

# *Tema*

- ESTRUTURAS

# ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS E CASCAS ATRAVÉS DO ELEMENTO FINITO DE NOVE NÓS COM REFINAMENTO HIERÁRQUICO

## **Amarildo Tabone Paschoalini**

UNESP, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica  
Av. Brasil Centro, 56 - 15385-000 - Ilha Solteira, SP, Brasil

E-mail: [tabone@dem.feis.unesp.br](mailto:tabone@dem.feis.unesp.br)

## **Loir Afonso Moreira**

UNICAMP, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Projeto Mecânico

## **Fernando Iguti**

UNICAMP, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional

## **Resumo**

Este trabalho apresenta a análise de vibração livre não amortecida de placas e cascas através de um elemento finito do tipo hierárquico baseado no conceito de aproximação  $p$ . O primeiro nível de aproximação da solução é obtido através do elemento isoparamétrico quadrilateral quadrático de 9 nós da família Lagrangeana, formulado a partir da teoria de Reissner-Mindlin, com integração numérica consistente. Para outros níveis de aproximação são realizados sucessivos refinamentos hierárquicos com o propósito de retirar a característica de rigidez excessiva do elemento isoparamétrico na análise de placas e cascas finas. São apresentados exemplos numéricos para mostrar a precisão, eficiência e vantagens da presente formulação, e os resultados obtidos (frequências naturais e modos de vibrar) são comparados com os disponíveis na literatura.

**Palavras-chave:** Método dos elementos finitos, Versão  $p$ , Vibração livre, Placa, Casca.

## **1. INTRODUÇÃO**

A maior parte das estruturas compostas por placas e cascas projetadas atualmente requerem algum tipo de análise dinâmica para comprovar sua capacidade de suportar carregamentos transitórios. Embora a análise de estruturas compostas por placas e cascas pelo Método dos Elementos Finitos já se estenda por mais de três décadas, o estabelecimento de um modelo que seja confiável, eficiente e aplicável a qualquer situação (placas e cascas finas ou placas e cascas moderadamente grossas) ainda continua a ser objeto de estudo de muitos autores.

Bathe e Dvorkin (1985 e 1986) resumiram os requisitos que devem ser encontrados no desenvolvimento de um elemento finito confiável e eficiente para análise de casca:

1. o elemento deve satisfazer os requisitos usuais de invariância e convergência (Zienkiewics, 1977);
2. o elemento deve ser formulado sem o uso de uma teoria específica, de maneira que possa ser aplicável em qualquer situação de placa ou casca;
3. o elemento deve ser simples, barato e utilizar, considerando a análise de cascas, cinco ou seis graus de liberdade por nó;

4. o elemento deve ser "numericamente seguro", isto é, não deve conter qualquer modo próprio nulo, e deve estar livre do efeito de bloqueio;
5. o elemento não deve ser baseado em fatores de ajuste numérico;
6. o elemento deve ser relativamente insensível às distorções geométricas;
7. o elemento deve ter a capacidade de proporcionar soluções precisas e eficientes.

A formulação para análise de casca baseada na degeneração de um elemento sólido tridimensional através da redução de sua dimensão na direção da espessura tem sido escolhida por um grande número de pesquisadores nos últimos anos com o objetivo de satisfazer os requisitos acima e, baseado nessa formulação, o elemento de nove nós da família Lagrangeana tem sido usado como base para o desenvolvimento de muitos elementos finitos para análise de casca. Em parte, isto se deve às seguintes observações: na análise de tensões no plano o elemento isoparamétrico de nove nós é menos sensível a distorções geométricas que o elemento de oito nós (Cook, 1981 e Verheghe e Powell, 1986) e, para o caso geral de flexão de placas o elemento de nove nós tem um ótimo desempenho se comparado a outros elementos quadriláteros lineares, quadráticos e cúbicos (Pugh *et al.*, 1978). Além disso, os elementos de nove nós para análise de cascas são geralmente considerados como vantajosos em casos onde existem grandes variações de tensões, onde as deformações por flexão dominam a solução, e onde a geometria é curva (Park e Stanley, 1986).

Entretanto, é bem conhecido que os resultados obtidos através do elemento de nove nós para análise de cascas apresentam diversas deficiências (Oñate, 1992). A integração exata do elemento quadrilátero quadrático de nove nós exige 3x3 pontos de integração na quadratura de Gauss-Legendre para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à flexão e 3x3 pontos de integração para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à cortante (*integração numérica consistente*). Os resultados obtidos são excelentes para situações de placas e cascas moderadamente grossas, contudo, com a redução da espessura o elemento torna-se excessivamente rígido e os resultados não tendem àqueles da teoria clássica de *Kirchhoff* para placas e cascas finas. A *integração numérica reduzida* (2x2 pontos de integração para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à cortante) elimina em muitos casos o efeito de bloqueio na análise de placas e cascas finas, mas pode gerar elementos com modos próprios facilmente propagáveis em toda malha para várias condições de contorno, que distorcem a solução.

Este trabalho apresenta uma formulação do tipo hierárquica, baseada no conceito de aproximação  $p$ . O primeiro nível de aproximação da solução é obtido através do elemento isoparamétrico quadrilátero quadrático de 9 nós da família Lagrangeana, formulado a partir da teoria de Reissner-Mindlin, com integração numérica consistente. Para outros níveis de aproximação são realizados sucessivos refinamentos hierárquicos (3º, 4º e 5º graus) com o propósito de retirar a característica de rigidez excessiva do elemento isoparamétrico na análise de placas e cascas finas.

No processo de refinamento  $h$  a malha de elementos é refinada através da diminuição sucessiva do tamanho dos elementos. Neste processo o número e o tipo de funções de interpolação sobre cada elemento permanecem fixos. A utilização deste tipo de refinamento tende a aumentar o custo da análise (novos nós e elementos têm de ser gerados) e produzir erros associados à subdivisão excessiva da malha de discretização.

Ao contrário, no processo de refinamento  $p$  hierárquico o número e a distribuição de nós e elementos sobre a malha discretizada permanecem fixos, no entanto, o número e o grau das funções de interpolação são aumentados progressivamente. As matrizes de rigidez produzidas nos estágios anteriores àquele da aproximação pretendida reocorrem e não precisam ser recalculadas. A qualidade de aproximação da solução e o custo computacional são vantagens que a versão  $p$  hierárquica de refinamento oferece em relação à versão  $h$ .

## 2. FORMULAÇÃO

De acordo com Zienkiewicz *et al.* (1971), o campo de deslocamento do elemento de casca é interpolado a partir das funções de forma  $N_i(\xi, \eta)$  quadrilaterais quadráticas, e é dado por:

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i \quad (1)$$

onde o deslocamento  $\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta)$  é um vetor coluna de componentes  $u, v$  e  $w$  nas direções X, Y e Z, respectivamente, de um sistema de referência global associado ao elemento e, da mesma maneira  $u_i, v_i$  e  $w_i$ , as componentes do deslocamento  $\bar{\delta}_i$ . Neste trabalho o campo de deslocamento do elemento de casca será interpolado a partir das funções de forma  $N_i(\xi, \eta)$  quadrilaterais quadráticas de nove nós da família Lagrangeana, portanto  $n=9$ .

O refinamento da expansão quadrática especificada pela Eq.(1) pode ser conseguido adicionando-se a ela funções de forma hierárquicas  $M_{pk}(\xi, \eta)$  de ordem superior a dois (Babuska *et al.*, 1981). As funções  $M_{pk}(\xi, \eta)$  são polinômios de grau  $p$  associados a cada um dos lados do elemento ( $k = 1, 2, 3$  e  $4$ ) ou são polinômios de grau  $p$ , do tipo bolha, associados ao elemento ( $k = 5, 6, 7, \dots$ ). Neste trabalho o refinamento da expansão quadrática foi feito adicionando-se funções de forma hierárquicas de 3º, 4º e 5º graus. As funções de forma utilizadas foram definidas em termos das integrais dos Polinômios de Legendre (Szabo *et al.*, 1991), conforme mostra a Tabela 1.

**Tabela 1.** Funções de forma hierárquicas de 3º, 4º e 5º graus.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$p = 3$						
$p = 4$						
$p = 5$						

Desta forma o deslocamento  $\bar{\Delta}$  dado pela Eq.(1) para o caso do elemento isoparamétrico, torna-se:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 M_{pk}(\xi, \eta) \bar{\delta}_{pk} \end{aligned} \quad (2)$$

para o caso de elemento paramétrico do tipo hierárquico. Nesta expressão  $\bar{\delta}_{pk}$ , de componentes  $a_{pk}, b_{pk}$  e  $c_{pk}$  segundo os eixos X, Y e Z do sistema de referência global, é o

vetor constituído dos parâmetros hierárquicos. As funções  $M_{pk}(\xi, \eta)$  quando inseridas na Eq.(1) não modificam o nível de aproximação do elemento, mas, no entanto, a incógnita  $\bar{\delta}_{pk}$  deixa de ter o significado físico de variável nodal. Na realidade, as componentes de  $\bar{\delta}_{pk}$  são parâmetros dependentes das incógnitas nodais  $\bar{\delta}_i$ ,  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ .

De uma maneira compacta, a Eq.(2) pode, ainda, ser dada por:

$$\{u\} = [N] \cdot \{a\} \quad (3)$$

onde  $\{u\}$  é uma matriz constituída dos deslocamentos  $u(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $v(\xi, \eta, \zeta)$  e  $w(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $[N]$  é uma matriz constituída das funções de forma  $N_i(\xi, \eta)$  e  $M_{pk}(\xi, \eta)$ , e  $\{a\}$  é uma matriz constituída dos deslocamentos nodais  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$ ,  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  e dos parâmetros hierárquicos  $a_{pk}$ ,  $b_{pk}$  e  $c_{pk}$ .

De acordo com as hipóteses básicas da teoria de placa e casca (Timoshenko *et al.*, 1959) e em função da solicitação do elemento, um ponto genérico vai apresentar, segundo o sistema de referência local  $(x', y', z')$ , a ele associado, o seguinte estado de deformação específica:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y'} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z'} & \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} & 0 & \frac{\partial}{\partial x'} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ou ainda,

$$\{\varepsilon'\} = [L] \cdot \{u'\} \quad (5)$$

onde,  $\{\varepsilon'\}$  é uma matriz coluna constituída das deformações específicas e distorções em um ponto genérico do elemento segundo o sistema de referência local,  $\{u'\}$  corresponde aos deslocamentos segundo o sistema de referência local e  $[L]$  é o operador linear.

Aplicando o *Princípio do Trabalho Virtual* e o *Princípio de D'Alembert*, chega-se à determinação das matrizes de rigidez e de massa do elemento:

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6)$$

$$[M^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho \cdot [N]^T \cdot [N] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (7)$$

onde,  $[B]$  é uma matriz que relaciona as deformações específicas com os deslocamentos e as rotações nodais,  $[D']$  é uma matriz quadrada, simétrica, constituída das constantes elásticas do material,  $|J(\xi, \eta)|$  o determinante da matriz jacobiano da transformação global-local e  $\rho$  a densidade de massa por unidade de volume do elemento. De uma forma compacta, pode-se escrever a equação que representa o equilíbrio do sistema:

$$[M^e] \cdot \{\ddot{a}\} + [K^e] \cdot \{a\} = \{f^e\} \quad (8)$$

onde  $[M^e]$  é a matriz de massa do elemento,  $\{\ddot{a}\}$  é um vetor coluna constituído das acelerações nodais e dos parâmetros hierárquicos,  $[K^e]$  é a matriz de rigidez do elemento,  $\{a\}$  é um vetor coluna constituído dos deslocamentos nodais e dos parâmetros hierárquicos,  $\{f^e\}$  é o vetor de carga. Encontradas as equações algébricas que descrevem as características de cada elemento do sistema estrutural, o próximo passo é combiná-las para formar um conjunto completo de equações, que governe a reunião de todos os elementos. O procedimento de montagem deste conjunto de equações é baseado na necessidade de que o *equilíbrio* se verifique por todo o sistema. Pode-se, portanto, escrever que:

$$[M] \cdot \{\ddot{a}\} + [K] \cdot \{a\} = \{f\} \quad (9)$$

Esta equação representa o caso geral de vibração forçada para sistemas não amortecidos e se não existem forças atuantes no sistema, tem-se o caso de vibração livre. Admitindo-se movimento harmônico a Eq.(9) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$([K] - \lambda \cdot [M]) \cdot \{\phi\} = \{0\} \quad (10)$$

onde  $[K]$  e  $[M]$  são as matrizes de rigidez e de massa globais do sistema, respectivamente, e  $\lambda$  o quadrado da frequência angular. Entretanto, este problema só pode ser resolvido após a imposição das condições de contorno do sistema estrutural em análise. Para um sistema estrutural com  $n$  graus de liberdade podemos escrever que:

$$[K] \cdot [\Phi] = [M] \cdot [\Phi] \cdot [\Lambda] \quad (11)$$

onde  $[K]$  e  $[M]$  são as matrizes ( $n \times n$ ) de rigidez e de massa globais do sistema, respectivamente,  $[\Lambda]$  a matriz diagonal ( $n \times n$ ) que contém os  $n$  autovalores  $\lambda_i$  e  $[\Phi] = [\{\phi_1\}, \dots, \{\phi_i\}, \dots, \{\phi_n\}]$  a matriz ( $n \times n$ ) que contém os  $n$  autovetores  $\{\phi_i\}$ .

O processo de resolução do problema de autovalor generalizado consiste na obtenção das matrizes  $[\Lambda]$  e  $[\Phi]$ . Para tanto resolve-se, primeiramente, o sistema isoparamétrico:

$$[K_{iso}] \cdot [\Phi_{iso}] = [M_{iso}] \cdot [\Phi_{iso}] \cdot [\Lambda_{iso}] \quad (12)$$

Sendo  $n_{iso}$  o número de graus de liberdade da análise isoparamétrica,  $[K_{iso}]$ ,  $[M_{iso}]$ ,  $[\Phi_{iso}]$  e  $[\Lambda_{iso}]$  são submatrizes ( $n_{iso} \times n_{iso}$ ) correspondentes ao sistema isoparamétrico. Pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da primeira reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquicas de terceiro grau:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h3}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h3}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Lambda_{iso}] & [\Lambda_{iso,h3}] \\ [\Lambda_{h3,iso}] & [\Lambda_{h3}] \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde as submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico já foram obtidas anteriormente na análise inicial. Sendo  $n_{h3}$  o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na primeira reanálise,  $[K_{iso,h3}]$ ,  $[M_{iso,h3}]$ ,  $[\Phi_{iso,h3}]$  e  $[\Lambda_{iso,h3}]$  são submatrizes ( $n_{iso} \times n_{h3}$ ) correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a primeira reanálise,  $[K_{h3}]$ ,  $[M_{h3}]$ ,  $[\Phi_{h3}]$  e  $[\Lambda_{h3}]$  são submatrizes ( $n_{h3} \times n_{h3}$ ) correspondentes ao sistema hierárquico para a primeira reanálise. De maneira

semelhante, pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da segunda reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquicas de quarto grau e depois de quinto grau.

Como o algoritmo desenvolvido permite que se escolham, independentemente, os lados e elementos a serem refinados, os graus das funções de forma hierárquicas a serem introduzidas, bem como as variáveis hierárquicas de interesse, pode-se ter tantas reanálises quanto se queira. Assim, de uma forma geral, se se pretender fazer a  $i$ -reanálise pode-se escrever que:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & \dots & [K_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [K_{hi,iso}] & \dots & [K_{hi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & \dots & [\Phi_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [\Phi_{hi,iso}] & \dots & [\Phi_{hi}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_{iso}] & \dots & [M_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [M_{hi,iso}] & \dots & [M_{hi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & \dots & [\Phi_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [\Phi_{hi,iso}] & \dots & [\Phi_{hi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Lambda_{iso}] & \dots & [\Lambda_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [\Lambda_{hi,iso}] & \dots & [\Lambda_{hi}] \end{bmatrix} \quad (14)$$

onde todas as submatrizes anteriores àquelas relacionadas com a reanálise  $i$  já foram obtidas. Sendo  $n_{hi}$  o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na  $i$ -ésima reanálise,  $[K_{iso,hi}]$ ,  $[M_{iso,hi}]$ ,  $[\Phi_{iso,hi}]$  e  $[\Lambda_{iso,hi}]$  as submatrizes ( $n_{iso} \times n_{hi}$ ) correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a  $i$ -ésima reanálise,  $[K_{hi}]$ ,  $[M_{hi}]$ ,  $[\Phi_{hi}]$  e  $[\Lambda_{hi}]$  as submatrizes ( $n_{hi} \times n_{hi}$ ) correspondentes ao sistema hierárquico relacionado com a  $i$ -ésima reanálise.

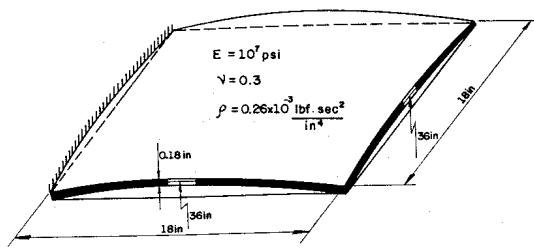
### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

A seguir são apresentados alguns resultados numéricos onde a confiabilidade e a eficiência, considerando a análise dinâmica de placas e cascas, do elemento finito hierárquico proposto são analisadas. Fez-se, além da comparação dos resultados obtidos nas análises isoparamétrica ( $p=2$ ) e hierárquica de 3º grau ( $p=3$ ), 4º grau ( $p=4$ ) e 5º grau ( $p=5$ ), a comparação dos resultados obtidos com os elementos finitos **9URI** (isoparamétrico quadrilateral quadrático de nove nós com integração totalmente reduzida) e **Shell93** (disponível no "software" comercial ANSYS 5.4).

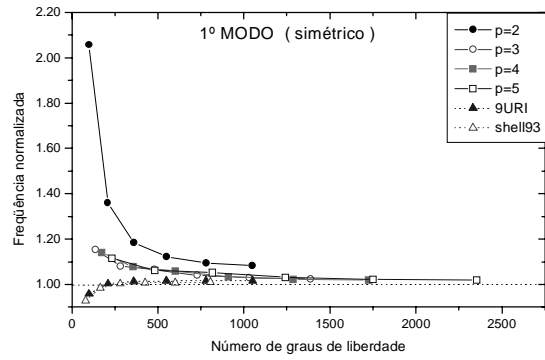
Todos os resultados obtidos com os vários elementos finitos descritos acima foram comparados com os obtidos analítica ou experimentalmente disponíveis na literatura. Os resultados apresentados foram normalizados dividindo-se a frequência natural calculada pela frequência natural "exata" (obtida na literatura).

#### 3.1 Casca esférica engastada em uma extremidade

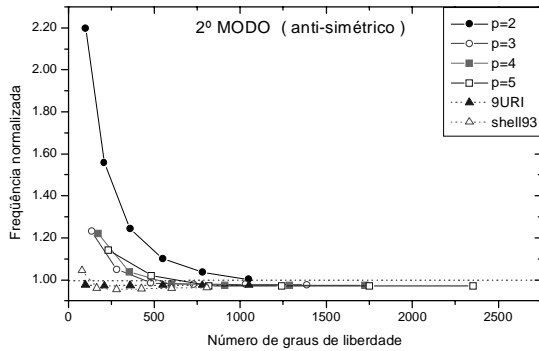
Em função da geometria a casca esférica engastada em uma extremidade (Figura 1a) foi modelada com seis malhas de discretização de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos. As Figuras 1b, 1c, 1d, 1e e 1f apresentam as cinco primeiras frequências naturais normalizadas (Leissa *et al.*, 1983) para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ( $p=2$ ,  $p=3$ ,  $p=4$  e  $p=5$ ) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).



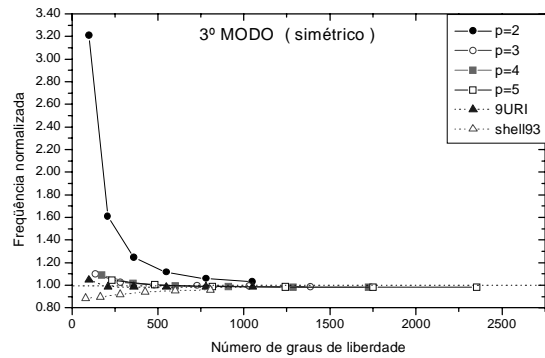
(a)



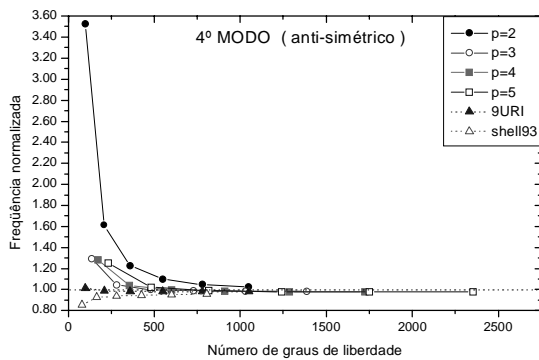
(b)



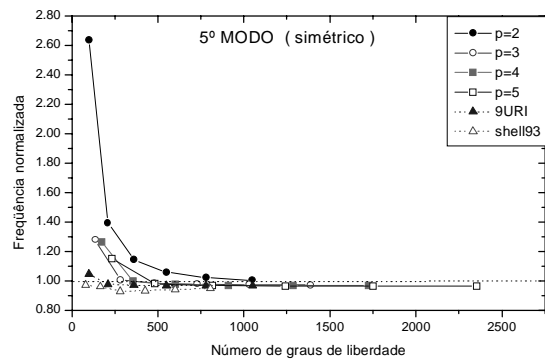
(c)



(d)



(e)



(f)

**Figura 1.** Casca esférica engastada em uma extremidade (a) e suas freqüências naturais normalizadas para o 1º modo (b), 2º modo (c), 3º modo (d), 4º modo (e) e 5º modo (f).

### 3.2 Placa quadrada apoiada nos quatro cantos

Para verificar se o elemento finito com refinamento hierárquico gera elementos com modos próprios propagáveis em toda malha foi feito um teste clássico proposto na literatura: a análise de uma placa quadrada apoiada nos quatro cantos que é extremamente sensível à existência de modos próprios de flexão.

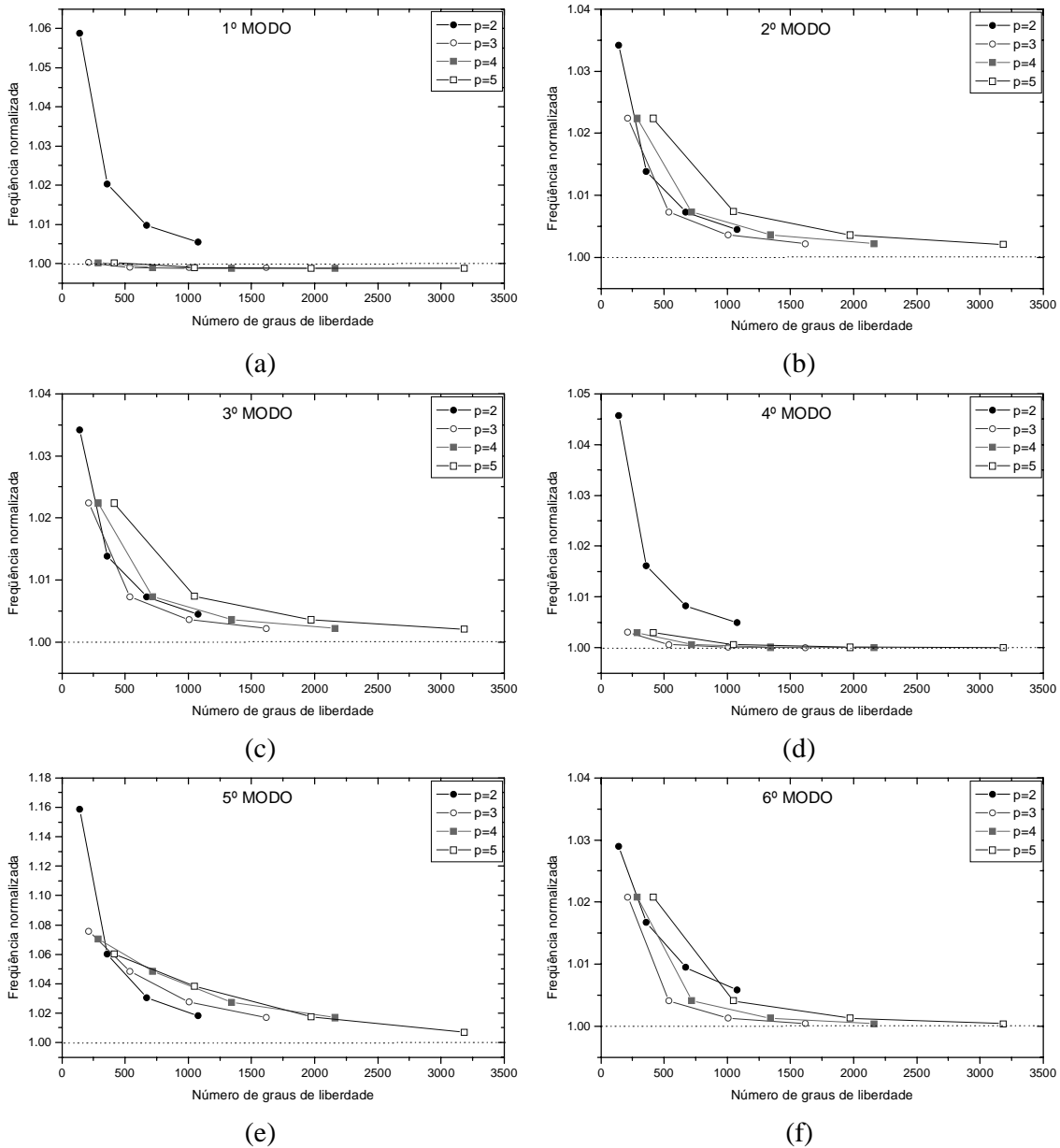
Em função da geometria a placa foi modelada com malha de discretização regular de 3x3, 5x5, 7x7 e 9x9 elementos. A Figura 2 apresenta as seis primeiras freqüências naturais normalizadas (Leissa, 1969) para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ( $p=2$ ,  $p=3$ ,  $p=4$  e  $p=5$ ) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).



Os resultados obtidos com o elementos finitos 9URI e Shell93 estão muito distantes do "exato" (os modos próprios se propagam em toda malha distorcendo a solução) e por esta razão os resultados para este elemento não aparecem na Figura 2.

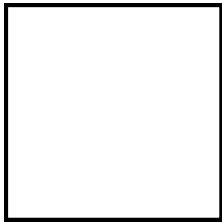
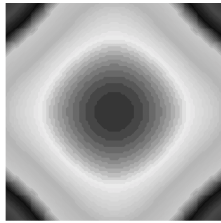
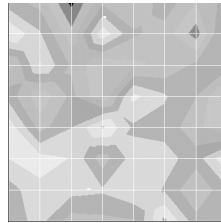
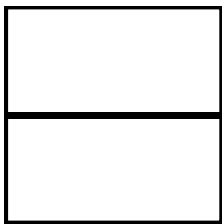
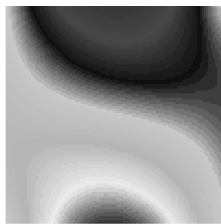
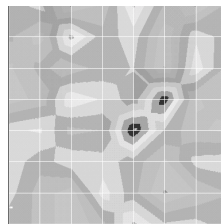
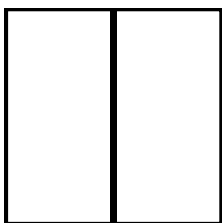
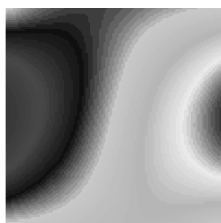
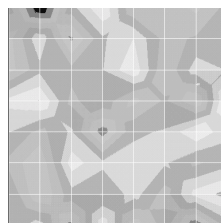
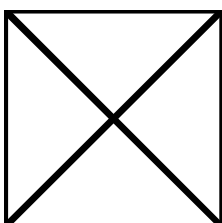
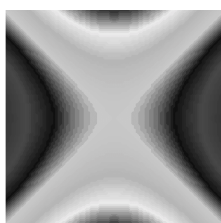
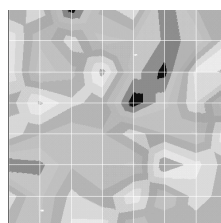
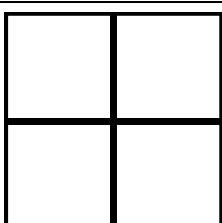
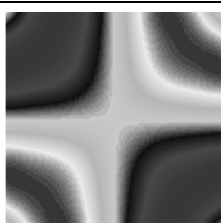
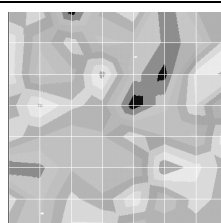
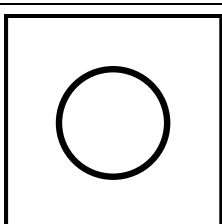
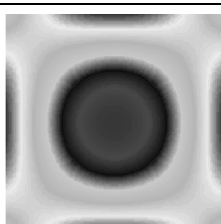
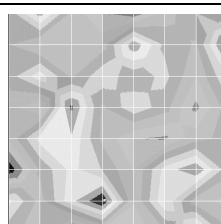
Na Tabela 2 são apresentados os seis primeiros modos de vibrar da placa quadrada apoiada nos quatro cantos obtidos a partir do elemento finito proposto (HIERÁRQUICO) e do elemento Shell93 (ANSYS) com malhas de discretização de 9x9 elementos, estes resultados podem ser comparados com os obtidos analiticamente ("EXATO") por Leissa (1969).

Pode-se verificar que os modos de vibrar obtidos com o elemento finito proposto são excelentes, enquanto que os obtidos com o elemento Shell93 apresentam o problema de geração de modos próprios que distorcem a solução.



**Figura 2.** Frequências naturais normalizadas da placa quadrada apoiada nos quatro cantos para o 1º modo (a), 2º modo (b), 3º modo (c), 4º modo (d), 5º modo (e) e 6º modo (f).

**Tabela 2.** Modos de vibrar da placa quadrada apoiada nos quatro cantos.

	"EXATO"	HIERÁRQUICO	ANSYS
1º MODO			
2º MODO			
3º MODO			
4º MODO			
5º MODO			
6º MODO			

## 4. CONCLUSÕES

A partir dos resultados dos exemplos numéricos, verifica-se que o refinamento da solução do elemento isoparamétrico, através da introdução de polinômios de terceiro ( $p=3$ ), quarto ( $p=4$ ) e quinto ( $p=5$ ) graus, apresenta os seguintes resultados:

- excelente convergência com o refinamento da malha;
- não apresenta os problemas de bloqueio na análise de placas e cascas finas;
- não gera elementos com modos próprios;
- com o refinamento da malha os resultados convergem para os obtidos com integração reduzida.

Enfim, pode-se dizer que o elemento finito proposto, considerando a análise dinâmica, atende praticamente todos requisitos que devem ser encontrados no desenvolvimento de um elemento finito confiável e eficiente para análise de placas e cascas.

