbitrary, we can set  $C_2(x) = C_3(x)$ , therefore proving that  $l = l_{\max}$ , indeed. In the next item, we calculate the value of  $C_2(x)$  through comparison with field data and test the overall capability of expression (17).

#### 4. COMPARISON WITH OBSERVATIONAL DATA

Many field studies provide the observational data needed for our purposes. The most popular data can be obtained from the work of Taylor et al. (1987) and Copin et al. (1994). The available measurements for  $l$  are represented in fig. (2) together with the results of eqs. (17), (5), (6) and (7).

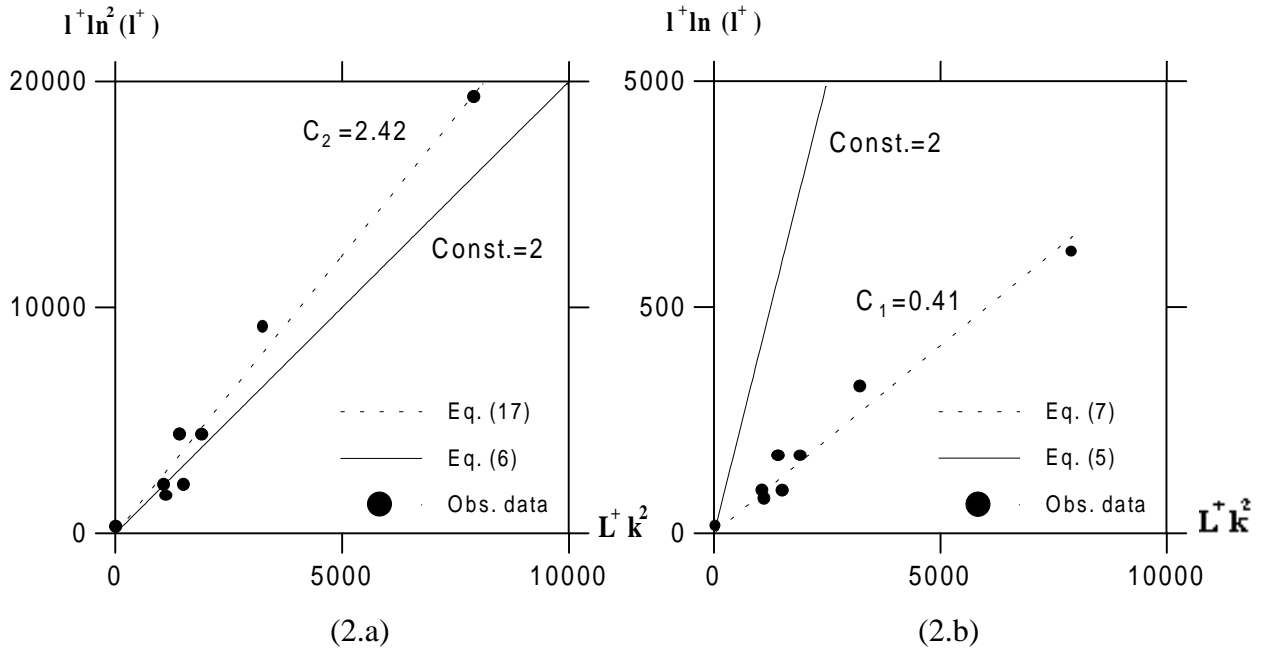


Fig.2. Non-dimensional height of maximum speed-up.



Equation (17) was tested for some values of  $C_2(x)$  and we verified that good agreement is obtained with  $C_2(x) = 2.0$  for the HT. All measurements were made at the HT and, therefore, it was not possible to assess the  $x$  dependence of  $C_2(x)$ . The result, however, confirms JEN's equation, expression (6). We also obtained the best fit value of  $C_2(x) = 2.42$ , for eq. (17), which has never been proposed before. We believe, however, that more field data is necessary before we can state that this value is definitive. Our tests also showed that the agreement between observation and JH's expression, eq. (5), is acceptable only for the Bungendore Ridge (BR) results (Bradley, 1983), not represented in fig. (2.b). This conclusion is confirmed by other workers, e.g. Mickle et al. (1988) and Taylor and Walmesley (1996). The BR results deserve some attention, nevertheless.

According to Taylor et al. (1987), the  $z_0$  value varied between 0.002 and 0.005 m during the BR experiment. Those limits, with  $l$  estimated as 5m, (following Taylor et al., 1987) correspond to the values that were well represented by eq. (5). In addition, the speed-up vertical profile presented a very broad maximum, from the first measurement point up to the height of 8m. The point represented in figs. (2.a) and (2.b) were calculated supposing that  $l=1$  m and adopting  $z_0=0.0035$  m as an average value. This point agrees very well with eq. (17).