## 5. REFERÊNCIAS

- Babuska, I., Szabo, B.A. and Katz, I.N., 1981, "The p-version of the finite element method", SIAM J. Num. Anal., vol.21, n.6, pp.1180-1207.
- Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N., 1985, "A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation", Int. J. Num. Meth. Engng., vol.21, pp.367-383.
- Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N., 1986, "A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components", Int. J. Num. Meth. Engng., vol.22, pp.697-722.
- Cook, W.A., 1981, "The effect of geometric shape on two-dimensional finite elements". CAFEM 6, Proc. 6th Int. Seminar on Computational Aspects of the FEM, Paris.
- Leissa, A.W., Lee, J.K. and Wang A.J., 1983, "Vibrations of cantilevered doubly curved shallow shells". Int. J. Solids Struct., vol.19, pp.411-424.
- Leissa, A.W., 1969, "Vibration of plates". NASA SP-60, Washington, D.C.
- Oñate, E., 1992, "Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos - análisis estático lineal", CIMNE, Barcelona.
- Park, K.C. and Stanley, G.M., 1986, "A curved  $C^0$  shell element based on assumed natural-coordinate strains", J. Appl. Mech., vol.53, pp.278-290.
- Pugh, E., Hinton, E. and Zienkiewicz, O.C., 1978, "A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration", Int. J. Num. Meth. Engng., vol.12, pp.1959-1979.
- Szabo, B.A. and Babuska, I., "Finite Element Analysis", Wiley-Interscience, New York, 1991.
- Timoshenko, P. and Woinowsky-Krieger S., 1959, "Theory of plates and shells". 2ed., Kogakusha: McGraw-Hill.
- Verheghe, B. and Powell, 1986, "Control of zero-energy in 9-node plane element", Int. J. Num. Meth. Engng., vol.23, pp.863-869.
- Zienkiewicz, O.C., 1977, "The finite element method", 3rd ed., McGraw-Hill, New York.
- Zienkiewicz O.C., Irons, B.M, Scott, T.C., Campbell, J.S., 1971, "Three dimensional stress analysis". Proc. IUTAM Symp. On High Speed Computing of Elastic Structures, Liege, Belgium, vol.01, pp.413-432.

# UTILIZAÇÃO DE REFORÇOS DE FIBRA DE VIDRO EM MATRIZ EPÓXI NO REPARO DE TENSORES DE MADEIRA DE ESTRUTURAS DE AERONAVES

**Rogério Pinto Ribeiro**

**Carlos Alberto Cimini Jr.**

Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Mecânica, Av. Antônio Carlos, 6627, CEP 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil.

E-mail: [rogerio@vesper.demec.ufmg.br](mailto:rogerio@vesper.demec.ufmg.br), [cimini@dedalus.lcc.ufmg.br](mailto:cimini@dedalus.lcc.ufmg.br)

**Ernani Sales Palma**

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Mecânica e Mecatrônica, Av. Dom José Gaspar, 600, CEP 30535-610, Belo Horizonte, MG, Brasil.

E-mail: [palma@pucminas.br](mailto:palma@pucminas.br)

**Nilton José Lucinda de Oliveira**

Fundação Centro Tecnológico de Minas Gerais, Setor de Tecnologia Metalúrgica, Av. José Cândido da Silveira, 2000, CEP 31170-000, Belo Horizonte, MG, Brasil.

E-mail: [niltonol@cetec.br](mailto:niltonol@cetec.br)

## Resumo

A madeira tem sido utilizada como material estrutural desde os primórdios da construção aeronáutica. O recente desenvolvimento de aeronaves de construção mista utilizando madeira e compósitos deu novo impulso à sua utilização. Nas três últimas décadas foram construídas mais de 22000 aeronaves leves empregando madeira como material estrutural. Neste trabalho é apresentada uma metodologia de projeto do reparo de tensores de freijó (*Cordia goeldiana*) reforçados com laminados de fibra de vidro em matriz epóxi. Uma análise por elementos finitos de modelos de tensores típicos, sem e com reforço, foi verificada experimentalmente para tração e flambagem, esforços típicos desse tipo de componente estrutural. São também apresentados resultados de ensaios de caracterização das propriedades mecânicas dos principais materiais envolvidos – freijó e laminados com tecido *S2-glass/epóxi*.

**Palavras-chave:** Madeira, Materiais compostos, Reparo estrutural

## 1. INTRODUÇÃO

No início da indústria aeronáutica a madeira surgiu como o principal material para a fabricação de componentes estruturais de aeronaves. Dois fatores vieram posteriormente modificar essa preferência. O primeiro deles estava ligado à baixa eficiência dos adesivos para madeira disponíveis na época e o outro associado ao fato que durante a Primeira Guerra Mundial (1914-1919) a fabricação de dezenas de milhares de aeronaves militares acabou por gerar escassez de madeira de qualidade aeronáutica no final do conflito. Assim a partir da década de 30 foi iniciada a pesquisa de novos materiais capazes de substituir a madeira na fabricação de estruturas de aeronaves. Ligas de alumínio vieram atender essa demanda, com valores de resistência e rigidez específicas semelhantes às da madeira. Para se obter boa eficiência nas uniões estruturais de componentes fabricados com essas ligas, foram

utilizados processos de rebiteagem. As ligas de alumínio se mantêm até hoje como o material mais utilizado na fabricação de estruturas de aeronaves. No entanto a madeira, ainda que em menor escala, teve seu uso continuado, sobretudo nas aeronaves de pequeno porte. Nas três últimas décadas foram produzidas mais de 22000 aeronaves leves com componentes estruturais em madeira (Kitplanes, 1998). No Brasil existe ainda em operação um número considerável de aviões de instrução e planadores com estrutura fabricada em madeira. A espécie de madeira utilizada no Brasil para fabricação de estruturas aeronáuticas é o freijó (*Cordia goeldiana*), caracterizada por Brotero (1941) em ensaios de tração, compressão, cisalhamento e flambagem.

Um exame da documentação técnica vigente emitida pelos organismos governamentais reguladores e homologadores das atividades de manutenção de aeronaves revela que os processos aprovados e recomendados para reparação de avarias estruturais em componentes fabricados em madeira não sofreram grandes modificações nos últimos trinta anos, segundo FAA/AC43 (1988), EAA/CAM18 (1988) e FAA/AC65 (1976).

O uso conjunto de madeira e materiais compostos tem sido pesquisado para aplicações estruturais, tanto em trabalhos experimentais (Triantafillou e Deskovic, 1992) quanto em análises pelo métodos de elementos finitos (Williamson e Daadbin, 1992) (Avent, 1986).

Neste trabalho é proposta uma metodologia para reparo de tensores de fuselagem de aeronaves fabricadas em madeira através da aplicação de reforços fabricados em laminados de fibra de vidro/epóxi na região avariada.

Para aeronaves de configuração convencional a atuação do leme direcional produz flexão simétrica na fuselagem. Já a atuação do profundor produz flexão que será ou não simétrica em função dos fatores de carga verticais, positivos e negativos, definidos no projeto da aeronave. Usualmente a relação entre os fatores de carga verticais máximos positivo e negativo é menor ou igual a 2, segundo regulamentos aeronáuticos vigentes. Assim, os tensores de fuselagem devem ser dimensionados para suportar cargas de tração e compressão dentro dessa faixa. Como uma maximização da relação resistência/peso para estruturas de aeronaves é desejável, são utilizados altos índices de esbeltez nos tensores. Esse fato faz com que a flambagem apareça como condição limitante no dimensionamento dos mesmos, sem contudo dispensar a verificação da resistência à tração (Bruhn, 1965). Foram então realizados ensaios de caracterização para esforços de tração e flambagem em corpos de prova retirados de tábuas de freijó submetidas aos processos de seleção e secagem usualmente adotados em manutenção de aeronaves. Os laminados de fibra de vidro/epóxi foram caracterizados através apenas de ensaios de tração. Os resultados obtidos para esses materiais foram posteriormente utilizados nos modelos de elementos finitos.

## **2. METODOLOGIA EXPERIMENTAL**

### **2.1 Ensaios de caracterização de laminados de fibra de vidro/epóxi**

As propriedades mecânicas dos laminados dependem significativamente do processo empregado na sua laminação, do número de camadas e sua forma de compactação, da orientação dessas camadas em relação à direção dos esforços e do processo de cura, entre outros fatores. De modo geral a literatura fornece apenas os dados referentes a laminados unidirecionais para uma dada relação volume de fibra/volume de resina. Assim definiu-se pela caracterização dos materiais a serem utilizados nos reforços através de ensaios mecânicos em corpos de prova fabricados com processos mais próximos daqueles usualmente empregados em manutenção de aeronaves. Os ensaios de tração foram realizados em máquina Instron tipo tração/compressão com célula de carga de 100 kN, tendo como base a norma ASTM D 3039 (1989) e utilizando-se uma velocidade de deslocamento de cabeçote de 0,2 mm/min. Foram

ensaiados para cada um das direções, longitudinal e transversal, 5 corpos de prova laminados a partir de tecidos com fibras orientadas a 0° (*warp*, longitudinal) e 90° (*fill*, transversal) e os resultados são apresentados na Tabela 1. As características dos materiais utilizados para fabricação dos laminados são descritas a seguir:

**Reforço:** os laminados foram confeccionados com tecidos de fibra de vidro de alta resistência, do tipo *S2-Glass*, fabricados pela *Hexcel Corporation*. O produto utilizado tem o código de fabricante 4522. Trata-se de um tecido tipo *plain*, com 53% de filamentos *warp* e 47% de filamentos *fill*. A espessura por camada é de 0,10 mm para laminados com relação de 50% de volume de fibra. A gramatura é de 126 g/m<sup>2</sup>;

**Matriz:** foi utilizada a resina epóxi *Araldite*<sup>®</sup> LY 5052 BR e o endurecedor HY 5052 BR fabricados pela *Ciba Especialidades Químicas Ltda.* com a proporção recomendada de 100 g de resina para 38 g de endurecedor.

## 2.2 Ensaios de caracterização do freijó

Sendo a madeira um material composto natural, optou-se pela utilização da mesma norma ASTM D 3039 (1989) para a caracterização do freijó em tração nas direções paralela e transversal às fibras. Essa opção se mostrou adequada já que foram observados modos de falha típicos, tendo sido obtidos valores de resistência e rigidez esperados para a espécie (Brotero, 1941) com baixa dispersão dos resultados. Para cada direção foram ensaiados 5 corpos de prova retirados de uma tábua pré-selecionada para uso em construção aeronáutica e os resultados são também mostrados na Tabela 1.

**Tabela 1.** Resultados dos ensaios de caracterização de materiais em tração

Material	Tensão de Ruptura (MPa)			Módulo de Elasticidade (GPa)		
	Média	Desvio Padrão	Coef. Variação %	Média	Desvio Padrão	Coef. Variação %
<i>S2Glass – Warp</i>	497	27	5,4	29,72	1,65	5,6
<i>S2Glass - Fill</i>	421	36	8,5	25,54	1,37	5,4
Freijó Tração paralela	117	7	6,2	19,17	1,20	6,3
Freijó Tração transversal	3,9	0,39	9,9	0,7	0,046	6,7

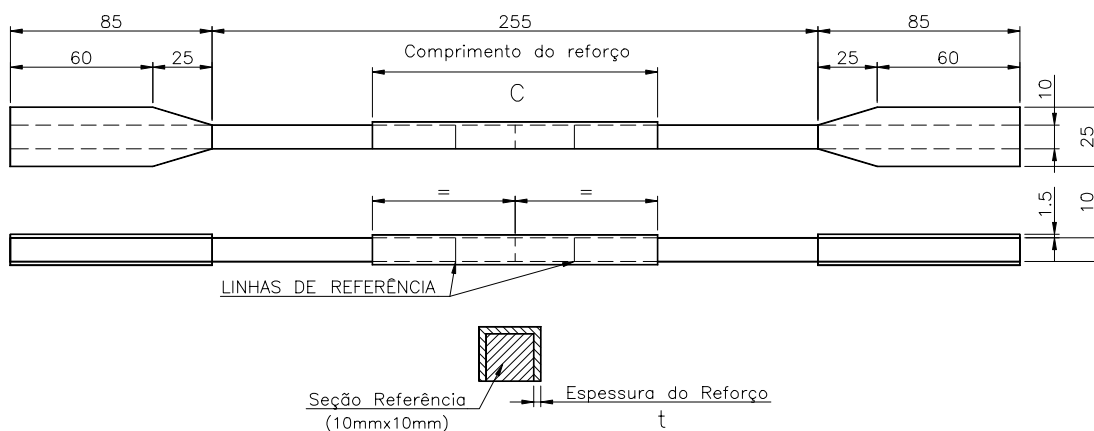
## 2.3 Ensaios de simulação de reparos

Visando validar o modelo de elementos finitos criado para análise estrutural de reparos de tensores, foram realizadas campanhas de ensaios de tração e de flambagem. Nos ensaios de flambagem foram consideradas conservativamente condições de extremidades bi-articuladas. Nos dois casos foram ensaiados preliminarmente corpos de prova construídos unicamente em freijó com dimensões semelhantes às encontradas nos tensores de fuselagem de aeronaves. Esses corpos de prova são referenciados neste trabalho como “sem reforço” e visam estabelecer uma referência do comportamento estrutural do tensor original. Posteriormente foram ensaiados corpos de prova com dimensões idênticas às dos corpos de prova “sem reforço” cortados ao meio em seu comprimento, de modo a simular uma ruptura. Após alinhadas suas metades, um reforço fabricado com laminado de fibra de vidro/epóxi foi aplicado unindo-as de forma equidistante a partir do ponto do corte. Como uma das faces do tensor é colada ao revestimento da fuselagem em aeronaves de madeira, optou-se pelo uso de um perfil C para o reforço garantindo acessibilidade de colocação do mesmo na área de avaria sem a necessidade de retirada do revestimento da fuselagem nesse local. Foi proposta uma geometria para o perfil C com espessura de 1,3 mm e comprimento interno de alma e abas de 10 mm, tendo a sua colagem no tensor sido feita com adesivo *Araldite*<sup>®</sup> de secagem normal. Esses corpos de prova são a seguir referenciados como “com reforço”. Os ensaios foram feitos em máquina Instron com o uso de extensômetro de 50 mm de abertura inicial fixado aos

corpos de prova nas linhas de referência. Garras-padrão foram utilizadas para os ensaios de tração e um dispositivo foi fabricado para permitir a simulação de apoio rotulado nas duas extremidades para os ensaios de flambagem.

Para os ensaios de tração foram incorporados *tabs* fabricados em ipê (*Tabebuia spp*) colados com adesivo *Araldite*<sup>®</sup> nas extremidades das peças de freijó. Na Figura 1 são apresentados corpos de prova de tração “com reforço”. A geometria dos corpos de prova de tração “sem reforço” pode ser inferida à partir da Figura 1 retirando-se o perfil C e o corte.

Os corpos de prova dos ensaios de flambagem são do tipo prismático, sem *tabs*, com seção transversal quadrada com aresta de 10 mm e constante ao longo de seu comprimento L. O comprimento foi variado de modo a varrer a faixa típica de esbeltez verificada em tensores de fuselagem, situada para valores de índice de esbeltez ( $L/\rho$ ) entre 80 e 200, onde  $\rho$  é o raio de giração da seção. De modo análogo aos corpos de prova de tração, os corpos de prova de flambagem “sem reforço” e “com reforço” se diferenciam pela presença do perfil C e do corte.



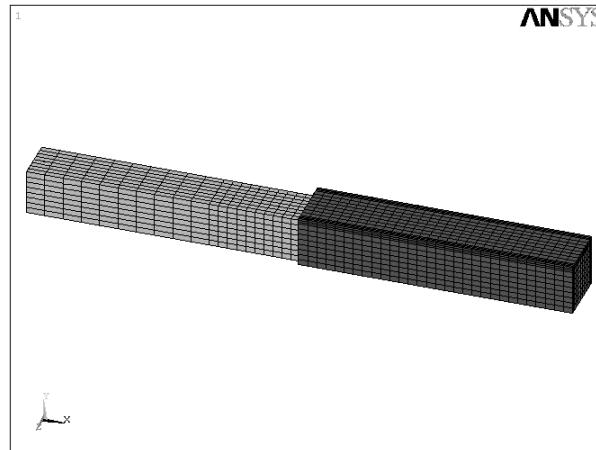
**Figura 1.** Corpos de prova de tração “com reforço”

### 3. MODELOS

O programa comercial ANSYS (1997) foi utilizado como plataforma de análise dos modelos de elementos finitos. Todas as análises efetuadas foram lineares e elásticas. Nos modelos de corpos de prova “com reforço” a região do reforço apresenta especial dificuldade na análise pois nela ocorre uma interação entre materiais não isotrópicos e com grande variação em seus módulos de elasticidade. Modelos numéricos simplificados foram usados por Avent (1986) e Williamson e Daadbin (1992), para modelar casos semelhantes. Dávila (1999) sugere estratégias para aumentar a eficiência dessa modelagem. No presente trabalho, para análise de tensões de tração, foi gerado um modelo de elementos sólidos *SOLID45* (ANSYS, 1997) com 8 nós e 6 graus de liberdade por nó, apresentado na Figura 2. O mesmo tipo de elemento foi utilizado nos dois materiais (freijó e laminado de fibra de vidro/epóxi). Na definição das propriedades dos materiais foram utilizados os valores apresentados na Tabela 1. O filme de adesivo não foi representado nesse modelo. De forma a reduzir o número de elementos foi utilizada condição de simetria. Para modelagem das condições impostas pela máquina de ensaio adotou-se, como condições de contorno nos nós pertencentes à seção contida pelo plano de simetria, restrição da translação na direção do eixo X (eixo longitudinal). Carga unitária foi aplicada nos nós da seção da extremidade, de forma a simular tensão remota constante e igual a 0,01 MPa.

Para o caso da flambagem foram gerados modelos com elementos de viga *BEAM4* (ANSYS, 1997), bidimensionais, elásticos, com 2 nós e 6 graus de liberdade por nó. Os

valores constantes da Tabela 1 foram também utilizados para definição das propriedades dos materiais. Na região do reforço foi gerada uma malha composta por elementos distintos superpostos com propriedades de cada um dos dois materiais, freijó e laminado de fibra de vidro/epóxi, mesclados através do comando *merge* (ANSYS, 1997). Esse modelo teve o nó de uma das extremidades restrito na direção do eixo X (eixo longitudinal), simulando a base fixa da máquina de ensaios. Na outra extremidade, para simulação do cabeçote móvel, foi imposta uma translação de compressão na direção do mesmo eixo. Em ambas as extremidades as rotações foram liberadas para simulação de flambagem de uma peça bi-articulada, enquanto que as translações na direção do eixo Y (eixo transversal) foram restritas.



**Figura 2.** Modelo de simulação do corpo de prova de tração “com reforço”

## 4. RESULTADOS

Os resultados são apresentados graficamente em curvas típicas tensão *vs.* deformação para ensaios de tração e tensão crítica *vs.* índice de esbeltez ( $L/\rho$ ) para ensaios de flambagem. Além disso foram incluídas figuras contendo isocurvas para o modelo de tração. Adotou-se a seção transversal do tensor “sem reparo” (10 mm x 10 mm) como área de referência para o cálculo das tensões.

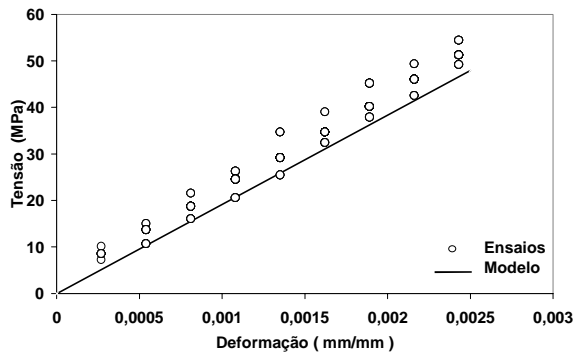
### 4.1 Tração

Os resultados dos ensaios de tração apresentaram de modo geral valores de dispersão típicos para o tipo de material e de sollicitação. Os modelos foram capazes de simular satisfatoriamente a rigidez obtida nos resultados experimentais, conforme mostrado nas Figuras 3 e 4, respectivamente para tensores “sem reforço” e “com reforço”. Na Figura 3 observa-se discreta tendência do modelo em subestimar a rigidez dos tensores ensaiados. Esse fato pode ser atribuído à dispersão dos dados na determinação da rigidez utilizada no modelo (freijó ensaiado na caracterização, da ordem de 6 % segundo Tabela 1).

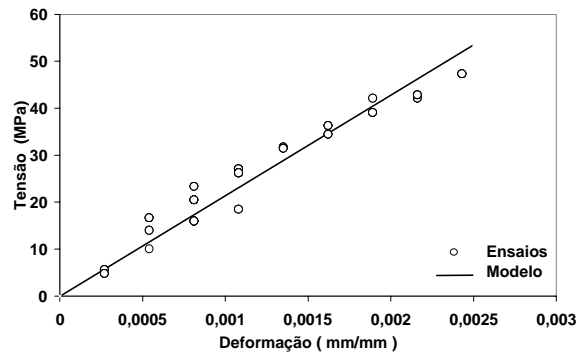
Na Figura 5 é mostrado que o modelo aponta para um aumento de rigidez provocado pela introdução do reforço de fibra de vidro/epóxi na região do reparo. Um exame da Figura 6 indica, no entanto, que essa previsão não foi confirmada pelos ensaios já que seus resultados mostram uma redução no valor da rigidez de 5 % ao se incorporar o reforço de laminado de fibra de vidro/epóxi à região de reparo. A não inclusão do filme de adesivo no modelo pode ser apontada como uma possível explicação para esse comportamento.



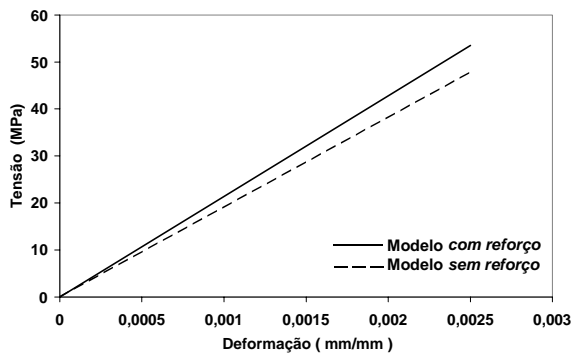
Para tensores reforçados foi observado nos ensaios que a ruptura se deu por cisalhamento do freijó na região de aplicação dos reforços. Um exame das Figura 7 e 8 mostra que o modelo foi capaz de identificar concentrações de tensões de cisalhamento e axiais nessa região. Isso sugere uma redução na resistência do tensor original conforme observado nos ensaios. As tensões de ruptura dos tensores “com reforço” foram menores em 30 % que as obtidas para os tensores “sem reforço” (Figura 9). Entretanto, para tensores de fuselagens as tensões de flambagem são limitantes e, portanto, uma redução da resistência à tração não implica necessariamente na necessidade de alteração do reparo proposto.



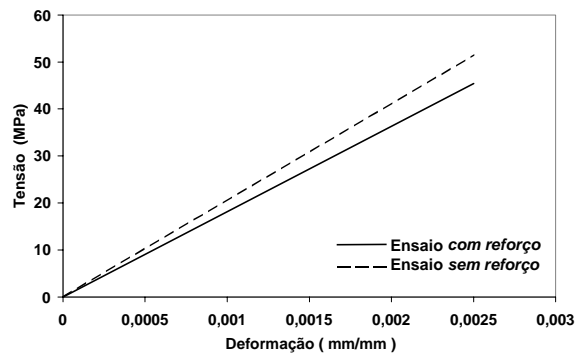
**Figura 3.** Curvas tensão vs. deformação de modelo e ensaios de tração em tensores “sem reforço”



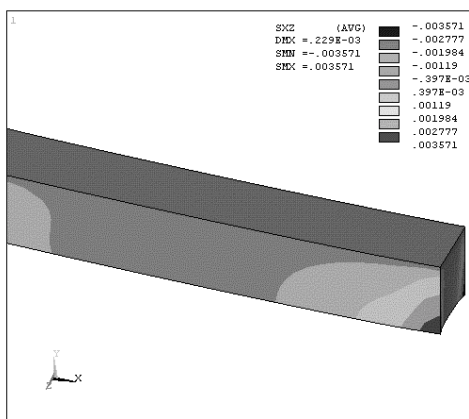
**Figura 4.** Curvas tensão vs. deformação de modelo e ensaios de tração em tensores “com reforço”



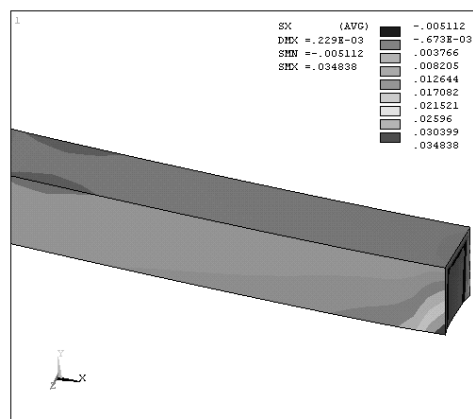
**Figura 5.** Curvas de tensão vs. deformação para modelos “sem reforço” e “com reforço”



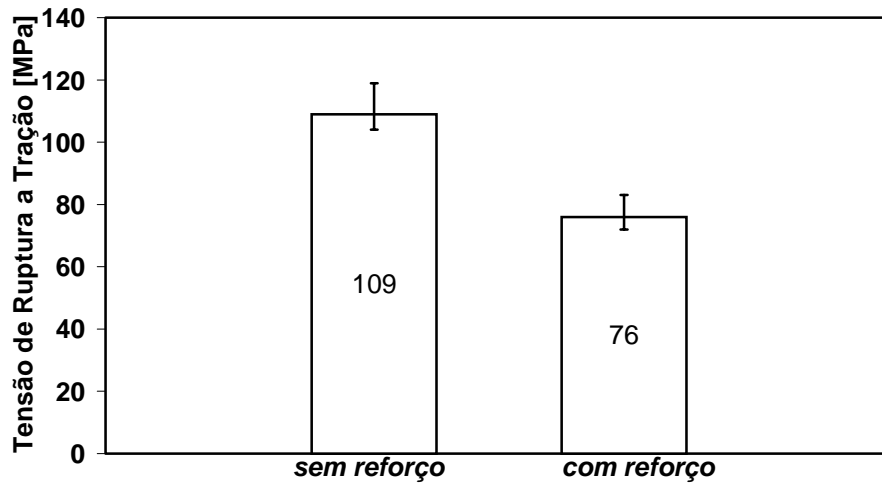
**Figura 6.** Curvas tensão vs. deformação para linhas de tendência dos ensaios “sem reforço” e “com reforço”



**Figura 7.** Variação da tensão de cisalhamento xz para modelo de tração “com reforço”



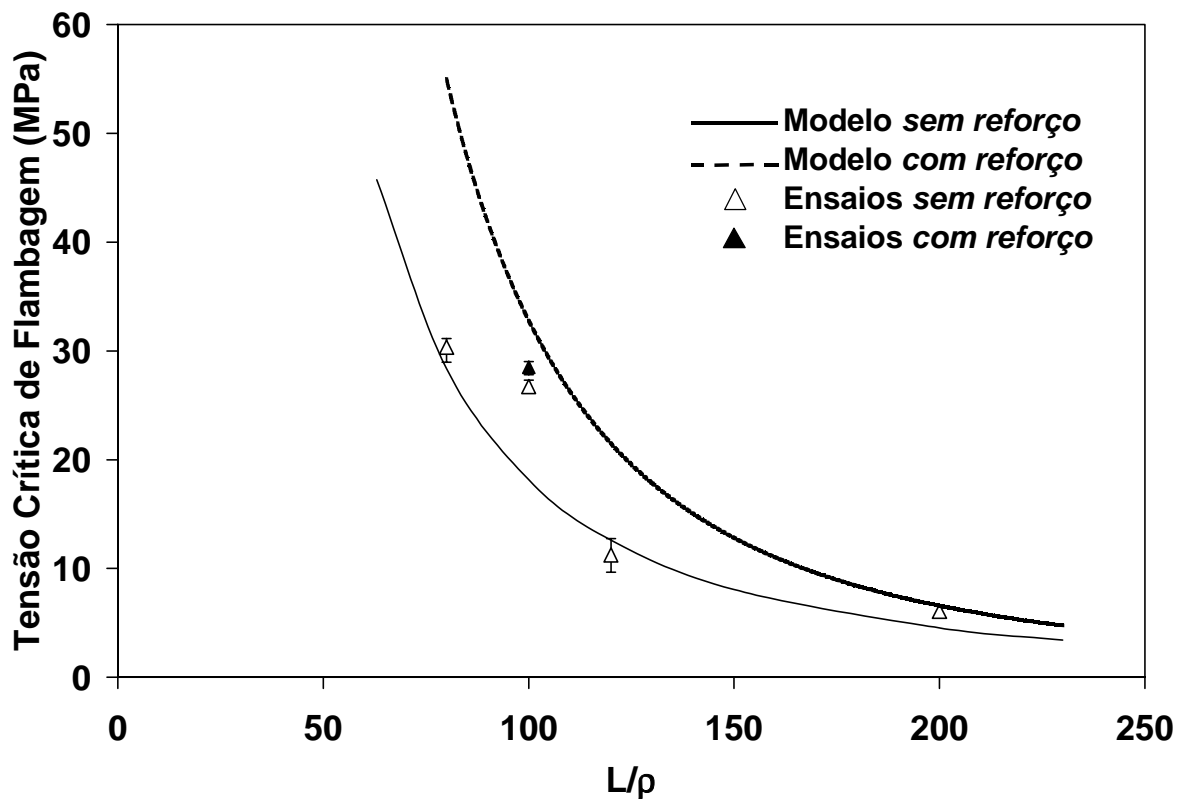
**Figura 8.** Variação da tensão axial no eixo x para modelo de tração “com reforço”



**Figura 9.** Tensões de ruptura à tração em tensores “sem reforço” e “com reforço”

#### 4.2 Flambagem

A Figura 10 apresenta os resultados das tensões críticas de flambagem vs. índice de esbeltez ( $L/\rho$ ) para os modelo e ensaios de tensores “sem reforço” e “com reforço”. As simulações das tensões críticas de flambagem pelos modelos correlacionaram com os dados obtidos experimentalmente de forma satisfatória (Figura 10). Os ensaios demonstraram que a aplicação dos reparos aumentou em 13 % a tensão admissível à flambagem, o que sugere a viabilidade de aplicação do reparo proposto.



**Figura 10.** Curvas de tensão crítica de flambagem vs.  $L/\rho$  para ensaios e modelos

## 5. CONCLUSÕES

Foi desenvolvida uma metodologia de reparos de tensores de madeira com a utilização de reforços de tecidos laminados de fibra de vidro/epóxi. Tal metodologia usa modelos de elementos finitos como ferramenta de projeto. Ensaios mostraram que a introdução do reparo induziu perda de 5 % na rigidez e de 30 % na resistência para tração e aumento de 13 % de resistência na flambagem. Resultados experimentais validaram a utilização dos modelos para prever a rigidez para tração e a carga crítica para flambagem bi-articulada dos tensores reparados. Concentrações de tensões foram identificadas no modelo de tração indicando modos de falha verificados nos ensaios. Trabalhos adicionais devem ser realizados para plena qualificação da metodologia proposta.

## AGRADECIMENTOS

- HEXCEL CORPORATION – USA, pela doação dos tecidos de fibra de vidro *S2-Glass* utilizados na fabricação dos laminados dos reparos;
- CIBA ESPECIALIDADES QUÍMICAS LTDA., pela doação do conjunto resina epóxi/endurecedor utilizado na fabricação dos laminados dos reparos.

## 6. REFERÊNCIAS

- ANSYS User's Manual, Versão 5.4, 1997.
- ASTM D 3039, Standard Test Method for Tensile Properties of Fiber-Resin Composites, 1989, American Society for Testing Materials, pp.117-120.
- Avent, R., 1986, "Design Criteria for Epoxy Repair of Timber Structures", Journal of Structural Engineering, Vol. 112, No. 2, pp.222-240.
- Brotero, F.A., 1941, "Dados Experimentais do Freijó", Instituto de Pesquisas Tecnológicas de São Paulo, Boletim 29, 52p.
- Bruhn, E.F. 1965, "Analysis and Design of Flight Vehicle Structures", Tri-State Offset Company, USA.
- Dávila, C.G. and Chen, T.K., 1999, "Advanced Modeling Strategies for the Analysis of Tile-Reinforced Composite Armor", NASA Technical Memorandum NASA/TM-1999-209352, 16p.
- EAA/CAM18, 1988, "The Civil Aeronautics Manual 18", EAA (Experimental Aviation Association) Aviation Foundation, Inc., 210p.
- FAA/AC65, 1976, "Airframe & Powerplant Mechanics", Federal Aviation Administration, 601p.
- FAA/AC43, 1988, "Acceptable Methods, Techniques, and Practices – Aircraft Inspection and Repair", Federal Aviation Administration, 315p.
- Kitplanes, 1998, Vol. 15, No. 12, pp. 30-77.
- Triantafillou, T.C. and Deskovic, N., 1992, "Prestressed FRP Sheets as External Reinforcement of Wood Members", Journal of Structural Engineering, Vol. 118, No. 5, pp. 1270-1284.
- Williamson, C. and Daadbin, A., 1993, "An investigation into using finite element analysis for epoxy resin joints", Materials & Design, Vol. 14, No. 2, pp.91-95.

# ANÁLISE TEÓRICA E EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO DE TRELIÇAS MISTAS PARA EDIFICAÇÕES DE ANDARES MÚLTIPLOS

**Enio Pontes de Deus**

Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, 60.455-790, Fortaleza, CE, Brasil. E-mail: [epontes@dem.ufc.br](mailto:epontes@dem.ufc.br)

## Resumo

Os sistemas de vigamentos de piso em treliças mistas apresentam maior rigidez e economia em relação ao sistema convencional de pisos, que são apoiados sobre elementos metálicos sem interação. Este trabalho é resultado de uma intensa investigação sobre orientações de projeto e monitoração de um sistema estrutural em treliça mista. Inicialmente, são apresentados os critérios de dimensionamento da estrutura com *deck*-metálico incorporado. Com base nesses procedimentos é desenvolvida uma análise experimental, em escala real, para estudo do comportamento da treliça fabricada de perfis de chapa dobrada e conduzida até a ruína. O dimensionamento considera a ruína controlada pelo banzo inferior sob tensão de ruptura do material. O modo de colapso foi verificado devido a uma fratura frágil que se originou na corda inferior.

**Palavras-chave:** Estrutura de aço, Treliça mista, Fratura

## 1. INTRODUÇÃO

As estruturas mistas, face aos avanços conseguidos em nossos dias nas técnicas de construção e aprimoramento dos materiais empregados, permanecem como solução estrutural eficiente e, por isto, bastante difundida no meio técnico (Deus, 1993).

Os estudos dos conceitos relacionados à construção mista tiveram evolução associada historicamente ao desenvolvimento do concreto e do aço como materiais resistentes em um sistema estrutural.

A utilização de elementos treliçados como elementos resistentes em sistemas de pisos mistos surgiu na década de 60 na forma de treliças leves mistas ou *Open-Web Steel Joists*.

Vários ensaios foram conduzidos por diferentes pesquisadores e fabricantes de estruturas, que chegaram à conclusão de que este sistema é uma alternativa viável para sistemas de vigamento em estruturas mistas.

O estudo de **Treliças Mistas** teve origem com Iyengar (1973), que testaram treliças mistas utilizadas em sistemas de pisos para o edifício SEARS TOWER em Chicago.

Bjorhovde (1981), realizou o teste de uma treliça mista com 12000 mm de comprimento e 850 mm de altura, projetada para um edifício em Edmonton, Canadá. O colapso da estrutura foi precipitado pela flambagem da diagonal mais comprimida, com uma carga correspondente a 95% da carga de projeto.

Atualmente, os sistemas estruturais mistos tornaram-se importantes e atrativos para os projetistas, pois além de reduzir o custo de material e mão-de-obra, fornecem um sistema com maior rigidez e resistência, apresentando ainda várias vantagens, como:

- diminuição do peso global da estrutura; aumento de áreas livres de colunas permitindo uma maior flexibilidade na utilização da edificação; redução da altura do viga-piso; redução de flechas; utilização eficiente de dois materiais básicos da construção civil: aço e concreto; padronização dos componentes do sistema estrutural; eliminação dos escoramentos provisórios pela utilização de deck-metálico auto-portante; a montagem ganha em rapidez e precisão simplificando o acompanhamento técnico; utilização de telas soldadas; maior segurança no ambiente de trabalho; possibilidade de trabalho simultâneo em vários pisos; redução dos custos finais.

As treliças são fabricadas utilizando-se perfis selecionados pelo projetista dentro de uma larga variedade de seções de aço disponíveis. As cordas e diagonais podem ser escolhidas entre seções tais como: perfis tubulares de seção quadrada ou retangular, cantoneiras, tês, perfis de chapa dobrada, entre outros.

Afim de simplificar o processo de fabricação, as diagonais das treliças devem ser ligadas por soldas de filete diretamente nas laterais das cordas, dispensando o uso de chapas de ligação (*gusset*), que encarecem a fabricação e diminuem o espaço disponível para passagem de tubulações de serviços (dutos de ar condicionado, tubulações, eletrodutos, etc.).

Entretanto, a eliminação da chapa de *gusset* acarreta uma redução na área disponível para execução das soldas nas extremidades das diagonais provocando a superposição das mesmas quando se procura conservar o ponto de trabalho teórico. Para que seja possível a execução das ligações sem obstrução, é necessário deslocar o ponto de trabalho (PT) provocando excentricidades nos nós da treliça. A consideração destas excentricidades é obrigatória na fase de análise estrutural, de modo que seja possível garantir a resistência adequada dos elementos e das ligações.

Existem outras considerações de projeto que viabilizam a utilização de estruturas mistas:

- Projeto nos estados limites;
- Emprego de conectores de cisalhamento;
- Redução das flechas e vibrações devido ao acréscimo de rigidez, quando submetida às cargas de serviço;

Este trabalho, salvo indicado explicitamente o contrário, atende às recomendações da Norma Canadense CAN S16.1- M94, com base no projeto para estados limites aplicados à treliça leve mista. Como existem poucos resultados referentes a testes de treliças mistas de maior capacidade de carga, escolheu-se então, analisar o comportamento de uma treliça mista através de teste em escala real que caracterize as situações mais comuns de utilização de tais sistemas na prática corrente de profissionais e engenheiros estruturais.

## **2. DIMENSIONAMENTO DA TRELIÇA MISTA**

O dimensionamento consiste em verificações de resistência do sistema estrutural durante as seguintes fases de carregamento:

- instalação do deck-metálico, lançamento do concreto e cargas de ocupação.

Durante as fases construtivas, principalmente durante o lançamento do concreto, a verificação da corda superior se torna imperativa. Isto se deve ao fato da treliça não ser escorada gerando esforços de compressão consideráveis.

Na última fase do dimensionamento, considera-se que a laje de concreto passa a funcionar como corda superior da treliça, pois esta já pode ser considerada como um elemento estrutural plano.

A resistência à flexão de uma treliça mista é obtida quando a seção da corda inferior escoou em tração, e o concreto atinge sua resistência à compressão efetiva. Admite-se que existe uma interação completa e que a linha neutra se situa acima da nervura da laje (Fig. 1). A força resistente de tração fatorada na corda inferior é dada por :

$$T_r = \phi A_s F_y \quad (1)$$

Sendo:  $A_s$  = Área da seção transversal da corda inferior e  $F_y$  = Tensão de escoamento do aço.

A resistência à compressão efetiva do concreto é calculada utilizando-se uma área efetiva de concreto obtida pela multiplicação da largura efetiva por uma espessura efetiva do mesmo. A largura efetiva é dada pela cláusula 17.3.2 da S16.1. A resistência à compressão é calculada pela seguinte equação:

$$C_r = 0.85 \phi_c f_{ck} a b_e \quad (2)$$

onde :  $\phi_c = 0,60$

$f_{ck}$  = Resistência média característica do concreto à compressão;

$a$  = Espessura da parte comprimida da laje de concreto;

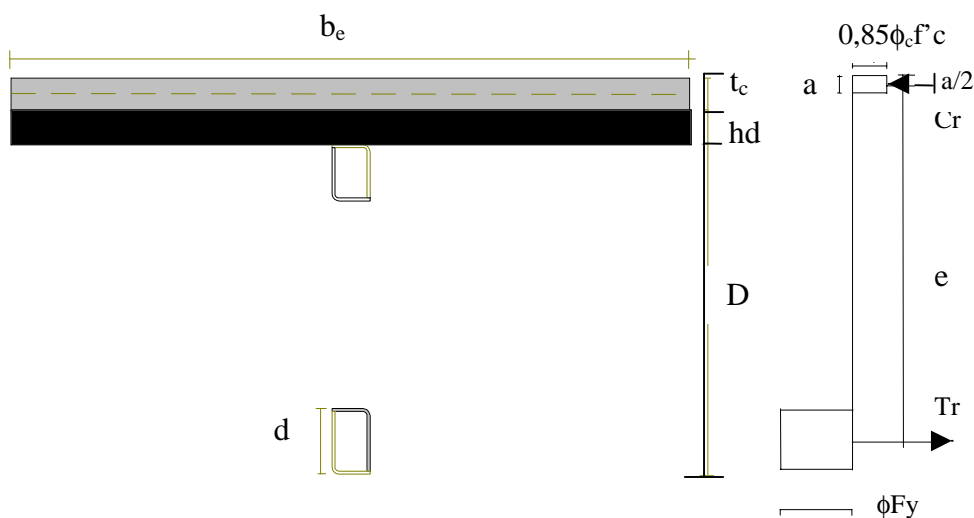
$b_e$  = Largura efetiva da laje de concreto.

Para que haja equilíbrio, tem-se:

$$\phi A_s F_y = 0.85 \phi_c f_{ck} a b_e \quad (3)$$

A espessura efetiva de concreto que está submetida à compressão é:

$$a = \frac{\phi A_s F_y}{0.85 \phi_c f_{ck} b_e} \quad (4)$$



**Figura 1.** Momento resistente de uma treliça mista.

A condição de “a” ser menor que “t<sub>c</sub>” indica que a linha neutra permanece no concreto, obtendo-se com isto uma maior eficiência do sistema estrutural. A área de concreto em tração é desprezada.

O momento resistente último é obtido através da equação a seguir:

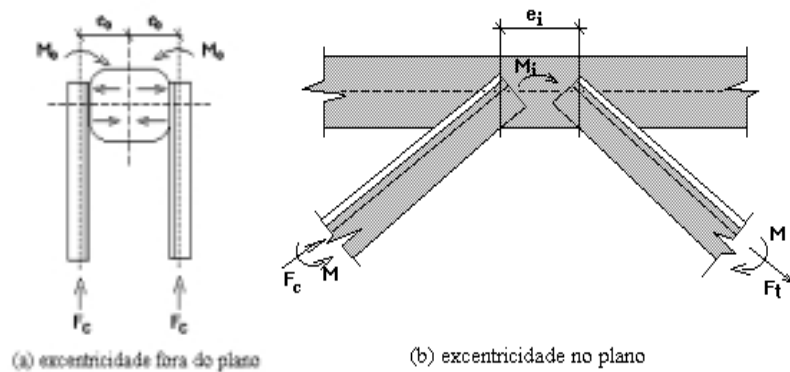
$$M_{rc} = \phi A_s F_y e \quad (5)$$

onde “e” representa a distância entre o centro de gravidade da corda tracionada ao centro de gravidade da seção comprimida de concreto.

## 2.1 Diagonais

As diagonais de uma treliça mista devem ser dimensionadas para suportar o esforço cortante vertical total. Estas barras são solicitadas por esforços axiais e momentos de extremidade nas duas direções, momentos estes decorrentes das rotações impostas nas ligações soldadas pelas deformações da treliça e dos efeitos das excentricidades nodais. Estas excentricidades são causadas pelos deslocamentos dos pontos de trabalho (PT) necessários para a execução destas ligações sem necessidade de cortes adicionais nas extremidades das peças.

Os momentos provenientes das excentricidades fora do plano da treliça são auto equilibrados (Fig. 2).



**Figura 2.** Momentos originados das excentricidades nodais da treliça.

## 2.2. Conectores de Cisalhamento

No dimensionamento de treliças mistas o cálculo dos conectores é efetuado admitindo-se a interação total entre a laje de concreto e a corda superior da treliça. A força de cisalhamento horizontal resistida pelos conectores entre os pontos de apoio e máximo momento fletor é dada por:

$$V_h = \phi A_{sc} F_y \quad (6)$$

onde :  $A_{sc}$  = Área da seção transversal do conector de cisalhamento.

A Norma Canadense CAN S16.1-M94, admite que os conectores de cisalhamento devem ser espaçados uniformemente ao longo do comprimento da corda.

### 2.3. Dimensionamento da Treliça Testada

Para realização do ensaio dimensionou-se uma treliça mista com 11910 mm de comprimento, com espaçamento de centro a centro entre treliças de 3000 mm. A largura efetiva da laje foi de 2350 mm, largura esta que foi adotada para o ensaio experimental. O deck-metálico utilizado foi fabricado pela PERKROM, e usado invertidamente com 76 mm de altura e tensão de escoamento de 250 MPa. A laje de concreto possuía espessura de 65 mm e  $f'_c$  de 20 MPa. O concreto foi armado com uma armadura mínima de tela soldada Q92 (TELCON) e colocado à 96 mm de altura em relação ao fundo do deck-metálico para controle da fissuração da laje.

As cordas e diagonais da treliça foram formadas por tubos retangulares compostos de perfis cantoneira de chapa dobrada. As demais diagonais foram compostas por cantoneiras de chapa dobrada. O aço estrutural adotado para as cordas e diagonais foi o SAC 41. Todas as peças de aço foram padronizadas com uma espessura de 6.35 mm. Adotou-se a configuração tipo *Warren* com 8 painéis, com as diagonais inclinadas aproximadamente a  $45^\circ$ , observando um modo adequado para a determinação de espaços livres para a passagem de dutos das instalações. A altura compreendida entre a superfície de concreto e a face inferior da corda inferior foi de 720 mm.

A treliça mista foi projetada para uma carga permanente total  $W_D$  correspondente a 11.7 kN/m e sobrecarga de ocupação  $W_L$  de 5.0 kN/m. De acordo com a Norma Canadense S16.1 (CANM, 1989), seções 7.2.2 e 7.2.3 o valor da carga total fatorada  $W_f$  é dado por :

$$W_f = \alpha_D W_D + \alpha_L W_L, \quad \text{sendo } \alpha_D = 1.25 \text{ e } \alpha_L = 1.5 \quad (7)$$

Os esforços máximos calculados utilizados no pré-dimensionamento dos elementos da treliça, foram obtidos a partir do valor de  $W_f$  correspondente a 263.4 kN, resultando um momento fletor fatorado  $M_f$  de 392 kN.m e um esforço cortante fatorado  $V_f$  de 132 kN. O momento resistente  $M_{rc}$  calculado foi de 441 kN.m, 1.13 vezes o valor de  $M_f$ .

Com o objetivo de simular este carregamento, projetou-se a treliça para suportar quatro cargas concentradas, equivalentes a carga distribuída total, aplicadas em quatro nós como mostra a figura 3. A flecha devido à carga correspondente a fase construtiva de lançamento do concreto da laje mista, foi estimada com um valor de 20 mm. A flecha máxima para o carregamento total imposto foi de 13.3 mm, menor que o máximo valor recomendado pela S16.1 de  $L/360$  ou 33 mm.

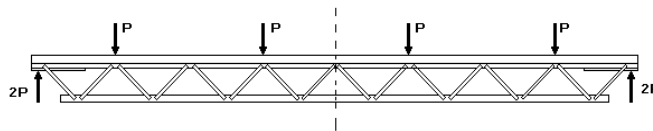


Figura 3. Diagrama de carregamento.

A treliça mista foi dimensionada para que a corda inferior atingisse não mais a tensão de escoamento, mas sua tensão de ruptura ( $F_u$ ), ou seja:

$$T_r = \phi A_s F_u \quad (8)$$



## 2.4. Triangularização da Treliça

Entre as configurações conhecidas para treliça escolheu-se a tipo *Warren*, pois ela permite maiores espaços livres entre as diagonais para instalação de dutos e serviços (Fig. 4).

As diagonais da treliça são conectadas diretamente nas cordas por meio de soldas de filete. Devido a este tipo de conexão torna-se necessário a introdução de excentricidades nodais devido ao deslocamento do ponto de trabalho (PT). Esta medida evita cortes adicionais nas extremidades das diagonais que dificultam e aumentam o custo de fabricação (Fig. 5).

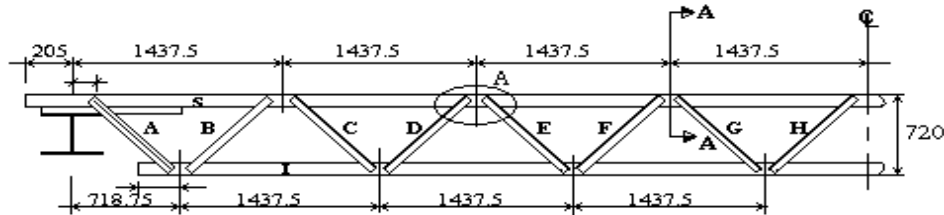


Figura 4. Detalhamento das barras e nós da treliça.

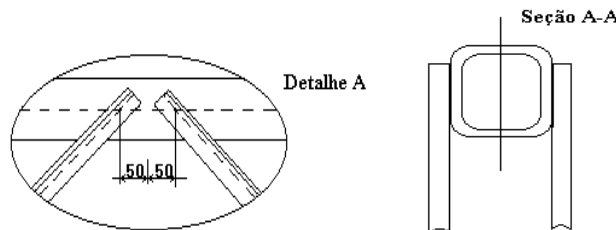


Figura 5. Detalhe A e seção A-A da figura 4.

## 2.5. Modelagem Para Análise Estrutural

De posse dos desenhos de detalhes (desenho de fabricação) são elaborados os modelos estruturais para serem analisados por computador. O primeiro modelo corresponde à treliça isolada (Fig. 6), onde são consideradas as fases construtivas de colocação do deck-metálico e do lançamento do concreto e não há nenhuma interação entre a laje mista e a treliça. O modelo 2 corresponde à treliça mista (Fig. 7), ou seja, situação em serviço em que há uma interação entre a laje mista e a treliça, sendo analisado sob cargas fatoradas de ocupação superpostas com as cargas permanentes (peso próprio). Neste método, considera-se a fração comprimida da área da seção transversal da laje de concreto como uma área equivalente em aço, transformada pela razão entre os módulos de elasticidade dos dois materiais ( $n = E_s / E_c$ ). As ligações entre os elementos que compõem a laje e a corda superior, são feitas por pequenos segmentos denominados "*shear-links*".

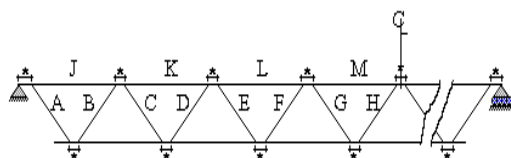


Figura 6. Modelo 1 - treliça isolada (construção não mista).

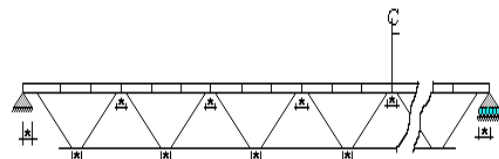


Figura 7. Modelo 2 - Treliça Mista

### 3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

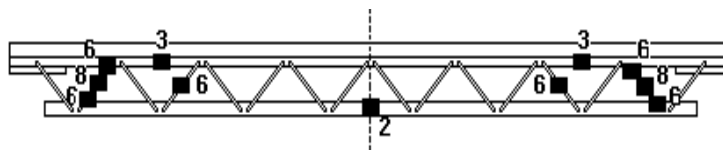
Neste estudo procurou-se investigar vários aspectos do comportamento da treliça, que são:

- deflexão da treliça na fase não mista devido ao peso próprio do concreto no sentido de avaliação do desempenho em construções não escoradas;
- deflexão e tensão nos membros devido à retração do concreto em um período de 90 dias;
- teste da treliça mista até a fase de ruína;
- flecha máxima da treliça mista e possíveis modos de ruína do modelo;
- distribuição de tensões no concreto na região central da treliça;
- comportamento dos conectores de cisalhamento ;
- estado de fissuração longitudinal do concreto;
- determinação dos esforços nas cordas e diagonais.

Ensaio de resistência dos conectores de cisalhamento, foram executados antes do teste destrutivo do modelo para se definir a distribuição dos conectores ao longo da corda superior da treliça. A qualidade do concreto foi avaliada através de testes de compressão de corpos de prova cilíndricos. Antes da ruína ser atingida, o conjunto foi devidamente instrumentado para a determinação da frequência natural da treliça mista. Isto teve como objetivo principal avaliar o aspecto de conforto humano relativo a vibração devido ao impacto de calcanhar ("*Heel Drop*" Test).

#### 3.1. Instrumentação

As medidas das deflexões foram executadas com o uso de um deflectômetro mecânico, com precisão de 0,01 mm e curso máximo de 25 mm, localizado no centro da treliça e tendo como nível de referência a face inferior da corda tracionada. As leituras das deformações nas barras foram efetuadas por 60 extensômetros elétricos de resistência (Strain Gauges) tipo KYOWA e SHOWA com comprimento de resistência de 5 mm, resistência de 120 Ohms e fator de  $2,10 \pm 1\%$  (gauge factor). Sua distribuição na estrutura está mostrada na figura 8.



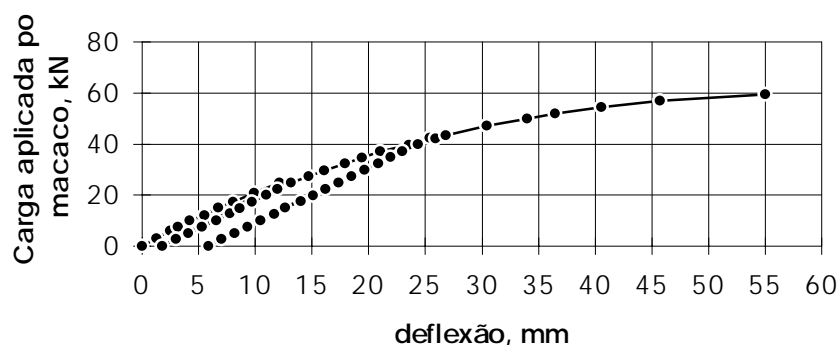
**Figura 8.** Posicionamento dos extensômetros elétricos na treliça mista.

#### 3.2. Teste Final

Examinando a figura 9, pode-se observar o comportamento da estrutura desde a pré-carga até a ruína, onde a carga aplicada é plotada versus deflexões ocorridas no centro da treliça.

Para a carga de 55 kN foi obtida a tensão de escoamento  $f_y$  da corda inferior. Quando a carga total era de 240 kN, ouviu-se grandes estalos simultâneos, ocorrendo uma ruptura brusca, quase sem aviso, da treliça mista, sendo esta seccionada em sua região central. Houve uma ruptura frágil da solda de união das duas metades da treliça metálica. Antes da queda foi possível a percepção do seccionamento da corda inferior.

Os ruídos que antecederam a queda foram originados da ruptura da solda. A carga de ruptura foi então de 60 kN/atuador. A deflexão total no instante que antecedeu a queda da estrutura foi de 55 mm.



**Figura 9.** Gráfico carga versus deslocamento no centro da treliça mista.

#### 4. CONCLUSÃO

O estudo experimental desenvolvido neste trabalho possibilitou observar o comportamento de uma treliça mista, em escala real, utilizando perfis leves de chapa dobrada, quando solicitada por quatro cargas concentradas nos quartos de vão.

Para as condições impostas de temperatura e umidade, constatou-se que praticamente não houve retração considerável na laje mista, ocorrendo formação de fissuras com uma abertura média na ordem de 0,2 mm. As deflexões e deformações variaram de forma lenta e contínua num período de 70 dias até estabilizar um valor máximo de 2,8 mm. A consideração especial do uso de tela soldada na laje de concreto contribuiu no controle do fissuramento devido à retração do concreto e variações termohigrométricas.

Uma vez reforçadas as diagonais e demais componentes da treliça para tensões correspondentes a  $F_u$  da corda inferior, não verificou-se mais a falha de nenhum componente a não ser da solda existente na corda inferior, que devido ao modo pela qual foi executada, tornou-se o ponto mais fraco levando a estrutura à ruína.

Para as emendas de topo soldadas das cordas da treliça, deve-se adotar medidas que possam garantir uma penetração total através do emprego de juntas pré-qualificadas da AWS. Uma análise posterior desta solda demonstrou uma falta de penetração e um alto índice de porosidade.

#### 5. REFERÊNCIAS

- Salmon C. G., Johnson J. E., 1996. Steel Structures: Design and Behavior: Emphasizing Load and Resistance Factor Design, Hardcover, 4<sup>th</sup> Edition.
- Deus, E.P., 1993. Treliças mistas para edificações de andares múltiplos com uso de perfis leves de chapa dobrada. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brasil.
- Iyengar, S.H., Zils, J.J., 1973. Composite floor system for sears tower. AISC v.10.
- Bjorhovde, R., 1981. Full-scale test of a composite truss. Struc. Eng. Report n. 97, The Univ. of Alberta, Edmonton.
- CAN, 1994. Canadian standards association, CSA S16.1-94, Limit States Design of Steel Structures, Canadá.

# ANÁLISE DAS TENSÕES EM FEIXE DE MOLAS SEMI-ELÍPTICAS E COMPARAÇÃO COM A NORMA ABNT NBR 8567 (1984)

**Luiz Daré Neto**

**Eduardo Carlos Bianchi**

**Odilson Coimbra Fernandes**

Universidade Estadual Paulista, Departamento de Engenharia Mecânica, 17033-360, Bauru, SP, Brasil. E-mail: ldaren @bauru.unesp.br.

## **Resumo**

Existe farta literatura para a determinação das tensões em feixes de molas semi-elípticas, utilizando equações elementares de resistência dos materiais, mas não foi encontrada, na literatura formal, trabalho que quantificasse, experimentalmente, as tensões nas lâminas internas de um feixe de molas, dificuldade esta encontrada, devido ao contato entre as lâminas, impossibilitando a introdução de instrumento de medição. Este trabalho tem o objetivo de apresentar o desenvolvimento do processo utilizado para a medição das tensões atuantes nas lâminas internas de um feixe de molas semi-elípticas, e apresentar os valores encontrados com o ensaio experimental, no feixe de molas semi-elípticas, utilizando 24 extensômetros de resistência elétrica, distribuídos nas cinco lâminas de molas; estes valores foram comparados com valores calculados, encontrados através da aplicação da Norma ABNT NBR8567 (1984). Os resultados mostraram discrepância entre os valores medidos e calculados, e que a Norma Brasileira não é indicada para determinar a tensão atuante em qualquer ponto de qualquer lâmina do feixe de molas, mas devido a sua simplicidade e rapidez do processo apresenta boa precisão para o pré-desenvolvimento do produto.

**Palavras-chaves:** molas semi-elípticas; molas planas; análise de tensões.

## **1. INTRODUÇÃO**

A denominação de mola semi-elíptica surgiu devido ao uso, nas carruagens, de um par de feixes de molas, um feixe sobre o outro, unidos pelas extremidades, sendo, o feixe inferior, a imagem do superior; devido à curvatura das lâminas, necessária para proporcionar o vão livre para o deslocamento ou movimentação, a forma resultante é muito parecida com uma elipse, originando este nome (BASTOW; 1990).

Vários trabalhos, na indústria, já foram feitos medindo-se a tensão atuante na primeira lâmina do feixe de molas, mas, não foi encontrado nenhum trabalho que determinou as tensões nas lâminas internas do mesmo.

O fato de que as últimas lâminas de um feixe são as primeiras a apresentar falas (quebras) é conhecido, tanto pelos fabricantes de veículos pesados como pelos fabricantes de molas, fato também mencionado por WACHTEL et al. (1987).

O objetivo deste trabalho tecnológico é criar um método eficiente para medir a real tensão atuante em todas as lâminas de um feixe de molas semi-elípticas, e realizar comparações entre os resultados teóricos obtidos através da aplicação da Norma ABNT NBR 8567 (1984) e resultados de ensaios

obtidos através de extensômetros de resistência elétrica; para tanto, foi escolhido um feixe de molas existente no mercado, composto por cinco lâminas, as quais receberam 24 extensômetros de resistência elétrica.

## 2. MATERIAIS

### 2.1. Feixe de Molas

O elemento em estudo é o feixe de molas semi-elípticas, também chamado feixe de molas planas.

Visando uma aplicação direta da pesquisa, escolheu-se trabalhar com o feixe de molas da suspensão dianteira dos caminhões da marca Mercedes Benz, utilizado em vários modelos. As lâminas foram numeradas de 1 a 5, de acordo com as Normas ABNT -NBR 8567 (1984).

Como um dos pontos menos conhecidos em feixes de molas é o efeito da variação da tensão, devido ao escalonamento das lâminas no feixe, decidiu-se escalonar a segunda lâmina, isto é, cortar uma parte de cada extremidade, tirando o efeito da segurança do veículo, mas, aumentando o número de escalonamentos, de três para quatro lâminas.

O feixe em estudo é um feixe simétrico, sendo que os meios comprimentos das lâminas dos feixe são: lâmina número 1 - 859,0 mm; lâmina número 2 - 734,5 mm; lâmina número 3 - 615,0 mm; lâmina número 4 - 419,0 mm; lâmina número 5 - 226,0 mm.

No feixe em estudo, as espessuras das lâminas são diferentes, tendo a primeira e a segunda lâminas espessura de 17 mm, e da terceira à quinta lâminas, espessura de 18 mm. Todas as lâminas do feixe possuem largura de 70 mm com raio de arredondamento lateral.

O módulo de resistência à flexão, calculado, para as lâminas números 1 e 2 foi de  $3.050\text{mm}^3$ , e  $3.400\text{mm}^3$  para as lâminas números 3, 4 e 5; desta forma os valores dos momento de inércia da seção foi de  $25.925\text{mm}^4$  para as lâminas números 1 e 2, e  $30.600\text{mm}^4$  para as lâminas números 3, 4 e 5.

Deve ser ressaltado que estes valores não são válidos para as extremidades das lâminas números 3, 4 e 5.

A boa concordância entre o raio das laterais e as superfícies planas da lâmina de mola, melhora a eficiência, nessa região, do tratamento da superfície pelo processo “*shot peening*”, já que as trincas, por fadiga do material, geralmente, têm início na linha de encontro de superfícies (bordas), conforme PASTOUKHOV & VOORWALD (1995) e PETERSON (1974).

Embora a Norma ABNT NBR 5678 (1984) indique o valor do módulo de elasticidade (E), 196.000 MPa e VLACK (1984) o valor médio de 205.000 MPa, neste trabalho foi utilizado o valor de  $E = 204.048\text{MPa}$ , valor este, usualmente utilizado pelas Industrias do ramo.

### 2.2. Elementos para a Medição das Tensões

Neste trabalho, para a medição da tensão em pontos pré estabelecidos da superfície das lâminas do feixe, foram utilizados extensômetros elétricos de resistência para medição da deformação em uma direção; estes extensômetros apresentavam resistência de  $119,8 \pm 0,2\Omega$  (a  $24^\circ\text{C}$ , 50% RH), os quais foram ligados a uma caixa comutadora, com capacidade para 24 canais, e a um medidor de micro-deformação. Os extensômetros foram ligados em meia ponte de Wheatstone, com compensador de temperatura.

A aplicação da força foi feita por uma prensa hidráulica e o valor da carga aplicada foi lido em um anel dinamométrico, com capacidade de 98.100 N (10.000 kgf).

### 3. MÉTODO

O procedimento para aplicação das cargas e determinação do deslocamento do feixe foi baseado nas mesas de ensaio, encontradas nas indústrias especializadas, isto é, prensa hidráulica e carrinhos para deslocamento das extremidades; conforme ilustrado pela figura 1.