Fig. (2.b) shows a plot of the field data against eqs. (5) and (7), for the same experimental data used on fig. (2.a). Agreement is good in this case too, except in the BR case. Comparison of eqs. (5) and (7) shows that CL's expression differs from JH's only by a constant. In fact, before CL proposed his expression, Teunissen et al. (1987) had suggested that a different value for the constant could correct its prediction ability. CL proposed  $C_1 = 0.59$  based on one field result (210° wind direction case of ASK). Based on fig. (2.b), we propose a value of  $C_1 = 0.41$ , which seems to fit the observational data better, as a whole. To our present knowledge, this result is also new.

## 5. CONCLUSIONS

In this paper, we present a study on the height of maximum speed-up for flows over low hills under neutral atmosphere. The flow was assumed to be two-dimensional and the upwind velocity profile was considered to be logarithmic. Furthermore, the determination of the function  $C_2(x)$  was made from observational data obtained over the HT; so the result is restricted to this site.

In our analysis, we show that  $l$ , calculated as the inner layer depth, is indeed the height of maximum speed-up,  $l_{\max}$ . We also propose a value for the function  $C_1(x)$  in CL's expression, eq. (6), and confirm that JEN's expression gives better results than JH's. Regarding this fact, we suggest that JH's expression should definitively be substituted for JEN's or CL's (which seem to work just as well). We also believe that the BT's results ratify that the best expression lies between CL's and JEN's, as proposed here.

One thing worth of note is that the simple demonstration we present here, showing that  $l=l_{\max}$ , has apparently passed unnoticed over the years. We speculate that this is probably due the fact that comparison between predictions for  $l_{\max}$  and observations of  $l$  has always showed good agreement, in most cases.

It is also worth noting that the demonstration of the equality  $l=l_{\max}$  could have been used itself as a new form of obtaining  $l$ . It uses the classical hypothesis about the relative order of inertia and turbulence terms and introduces the requirement that  $\partial\Delta\bar{u}/\partial z = 0$ , which guarantees that  $l=l_{\max}$ . Furthermore, it makes no use of turbulence closure models and allows

to a re-calibration of the function  $C_2(x)$  in case it is required by new observational data available.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to acknowledge the financial support from CNPq, through grant No. 143041/97-5 and FAPERJ, grant No. E-26/171.284/99.

## REFERENCES

- Beljaar, A. C. M. and Taylor, P. A.: 1989, 'On the inner-layer scale height of boundary layer flow over low hills', *Boundary Layer Meteorology*, 49, 433—438.
- Bradley, E. F.: 1983, 'The influence of thermal stability na angle of incidence on the acceleration of wind up a slope', *J. Wind Eng. and Indust. Aerodyn.*, 15, 231—242.
- Coppin, P. A., Bradley, E. F., Finnigan, J. J.: 1994, 'Measurements of flow over an elongated ridge and its thermal stability dependence', *Boundary Layer Meteorology*, 69, 173—199.
- Claussen, M.:1988, 'On the inner layer scale height of boundary layer flow over low hills', *Boundary Layer Meteorology*, 44, 411—413.
- Finnigan, J. J.: 1983, 'A streamline co-ordinate system for distorted turbulent shear flows', *J. Fluid Mech.*, 130, 241—258.
- Frenzen, P. and Voguel, C. A.: 1995, 'On the magnitude and apparent range of variation of von Karman constant in the atmospheric surface layer', *Boundary Layer Meteorology*, 72, 371—392.
- Jackson, P. S., and Hunt, J. C. R.: 1975, 'Turbulent wind flow over a low hill', *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*,106, 929—955.
- Jensen, N. O., Petersen, E. L., Troen, I.: 1984, 'Extrapolation of mean wind statistics with special regard to wind energy applications', Rep. WCP—86, World Meteorol. Organ., Geneva, 85 pp.
- Kaimal, J. C. and Finnign, J. J.: 1994, 'Atmospheric boundary layer flows: their structure and measurement', Oxford Univ. Press, New York, 289 pp.
- Mickle, R. E., Cook, N. J., Hoff, A M., Jensen, N. O., Salmon, J. R., Taylor, P.A., Tetzlaff, G. and Teunissen, H.W.:1988, 'The Askervein hill project: vertical profiles of wind and turbulence', *Boundary Layer Meteorology*, 43, 143—169.
- Taylor, P. A., Mason, P. J and Bradley, E. F.: 1987, 'Boundary layer flow over low hills (a review)', *Boundary Layer Meteorology*, 39, 107—132.
- Teunissen, H. W., Shokr, M. E., Bowen, A. J., Wood, C. J. and Green, D. W. R.: 1987, 'Askervein hill project: wind tunnel simulations at three length scales', *Boundary Layer Meteorology*, 40, 1—29.
- Walmsley, J. L and Taylor, P. A.: 1996, 'Boundary layer flow over topography: impacts of the Askervein study', *Boundary Layer Meteorology*, 78, 291—320.