**Figura 1.** Banco de ensaios destinados à medição das deformações nos pontos pré-estabelecidos dos feixe de molas (as extremidades da Segunda lâmina não correspondem às condições ensaiadas)

#### 3.1. Método para a Medição da Tensão-Deformação

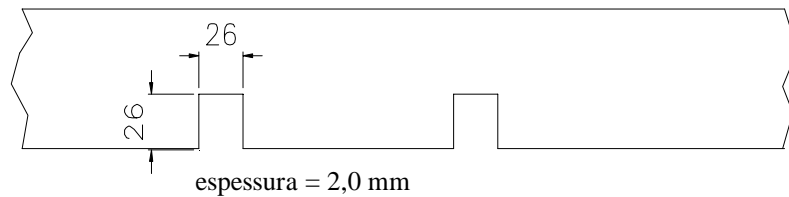
Considerando o objetivo final do trabalho, que é estudar o comportamento da tensão no feixe de molas semi-elípticas, foi necessário colar extensômetros em determinados pontos de todas as lâminas do feixe.

No feixe de molas semi-elípticas existe a inconveniência de que as lâminas trabalham encostadas uma à outra, impossibilitando a colagem dos extensômetros nas superfícies internas das lâminas do feixe, sem danificá-los.

O procedimento desenvolvido para a medição da deformação-tensão em pontos das lâminas internas do feixe, consiste na utilização de uma lâmina espaçadora entre as lâminas de molas.

Estes elementos espaçadores são de alumínio, material escolhido devido a sua elevada resistência à deformação por compressão e baixa resistência à flexão, influndo o mínimo possível nos resultados. A figura 2 ilustra uma parte de uma lâmina espaçadora.

A deflexão (deslocamento) do ensaio foi 110 mm, valor obtido da condição de trabalho do feixe de molas no veículo.



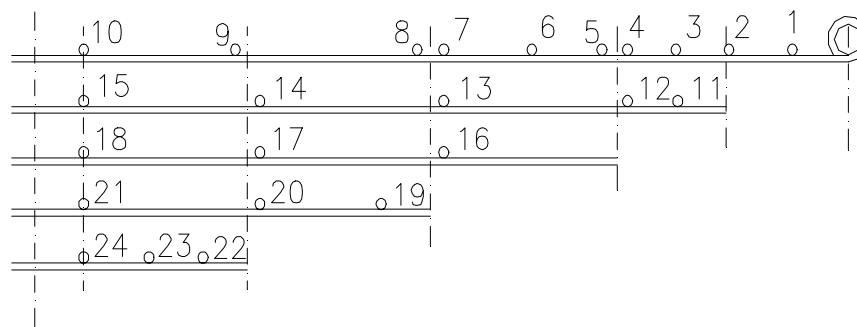
**Figura 2.** Croqui de uma lâmina espaçadora de alumínio, onde é mostrado o recorte para posicionamento dos extensômetros elétricos.

### 3.2. Pontos Analisados

A análise da variação das tensões no feixe de molas foi feita em 24 pontos, sendo distribuídos da seguinte forma: dez pontos na primeira lâmina, cinco pontos na segunda lâmina e na terceira, quarta e quinta lâminas, três pontos em cada uma; a justificativa desta distribuição será detalhada a seguir.

Para a verificação da variação da tensão nas lâminas do feixe em uma mesma seção vertical, procurou-se fazer o alinhamento vertical dos pontos em análise, tomando como referência o centro do feixe.

Para uma visualização mais geral, a figura 3 mostra um esboço dos pontos analisados em cada lâmina.



**Figura 3.** Pontos em estudos do feixe de molas.

A posição de cada ponto em análise foi determinada tendo como base: o efeito da carga externa, o efeito das forças nas extremidades das lâminas em contato e o alinhamento vertical.

Desta forma, o ponto 1 é utilizado para calibrar o banco de ensaios.

Para a análise da variação da tensão nas seções de mesma posição, em relação ao centro do feixe de molas, formaram-se os seguintes alinhamentos verticais: pontos 3 e 11; pontos 4 e 12; pontos 7, 13 e 16; pontos 9, 14, 17 e 20 e os pontos 10, 15, 18, 21, e 24; cada conjunto de pontos alinhados, relaciona diferentes números de lâminas, sendo que o conjunto mais interessante é o que analisa todas as lâminas.

## 4. RESULTADOS E INTERPRETAÇÃO

A tensão atuante no material é, geralmente, o elemento mais importante da análise estrutural do projeto, merecendo cuidados especiais para sua determinação. O método de medição da deformação do material é o mais recomendado para estes casos, pois é analisada a própria peça física, dentro do sistema a que pertence e nas condições de trabalho.

#### 4.1. Resultados Experimentais

Os resultados dos ensaios obtidos, através de uma ponte amplificadora, foram em micro deformações, sendo realizados com duas repetições, e as diferenças encontradas mantiveram-se entre zero e 20  $\mu\text{St}$  (0 a 4 MPa).

Como o usual na engenharia é o tratamento dos resultados utilizando a tensão, os valores mostrados são convertidos em tensão, aplicando a lei de HOOKE (matemático inglês ROBERT HOOKE, 1635-1703), os quais estão mostrados no item seguinte.

#### 4.2. Análise da Distribuição da Tensão no Feixe de Molas Utilizando a Norma ABNT NBR 8567 (1984)

Para análise dos resultados, será assumido que, os valores das tensões medidas pelos extensômetros ( $\sigma_{\text{ext}}$ ), em cada ponto das lâminas do feixe, serão os valores reais, sendo os mesmos usados para a determinação da diferença ou erro, na comparação com os valores obtidos através dos processos teóricos, indicados pela Norma ABNT NBR - 8567 (1984).

A Norma em tela, traz uma equação específica para o caso de feixe de molas com espessuras de lâminas diferentes, a qual, não pode ser aplicada diretamente, pois as seções das lâminas não são retangulares, sendo formadas por composições de formas. A situação pode ser contornada mantendo-se constante a espessura da lâmina estudada ( $h_i$ ) e determinando-se a largura média ( $b_n$ ) suficiente para proporcionar o módulo de resistência à flexão da seção analisada; assim, como resultado obtém-se:  $b_1^*$  e  $b_2^* = 63,32 \text{ mm}$  e  $b_3^*$ ,  $b_4^*$  e  $b_5^* = 62,96 \text{ mm}$ ; onde:  $b_n^*$  é a largura média da lâmina de mola, necessária para produzir o módulo de resistência à flexão da mesma.

Estes valores da largura média, são aplicados na equação indicada pela Norma, que, retrabalhada, é representada pela equação 1.

$$\sigma_t = \frac{6 \cdot P_1 \cdot l_p \cdot h_n}{b_1^* \cdot \sum_{i=1}^2 h_i^3 + b_3^* \cdot \sum_{i=3}^{Ne} h_i^3} \quad (1)$$

Para a determinação da tensão teórica ( $\sigma_t$ ), calculada em cada ponto por esta Norma, o comprimento " $l_p$ " é tomado como sendo a distância entre o ponto de aplicação da força até o ponto em análise; o valor da força " $P_1$ ", que é a carga atuante no olhal da primeira lâmina, é a metade do valor lido no dinamômetro do banco de ensaio, para o deslocamento de 110 mm, a qual apresentou o valor de 11.473,5 N; o número de lâminas na seção transversal do feixe de molas é simbolizado por " $Ne$ ".

Conhecendo-se o valor da tensão real ( $\sigma_{\text{ext}}$ ), medida no ponto, e a tensão teórica ( $\sigma_t$ ), calculada no mesmo ponto, pode-se determinar a diferença entre elas; será chamado de "Erro" esta diferença em porcentagem.

Para o ponto número 1, este "Erro" é:

$$rro_1 = \left( \frac{\sigma_{t1} - \sigma_{\text{ext}1}}{\sigma_{\text{ext}1}} \right) 100 = \left( \frac{222,0 - 220,4}{220,4} \right) 100 = 0,72\% \quad (2)$$

A análise de cada ponto está mostrada na tabela 1.



**Tabela 1.** Valores das tensões reais ( $\sigma_{ext}$ ) e teóricas ( $\sigma_t$ ), produzidas pelo deslocamento de 110 mm, utilizadas para determinação do Erro decorrente da aplicação da Norma ABNT - NBR 8567 (1984).

Ponto Número	Distância ( $l_p$ ) [mm]	Largura da lâmina ( $b^*$ ) [mm]	Espessura da lâmina ( $h_n$ ) [mm]	Tensão teórica ( $\sigma_t$ ) [MPa]	Tensão real ( $\sigma_{ext}$ ) [MPa]	Erro [%]
1	59	63,32	17	222,0	220,4	0,72
2	126	63,32	17	474,0	476,5	-0,51
3	182	63,32	17	342,3	493,8	-30,67
4	233	63,32	17	438,3	497,9	-11,97
5	260	63,32	17	429,7	502,0	-14,39
6	333,5	63,32	17	474,7	516,2	-8,04
7	426,5	63,32	17	504,5	532,6	-5,27
8	455	63,32	17	485,3	540,7	-10,25
9	646,5	63,32	17	516,8	565,2	-8,57
10	807	63,32	17	547,9	581,5	-5,78
11	180	63,32	17	338,6	200,0	69,31
12	232,5	63,32	17	437,3	402,0	8,79
13	427	63,32	17	505,1	493,8	2,29
14	621	63,32	17	535,7	553,0	-3,12
15	806	63,32	17	547,2	589,7	-7,20
16	427	62,96	18	534,8	553,0	-3,29
17	621	62,96	18	567,3	585,6	-3,14
18	806	62,96	18	579,4	597,9	-3,09
19	493	69,33	13,3	357,8	267,3	33,86
20	621	62,96	18	567,3	591,7	-4,14
21	805	62,96	18	578,7	614,2	-5,78
22	682	67,9	13,7	420,1	263,2	59,59
23	738,5	64,93	16,1	503,0	444,8	13,07
24	806	62,96	18	579,4	620,3	-6,59

## 5. DISCUSSÃO

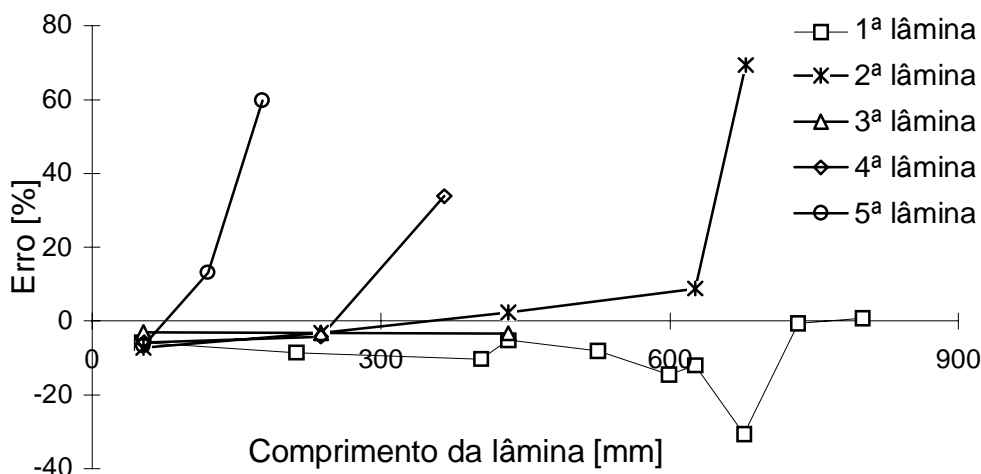
Analisando os valores dos Erros, nota-se que, nos pontos 1 e 2, devido à simplicidade do sistema, os Erros são os menores; nos pontos mais próximos das alterações de seções, pontos números: 3, 5, 8, 9, 11, 19, 22 e 23, os valores dos Erros são os maiores; deve ser observado que, nos pontos 5, 8 e 9, mesmo não estando próximos da extremidade da primeira lâmina, sofrem influência da entrada de mais uma lâmina, no caso, a terceira a quarta e a quinta lâminas, respectivamente. Os três maiores valores do Erro foram encontrados nos pontos mais próximos das extremidades das lâminas a que pertencem, e são eles, os pontos números: 11, 19 e 22.

Os pontos mais distantes das alterações de seção (pontos: 7, 13, 14, 16, 17 e 20), apresentam valores dos Erros que estão dentro da faixa de +2,3 a -5,3%.

No alinhamento de pontos mais próximos ao centro do feixe de molas, são encontrados valores do Erro que estão dentro da faixa de - 3,1% a -7,2%, partindo do valor -5,8% (na primeira lâmina), crescendo até 7,2% (na segunda lâmina), atingindo o mínimo valor da faixa, na terceira lâmina e decrescendo, novamente, até a quinta lâmina.

O método utilizado nesta Norma é simples e rápido; todavia, deve ser observado que apresentou uma tensão teórica pouco menor que a tensão real, nos pontos de maior solicitação, fato este, contra a segurança.

A variação do Erro, em função do comprimento de cada lâmina, é representada pela figura 4.



**Figura 4.** Variação do valor do Erro ao longo do comprimento das cinco lâminas, pela comparação entre os valores obtidos no ensaio e os valores calculados, aplicando a Norma ABNT NBR 8567 (1984).

## 6. CONCLUSÕES

Do exposto, conclui-se que após aprofundada revisão da literatura, foi constatada a ausência de um processo para a medição das tensões atuantes em todas as lâminas de um feixe de molas semi-elípticas; daí surgiu a necessidade de se criar um método para essa quantificação.

De acordo com os resultados obtidos, após os ensaios, a metodologia desenvolvida mostrou ser inovadora, eficiente e de rápida execução, podendo ser aplicada em condições estáticas, dinâmicas e mesmo com o veículo em reais condições de trabalho.

Outro objetivo, foi a determinação da distribuição da tensão ao longo de cada lâmina do feixe de molas, através da extensometria. Os resultados foram apresentados, representando a condição de trabalho.

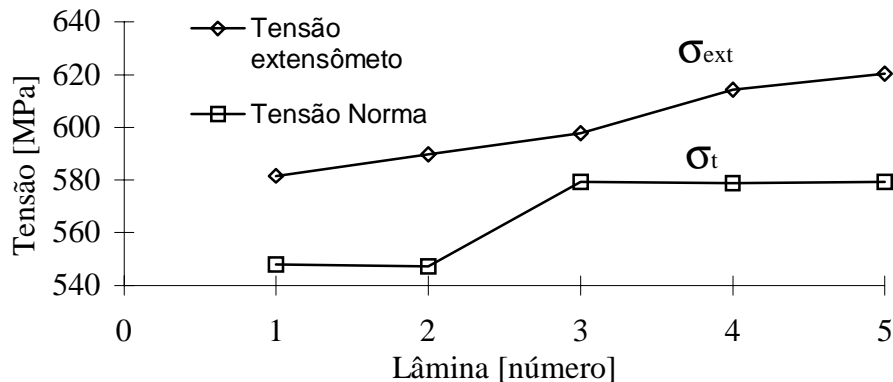
Aqueles resultados, denominados de tensões reais ( $\sigma_{ext}$ ), foram comparados com os valores das tensões calculadas ( $\sigma_t$ ), segundo a recomendação da Norma ABNT NBR 8567 (1984). A conclusão desta comparação foi uma discrepância entre os valores da tensão, em cada ponto, devido, possivelmente, a utilização de uma fórmula simplista para analisar um sistema complexo.

Tomando como referência as tensões reais obtidas no ensaio com o feixe de molas ( $\sigma_{ext}$ ) e comparando-as com as tensões calculadas ( $\sigma_t$ ), e fazendo um alinhamento das tensões nas seções analisadas mais próximas do centro do feixe de molas (pontos 10, 15, 18, 21 e 24, pertencentes, respectivamente, às lâminas números, 1 a 5), pode-se notar a discrepância dos valores encontrados, que é mostrada pelo gráfico da figura 5.

Com as fórmulas indicadas pela Norma, as tensões calculadas são iguais nas seções alinhadas das lâminas de mesma espessura; isto ocorre devido aos valores numéricos, empregados na equação 1, serem iguais; assim, as tensões nos pontos alinhados: 10 e 15 (lâminas 1 e 2), e 18, 21 e 24 (lâminas 3, 4 e 5), diferem somente pela variação da distância entre o ponto de aplicação da força e o ponto analisado (Tabela 1).

Como na região deste alinhamento das seções ocorre o maior nível de tensão registrada, com base no exposto recomenda-se que, após os cálculos das tensões, estas sejam aumentadas em 6% (seis por cento) para o método de cálculo. Este percentual é baseado no fato de que,

no processo de cálculo das tensões, estas foram menores que as reais, com diferenças da ordem de 5,7%.



**Figura 5.** Comparação entre as tensões reais e as tensões calculadas nos pontos números: 10, 15, 18, 21 e 24 (primeira a quinta lâminas), do feixe de molas.

Na determinação da distribuição da tensão do feixe de molas, o “Erro” variou entre 34 e 70% (Tabela 1), nas lâminas inferiores, após aumento do pacote de lâminas (pontos: 11, 19 e 22); nas lâminas superiores, que sofrem aumento da espessura do pacote, o “Erro” também é significativo, 30,7% no ponto número 3; 14,4% no ponto número 5; 10,3% no ponto número 8 e 8,6% no ponto número 9. As vantagens da utilização das Normas citadas, são a simplicidade e a rapidez do processo, apresentando boa precisão a qual, entretanto, é bastante influenciada pela distância do ponto analisado à seção com variação na espessura do pacote do feixe, quanto maior esta distância, melhor a precisão; como desvantagem, não é recomendada a sua utilização na análise da distribuição da tensão ao longo de todo o feixe de molas, recomendando a sua utilização para o pré-desenvolvimento do produto.

## 7. REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1984), ABNT - NBR 8567 - Cálculo e Projetos de Feixes de Molas para Veículos Rodoviários.
- BASTOW, D. (1990). Car Suspension and Handling; 2nd ed, 2nd reprinted; Billing & Sons; London; Cap. 7, pp 201-230.
- PASTOUKHOV, V.A.; VOORWALD, H.J.C. (1995). Introdução à Mecânica da Integridade Estrutural, Ed. UNESP, São Paulo, cap. 4, pp 109-145.
- PETERSON, R.E. (1974). Stres Concentration Factor; John Wiley & Sons; New York.
- WACHTEL, D.W.; ADKINS, D.E.; MAY, J.M.; HOHNSTADT, W.E. (1987). Advances in the Design, Analysis, and Manufacturing of Steel Leaf Spring; Truck and Bus Meeting and Exposition; Dearborn - Michigan, November 16 - 19.

# ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE FALHAS EM LIGAÇÕES DE ESTRUTURAS DE AÇO APORTICADAS

**Felipe Barreto Campelo Cruz**  
**Hamilton Ferreira Gomes de Abreu**  
**Enio Pontes de Deus**

Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, 60455-760, Fortaleza, CE, Brasil. E-mail: [epontes@dem.ufc.br](mailto:epontes@dem.ufc.br)

## Resumo

As estruturas de aço apresentam uma diversidade de configurações, meios e dispositivos de ligação. É praticamente impossível obter-se um engastamento perfeito entre vigas e pilares, observando-se que as ligações induzem efeitos locais e imperfeições capazes de induzir um comportamento global não-linear das estruturas, além de proporcionar uma rigidez parcial das ligações. A falha de elementos mecânicos é um processo que pode assumir distintas formas, dependendo, por exemplo, do tipo de aplicação, do material e das condições ambientais. Neste trabalho, apresenta-se um estudo de falhas nas ligações viga-coluna de aço e um código de cálculo LVC (Ligação Viga- Coluna), considerando resultados experimentais elaborados para determinação e classificação de ligações, sendo também apresentados os resultados obtidos.

Palavras-chave: Estruturas de Aço, Ligações de Aço, Falhas Estruturais.

## 1. INTRODUÇÃO

Uma análise estrutural convencional considera um conjunto de elementos interligados e durante muito tempo considerou-se as ligações como pontos nodais. Os comportamentos dessas ligações eram idealizados como nós rígidos ou rotulados, relacionados com as rotações relativas e com a transmissão do momento fletor entre os elementos.

Os nós considerados rígidos eram aqueles que permitiam uma perfeita continuidade rotacional, onde o ângulo formado pelos elementos estruturais interligados permaneciam o mesmo após o carregamento da estrutura e permitiam a total transmissão do momento fletor.

Para o caso das ligações rotuladas era determinado que não deveria ocorrer continuidade rotacional entre os elementos e, portanto, não deveria ocorrer transmissão do momento fletor.

Através de vários estudos e pesquisas verificou-se que esta abordagem era inadequada, uma vez que vários fatores influenciam no comportamento das ligações de uma estrutura, qualquer que seja o sistema estrutural ou materiais utilizados. As estruturas de aço apresentam uma diversidade de configurações, meios e dispositivos de ligação.

Atualmente, considera-se nas etapas de análise e no dimensionamento estrutural que as ligações apresentem um comportamento semi-rígido, o que permite a aplicação de modelos mais aproximados do comportamento de uma estrutura.

Um outro aspecto a ser considerado é a falha nessas ligações. Os problemas relacionados à fratura em estruturas de um modo geral preocupam os projetistas desde à antiguidade. Apesar das obras do antigo Egito e dos Césares Romanos serem testemunhas da capacidade dos engenheiros e arquitetos daquela época, com certeza muitos outros projetos tiveram menos sucesso e resistiram muito menos tempo (Deus, 1997).

A falha de elementos mecânicos é um processo que pode assumir distintas formas, dependendo, por exemplo, do tipo de aplicação, do material e das condições ambientais. De modo geral, uma falha pode ser definida como a ausência de capacidade do elemento quando se trata em corresponder à demanda que lhe é exigida, ou melhor, a capacidade é inferior a demanda.

Um ponto inicial para realização de um projeto estrutural deve ser o estabelecimento dos critérios quanto a definição dos diferentes tipos de carregamentos que podem ocorrer, assim como a definição dos níveis admissíveis de solicitação para o material. O tempo de utilização da estrutura pode afetar a falha de elementos caracterizada por algum tipo de envelhecimento ou desgaste do material.

Pode-se dizer que as ligações são a origem de descontinuidades geométricas e mecânicas que devem ser observadas e tratadas com cuidado, onde o seu comportamento deve ser analisado da forma mais precisa possível. Um estudo minucioso do seu comportamento estrutural é de grande importância e pode conduzir a uma grande economia final.

## 2. CONSIDERAÇÕES GERAIS E CLASSIFICAÇÃO DAS LIGAÇÕES

No dimensionamento de uma estrutura metálica considera-se uma idealização do comportamento das ligações, situando-as em duas classes extremas: ligações rígidas (ou engastadas) e ligações flexíveis (ou rotuladas). Entretanto, uma vez que vários fatores influenciam o comportamento das ligações, surge um tipo intermediário: ligações semi-rígidas (Ribeiro, 1998).

As ligações flexíveis são aquelas nas quais as rotações relativas entre os elementos conectados não são restringidas ou admitem uma restrição no máximo igual a 20% da rotação relativa teórica, verificada sobre condição de rótula ideal. As ligações rígidas são aquelas nas quais é garantida a continuidade da estrutura, onde as rotações relativas são totalmente restringidas, ou admitem restrição no mínimo igual a 90% da rotação teórica, verificada sob condição de rótula ideal.

As ligações semi-rígidas serão, portanto, aquelas correspondentes às ligações cujo comportamento situa-se entre os limites estabelecidos pelos tipos anteriores.

É difícil, porém, avaliar o quanto uma ligação é rígida ou flexível, o que nos conduz a adotar, na prática, concepções estruturais simplificadas como forma de viabilizar a análise estrutural.

Os parâmetros que mais influenciam na execução de uma ligação são: tipo de ligação, configuração geométrica, grau de padronização, tipo de junta e dimensão das soldas, ajuste de furos e soldas de campo.

Outro fator importante para o avanço das pesquisas sobre o comportamento das ligações foi o desenvolvimento verificado na área da computação. O engenheiro estrutural quase nunca dispõe da possibilidade de testar as ligações que pretende adotar em uma determinada estrutura. Portanto, criou-se métodos de análise mais eficientes capazes de representar e prever o comportamento das ligações com maior precisão, sendo estes calibrados através de testes de laboratório.

A observação de trabalhos experimentais torna evidente que o comportamento momento-rotação ( $M - \theta$ ) das ligações é predominantemente não-linear, podendo contribuir de forma significativa para o comportamento global da estrutura, incluindo limites de resistência e considerações de deslocamento. A rigidez de uma ligação em determinado ponto é dada pela diferencial da curva  $M - \theta$  naquele ponto.

Considerando-se as ligações teoricamente rígidas, o momento nos apoios de uma viga será dado por:

$$M_f = \frac{ql^2}{12} \quad (1)$$

Porém, considerando-se que a ligação não se comporta como perfeitamente rígida, a redução do momento fletor na ligação será dada por:

$$M_\theta = \frac{4EI\theta}{L} - \frac{2EI\theta}{L} = \frac{2EI\theta}{L} \quad (2)$$

Portanto, o momento real nos apoios será obtido através da soma algébrica dos dois valores, obtendo-se:

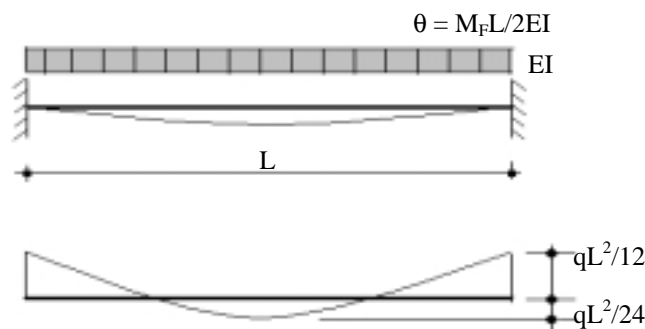
$$M = M_f - M_\theta = \frac{qL^2}{12} - \frac{2EI\theta}{L} \quad (3)$$

Assim, para uma ligação teoricamente rígida, tem-se  $\theta = 0$  e  $M = qL^2/12$ , enquanto para uma ligação teoricamente flexível,  $M = 0$  e  $\theta = qL^3/24EI$ .

As propriedades estruturais relevantes são a resistência, a rigidez e a capacidade de deformação. A maioria das ligações típicas pertencem à terceira categoria (semi-rígidas).

## 2.1. Suportes Rígidos

Seja o caso de uma viga prismática conectada a duas colunas tão rígidas que a rotação nos apoios seja devido apenas à viga (veja Fig.1). Considerando apenas o comportamento elástico da viga, a adoção de ligações rígidas não seria conveniente, uma vez que o momento fletor nas extremidades seria o dobro do momento no meio do vão. Em outras palavras, as ligações deveriam ser capazes de transmitir, sem apresentar rotação significativa, um momento fletor superior ao que solicita a viga.



**Figura 1.** Diagrama de viga com apoio rígido.

Para ligações flexíveis, o momento fletor no meio do vão é o triplo do caso anterior e as ligações não transmitirão momento fletor, porém devem apresentar grande capacidade rotacional.

A utilização de qualquer ligação semi-rígida proporciona o desenvolvimento de momentos máximos, menores que os produzidos nas situações limite. Portanto, uma ligação ótima é aquela que proporciona rotações suficientes para equilibrar os momentos fletores no meio e nas extremidades da viga.

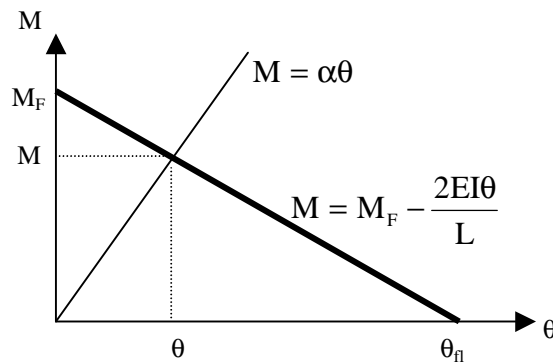
Uma aproximação para a situação representada anteriormente seria admitir que a relação momento-rotação fosse linear, ou seja:

$$M = \alpha\theta \quad (4)$$

onde  $\alpha$  é uma constante de proporcionalidade que representa a rigidez da ligação.

Para o caso de uma viga com carregamento uniformemente distribuído tem-se (Fig.2):

$$M = M_F - \frac{2EI\theta}{L} \quad (5)$$



**Figura 2.** Diagrama – Momento x Rotação.

onde  $M_F$  é o momento de engastamento perfeito  $M_F = qL^2/12$  e  $\theta_{\pi}$  representa a rotação para o caso de ligações flexíveis, sendo:

$$\theta_{\pi} = \frac{M_F L}{2EI} \quad (6)$$

Deste modo, o momento fletor nas extremidades da viga deverá satisfazer, simultaneamente, às equações (4) e (5), obtendo-se:

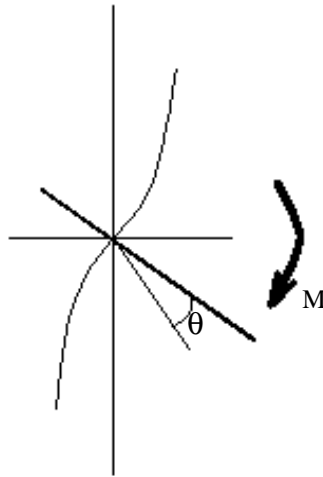
$$M = k M_F \quad (7)$$

onde:

$$k = \frac{\alpha L}{\alpha L + 2EI} \quad (8)$$

O parâmetro  $k$  representa a porcentagem do momento fletor de engastamento perfeito que a ligação é capaz de transferir, ou seja, representa o grau de rigidez da ligação (veja Fig. 3). A condição de igualdade entre os momentos nas extremidades e meio do vão da viga é obtida quando  $k$  for igual a 0,75. Portanto, quando  $k > 0,75$  o momento máximo deve ocorrer nas extremidades da viga; caso  $k < 0,75$  o momento máximo ocorre no meio do vão.

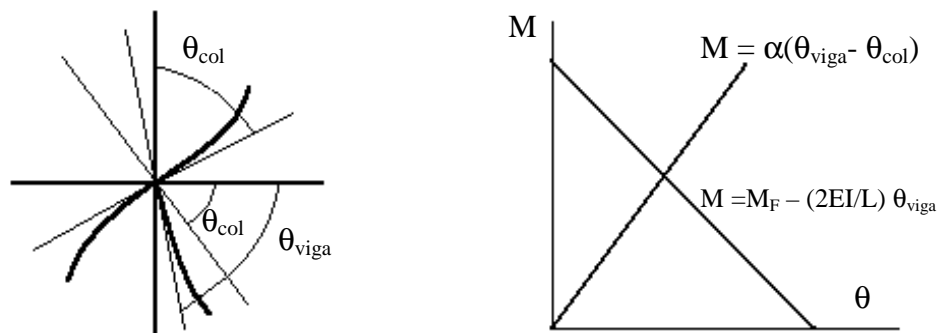
No Eurocode – 3 (1993), encontra-se as diversas representações do diagrama momento - rotação dependendo dos efeitos de rigidez das ligações.



**Figura 3.** Modelo representativo de ligação viga–coluna.

## 2.2. Suportes Flexíveis

Para o caso de apoios flexíveis considera-se o efeito das rotações relativas da linha elástica da viga e da coluna, ou seja (Fig. 4):



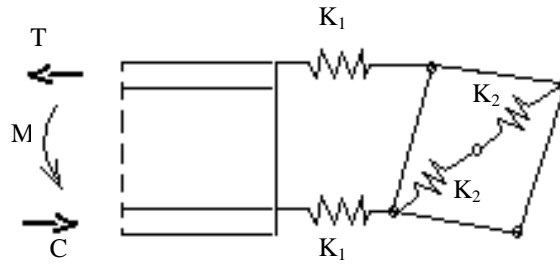
**Figura 4.** Rotação em suporte flexível para comportamento linear.

## 2.3. Caracterização das Falhas nas Ligações

Quando se considera o problema de falha estrutural pode ser feita uma associação com a perda de rigidez da seção danificada. Esta associação também pode estar relacionada com a perda de rigidez ( $K$ ) de uma mola capaz de idealizar o sistema desejado. Para a simulação do comportamento de uma ligação através de uma mola ou um sistema de molas tem-se situações complexas, principalmente quando se considera o comportamento não-linear. No presente estudo considera-se apenas o regime elástico para fins de dimensionamento estrutural.

A figura 5 apresenta o modelo proposto que consiste na adoção de molas para representar o comportamento da ligação, considerando-se a flexibilidade da união viga-coluna. As molas  $K_1$  representam a ação dos momentos transmitidos pela viga, enquanto as molas  $K_2$  representam o cisalhamento transmitido à alma da coluna.





**Figura 5.** Modelo de molas representando o comportamento da ligação.

O momento de plastificação resultante na ligação será dado por (Höb, 1994):

$$M = f_y A_e \cdot (h_v - t_v) \quad (9)$$

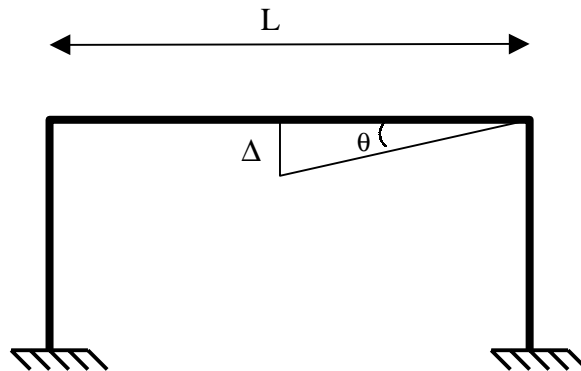
onde  $A_e$  é a área efetiva da ligação da viga à alma da coluna (regime elástico), considerando-se espraimento 1:1 da espessura da mesa da viga. A constante momento-rotação da mola  $K_1$  é obtida pela seguinte expressão:

$$K_1 = \left( 1 + \frac{A_{cis}}{A_e} \right) \frac{(h_v - t_v)^2}{2} c_E \quad (10)$$

sendo  $A_{cis}$  é a área de cisalhamento da seção considerada na coluna e  $c_E$  um coeficiente que depende do tipo de perfil utilizado. Para o caso de perfis laminados europeus  $c_E = 1200$  kN/mm.

### 3. RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos através do código de cálculo - **LVC** (Ligação Viga-Coluna) desenvolvido em Delphi no DEM (Depto. de Engenharia Mecânica – UFC), para determinação e classificação de ligações e tem como base os princípios apresentados anteriormente. A figura 6 apresenta um exemplo de pórtico plano utilizado nos casos gerais de dimensionamento de estruturas de aço. Portanto, para determinados valores de  $\theta$  é possível classificar o tipo de ligação. Os resultados obtidos com o programa LVC estão apresentados nas figuras 7, 8, 9 e 10.



**Figura 6.** Pórtico exemplo utilizado no programa LVC.

**Condição:**  $\Delta \leq \frac{L}{360}$

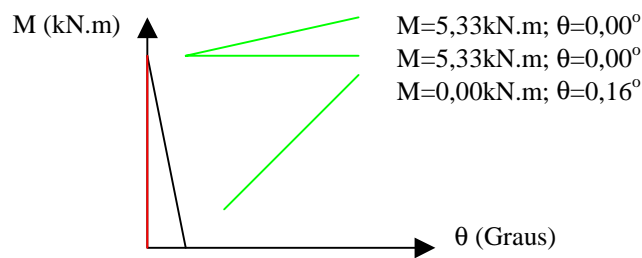
**Para L = 2m**

$\Delta \leq \frac{2}{360} = 0,0056\text{m}$

$\text{tg } \theta_1 = 0,0056 \Rightarrow \theta = 0,32^\circ$

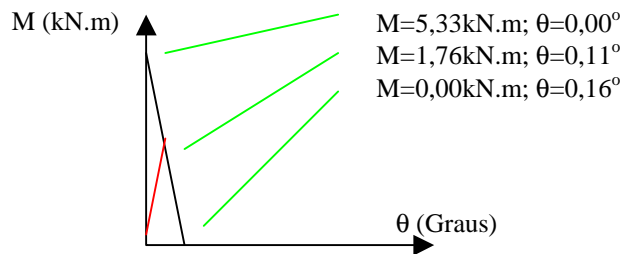
Considerando:  $\theta_1 = 0^\circ$ ;  $\theta_2 = 0,11^\circ$ ;  $\theta_3 = 0,16^\circ$ ;  $\theta_4 = 0,32^\circ$ .

Para  $\theta_1 \rightarrow M = 5,33\text{kN.m}$  - Ligação Rígida



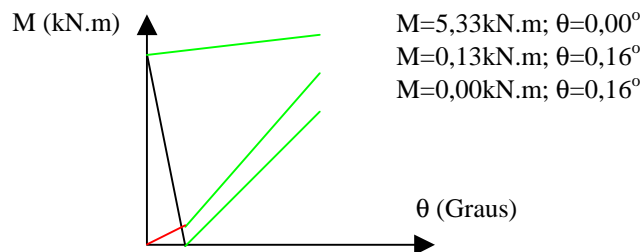
**Figura 7.** Valores de M para  $\theta = 0$ .

Para  $\theta_2 \rightarrow M = 1,76\text{kN.m}$  - Ligação Semi-Rígida



**Figura 8.** Valores de M para  $\theta = 0,11$ .

Para  $\theta_3 \rightarrow M = 0,13\text{kN.m}$  - Ligação Flexível



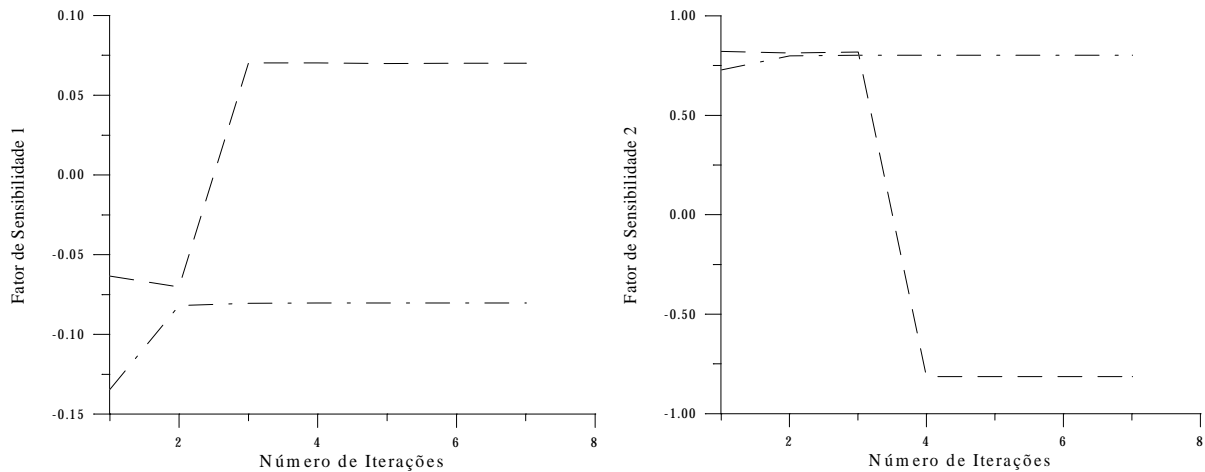
**Figura 9.** Valores de M para  $\theta = 0,16$ .



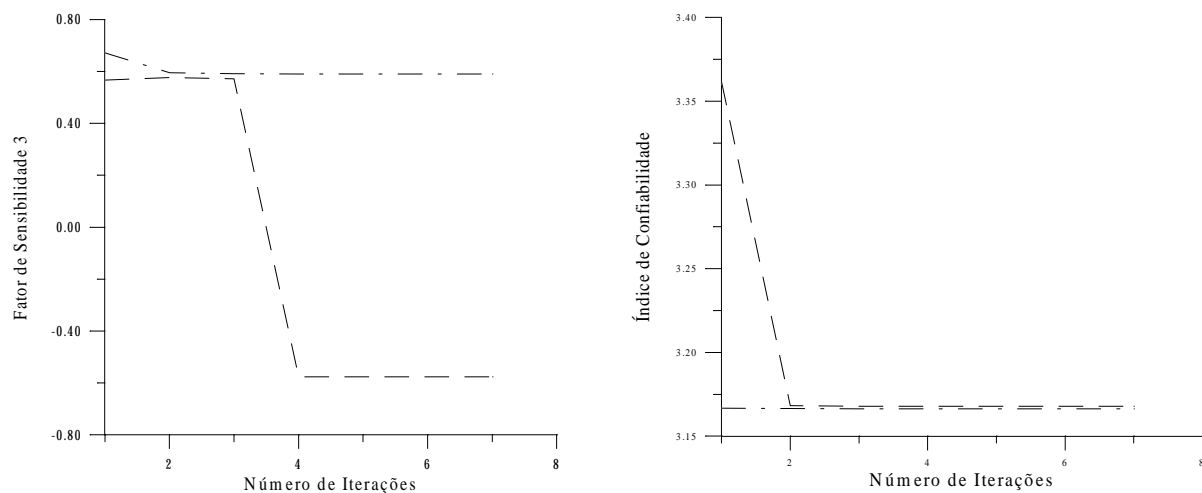
projeto. Deve-se ressaltar que ao utilizar os fatores de omissão de sensibilidade, independente do uso de qualquer esquema de superfície de reposição adaptativa estabelecido a qualidade dos resultados será menor.

## 5 REFERÊNCIAS

- Bucher C. G. and Bourgund U., A Fast And Efficient Response Surface Approach For Structural Reliability Problems, *Journal of Engineering Mechanics (ASME)*, Vol. 115, No. 3, pp. 447-463, March, 1989.
- Der Kiureghian, Lin H. Z. and Hwang S. J., Second - Order Reliability Aproximations, *Journal of Engineering Mechanics (ASME)*, Vol. 113, No. 8, pp 1208-1225, August, 1987.
- Ditlevsen O., Principle of Normal Tail Aproximation, *Journal of the Engineering Mechanics (ASME)*, Vol. 107, No EM6, pp 1191-1207, December, 1981.
- Enevoldsen I., Sensitivity Analysis of Reliability - Based Optimal Solution, *Journal of Engineering Mechanics (ASME)*, Vol. 120, No. 1, pp 198 - 205, January, 1994.
- Hasofer A. M. and Lind N. C., Exact and Invariant Second - Moment Code Format, *Journal of the Engineering Mechanics (ASME)*, Vol. 100, No EM1, pp 111 -121, February, 1974.
- Hohenbichler M. and Rackwitz R., Non-Normal Dependet Vectors in Structural Safety, *Journal of the Engineering Mechanics (ASME)*, Vol. 107, No EM6, pp 1227-1237, December, 1981.
- Kleiber M. and Hien T. D., *The Stochastic Finite Element Method: Basic Pertubation Technique and Computer Implementation*, John Wiley & Sons, 1992.
- Lumb P. and Li S. K., Reliability Analysis By Numerical Integration And Curve Fitting, *Structural Safety*, 3 (1985), pp. 29-36.
- Madsen O. H., Omission Sensitivity Factors, *Structural Safety*, Vol. 5, pp 35-45, 1988.
- Maymon G., Probability of Failure of Structures Without a Closed - Form Failure Function, *Computers & Structures*, Vol. 49, No. 2, pp. 301-313, 1993.
- Maymon G., Direct Computation of the Design Point of a Stochastic Structure Using a Finite Element Code, *Structural Safety*, Vol. 14, pp 185-202, 1994.
- Racwitz R. and Fiessler B., Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences, *Computers & Structures*, Vol. 9, pp. 489-494, 1978.
- Shinozuka M., Basic Analysis of Structural Safety, *Journal of Structural Engineering (ASME)*, Vol. 109, No 3, pp.700-740, March, 1983.



**Figura 2.** Comportamento dos fatores de sensibilidade das variáveis de projetos  $X_1$  e  $X_2$ , aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo.



**Figura 3.** Comportamento do fator de sensibilidade da variável de projeto  $X_3$  e do índice de confiabilidade, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo.

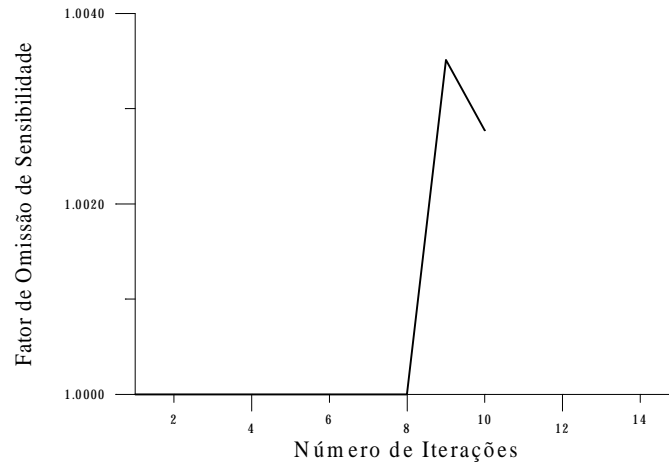
Na análise de confiabilidade realizada utilizou-se o algoritmo HL-RF. O número de iterações foi maior para o esquema adaptativo, porém o número de iterações utilizando as informações geradas pela superfície de estado limite real foi inferior ao esquema não adaptativo.

#### 4. CONCLUSÕES

A análise de sensibilidade aplicada ao problema de confiabilidade estrutural na determinação do índice de confiabilidade de *Hasofer-Lind* mostrou que o emprego das medidas de sensibilidade em problemas que apresentam a superfície de estado limite explícita em termos das variáveis de projeto possibilitou reduzir o custo computacional além de indicar a tendência do processo solução.

A utilização dos fatores de sensibilidade e omissão de sensibilidade não apresentou resultados relevantes, quando aplicada a uma superfície de estado limite aproximada, pois o ajuste conduz a resultados que podem apresentar um desvio significativo em função do grau de não linearidade do problema ou da regularidade da região onde encontra-se ponto de

O fator de omissão de sensibilidade utilizado nesse exemplo possibilitou estabelecer a solução com um número de iterações menor, conforme mostrado na figura 1 comparando-se com as soluções obtidas pelos outros métodos de busca. Isto implica a diminuição do número de avaliações da superfície de estado limite e do esforço computacional.



**Figura 1.** Fator de omissão de sensibilidade da variável de projeto  $X_1$ .

### 3.2 Exemplo 2

Uma haste de seção transversal  $X_2$  é solicitada por uma carga axial  $X_1$ . A falha é caracterizada quando a tensão axial atuante é maior que a tensão de escoamento  $X_3$ ,

$$g(\mathbf{X}) = X_3 - \frac{X_1}{X_2} \quad (17)$$

as variáveis de projeto são normais e correlacionadas,  $\mu_{\mathbf{X}} = \{1000 \ 2 \ 600\}$  e  $\sigma_{\mathbf{X}} = \{33 \ 0,1 \ 20\}$  cuja matriz dos coeficientes de correlação é dada por,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Tabela 2.** Resultados em termos do ponto de projeto e índice de confiabilidade.

Tipo de Análise	$X_1$ *(N)	$X_2$ *(m <sup>2</sup> )	$X_3$ *(MPa)	$\beta_{HL}$	$P_f$ ( $\times 10^{-3}$ )	$N_I$
Adaptativa (CRA)	1007,33	1,78771	563,515	3,16670	0,7780	16
Não Adaptativa (CRA)	1008,39	1,79246	562,573	3,16776	0,7682	10
Referência (Maymon, 1994)	1008,01	1,79354	562,014	3,16804	0,7674	16

Os fatores de sensibilidade não apresentam o mesmo comportamento para os esquemas adaptativo e não adaptativo, porém a resposta em termos de índice de confiabilidade apresenta resultados satisfatórios conforme pode ser observado nas figuras 2 e 3.

## 2.5 Análise de confiabilidade adaptativa

Quando o comportamento da superfície de estado limite é conhecido em termos das variáveis de projeto o índice de confiabilidade de *Hasofer-Lind* é determinado com eficiência. Porém na maioria das aplicações de engenharia não é possível estabelecer pelos processos analíticos conhecidos o comportamento estrutural em relação ao vetor de projeto.

A análise de confiabilidade adaptativa propõe que as informações obtidas nas simulações anteriores sejam utilizadas para realizar uma aproximação do comportamento da superfície de estado limite e do vetor gradiente. Estabelecido o processo adaptativo, as informações necessárias para a determinação do ponto de projeto são provenientes da superfície de estado limite aproximada.

Na análise de confiabilidade adaptativa foram empregadas as técnicas de superfície de resposta (Lumb & Li, 1985) sendo que os comportamentos da superfície de estado limite e do vetor gradiente, foram modelados por

$$\bar{g}(X) = a_0 + b_i X_i + c_i X_i^2 \quad (14)$$

$$\bar{g}_{,j}(X) = a_0 + b_i X_i + c_i X_i^2 \quad (15)$$

sendo,  $a_0$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  coeficientes da aproximação,  $\bar{g}(\cdot)$  e  $\bar{g}_{,j}(\cdot)$  a superfície de estado limite aproximado e a  $j$ -ésima componente do gradiente da superfície de estado limite. Foi utilizada a técnica dos mínimos quadrados (Bucher & Bourgund, 1989) para estabelecer os coeficientes das aproximações propostas. Conforme novos pontos de projeto são determinados, ocorre a atualização dos coeficientes das Equações (14) e (15).

## 3. RESULTADOS

Com o objetivo de avaliar a eficiência da formulação apresentada, propõe-se a resolução de dois exemplos apresentados em (Maymon, 1993) e (Maymon, 1994), utilizando o código computacional desenvolvido.

### 3.1 Exemplo 1

Uma haste de seção transversal circular é tracionada por uma carga conhecida  $T = 5$  kN, tendo como variáveis randômicas o diâmetro ( $X_1$ ) e a tensão de escoamento ( $X_2$ ). As variáveis normais possuem comportamento probabilístico, gaussiano e não são correlacionadas. Admite-se que a falha, para caso estático, ocorre quando a tensão axial atinge a tensão de escoamento do material da haste.

$$g(X) = \frac{\pi X_1^2 X_2}{4} - T \quad (16)$$

**Tabela 1.** Ponto de projeto.

Ponto de projeto	CRA	Der Kiureghian, Lin & Hwang, 1987
$X_1^*$ (mm)	27,5881	28,0500
$X_2^*$ (MPa)	8,3647	8,0900

O tamanho do passo definido pela Equação (10) é determinado pelo comportamento da função de mérito e pelas restrições impostas no seu domínio de existência.

### 2.3 Determinação da probabilidade de falha

Na aproximação de primeira ordem, o comportamento da superfície de estado limite é modelado por hiperplanos, sendo que a probabilidade de falha depende apenas da norma do vetor de projeto no ponto de projeto (Hasofer & Lind, 1974),

$$P_f = \Phi(-\beta_{HL}) \quad (11)$$

sendo  $P_f$  a probabilidade de falha,  $\Phi(.)$  a função de probabilidade normal padrão acumulada. Essa aproximação fornece resultados satisfatórios quando a superfície de estado limite é topologicamente regular nas vizinhanças do ponto de projeto.

### 2.4 Análise de sensibilidade

Na análise de sensibilidade clássica as medidas de sensibilidade estão baseadas no comportamento do sistema em relação a uma variação dos parâmetros, em torno de seus valores nominais. Ao tratar o problema de confiabilidade estrutural o enfoque utilizado na metodologia convencional da análise de sensibilidade poderá inserir erros nas avaliações, por não comportar na sua estrutura o modelamento das dispersões inerentes às variáveis de projeto.

Geralmente nos problemas de confiabilidade estrutural somente algumas variáveis influenciam significativamente sobre o valor total da probabilidade de falha. Como a eficiência numérica decresce, com o aumento do número de variáveis, é importante diminuir esse número, sem causar perda da qualidade dos resultados.

As medidas de sensibilidade exprimem a tendência das variáveis de projeto sobre o comportamento da superfície de estado limite nas regiões investigadas pelo processo solução. Estas medidas possibilitam a redução do número de variáveis sem aumento o custo computacional, por serem estabelecidas, a partir das informações correntes.

O fator de sensibilidade representa a derivada do índice de confiabilidade, em relação às variáveis de projeto no espaço normal padrão,

$$\alpha_i = \frac{\partial \hat{a}}{\partial u_i} \quad (12)$$

é utilizado quando o nível de confiabilidade é especificado.

O fator de omissão de sensibilidade fornece o erro relativo no índice de confiabilidade de Hasofer-Lind, quando admite-se que uma ou um conjunto de variáveis de projeto modifica o seu comportamento de randômico para determinístico, (Madsen, 1993). Definindo-se o fator de omissão de sensibilidade como a razão entre os índices de confiabilidade de Hasofer-Lind,

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{\hat{a}_{HL}(u_i = k)}{\hat{a}_{HL}} \quad (13)$$

considerando-se que a variável de interesse possua comportamentos determinístico e randômico respectivamente.



sendo  $\Gamma$  uma matriz triangular inferior, obtida da decomposição de Choleski da matriz dos coeficientes de correlação e  $\Sigma_X$  a matriz de desvio padrão das variáveis de projeto.

A transformação aplicada às variáveis de projeto deve ser atualizada a cada iteração, pela modificação dos parâmetros das funções densidade de probabilidade normal equivalente das variáveis de projeto.

## 2.2 Processo de busca do ponto de projeto

A escolha da técnica de otimização dependerá de critérios baseados nas propriedades de convergência local e global, na capacidade de resolver problemas não convexos e da taxa de convergência. O algoritmo HL-RF, proposto inicialmente por (Rackwitz & Fiessler, 1978), tem mostrado-se eficiente em relação aos critérios de seleção, além de comportar na sua estrutura informações probabilísticas das variáveis de projeto. A seqüência de pontos é estabelecida por,

$$\mathbf{u}^{k+1} = \frac{[\nabla g(\mathbf{u}^k)\mathbf{u}^k - g(\mathbf{u}^k)]\nabla g(\mathbf{u}^k)^T}{|\nabla g(\mathbf{u}^k)|^2} \quad (5)$$

Com a finalidade de aumentar a convergência global do algoritmo se introduziu uma função mérito para monitorar a seqüência de convergência do método, passando a ser conhecido como HL-RFM (Der Kiureghian & Liu, 1991).

$$m(\mathbf{u}^{k+1}) = \frac{1}{2} \left| \mathbf{u}^{k+1} - \frac{\nabla g(\mathbf{u}^k)\mathbf{u}^k}{|\nabla g(\mathbf{u}^k)|^2} \right|^2 + \frac{1}{2} g(\mathbf{u}^k)^2 \quad (6)$$

No HL-RFM, a atualização do vetor de projeto, é dada pela seguinte expressão

$$\mathbf{u}_f^{k+1} = \mathbf{u}^{k+1} + p\mathbf{d}^k \quad (7)$$

sendo  $\mathbf{d}^k$  o vetor que determina a direção de pesquisa, definido por

$$\mathbf{d}^k = \frac{[\nabla g(\mathbf{u}^k)\mathbf{u}^k - g(\mathbf{u}^k)]\nabla g(\mathbf{u}^k)^T - \mathbf{u}^k}{|\nabla g(\mathbf{u}^k)|^2} \quad (8)$$

onde,  $p$  é o parâmetro que determina o tamanho do passo

$$p = \{p \in \mathbb{R}^n / 0 \leq p \leq 1\} \quad (9)$$

Ao utilizar o HL-RFM coloca-se como opção o ajuste do tamanho do passo é definido por

$$p = 1 - \frac{1}{\exp \left( \left| \frac{-g(\mathbf{u}^k)}{\nabla g(\mathbf{u}^k)} \right| \right)} \quad (10)$$

análise de confiabilidade adaptativa (Madsen, 1988). Para avaliar a formulação e a metodologia empregada desenvolveu-se um código computacional, **CRA** – Component Reliability Analysis.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL PELO MÉTODO DOS MOMENTOS

O problema de confiabilidade estrutural pelo método dos momentos consiste em minimizar a distância entre o ponto de projeto, sobre a superfície de estado limite e a origem do espaço normal padrão. O ponto de projeto é a configuração que o vetor de projeto assume na qual está associada a maior probabilidade de falha, segundo um critério de falha estabelecido. A determinação do índice de confiabilidade de *Hasofer-Lind* pode ser formulada como um problema de otimização, cuja a função objetivo

$$\min \|\beta_{HL}\| \quad (1)$$

sujeito a

$$g(u^*) = 0 \quad (2)$$

onde  $\beta_{HL}$  índice de confiabilidade de *Hasofer-Lind* e  $g(.)$  representa o critério de falha utilizado para avaliar o estado de falha de um componente segundo determinado modo de falha e  $u^*$  o ponto de projeto.

Pela análise dos trabalhos de (Ang & Tang, 1984), (Bjerager, 1990), (Der Kiureghian, Lin & Hwang, 1987), (Enevoldsen, 1994) e (Shinozuka, 1983) pode-se constatar que a abordagem pelo método dos momentos envolve a transformação das variáveis de projeto, processo de busca do ponto de projeto, determinação da probabilidade de falha, análise de sensibilidade e análise de confiabilidade adaptativa.

### 2.1 Transformação das variáveis de projeto

As variáveis de projeto representam as características geométricas do componente, propriedades mecânicas dos materiais e a intensidade do carregamento. O comportamento probabilístico desses parâmetros pode ser caracterizado por funções densidade de probabilidade objetivando melhorar a representação das dispersões do vetor de projeto.

A solução do problema de confiabilidade estrutural é estabelecida num espaço onde o comportamento probabilístico das variáveis de projeto é caracterizado por uma função densidade de probabilidade normal padrão conjunta. As transformações aplicadas nas variáveis de projeto permitem operar com um vetor randômico de projeto normal com componentes correlacionadas (Der Kiureghian & Liu, 1986) e (Ditlevsen, 1981). A transformação aplicada às variáveis no espaço de projeto é representada da seguinte forma,

$$U = J\{X - \mu_x\} \quad (3)$$

$U$  é vetor de projeto no espaço normal padrão,  $\{X - \mu_x\}$  é o vetor que representa a translação no espaço normal padrão,  $\mu_x$  é o vetor média equivalente e  $J$  é a matriz jacobiano, que realiza a rotação dos eixos no espaço normal equivalente, sendo definida por

$$J = \Gamma \Sigma_X^{-1} \quad (4)$$

# EMPREGO DAS MEDIDAS DE SENSIBILIDADE NA DETERMINAÇÃO DA PROBABILIDADE DE FALHA DE COMPONENTES MECÂNICOS

**Cláudio Roberto Ávila da Silva Júnior, M. Sc.**

Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná (CEFET/PR), Av. Sete de Setembro n° 3165, CEP: 80230-901, Curitiba, Paraná, Núcleo de Pesquisa em Engenharia Simultânea (NuPES), e-mail: claudio@damec.cefetpr.br

## Resumo

O trabalho propõe o emprego da análise de sensibilidade na determinação do índice de confiabilidade de Hasofer Lind para componentes mecânicos. Os fatores de sensibilidade e omissão de sensibilidade são empregados para indicar as variáveis de projeto significativas e as direções factíveis do processo solução. Na determinação da probabilidade de falha emprega-se o método dos momentos, com aproximação de primeira ordem aliado às técnicas de superfície de resposta, análise de sensibilidade e a análise de confiabilidade adaptativa. As medidas de sensibilidade são discutidas quando empregadas conjuntamente com o processo adaptativo. Um código computacional foi desenvolvido, onde estão implementadas as transformações das variáveis de projeto, os métodos HLRF e HLRFM e um interpretador simbólico para leitura da função de falha nas aplicações propostas.

**Palavras chaves:** Confiabilidade estrutural, Análise de sensibilidade, Confiabilidade adaptativa

## 1. INTRODUÇÃO

A análise de sensibilidade é uma ferramenta de aplicação crescente no desenvolvimento e avaliação de sistemas. Uma das aplicações usuais da análise de sensibilidade na tarefa de projeto está na indicação da influência das variáveis de projeto em relação ao fenômeno observado. Esta observação é determinada por medidas de sensibilidade baseadas no comportamento do sistema em relação a variações das componentes do vetor de projeto, em torno de seus valores nominais. Essa a definição para as medidas de sensibilidade não é adequada quando aplicada à estrutura da análise de confiabilidade estrutural. Isto se deve por esta não comportar, na sua metodologia o modelamento das dispersões inerentes das variáveis de projeto. Para eliminar esta fonte de erro propõe-se que análise de sensibilidade realizada, trate adequadamente as variabilidades presentes no vetor de projeto.

O objetivo desse trabalho é a determinação da confiabilidade em termos da probabilidade de falha e do índice de confiabilidade de *Hasofer-Lind* (Hohenbichler & Rackwitz, 1981) para componentes mecânicos. Foi necessário o desenvolvimento de uma formulação para tratar o problema de confiabilidade estrutural, utilizando o método dos momentos (Shinozuka, 1983), com aproximações de primeira ordem da superfície de estado limite e da probabilidade de falha. No estabelecimento da solução empregaram-se os algoritmos de busca HL-RF e HL-RFM (Der Kiureghian & Liu, 1991) associado a uma regra para o ajuste automático do tamanho do passo e análise de sensibilidade através dos fatores de sensibilidade e omissão de sensibilidade. Através das informações geradas durante o estabelecimento da solução o comportamento da superfície de estado limite foi aproximado com a finalidade de realizar a

# **AVALIAÇÃO DE INTEGRIDADE DE ESTRUTURAS UTILIZANDO AS FREQUÊNCIAS NATURAIS E REDES NEURAIIS ARTIFICIAIS**

**Koje Daniel Vasconcelos Mishina**

**José Felício da Silva**

**Seyyed Said Dana**

Universidade Federal da Paraíba, Coordenação de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica,  
Cep 58059-900, João Pessoa – PB – Brasil – e-mail: [felicio@funape.ufpb.br](mailto:felicio@funape.ufpb.br)

## **Resumo**

O presente trabalho propõe uma metodologia para avaliar a integridade de estruturas com base na resposta dinâmica representada pelas frequências naturais e Redes Neurais. A resposta dinâmica de uma estrutura é modificada a partir da presença de falhas na mesma, desta forma foi possível avaliar a integridade estrutural através da comparação entre a resposta dinâmica de uma estrutura com falha e sem falha. Utilizou-se o toolbox de Redes Neurais do Matlab 4.0 como ferramenta para identificar e quantificar o estágio de dano em que se encontrava a estrutura. O trabalho inclui a construção do modelo experimental que permitiu comparar as frequências teóricas e experimentais, bem como ajustar os parâmetros do modelo. A eficiência da metodologia empregada é mostrada através de gráficos que comparam as saídas desejadas (teóricas) e saídas obtidas através da Rede Neural.

**Palavras-chave:** Estrutura, Integridade, Frequências Naturais, Rede Neural

## **1. INTRODUÇÃO**

A sociedade mostra-se mais consciente e exigente no que se refere aos fatores de segurança, confiabilidade e qualidade. Com base nesta preocupação que é reflexo do desenvolvimento natural da nação, surge a necessidade de uma ação mais efetiva no que se refere a um programa de monitoramento e supervisão de estruturas com base em novas técnicas de detecção de falhas. O objetivo deste programa é estender à vida útil das estruturas; dando um suporte necessário para elaboração de um plano de manutenção preventiva, que venha a evitar catástrofes e altos custos provenientes de grandes perdas humanas e de materiais. Freire et al. (1994) apresentaram alguns exemplos recentes de monitoramento de estruturas civis com extensômetros de resistência elétrica e transdutores de deslocamento para mostrar como testes simples e econômicos possibilitam um melhor conhecimento da resposta sob carregamentos reais. Freire et al. (1994) propõem uma terminologia teórica básica para ser usada em Avaliação de Integridade Estrutural (AIE) de equipamentos e estruturas. Ghaboussi et al. (1992) utilizou as RNA na detecção de danos em estruturas. Doebling et al. (1996) identificou danos em estruturas e sistemas mecânicos em função da característica da resposta dinâmica. Kaminski (1997), projetou um sistema de diagnóstico de falhas estruturais baseado em medidas de vibração e RNA. Alves (1997), utilizou as frequências naturais e RNA para detecção de defeitos em estruturas. Cunha et al. (1998) realizou um trabalho de identificação de danos em estruturas usando RNA.

## 2. DESCRIÇÃO DO MODELO

Na escolha do modelo levou-se em consideração uma estrutura que representasse um maior número de casos possíveis, que fosse de fácil construção e que permitisse modificar a resposta dinâmica da estrutura em função da rigidez. A forma da construção desta estrutura possibilitou analisar a integridade de cada grau de liberdade separadamente. Neste trabalho procurou-se canalizar as atenções para avaliar a integridade estrutural do primeiro grau de liberdade.

O modelo em estudo representa um sistema de dois graus de liberdade, onde o primeiro grau é constituído de quatro lâminas (Kawasa) de aço inox, graduadas e com 12” (polegadas) de comprimento. As mesmas estão engastadas em uma das extremidades, enquanto as outras extremidades (superiores) estão fixas a uma massa ( $m_1$ ). O segundo grau de liberdade é representado pela lâmina 5 (Kawasa) também de aço inox, graduada e com 6” (polegadas) de comprimento (Fig. 1). As lâminas por serem graduadas facilitaram o deslocamento da massa sobre a mesma, permitindo desta forma um maior dinamismo na variação de rigidez da estrutura e conseqüentemente uma maior facilidade na obtenção dos dados para treinamento. A fixação da massa sobre as lâminas é feita através de parafusos allen (nº4). As massas foram fabricadas a partir de chapas de aço 1020 e tem os respectivos pesos:  $m_1 = 2,983$  kg e  $m_2 = 0,10910$  kg.

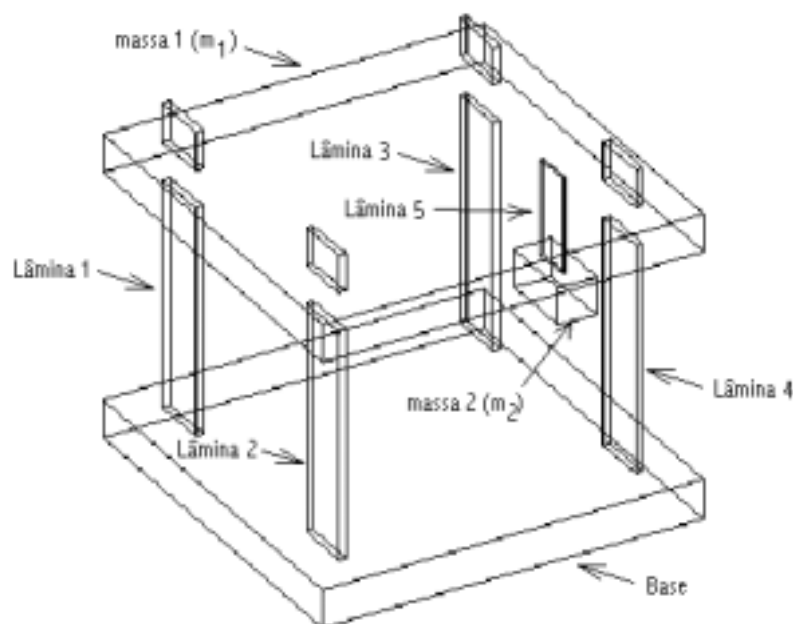


Figura 1 – Sistema de 2 graus de liberdade

## 3. MODELAMENTO MATEMÁTICO

A resposta dinâmica está diretamente associada a integridade da estrutura, e a mesma é modificada em função dos parâmetros: massa, amortecimento e rigidez. Considerando que a massa dificilmente é modificada e que o amortecimento tem uma parcela de influência pequena em relação a rigidez. Foi possível associar a integridade estrutural com a variação da rigidez.

Fazendo o equilíbrio de forças sobre a lâmina 1 (Fig. 2), quando a mesma esta excitada por uma força (P), chega-se a seguinte representação (Thomson, 1978).

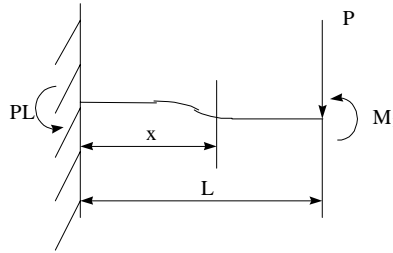


Figura 2 – Diagrama de corpo livre da lâmina 1

Fazendo o equilíbrio de forças sobre a lâmina 1, tem-se que a deflexão máxima ( $x=L$ ):

$$Y_1 = \frac{-PL^3}{12EI} \quad (1)$$

Onde:  $Y_1$  = Deflexão máxima;  
 P = Carga aplicada;  
 L = Comprimento útil da lâmina;  
 E = Módulo de elasticidade;  
 I = Momento de inércia

Através da Eq. (2), é possível relacionar a deflexão máxima com a rigidez.

$$K_1 = \frac{F}{Y_1} \quad (2)$$

$$K_1 = \frac{F}{Y_1} \Rightarrow K_1 = \frac{12EIF}{PL^3} \Rightarrow K_1 = \frac{12EI}{L^3} \quad (3)$$

Desta forma, tem-se através da Eq. (3) que a rigidez varia inversamente proporcional ao comprimento da lâmina. Como o 1º grau de liberdade é formado por 4 lâminas que estão em paralelo, o valor da rigidez equivalente é dado pelo somatório da rigidez de cada lâmina separadamente, conforme a Eq. (4).

$$K_{eq} = \frac{12E_1I_1}{L_1^3} + \frac{12E_2I_2}{L_2^3} + \frac{12E_3I_3}{L_3^3} + \frac{12E_4I_4}{L_4^3} \quad (4)$$

Para cada lâmina foi feito o ajuste experimental do módulo de elasticidade através da regressão linear dos pontos obtidos no gráfico (Deformação x Tensão), onde o módulo de elasticidade (E) é dado pela inclinação da reta. As cargas aplicadas para a obtenção das deformações foram baseadas no limite elástico do material (Aço Inox).

As secções das lâminas foram medidas separadamente através de um micrômetro de precisão para cálculo do momento de inércia (I).

A frequência natural teórica para um sistema de 1 grau de liberdade é dada pela Eq.(5).

$$W = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m}} \quad (5)$$

Através da modificação do comprimento útil das lâminas, foi possível simular vários níveis de falha na estrutura [0-50% de falha], permitindo a geração de um banco de dados para treinamento da RNA.

#### 4. OBTENÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA (EXPERIMENTAL)

Para a obtenção das frequências naturais experimentais, utilizou-se transdutores de resistência elétrica (strain-gauges), sistema de aquisição composto de ponte dinâmica e placa de aquisição. A estrutura foi excitada aleatoriamente, e o sinal de vibração foi gerado pelo strain-gauges e gravado na placa de aquisição. Posteriormente foi feito o tratamento off-line deste sinal, através do Software (Snap-Master) que baseia-se nas Transformadas de Fourier (FFT) para determinação das frequências naturais (Fig. 3).



Figura 3 – Diagrama de bloco para obtenção das frequências naturais

#### 5. COMPARAÇÃO ENTRE AS FREQUÊNCIAS TEÓRICAS E EXPERIMENTAIS

O intervalo em estudo compreendeu entre 0 à 50% de falha na rigidez da estrutura. Como a rigidez é inversamente proporcional ao comprimento da lâmina, foi possível simular falhas estruturais modificando a resposta dinâmica em função do comprimento das lâminas. A Tabela 1, mostra o erro entre as frequências naturais teóricas e experimentais em função do percentual de falha na estrutura.

Tabela 1 – Relação entre as frequências experimentais e teóricas em função do percentual de falha na estrutura

Percentual de falha na estrutura	Frequência Experimental (Hz)	Frequência Teórica (Hz)	Erro percentual entre as frequências
0	11,54 ± 0,2	11,78	2,03
5	11,17 ± 0,2	11,49	2,78
10	10,87 ± 0,2	11,18	2,77
15	10,62 ± 0,2	10,87	2,30
20	10,37 ± 0,2	10,54	1,61
25	9,91 ± 0,2	10,21	2,93
30	9,62 ± 0,2	9,86	2,43
35	9,16 ± 0,2	9,50	3,57
40	8,96 ± 0,2	9,13	1,86
45	8,50 ± 0,2	8,74	2,74
50	8,20 ± 0,2	8,33	1,56

## 6. PRÉ-PROCESSAMENTO DAS ENTRADAS DA REDE NEURAL ARTIFICIAL

A RNA caberá o aprendizado da relação causa e efeito que existe entre a presença dos defeitos e a variação da resposta dinâmica de maneira que não será necessária a obtenção de uma equação que represente este comportamento da estrutura. Esta informação será repassada a RNA durante a fase de treinamento.

O pré-processamento das entradas da RNA pode melhorar de forma significativa a eficiência das mesmas (Kovács, 1997), podendo ser uma simples normalização ou até cálculos mais complexos, vai depender do problema em estudo. Neste trabalho especificamente, o vetor de entrada foi formado pelas frequências naturais experimentais normalizadas e o vetor de saída pelos respectivos níveis de falhas existentes na estrutura. A normalização das frequências naturais evitou problemas de saturação junto a função de transferência.

Tabela 2 – Relaciona a falha estrutural e as frequências naturais experimentais normalizadas

PERCENTUAL DE FALHA ESTRUTURAL	FREQUÊNCIAS NATURAIS NORMALIZADAS
0	1
5	0,96
10	0,94
15	0,92
20	0,89
25	0,85
30	0,83
35	0,79
40	0,77
45	0,73
50	0,71

## 7. ANÁLISES E RESULTADOS

Após o treinamento da RNA foi feito o teste de generalização com dados não pertencentes ao conjunto de treinamento, para efetivamente determinar a configuração mais adequada. Isto é conseguido através da comparação dos erros obtidos pelas diferentes RNA. É importante lembrar que todas as configurações testadas apresentaram convergência no treinamento, pois, caso isto não ocorra não teria sentido o teste de generalização.

Os parâmetros utilizados pela RNA, estão mostrados no Apêndice 1. Os resultados são apresentados na Fig. 4, através de um comparativo entre as saídas desejadas (teóricas) e as saídas obtidas pela RNA.



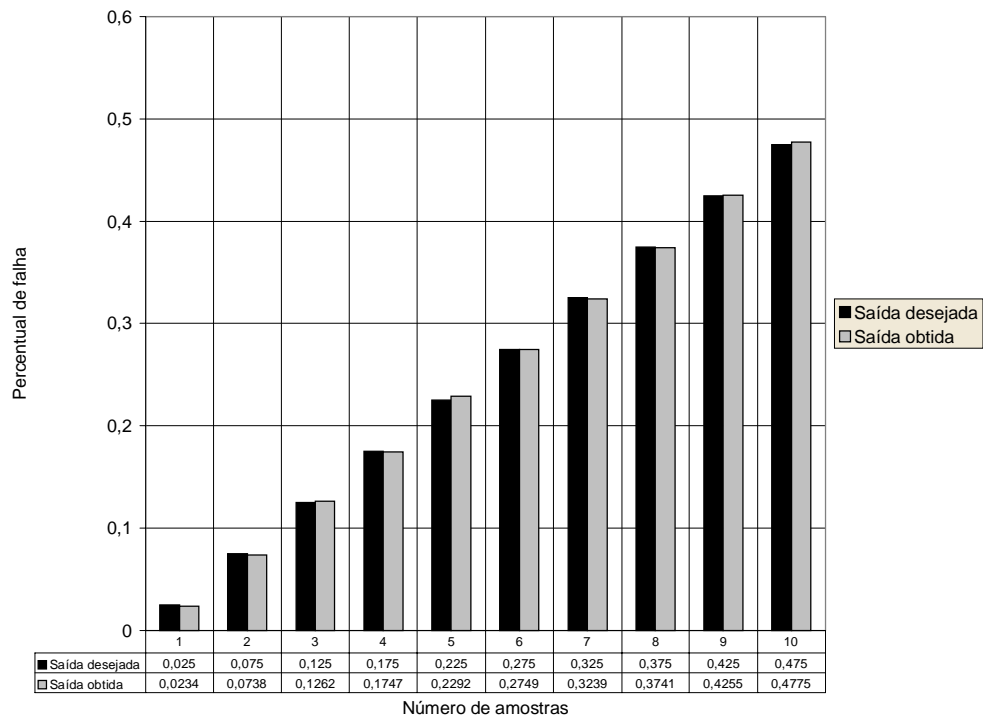


Figura 4 – Comparação das saídas desejadas e as saídas obtidas para 1 grau de liberdade

## 8. CONCLUSÃO

Com base nos resultados obtidos para o sistema com 1 grau de liberdade é possível afirmar que a metodologia utilizada é viável na avaliação de integridade de estruturas. Ou seja, a RNA conseguiu identificar o estágio de dano em que se encontrava a estrutura, em função da resposta dinâmica.

Os dados coletados podem ser utilizados na elaboração de um plano de manutenção preventiva, que permitirá fazer uma avaliação segura da viabilidade técnica e financeira para recapacitação desta estrutura.

## 9. BIBLIOGRAFIA

1. Alves, M. A. L. Utilização de frequências naturais e redes neurais artificiais para a detecção de defeitos em estruturas, Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Mecânica, 118 p., São Paulo, Brasil, 1997.
2. Chang, Kuo F. Structural Health Monitoring: A Summary Report on the First Stanford Workshop on Structural Health Monitoring, 1997.
3. Cunha, F. S., Silva, J. F., Paula, G. E., Freire, J.L. F., Identificação de Danos em Estruturas Usando Redes Neurais Artificiais, V Congresso de Engenharia Mecânica do Norte-Nordeste, ABCM, Fortaleza, Brasil, 1994.
4. Doebling, S. W., Farrar, C. R., Prime, M.B. and Shevitz, D. W., Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems from Changes in their Vibration Characteristics: a Literature Review. Los Alamos Report LA-13070-MS.

5. Freire, J. L. F., Castro, J.T.P., Otegui, J. L. et al. Aspectos Gerais da Avaliação de Integridade e Extensão de Vida de Estruturas e Equipamentos Industriais, Workshop-24 e 25/nov., Centro de Estudos em Integridade Estrutural, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-Rio, 1994.
6. Freire, J. L. F., Castro, J.T.P., Vieira R. D. Avaliação de Integridade Estrutural e Monitoração de Estruturas Civas, Workshop, Centro de Estudos em Integridade Estrutural, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-Rio, CEFET-Rio e StrainLab Análises de Tensões Ltda, 1994.
7. Galvão, R. K. H. Curso sobre Processamento de Sinais Empregando Redes Neurais, ITA-Divisão Engenharia Eletrônica, Departamento Sistemas e Controle, p. 26-30 outubro, 1998.
8. Ghaboussi, X. Wu. J. & GARRET, J. H., Use of Neural Networks in Detection of Structural Damage, Computers & Structures, Vol. 42, No 4, p. 649-659, 1992.
9. Kaminski, P. C. Um sistema de diagnóstico de falhas estruturais baseado em redes neurais artificiais e frequências naturais, Tese de Doutorado, Escola Politécnica da universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Mecânica, 139 p., São Paulo, Brasil, 1997.
10. Kovács, Z. L. O cérebro e a sua mente – Uma introdução a neurociência computacional. Edição Acadêmica, São Paulo – SP, Brasil, 1997.
11. Thomson, W. T. Teoria da Vibração com Aplicações, Editora Interciência Ltda, Rio de Janeiro, 1978.

## APÊNDICE 1

### Parâmetros utilizados pela Rede Neural Artificial

- Treinamento supervisionado;
- 3 camadas escondidas, com 5 neurônios em cada camada;
- A função de transferência logística;
- O algoritmo de treinamento utilizado foi o de retro-propagação dos erros;
- Outros parâmetros de treinamento foram:
  - Número de épocas para apresentação no display = 2;
  - Número máximo de épocas = 100;
  - Erro a ser atingido = 0,00001;
  - Valor do mínimo gradiente = 0,002;
  - Valor inicial para o momento = 0,001;
  - Fator de crescimento do momento = 4;
  - Fator de decrescimento do momento = 0,01;
  - Valor máximo para o momento = 1e5.

# ANÁLISE DE FLAMBAGEM DE LÂMINAS EM PVC COM NERVURAS

**Marcelo Augusto Leal Alves**

**Paulo Carlos Kaminski**

Departamento de Engenharia Mecânica – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – Cidade Universitária 05508-900, São Paulo, SP, Brasil.

E-mail: malalves@usp.br, pckamins@usp.br

## Resumo

Tubos em PVC com paredes nervuradas são usados em obras enterradas para escoamento de fluídos no regime de conduto livre. O processo de obtenção de tais tubos consiste no enrolamento de um perfil nervurado. Estudos prévios mostraram que a resistência à flambagem é o parâmetro crítico de projeto. A flambagem ocorre quando do enrolamento da lâmina, na fabricação do tubo. Neste trabalho é apresentado um estudo teórico analítico do problema de flambagem no enrolamento dos tubos bem como simulações, por elementos finitos, da flambagem. Para tanto são usados conceitos desenvolvidos inicialmente para o cálculo da resistência à flambagem de perfis monossimétricos.

**Palavras chave:** Flambagem, Nervuras, Lâminas

## 1. Introdução

Tubos com a parede reforçada, como os vistos neste trabalho, são produzidos pelo enrolamento de um perfil estrudado, formando uma hélice. O fechamento do tubo é feito por uma junção do tipo macho-fêmea e com o uso de soldagem química por meio de adesivo. Este tipo de tubo destina-se a obras enterradas, tais como sistemas de drenagem de águas pluviais e devem aliar baixo peso com alta rigidez. Esta é conseguida por meio do nervuramento, como o apresentado na figura 1.

A elevada rigidez é necessária para que, uma vez sujeito ao carregamento externo, o tubo sofra a menor deformação possível. Tal fato é importante tanto para garantir a vedação quanto para minimizar os efeitos de fluência do material do tubo.

Um mesmo perfil pode ser enrolado em diferentes diâmetros e portanto ficará sujeito a tensões diferentes durante o processo de enrolamento. Considerando que o perfil fica sujeito à flexão pura, tem-se que o momento fletor,  $M$ , aplicado no enrolamento do tubo é dado por:

$$M = \frac{2EI}{d_i} \quad (1)$$

Na equação (1) foi inicialmente adotado módulo de elasticidade,  $E$ , constante. Sendo que,  $I$  é o momento de inércia do perfil e  $d_i$  é o diâmetro de enrolamento do tubo. A equação (1) indica que para menores diâmetros de enrolamento o perfil estará sujeito a maiores esforços.

O estudo da flambagem das nervuras pode ser feito considerando apenas uma delas e levando em conta que parte da lâmina também faz parte do perfil (Kaminski & Laterza, 1999). Feita esta consideração é possível aplicar parte da teoria desenvolvida para a flambagem lateral por torção de vigas sujeitas a flexão.

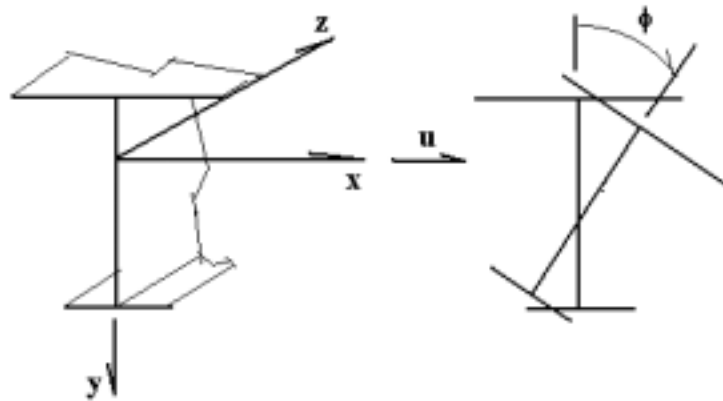


**Figura 1.** Perfil do tubo nervurado

## 2. Flambagem Lateral por Torção de Vigas Sujeitas a Flexão

A flambagem lateral de vigas sujeitas a flexão é objeto de alguns textos clássicos (Timoshenko & Gere, 1961), (Den Hartog, 1952), considerando apenas perfis bi-simétricos, p.ex. seção transversal retangular. O equacionamento apresentado nestes textos não é aplicável a casos gerais (Bleich, 1952). O mecanismo de flambagem envolve a torção, quando a rigidez torcional da viga é muito menor que a rigidez à flexão (Bleich, 1952), sendo esta uma característica de seções abertas de paredes finas, tais como o perfil usado nos tubos nervurados. Este fenômeno foi inicialmente equacionado por Wagner (1936) e, posteriormente, estudos complementares foram feitos por Goodier, (1942). Trabalhos posteriores (Trahair & Anderson, 1972), (Kitipornchai & Trahair, 1980) aplicaram os resultados mais antigos ao caso de vigas com monosimetria.

Na figura 2, são apresentados os deslocamentos do perfil sujeito a flambagem. Na mesma, também aparece o sistema de coordenadas adotado. Os deslocamentos referentes à flambagem são a translação  $u$  e a rotação  $\phi$ . As equações de equilíbrio, segundo Trahair e Anderson (1972), são apresentadas a seguir.  $E$  e  $G$  são os módulos de elasticidade e de torção, respectivamente.  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ , são os momentos solicitantes fletores ( $M_x$  e  $M_y$ ) e de torção ( $M_z$ ), atuantes na seção transversal.  $I_y$  é o momento de inércia em torno do eixo  $y$ ,  $I_t$  o momento de inércia a torção e  $I_w$  é o momento de inércia ao empenamento da seção



**Figura 2.** Sistema de coordenadas e deslocamentos

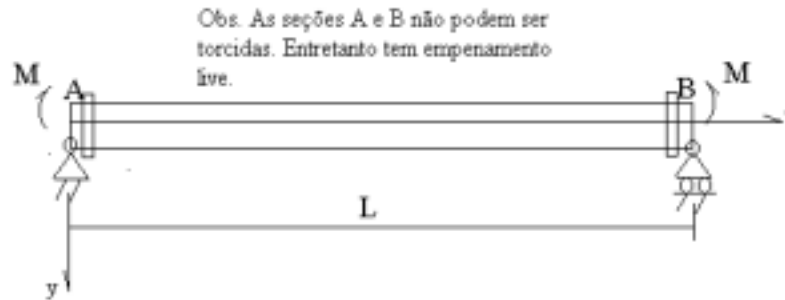
$$EI_y \cdot \frac{d^2u}{dz^2} = -M_x \phi + M_y \quad (2)$$

$$(GI_t + M_x \beta_x) \cdot \frac{d\phi}{dz} - EI_w \cdot \frac{d^3\phi}{dz^3} = M_x \cdot \frac{du}{dz} + M_z \quad (3)$$

Onde  $\beta_x$  é uma propriedade da seção transversal que leva em conta os efeitos devidos ao fato do centro de cisalhamento não ser coincidente com o baricentro da seção transversal. A expressão de  $\beta_x$  é dada por:

$$\beta_x = \frac{1}{I_x} \cdot \left( \int_A x^2 y dA + \int_A y^3 dA \right) - 2y_o \quad (4)$$

Na expressão (4)  $y_o$  é a coordenada do centro de cisalhamento, tomada em relação ao baricentro da seção. Notar que para seções com simetria em relação ao eixo x (ver figura 2),  $\beta_x$  é nulo.



**Figura 3.** Viga bi-apoiada sujeita a momentos na extremidade

Conforme a condição de carregamento e vinculação é possível encontrar soluções analíticas fechadas para as equações (2) e (3). Para a condições de viga bi-apoiada, de comprimento L, onde as extremidades estão impedidas de torcer mas não de empenar, sujeita a momentos concentrados nas extremidades, conforme a figura 3, as condições de contorno são:

$$p/z = 0, \quad u = \phi = \frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \quad (5)$$

$$p/z = L/2, \quad \frac{du}{dz} = \frac{d\phi}{dz} = 0$$

Sabe-se ainda que quanto aos momentos solicitantes tem-se:

$$\begin{aligned} M_x &= M \\ M_y &= M_z = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Com as condições de contorno dadas por (5) e os esforços solicitantes por (6) a solução das equações (3) e (4), em termos de momento crítico de flambagem,  $M_c$ , é dada por:

$$M_c = \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{(EI_y GJ)} \cdot \left[ \frac{\pi\delta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\pi\delta}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\pi^2 EI_w}{GJL^2}\right)} \right] \quad (7)$$

Onde o parâmetro de monosimetria,  $\delta$ , é dado por:

$$\delta = \frac{\beta_x}{L} \sqrt{\frac{EI_y}{GJ}} \quad (8)$$

Outras condições de vinculação e carregamento levam a soluções analíticas fechadas ou soluções numéricas (Trahair & Anderson, 1972). A solução acima apresentada será empregada para validação dos modelos de elementos finitos usados na determinação de carregamentos críticos com outras condições de contorno mais adequadas ao problema estudado.

### 3. Modelos em Elementos Finitos

A aplicação de elementos finitos a problemas similares ao que é visto neste trabalho tem sido estudada segundo diversos aspectos, principalmente quanto a proposição de elementos específicos para as condições encontradas neste tipo de problema, isto é, não-linearidades devidas às grandes deformações e deslocamentos (Chin et al., 1994).

No entanto, neste trabalho foram empregados elementos padrão do tipo *shell*, disponíveis em qualquer programa comercial de elementos finitos. A razão para tal escolha deve-se a necessidade de manter a metodologia proposta o mais aplicável possível.

Deve ser lembrado que a carga de flambagem calculada pela solução analítica leva em conta uma série de hipóteses que na prática não são aplicáveis. Entre elas pode-se citar: homogeneidade da estrutura quanto as propriedades geométricas e de material, aplicação precisa do carregamento numa posição e direção. Em geral esta carga é maior do que a existente na realidade, mesmo quando são feitos experimentos controlados (Trahair & Anderson, 1972). Com modelos de elementos finitos, algo semelhante ocorre, justamente por se utilizar um modelo para a estrutura com uma série de condições idealizadas, como por exemplo os vínculos.

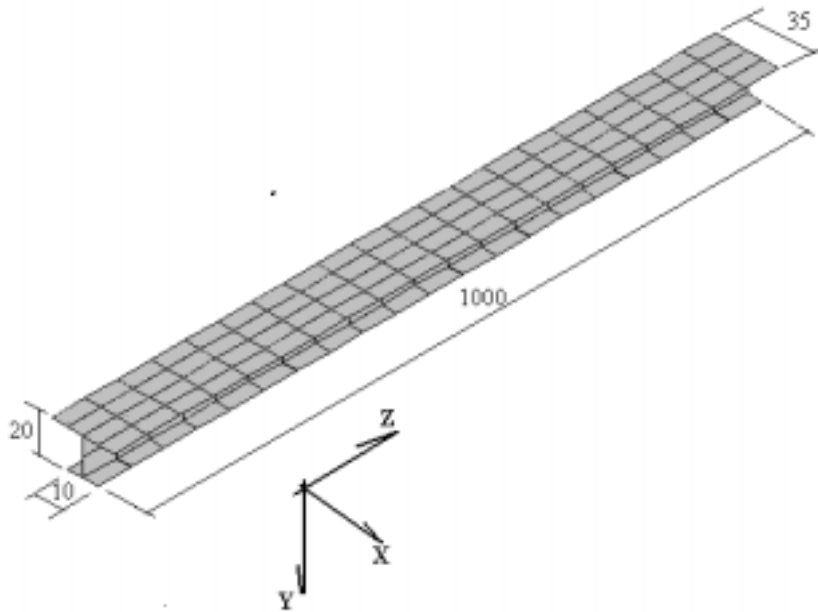
O primeiro modelo montado serviu para verificar a adequação da escolha do tipo de elemento, frente aos resultados analíticos disponíveis. A figura 4 apresenta o modelo montado, composto por 160 elementos do tipo *shell63*, disponível no programa *ANSYS* versão 5.3. As condições de contorno são as mesmas especificadas no item anterior. As dimensões da estrutura modelada estão apresentadas na figura 4. A espessura dos elementos foi definida como sendo igual a 0,8 mm.

O método de solução aplicado pelo programa consiste na obtenção de auto-valores e auto-vetores referentes à carga crítica de flambagem e a forma da estrutura após a flambagem. (SAS IP – Inc., 1996).

O carregamento é aplicado de tal forma que a flange de menor largura seja aquela sujeita a tensões normais de tração.

As propriedades do material (PVC) são:

$E = 2800 \text{ N/mm}^2$	(Módulo de elasticidade)
$\nu = 0,3$	(Coeficiente de Poisson)
$G = 1077 \text{ N/mm}^2$	(Módulo de cisalhamento)

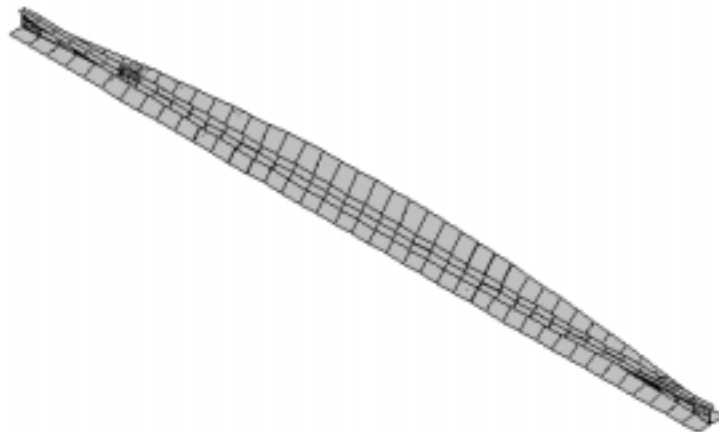


**Figura 4.** Dimensões básicas do modelo adotado. (em milímetros)

Na tabela 1 estão apresentados os resultados obtidos, em termos de momento crítico de flambagem. Na figura 5 está representada a estrutura deformada.

**Tabela 1.** Comparativo de resultados analítico e por elementos finitos

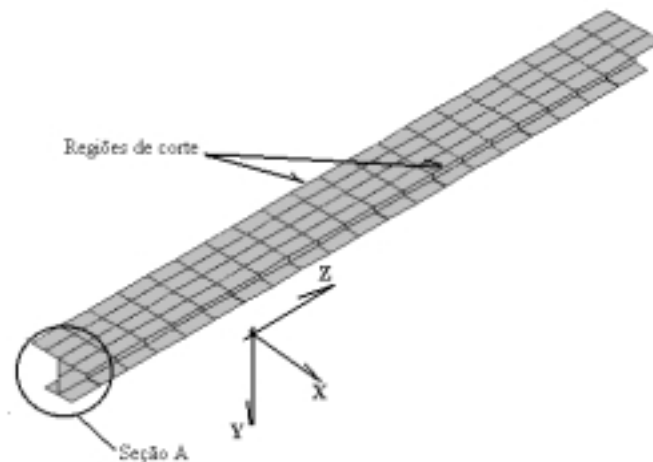
Mc (Nmm)	Elem. Finitos	Analítico
	1701	1790



**Figura 5.** Estrutura Deformada (modelo 1)

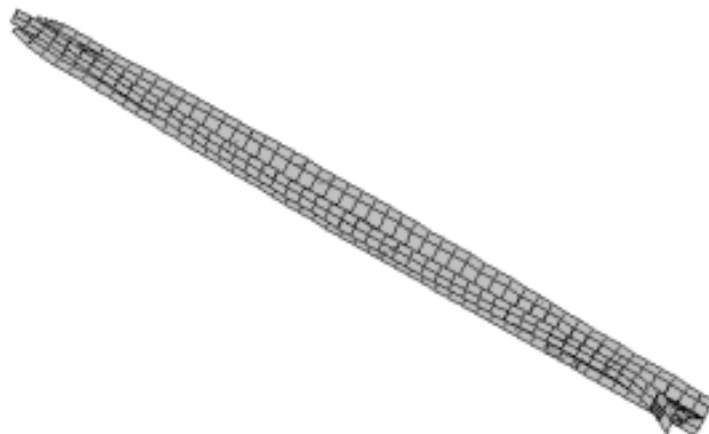
O segundo modelo tem por objetivo representar parte de um dos perfis de tubo. Neste caso, para que a rigidez da chapa seja atuante, foi considerado no modelo em que os nós referentes a superfície onde foi feito o corte da seção analisada (ver figura 6) têm os deslocamentos na direção X restritos, bem como as rotações em torno do eixo Z. Além disso, foi simulado numa extremidade o fato do perfil ser contínuo ao longo do comprimento. Logo, os nós da seção A (ver figura 6) também tem os deslocamentos na direção Z e as rotações em torno de X restritos. O carregamento aplicado consiste num momento concentrado na

extremidade livre. As dimensões e propriedades do material são as mesmas do modelo anterior, bem como o tipo de elemento. Entretanto, neste modelo foram empregados 500 elementos. Isto foi necessário para que fosse possível obter as deformações da flange de maior largura.



**Figura 6.** Vínculos do modelo 2

Para este modelo o momento crítico encontrado vale 2404 Nmm. Na figura 7 está representada a estrutura deformada



**Figura 7.** Estrutura deformada (modelo 2)

#### 4. Comentários e Conclusões

Os resultados do modelo 1 mostram que elementos do tipo plano para a modelagem de cascas (*shell*), disponíveis em qualquer programa de elementos finitos, podem ser utilizados na modelagem do problema estudado, desde que não se deseje uma precisão elevada nos valores obtidos para a carga crítica. Este resultado não é trivial uma vez que, para problemas similares pode vir a ser necessário o uso de elementos específicos, desenvolvidos para a modelagem de problemas com grades deslocamentos e deformações (Chin et al. 1994). Já foi observado neste trabalho que tal precisão nos resultados numéricos não tem grande utilidade na prática, uma vez que várias hipóteses simplificadoras são empregadas tanto para a



obtenção dos resultados analíticos quanto para a construção dos modelos em elementos finitos.

Uma maneira de verificar os resultados é quanto a forma da estrutura depois da flambagem. Esta é uma característica própria de cada estrutura para uma determinada carga crítica. Logo, a comparação entre as formas da estruturas flambadas é um meio de verificação dos resultados obtidos, tanto pelos modelos analíticos quanto para os de elementos finitos.

O método descrito no parágrafo anterior foi empregado no segundo modelo. As condições do problema (vínculos e carga) foram simuladas e os resultados obtidos são compatíveis com o observado no enrolamento deste tipo de tubo nervurado.

## 5. Referências

- Kaminski, P.C., Laterza, L.B.M, 1999, “Análise de Flambagem de Lâminas Nervuradas em PVC”, Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Águas de Lindóia, SP.
- Timoshenko, S.P., Gere, J.M., 1961, “Theory of elastic stability”, 2<sup>nd</sup> Ed., McGraw-Hill book Co., New York, USA.
- Den Hartog, J.P., 1952, “Advanced Strength of Materials”, 1<sup>st</sup> Ed., McGraw-Hill book Co., New York, USA.
- Bleich, F., 1952, "The Buckling Strength of Metal Structures", McGraw-Hill Book Co., New York, USA
- Wagner, H., 1936, “Torsion and Buckling of Open Sections”, Translated Technical Memorandum No. 807, NACA – National Advisory Committee for Aeronautics
- Goodier, J.N., 1942, “Torsional and Flexural Buckling of Bars of Thin-Walled Open Section Under Compressive and Bending Loads”, Journal of Applied Mechanics, Vol. 64, ASME, pp. A103-A107.
- Trahair, N. S., Anderson, J. M., 1972, “Stability of Monosymmetric Beams and Cantilevers” Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 98, No. ST1, pp. 269-286.
- Kitipornchai, S., Trahair, N.S., 1980, “Buckling Properties of Monosymmetric I-Beams” Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 106, No. ST5, pp. 269-286.
- Chin, C.K., Al-Bermani, G.A., Kitipornchai, S., 1994, "Non-Linear Analysis of Thin-Walled Structures Using Plate Elements", Vol. 37, pp.1697-1711.
- SAS IP – Inc., 1996, “ANSYS Structural Analysis Guide – Buckling Analysis, 2<sup>nd</sup> Edition, USA. (manual do programa ANSYS – Ver. 5.3)

# OPTIMUM SOLUTIONS FOR TRUSSES USING SEQUENTIAL QUADRATIC PROGRAMMING AND GENETIC ALGORITHMS

**Silvana Maria Bastos Afonso**

André Andrade Azevedo

Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil,  
50740-000, Recife, PE, Brasil. E-mail: [smb@npd.ufpe.br](mailto:smb@npd.ufpe.br)

## Abstract

In this work computational tools are developed to carry out sizing optimization of truss under static and free vibration conditions. To do that an automatic procedure is implemented on MATLAB environment. Different types of algorithms such as gradient-based SQP methods and GAs are used. Some benchmark examples are analyzed.

**Key words:** Truss optimization, Genetic Algorithms, SQP

## 1. INTRODUCTION

The analysis and design of trusses has been a classical problem in structural optimization. Typical designs of trusses require a minimization or maximization of a stated objective function and simultaneous satisfaction of several design constraints. For several decades a great variety of methods have been developed to find the size of the elements that optimize trusses under statics loading with a given geometry and topology.

The nonlinear programming algorithms such as sequential quadratic programming (SQP) investigated here are gradient-based and requires the first derivative of the objective function and constraints with respect to the design variables.

The SQP algorithm is extremely efficient in locating a relative optimum closest to the starting point in the design space. In design applications where the design space is known to be multi-modal, the optimum may be obtained by starting the search from several initial points in the design space (Hajeta,1990). However, even then, there is no guarantee of obtaining the global optimum. To overcome the possibility of local optima in the present study, we investigate here a stochastic method based on genetic algorithm.

Genetic algorithms (GAs) are search procedures based on the mechanics of genetics and natural selection. Although computationally simple, GA-based methods are very powerful in their search for improvement and they are not limited by restrictive assumptions above the search space. They overcome the possibility of local optima in the solution process. In truss optimization GAs are very versatile as they accept both discrete and/or continuous design variables. The genetic algorithm developed by D. Goldberg, described in (Goldberg, 1989) is implemented here. Such algorithm have been applied to a wide range of engineering disciplines and has proven to give very good results in several applications.

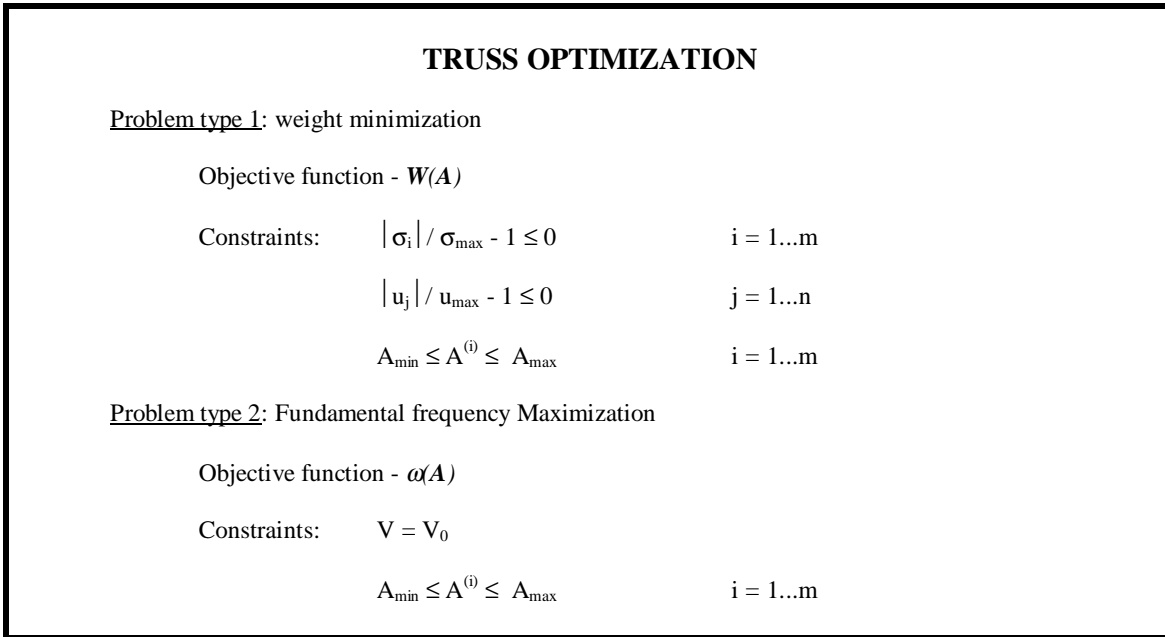
In this work both SQP and GA algorithms are employed to carry out the optimization of trusses under static and free vibration conditions. For comparisons purposes with SQP algorithm, only continuous design variables are considered in our applications.

## 2. GENERAL PROBLEM FORMULATION

The standard mathematical formulation of an optimization problem is:

$$\begin{aligned} \text{minimize or (maximize) } F(s) \text{ subject to: } & \mathbf{g}(s) \leq 0 & i = 1 \dots n_c & (1) \\ & s_k^l \leq s_k \leq s_k^u & k = 1 \dots \text{ndvab} \end{aligned}$$

Where  $s$  is the design variable vector, ndvab is the total number of design variables  $F(s)$  is the objective function,  $\mathbf{g}$  is a typical constraint and  $s^l$  and  $s^u$  are side constraints to the design variables. Typical objective functions and constraints considered in this work are shown in figure 1.



**Figure 1** - Types of problems considered in this work: objectives and constraints.

### 3. THE TRUSS OPTIMIZATION PROCEDURE

In this work an integrated procedure is developed and implemented on MATLAB environment. SQP and GA algorithms are employed to obtain optimum designs. When dealing with GAs the procedure automatically integrates geometry definition and discretization, FE analysis and method of optimization solution, when SQP is used instead, a part from those, a sensitivity analysis procedure is incorporated in the process. Details of each integrated module can be found elsewhere (Afonso and Horowitz, 1998).

### 4. THE SEQUENTIAL QUADRATIC PROGRAMMING ALGORITHM

The SQP algorithm generates a search direction  $\mathbf{d}$  at each iteration solving the definite quadratic subproblem, below:

$$\text{Minimize (or maximize):} \quad \nabla F_k^T \mathbf{d} + 1/2 \mathbf{d}^T \mathbf{B}_k \mathbf{d} \quad (2)$$

$$\text{Subject to:} \quad \nabla \mathbf{g}_k^T \mathbf{d} + \mathbf{g}_k \leq 0 \quad (3)$$

$$\nabla \mathbf{h}_k^T \mathbf{d} + \mathbf{h}_k = 0 \quad (4)$$

where  $\mathbf{B}_k$  is a positive definite approximation to the Hessian matrix of the Lagrangian function of the original problem (Han, 1976).

$$\leq(s, \lambda, \mu) = F + \lambda^T \mathbf{g} + \mu^T \mathbf{h} \quad (5)$$

The approximation to the Hessian is obtained using a Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) scheme which maintains symmetry and positiveness.

Once direction  $\mathbf{d}$  is found a line search is performed using a penalty function as the merit function in order to find the next iterand thus balancing the objective function while maintaining feasibility.

There are several implementations of such algorithm. Two fundamental differences exist among them: the procedure used to solve the quadratic subproblem and the merit function used on the line search. In this work the SQP version existing in the MATLAB optimization toolbox is used. Such version uses some form of Gill et al projection method to solve the quadratic subproblem while the exact penalty function  $\ell$ , is used as merit function (Mathworks, 1995).

## 5. THE GENETIC ALGORITHM

GAs are search procedures based on mechanics of natural selection and natural genetics. They combine the artificial survival of the fittest with genetic operations to form a robust search mechanism. An initial population is randomly generated from the individuals bits in a fixed-length binary string  $bs$ . Successive generations are produced in which new solutions replaces some of the older ones. For a particular iteration  $k$  a GA maintains a population of potential solutions of individuals or chromosomes which contain all of the necessary information about the individuals they represent (the structural designs here).

A selection operator identifies the fittest individuals of the current population whereby pair of parents are chosen for the next generations. In the present context, the fitness function might be weight, strain energy or the fundamental frequency.

During reproduction ‘crossover’ and ‘mutation’ mechanisms are used to produce new population. The incidence of mutation and crossover is controlled by the user through prescript probabilities  $pc$  and  $mp$  respectively.

After each cycle of selection, crossover and possibly, mutation, the fitness of each family is again obtained by converting the binary strings to decimal digits (decoding) and evaluating the objective function. The whole process then continues into the next generation until a stopping criteria is met.

Figure 2 presents a simplified version of the algorithm. Details concern to the procedure implemented here can be found in (Goldberg, 1989).

### 5.1. Constraints Handling

In general structural designs involve several constraints related to stress, displacements, geometric dimensions and other variables. In GA these are conveniently handled by a penalty function. Using such function, constraint violations are penalized to avoid the future use of the set of parameters. The fitness function of the genetic algorithm is a combination of the objective function and penalty term. There is no unique way to define the penalty term. The fitness function considered here was proposed by Ghasemi and Hinton and al (Ghasemi and Hinton, 1996). We briefly describe their approach in the following.

Considering  $\mathbf{g}_{i,j}$  a normalized constraint for a particular population  $j$  such is  $\mathbf{g}_{i,j} = \mathbf{c}_{i,j} - 1$  and  $\mathbf{c}_{i,j} = \mathbf{g}_{i,j} / \mathbf{g}_{i,all}$  in which  $\mathbf{g}_{i,all}$  is the allowable value of that constraint. The constraint  $\mathbf{g}_{i,j}$  is satisfied if  $\mathbf{g}_{i,j} \leq 0$ .

If  $\mathbf{g}_{i,j} \geq 0$  the objective function is penalized. In this case we define the following parameters  $p_{v,i} = (\mathbf{c}_{i,j})^k$  in which  $k$  is related to constraint violation (Ghasemi and Hinton,

1996), and  $\hat{g}_{i,j} = p_c p v_i (g_{i,j})^2$  when  $p_c$  is the 'penalty coefficient' After all the constraints be penalized another parameters  $\check{g}_{i,j}$  is calculated such that

$$\check{g}_{i,j} = \sum_{i=1}^{nc} \hat{g}_{i,j} \quad (6)$$

Finally the penalized objective function  $F_j^*$  is obtained such that  $F_j^* = F_j(1 + \check{g}_j)$  where  $F_j$  is the original objective function (without penalization).

In GA,  $F_j^*$  has to be transformed into fitness values in such that the best design has maximum fitness. For minimization problems, in order to guarantee such aim and also positive values for the fitness, the following expression is considered for fitness.

$$F'_j = (F_{max}^* + F_{min}^*) - F_j^* \quad (7)$$

In which  $F'_j$  is the fitness of design  $j$  and  $F_{max}^*$  and  $F_{min}^*$  are the maximum and the minimum values of  $F_j^*$  in the population of a particular generation  $j$ . It is recommended also to scale fitness function (Goldberg, 1989).

## 5.2. Convergence Criteria

Several termination criteria can be possibly used. Three convergence criteria for the present truss optimization are used:

1. The number of generations: A fixed number of generations can be provided by user. The GA algorithm will stop when the allocated number is reached.
2. Design changes: If the best design for the last 20 generations has not changed then iterations will stop.
3. Objective Function norm: If the variation of the objective function in a population is smaller than a very small given value *crate* thus if  $|(\bar{F} - F_{j(best)}) / \bar{F}| \cdot 100 \leq \text{crate}$  were  $\bar{F}$  is average value, the algorithm will stop.

### GENETIC ALGORITHM PROCEDURE

1. Read data
2. Randomly generates initial population (generation 1)
3. Perform a generation loop
  - for each generation do:
    - 3.1. A design loop
      - for each design do:
        - Design variables decoding
        - Calculate original objective function
        - Compute fitness function
      - 3.2. Check the convergence : if found stop
      - otherwise:
      - 3.3. Store best individual into next generation
      - 3.4. Proceeds genetic operations: solution, crossover and mutation to create population of new generation and go to step 3.1.

**Figure 2 - Basic GA**

## 6. EXAMPLES

### 6.1. Static Applications

The three and ten bar 2D trusses are considered in this section for optimization using both GA and SQP algorithms described in this article. The objective is to minimize the weight of the structure by constraining the element stresses at each truss member.

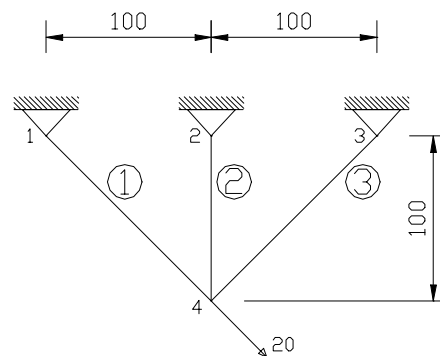
#### a) Three bar truss

**Problem definition:** Figure 3 shows the tree bar truss to be optimized. Two cross sectional area design variables are considered:  $X_1 = A^1 = A^2$  and  $X_2 = A^3$ . The material properties are Young's modulus  $E = 2.07 \cdot 10^8$  and material density  $\rho = 1$ . The units are consistent.

Here the allowable tensile stress is 20, and the allowable compressive stress is 15. Table 1 presents the GA solution parameters adopted in this study. The bounds of the design variables are 0.1 and 1.0.

**Table 1** – GA parameters for all problems presented here.

Condition	Truss	GA parameters					
		lc	ps	ng	pc	mp	crate
static	3 bar	6	10	100	10	1.0	1e-6
	10 bar	8	200	150	10	1.0	1e-3
free vibration	3 bar	10	300	100	10	1.0	1e-6
	9 bar	10	400	200	10	1.0	1e-6



**Figure 3** – Three bar truss

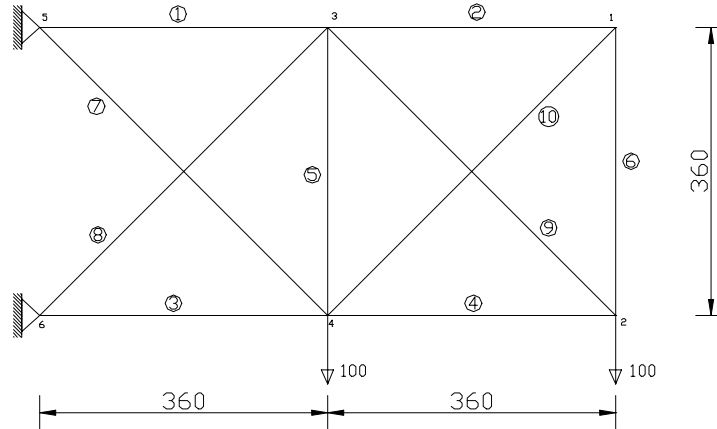
**Discussions of results:** Table 2 shows the optimal solutions for the present problem, obtained here and also the results reported in reference (Ghasemi and Hinton, 1996). As can be observed, all results are within an acceptable range when comparing with the exact solution. The optimum GA solution is achieved at the 2<sup>nd</sup> generation and remains unchanged afterwards.

**Table 2** – Results of 3 bar truss

Design Variable	Present (SQP)	Present (GA)	Hinton (SQP)	Hinton (GA)	Exact
$X_1$	0.7887	0.7429	0.789	0.814	0.789
$X_2$	0.4082	0.4143	0.408	0.343	0.408
Optimum Weight	263.9247	251.5403	263.896	264.600	263.9

#### b) Ten bar truss

**Problem definition:** The ten bar truss problem shown in figure 4 is the second example used in this section. The design variables are the cross-sectional areas of the ten elements. The upper and lower bounds of the design variables are respectively 10 and 0.1. The material properties considered in this case are:  $E = 10^7$ ,  $\rho = 0.1$ . For element 9 the allowable stress is  $\sigma_{all} = \pm 75$  while the remaining elements the stress allowable is  $\sigma_{all} = \pm 25$ . Again all units are consistent. The GA solutions parameters used are given in table 1.



**Figure 4 – Ten bar truss**

**Discussions of results:** The optimization results obtained are listed in Table 3 together with the exact solution and those reported in reference (Ghasemi and Hinton, 1996). As can be observed the final objective value when using either GA or SQP are within acceptable range of the exact value. However, some of the optimum design variables differ from each other for the different methods investigated.

**Table 3 - Results of 10 bar truss**

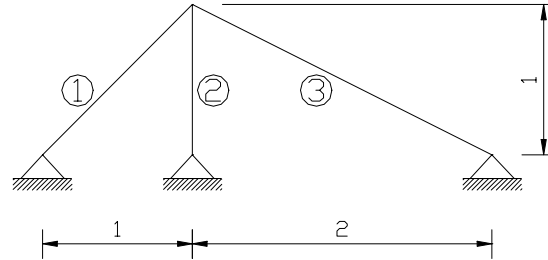
Design Variable	Present (SQP)	Present (GA)	Hinton (SQP)	Hinton (GA)
$X_1$	7.9	7.518	7.90	7.518
$X_2$	0.1	0.458	0.10	0.458
$X_3$	8.1	8.430	8.10	8.430
$X_4$	3.9	3.544	3.90	3.544
$X_5$	0.1	0.100	0.10	0.100
$X_6$	0.1	0.460	0.10	0.460
$X_7$	5.7983	6.287	5.80	6.287
$X_8$	5.5154	4.992	5.51	4.992
$X_9$	3.677	3.350	3.68	3.350
$X_{10}$	0.1414	0.645	0.14	0.645
Optimum Weight	1497.6	1516.0	1497.0	1516.0

## 6.2. Free Vibration Applications

In this section we carry out optimization under free vibration conditions. A three bar and a nine bar benchmark examples are analyzed. In these structure the objective is to maximize the fundamental frequency whilst simultaneously keeping the structure weight constant.

### a) Three bar truss

**Problem definition:** The three bar truss illustrated in Figure 5 is considered first. Two cross-sectional areas are taken as design variable:  $X_1 = A^1 = A^2$  and  $X_2 = A^3$  with a lower bound of 0.00005 and an upper bound of 0.001. The material properties are: the Young's modulus  $E = 2.0 \cdot 10^{11}$  and material density  $\rho = 7860$ . All units are consistent. The solution parameters used in the GA solution are shown in Table 1.



**Figure 5** – 3 bar truss under free vibration conditions.

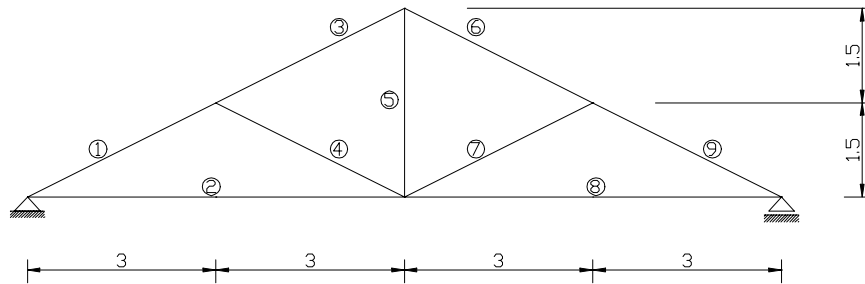
**Discussion of results:** Table 4 compares the optimal solutions for the present example obtained here and in reference (Alkhamis, 1996). The solution in terms of the optimum objective function matches perfectly while some difference is found in terms of the design variables value (GA solutions). GA solution comes with some constraint violation (0.07%)

**Table 4** - Results of 3 bar truss under free vibration

Design Variable	Present (SQP)	Present (GA)	Alkhamis (SQP)	Alkhamis (GA)
$X_1$	$6.3984 \cdot 10^{-4}$	$3.230 \cdot 10^{-4}$	$6.398 \cdot 10^{-4}$	$3.230 \cdot 10^{-4}$
$X_2$	$1.3982 \cdot 10^{-3}$	$6.824 \cdot 10^{-3}$	$1.389 \cdot 10^{-3}$	$6.824 \cdot 10^{-3}$
Optimum Frequency	547.77 Hz	547.853 Hz	547.77 Hz	547.853 Hz

b) Nine bar truss

**Problem definition:** The second example studied in this section is the nine bar truss shown in Figure 6. The material properties used are the same of the previous example. The nine cross sectional area of the bars are taken as design variables. The lower and upper bound values are respectively 0.0005 and 0.5. Table 1 shows a list of parameters adopted in GA.



**Figure 6** – 9 bar truss under free vibration conditions.

**Discussion of results:** The results for the different algorithms are provided in Table 5. Again good comparisons are obtained for the objective function, while the optimum design variables values obtained using GA presents some differences.



**Table 5 - Results of 9 bar truss under free vibration**

Design Variable	Present (SQP)	Present (GA)	Alkhamis (SQP)	Alkhamis (GA)
X <sub>1</sub>	0.2721	0.317	0.272	0.317
X <sub>2</sub>	0.3253	0.308	0.325	0.308
X <sub>3</sub>	0.1429	0.181	0.143	0.181
X <sub>4</sub>	0.0341	0.044	0.034	0.044
X <sub>5</sub>	0.1008	0.079	0.101	0.079
X <sub>6</sub>	0.1522	0.159	0.152	0.159
X <sub>7</sub>	0.0327	0.026	0.031	0.026
X <sub>8</sub>	0.2711	0.266	0.271	0.266
X <sub>9</sub>	0.3063	0.260	0.306	0.260
Optimum Frequency	37.3782 Hz	37.148 Hz	37.38 Hz	37.148 Hz

## 7. CONCLUSIONS

In this work to carry out truss optimization two methods were considered here: the SQP and the GA. Both optimizers gave an excellent results and compared well. Although not explored in this paper, GA method allows the option of choosing a set of design variables from a certain specified catalogue.

Other main advantage using GA are:

- very simple calculations are involved; complex problems can be solved reasonably reliably; problems that have many local optima can be solved; and it is easy to interface the GA method to existing simulations and models.

One of the major disadvantages of using method is that the CPU time is high, however the use of parallel computations helps to circumvent this problem. This topic is current under our investigation.

## 8. REFERENCES

- Afonso, S.M.B. and Horowitz, B.,1998, “ Utilização do MATLAB no desenvolvimento de ferramentas educacionais para o ensino da otimização estrutural”, anais do V CEM – NEM, Fortaleza-CE, pp. 423-430.
- Alkhamis, M. T. A., 1996, “Structural Optimization for Static and Free Vibration Conditions Using Genetic and Gradient-based Algorithms”, c/Ph/202/96, Swansea.
- Ghasemi, M.R. and Hinton, E., 1996, “Truss optimisation Using Genetic Algorithms - In Advances in Computational Structures technology”, Civil-Comp Press Edinburgh, pp 59-75.
- Goldberg, D.E. 1989, “Genetic Algorithms in search, Optimization & Machine Learning”, Addison-Wesley, N. York.
- Hajeta, P., 1990, “Genetic search–an approach to the non-convex optimization problem”, AIAA, 28(7), pp 1205-1210.
- Han, S. P. 1976, – “Superlinear convergent variable metric algorithm for general nonlinear programming problems”, Mathematical Programming, 11, pp- 263 – 282.
- Mathworks,1995, “Optimization Toolbox User's Guide”, MATLAB Mathworks.

## MODELAGEM E ANÁLISE ESTRUTURAL DO TUBO PROLONGADOR DO TELESCÓPIO MASCO

**Rúbia Elaine Martins**

**Celso Koiti Kague**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE/DMC, Av. dos Astronautas, 1758-C.P. 515 - Jardim da Granja, SJC, SP.

**Patricia Gardel Barbosa**

Universidade do Vale do Paraíba - FEAU, Av. Shishima Hifumi, 2911, Urbanova, SJC, SP.

### Resumo

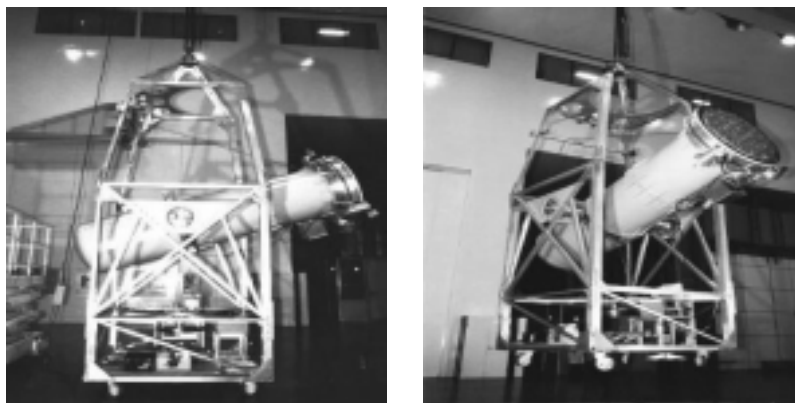
O telescópio MASCO é um instrumento capaz de obter imagens do céu em raios-x e raios gama de baixa energia através do emprego da técnica de imageamento conhecida como Máscara Codificada. O objetivo deste trabalho é apresentar a análise estática do tubo prolongador com a finalidade de verificar sua integridade estrutural, considerando-se duas situações críticas em que o mesmo estará submetido : o tubo fica na posição horizontal; e o tubo sofre uma desaceleração correspondente ao instante em que a gôndola é desacoplada do balão. A estrutura do tubo prolongador é composta por dois cilindros de mesmas dimensões, unidas por juntas aparafusadas e reforçada por 16 nervuras fixadas radialmente em cada extremidade dos cilindros. O tubo prolongador foi modelado utilizando o método dos elementos finitos através do uso do *software* comercial *MSC/NASTRAN*. Para a modelagem do cilindro, assim como para as nervuras e flanges, foram utilizados elementos de casca.

**Palavras-chave:** Elementos Finitos, MASCO, *MSC/NASTRAN*.

### 1. INTRODUÇÃO

O projeto MASCO ( MÁScara COdificada ) (Souza *et al*, 1997) é um telescópio, desenvolvido no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE, com o objetivo de investigar raios-x e raios gama de baixa energia através do emprego da técnica da Máscara Codificada MURA (*Modified Uniformly Redudant Array*) (Villela, *et al*, 1995 , Gottesman *et al*, 1989).

O telescópio voará dentro de uma gôndola suspensa (figura 1) por um balão estratosférico, uma vez por ano, numa altitude de 42 Km e deverá permanecer em vôo de 15 à 48 horas, seguido por uma fase de descida suspensa por um pára-quedas. O mesmo será montado numa plataforma capaz de, durante os vôos, apontar o telescópio para alvos astrofísicos e manter esse apontamento independente dos movimentos do balão. Entre outros alvos a serem observados encontram-se o Centro Galáctico, binárias de raios-x, pulsares e candidatos a buraco negro. O tubo prolongador do telescópio servirá de suporte para a máscara codificada, que é um dispositivo que traduz os sinais provenientes do feixe de raios-x (ou gama) que incide na superfície do detector.



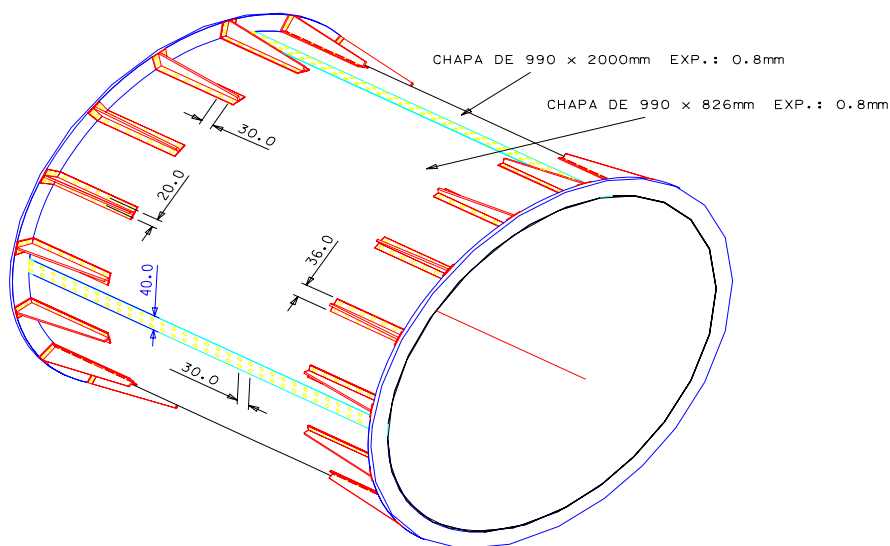
**Figura 1.** O telescópio MASCO

## 2. MODELAGEM DO SISTEMA ESTRUTURAL DO TUBO PROLONGADOR

O objetivo desta etapa do trabalho é a realização de uma análise estática no tubo prolongador, com a finalidade de verificar sua integridade estrutural, considerando duas situações críticas em que o mesmo estará submetido : o tubo na posição horizontal e o tubo submetido a uma desaceleração correspondente ao instante em que a gôndola é desacoplada do balão.

### 2.1 Análise Estrutural do Tubo Prolongador do Telescópio MASCO

A estrutura do tubo prolongador é composta por dois cilindros de mesmas dimensões, unidos por juntas rebitadas e reforçado por 16 nervuras fixadas radialmente em cada extremidade dos cilindros, como pode ser observado na figura 2. Cada cilindro possui 1 m de altura e 0,90 m de diâmetro. São fabricados a partir de chapas de alumínio de 0.8 mm de espessura, costuradas por meio de união rebitada.



OBS.

- 1) ESPESSURA DA CHAPA DO MATA-JUNTA: 0.8mm.
- 2) CADA MATA-JUNTA SERA FIXADO AO CORPO DO TUBO PROLONGADOR POR 66 REBIT
- 3) CADA NERVURA SERA FIXADA AO CORPO DO TUBO PROLONGADOR POR 28 REBITES
- 4) CADA NERVURA SERA FIXADA AO FLANGE POR 4 REBITES.
- 5) O REBITE USADO E DE  $\varnothing$  4.0mm E 12.0mm DE COMPRIMENTO.

**Figura 2.** Detalhe do cilindro do tubo prolongador

## 2.2 Modelo de Elementos Finitos

A equação de movimento de um sistema estrutural discretizado em elementos finitos, considerando-se  $n$  graus de liberdade envolvidos, pode ser escrita como:

$$\mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (1)$$

onde  $\mathbf{X}$  é o vetor de deslocamentos e rotações nodais;  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez e  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças nodais.

O tubo prolongador foi modelado utilizando o método dos elementos finitos através do uso do *software* comercial *MSC/NASTRAN*. A figura 3 mostra o modelo do tubo prolongador em elementos finitos. Para a modelagem do cilindro, das nervuras e das flanges foram utilizados elementos de casca. A união entre as várias partes da estrutura foi modelada utilizando-se elementos rígidos. O material utilizado para análise foi o Alumínio AA 1200-H14 cujas propriedades mecânicas são:

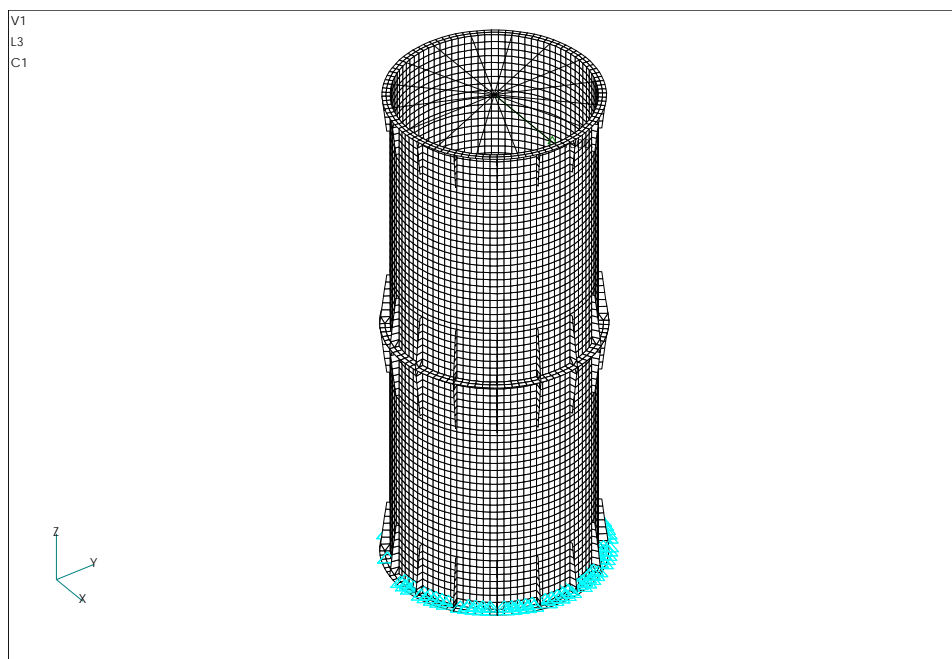
$$E = 66400 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,33$$

$$\sigma_{\text{adm}} = 65,5 \text{ MPa}$$

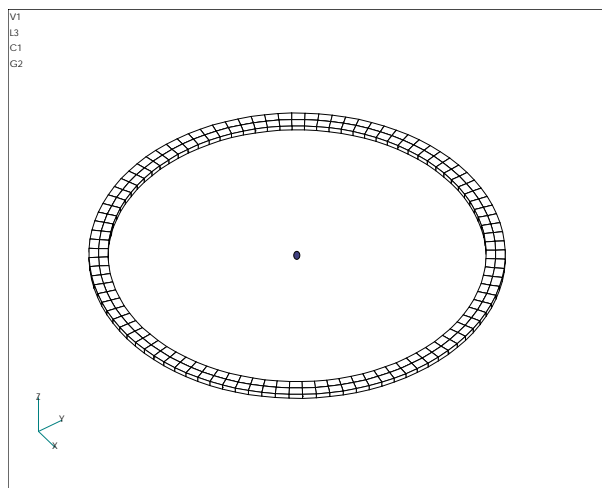
$$\tau_{\text{adm}} = 32,75 \text{ MPa}$$

Os dois cilindros do tubo prolongador, feitos a partir de uma chapa de alumínio de 0,8 mm, foram modelados utilizando elementos de casca quadrilateral (CQUAD4) definidos por 4 nós. O tubo sustenta a máscara do telescópio e serve de condutor, dos raios captados pela máscara, para o decodificador.



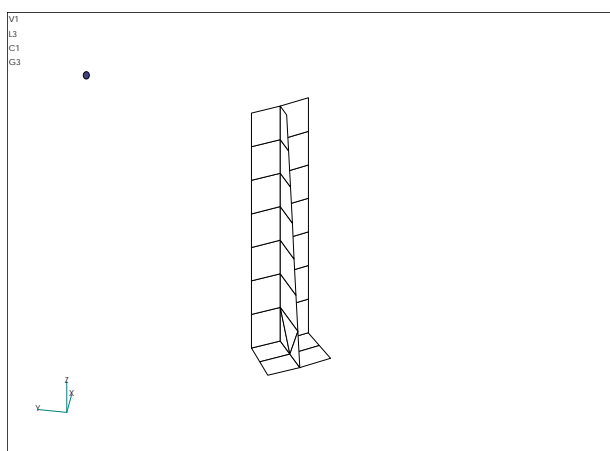
**Figura 3.** Modelo do Tubo Prolongador em Elementos Finitos

As flanges foram modeladas com elementos de casca quadrilateral (CQUAD4) e, estão presentes nas extremidades dos dois tubos (figura 4). São utilizadas para dar maior rigidez às extremidades e para facilitar a montagem. São usinadas e fabricadas em alumínio de 8,0 mm de espessura. A união dos cilindros é feita através das flanges utilizando-se 16 parafusos.



**Figura 4.** Flange

A estrutura tubular é reforçada por 12 nervuras fixadas radialmente nos cilindros e montadas nas suas duas extremidades. Elas unem o cilindro à flange por meio de parafusos que são representados por elementos rígidos ( RBE2 ). Esses elementos simulam juntas com rigidez infinita em direções pré-estabelecidas, em quaisquer dos seis graus de liberdade. A nervura, mostrada na figura 5, é fabricada a partir de chapa de alumínio de  $\frac{3}{16}$  in (4,8 mm).



**Figura 5.** Nervura

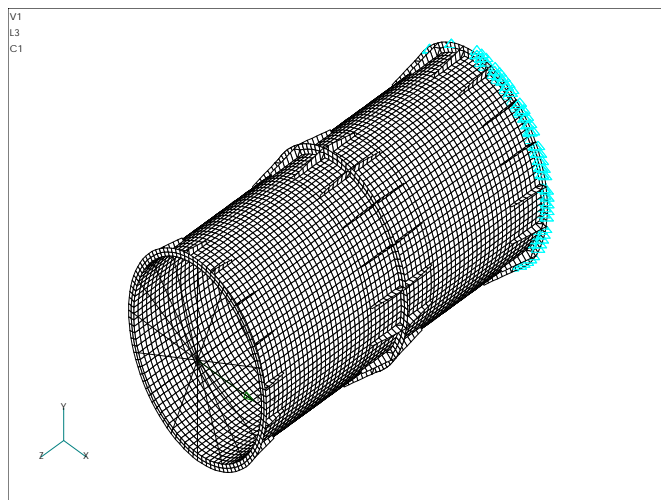
### 2.3 Condições de Carregamentos do Telescópio

O telescópio estará submetido a quatro tipos de carregamento durante as fases de lançamento e operação: (1) na fase de pré-lançamento o telescópio está montado e colocado na posição horizontal. Nesta situação a estrutura é solicitada, além do peso próprio, por uma carga concentrada na extremidade de 1800 N devido a massa da máscara; (2) quando a gôndola está suspensa pelo balão o tubo prolongador sofre uma carga estática de 1g no sentido ascendente; (3) quando o pára-quedas abre (carregamento transiente correspondente a 5g no sentido ascendente); (4) quando o telescópio toca o chão (carregamento transiente correspondente a 5g no sentido descendente).

Neste trabalho serão analisados os casos (1) e (4).

### 2.3.1 Condição de Carregamento 1

Quando o telescópio se posiciona horizontalmente, conforme mostrado na figura 6, a massa da máscara solicita a estrutura tubular de modo a flexionar a mesma. Dessa forma, a análise estática realizada nessa situação consiste na verificação da região mais crítica, e analisa sua integridade estrutural em relação a resistência das uniões rebitadas.

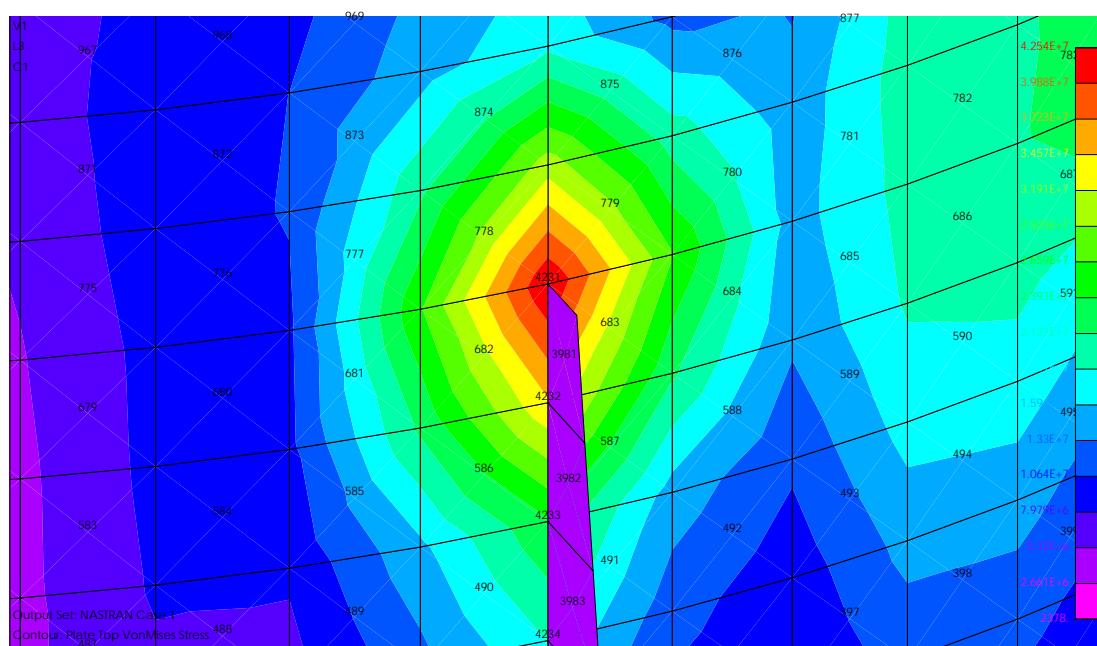


**Figura 6.** Tubo submetido a condição 1

Para representar o peso correspondente à massa da máscara (180 kg) do telescópio, foi aplicada numa extremidade do tubo uma força de 1800N na direção X em relação ao sistema de coordenadas global do modelo (figura 3). Considerou-se também os efeitos da gravidade sobre o tubo aplicado na mesma direção. Na outra extremidade foram colocadas restrições à translação nas três direções. O resultado dessa análise, mostrado na figura 7, é :

elemento mais crítico : ID = 682

tensão de Von Mises: 43,05 MPa

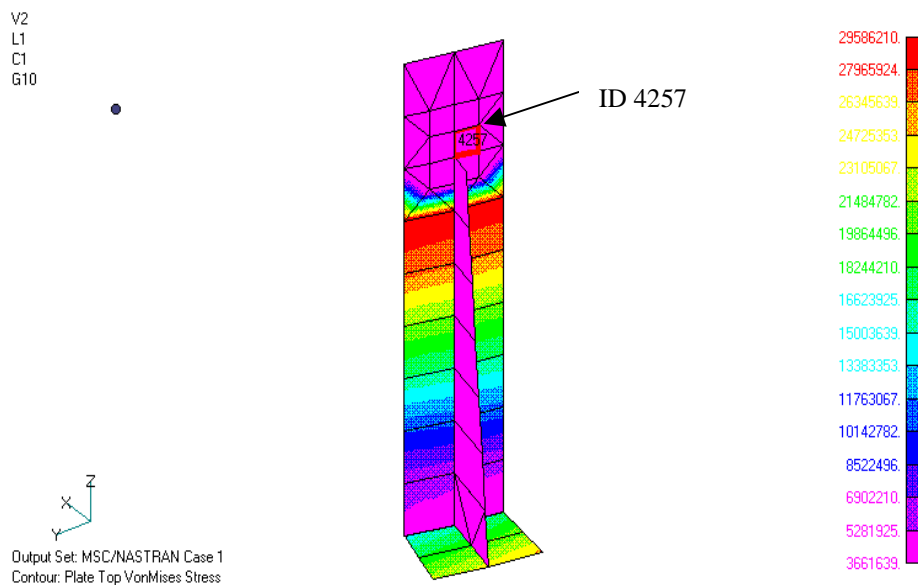


**Figura 7.** Detalhe da região de maior sollicitação de tensões (elemento 682)

Com a intenção de investigar melhor a região crítica, refinou-se a malha na região de maior concentração de tensão, conforme pode ser visto na figura 8:

elemento mais crítico : ID = 4257

tensão de Von Mises: 67,0 MPa



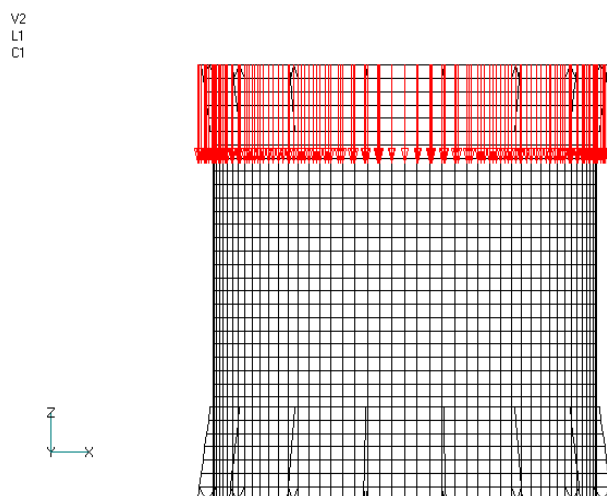
**Figura 8.** Refinamento da malha na região crítica de tensões.

### 2.3.2 Condição de Carregamento 4

Para representar o carregamento dinâmico que a estrutura tubular sofre no instante em que toca o chão, estimou-se um carregamento equivalente à cinco vezes o peso da máscara do telescópio e dividiu-se o mesmo em todos os nós da flange superior, de modo a representar o carregamento da forma mais uniforme possível.

$$P_{equivalente} = \frac{5 \times 9,81(m/s^2) \times 180kg}{288nós} = 30,66 \frac{N}{nó}$$

A figura 9 mostra o carregamento aplicado nos nós da flange superior.

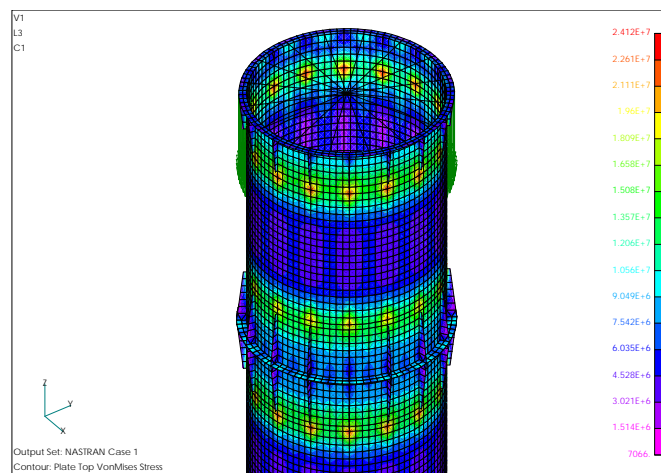


**Figura 9.** Tubo submetido a condição de carregamento 4.

A figura 10 mostra um detalhe das regiões de maior solicitação de tensão como resultado desta análise. Essas regiões estão localizadas nas extremidades das nervuras, como ocorreu no acaso do carregamento 1.

elemento mais crítico : ID = 3209

tensão de Von Mises: 31,0 MPa



**Figura 10.** Detalhe das regiões de maior solicitação de tensão

### 2.3.3 Verificação do Modelo Numérico

Após a etapa de modelamento da estrutura do telescópio, alguns testes foram realizados para verificar a exatidão do modelo. Estes testes, sugeridos pela NASA (*GIRD, 1994*), têm o objetivo de detectar a existência de alguns dos erros mais comuns no modelamento numérico de estruturas.

**1º Teste :** Aplica-se uma carga gravitacional unitária na direção de cada um dos três eixos da estrutura. O modelo deve estar livre de quaisquer outros carregamentos externos. Através de uma análise estática verifica-se se a resultante das reações de apoio na direção do carregamento aplicado é igual ao peso da estrutura. Este teste detecta a existência de possíveis restrições não especificadas.

**2º Teste :** Uma análise modal é feita no modelo livre-livre da estrutura. As seis primeiras frequências obtidas devem ser inferiores a  $1,0E-2$  Hz e o modelo deve ser capaz de representar os seis modos de corpo rígido da estrutura.

**3º Teste :** Retirados todos os carregamentos externos do modelo, deixa-se ele apoiado em apenas um nó. É aplicado um deslocamento unitário nos três graus de liberdade de deslocamento deste apoio (translação ao longo dos três eixos x, y e z), um de cada vez. Na análise estática, deve-se constatar que o deslocamento em todos os nós da estrutura é igual ao dado no nó restrito. Este teste indica se há algum nó preso indevidamente.

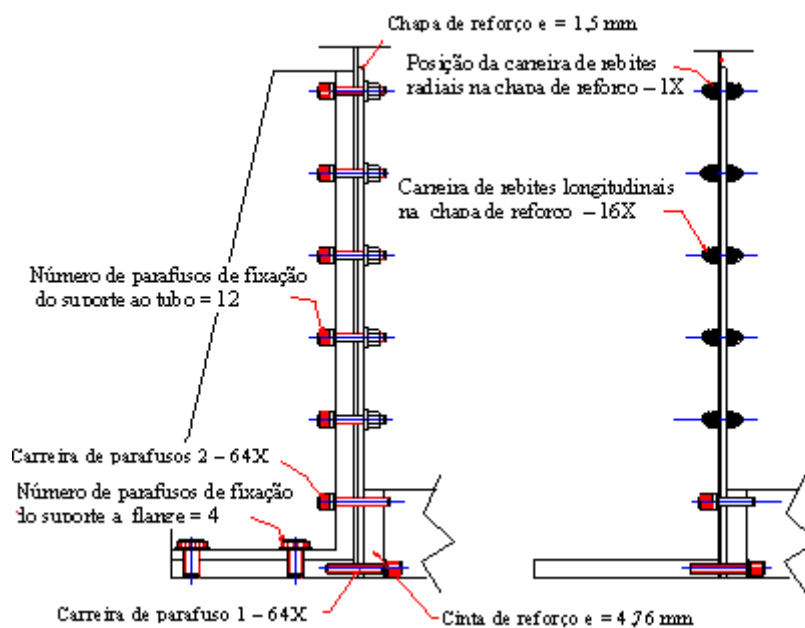
### 3. Conclusões

Observa-se que no caso 1 a tensão de Von Mises é igual a 43,05 MPa. Quando refina-se a malha na região mais crítica a tensão de Von Mises aumenta para 67 MPa. O valor admissível de tensão de tração/compressão do material utilizado é 65,5 MPa, existindo um fator de segurança embutido neste valor. As tensões solicitantes ultrapassam um pouco a tensão admissível apenas em pontos localizados, isto é, pontos de concentração de tensões. Como critério de verificação pode-se admitir que esta situação seja aceitável para poucos ciclos dos carregamentos estáticos equivalentes analisados.



A resistência dos rebites da estrutura ao cisalhamento também deve ser verificada. Os rebites das nervuras e das flanges não apresentaram a segurança desejada e foram substituídos por parafusos.

Tratando-se de um equipamento de alta precisão e para garantir toda margem de segurança do projeto, foi decidido reforçar o tubo, conforme ilustra a figura 11, adicionando tiras de alumínio nas regiões mais críticas, reduzindo assim os picos de tensões, e substituindo os rebites existentes na estrutura por parafusos. A próxima etapa do trabalho é a verificação da segurança à fadiga.



**Figura 11.** Solução de reforço da estrutura tubular

#### 4. Agradecimentos

Ao INPE por possibilitar a realização desse trabalho.

#### 5. Referências Bibliográficas

- Enterprise Software Products, 1996, "Introducing to FEA (Finite Element Analysis) using FEMAP (Finite Element Modeling and Postprocessing)", Version 4.51 for Windows, Exton.
- Gottesman, S.R & Femimore, E.E., 1989, "New family of binary arrays for coded aperture imaging", Applied Optics, 28(20), 4344-4352.
- MSC/NASTRAN, The MacNeal-Schwendler Corporation/National Aeronautics and Space Administration, 1998, Los Angeles, U.S.A.
- NASA, 1994, "General Interface Requirements Document (GIRD) for EOS Common Spacecraft / Instruments", Nasa Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, REVA, GSFCC-422-11-12-01.
- Souza, P. N., Fonseca, R. A., Villela Neto, T. & Kataoka Filho, M., 1997, "The Design of a Stabilized Gondola for a Gamma Ray Telescope", XIV Brazilian Congress of Mechanical Engineering, UNESP, Bauru.
- Villela, T., Braga, J., D'Amico, F. & Jayanthi, U.B., 1995, "A MURA-based coded mask telescope", Advances in Space Research, 15(5), 95-98.

A análise aqui executada permite, com base nos exemplos aqui apresentados, recomendar que o dimensionamento das lajes lisas de concreto, com índice de esbeltez usuais, obedeça aos seguintes critérios:

Para as solicitações dinâmicas associadas aos motores elétricos, é desaconselhável o dimensionamento das lajes de concreto, para valores do parâmetro de frequência situados nos intervalos  $1,30 > \beta > 0,50$ , devido a ações dinâmicas muito elevadas que ocorrem na região do 1<sup>o</sup> pico,  $\beta=1$ , dos espectros de resposta, Figuras 6 e 7, e que não estão de acordo com a realidade da prática de projeto.

Com relação às solicitações dinâmicas associadas ao impacto de objetos, os espectros de resposta, permitem observar que, a faixa de trabalho mais condizente com a realidade de projeto está situada nos intervalos  $\beta > 1,70$ , para a placa apoiada, e  $\beta > 1,50$ , para a placa engastada, evitando, dessa forma, as amplificações excessivas que ocorrem na região do 1<sup>o</sup> pico,  $\beta=1$ , dos espectros de resposta, Figuras 8 e 9.

## **6. AGRADECIMENTOS**

Os autores agradecem a FAPERJ - Fundação de Auxílio à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro e ao CNPq, Conselho nacional de Pesquisa, o auxílio financeiro para o desenvolvimento do presente texto.

## **7. REFERÊNCIAS**

- [1] ANSYS, 1998, Swanson Analysis Systems, Inc., P.O. Box 65, Johnson Road, Houston, PA, 15342-0065, Version 5.5, Basic Analysis Procedures, Second Edition.
- [2] STUP, “Recomendações para o Cálculo de Lajes de Concreto Protendido”, Sociedade Técnica para Utilização da Pré-Tensão, STUP, Rio de Janeiro, Brasil.
- [3] VSL, “Sistema VSL de Proteção de LAJES”, Sistemas VSL de Engenharia S.A., Rio de Janeiro, Brasil.
- [4] Losinger, S.A., 1981, “Le Béton Précontraint dans le Bâtiment: Dalles Précontraintes”, VSL Prospectus, Berne, France.
- [5] Associação Brasileira de Normas Técnicas, ABNT, 1982, “Cálculo e Execução de Obras de Concreto Protendido”, NBR 7197, Rio de Janeiro, Brasil.
- [6] Souza, A.L.A.C., 1989, “Comportamento Dinâmico de Lajes de Concreto Protendido para Edifícios Não Industriais”, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, DEC/CIV/PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil, 92p.

A primeira impressão ao se observarem esses espectros, mostrados nas Figuras 6, 7, 8 e 9, é a de que eles apresentam um trecho distinto, com efeitos dinâmicos bastante acentuados, correspondendo a valores do parâmetro de frequência,  $\beta$ , indicativo de igualdade entre a frequência de excitação,  $\omega$ , associada aos motores elétricos e a queda de objetos, e a frequência fundamental,  $\omega_0$ , das placas em estudo; a discussão segue:

Neste caso, a frequência de excitação,  $\omega$ , em todos os casos estudados, associados aos motores e ao impacto de objetos, aproxima-se da 1ª frequência natural das lajes de concreto protendido, apoiadas e engastadas,  $\beta=1$ . Tal situação encontra-se bem caracterizada nos espectros de resposta, Figuras 6, 7, 8 e 9.

Destaca-se, também, que o trecho do 1º pico,  $\beta=1$ , é absolutamente preponderante com relação aos demais trechos dos espectros de deslocamentos e esforços. Pode-se dizer, ainda, que existem outros picos, sem maior expressão, que ocorrem para frequências superiores das placas em questão, correspondentes aos modos de vibração mais elevados, abrangidos somente pelos gráficos referentes às Figuras 8 e 9, associados à queda de objetos.

Os espectros de resposta, associados à excitação dinâmica proveniente dos motores elétricos, Figuras 6 e 7, permitem concluir o seguinte:

É totalmente desaconselhável o dimensionamento das placas em estudo, apoiadas e engastadas, para valores do parâmetro de frequência situados nos intervalos  $1,30 > \beta > 0,50$ , devido a amplificações bastante elevadas que ocorrem na região referente ao 1º pico,  $\beta=1$ , dos espectros de resposta, Figuras 6 e 7, e que não condizem com a realidade da prática corrente de projeto.

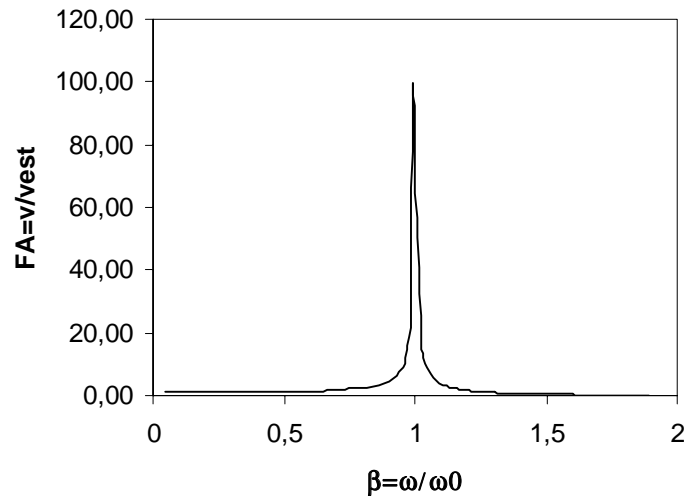
Com relação ao carregamento dinâmico associado ao impacto de objetos, os espectros de resposta, Figuras 8 e 9, permitem observar que:

Neste caso, a faixa de trabalho mais condizente com a realidade de projeto está situada nos intervalos  $\beta > 1,70$ , para a placa apoiada, e  $\beta > 1,50$ , para a placa engastada, evitando, dessa forma, as amplificações excessivas que ocorrem na região referente ao 1º pico,  $\beta=1$ , dos espectros de resposta, Figuras 8 e 9.

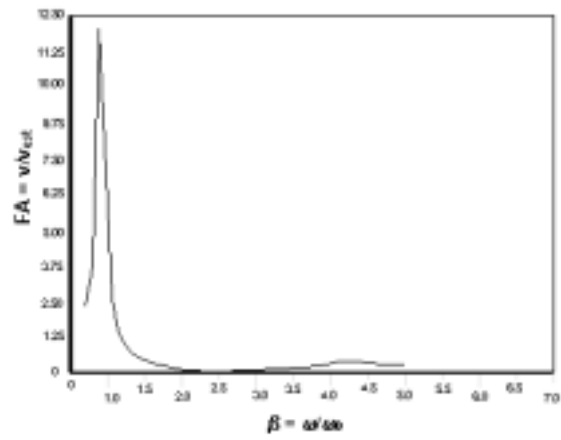
## **5. CONCLUSÕES**

Este trabalho apresenta uma metodologia de análise para avaliação do comportamento dinâmico linear em serviço de lajes lisas de concreto protendido, com índices de esbeltez usuais, submetidas a solicitações dinâmicas correntes, tais como aquelas provenientes de motores elétricos ou de impacto de objetos, a partir de uma análise numérica extensa, com base no método dos elementos finitos, utilizando-se para tal o programa ANSYS [1].

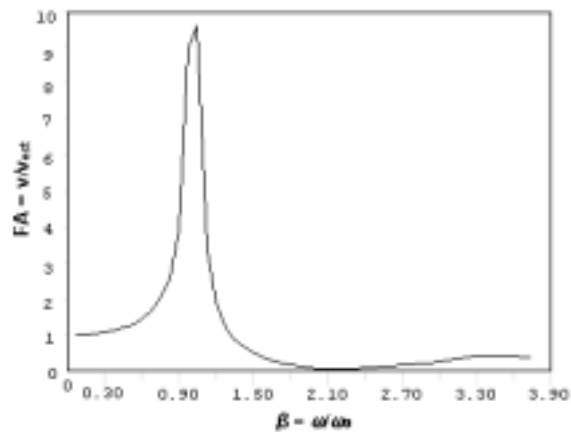
De forma geral, em todos os exemplos analisados, em quantidade muito além do que a apresentada neste trabalho, por limitação de espaço, foi constatada a ocorrência de ações dinâmicas de intensidade bastante elevada. Dessa forma, conclui-se da necessidade de maior rigor no dimensionamento de lajes lisas de concreto, considerando-se esses efeitos dinâmicos ao longo do projeto.



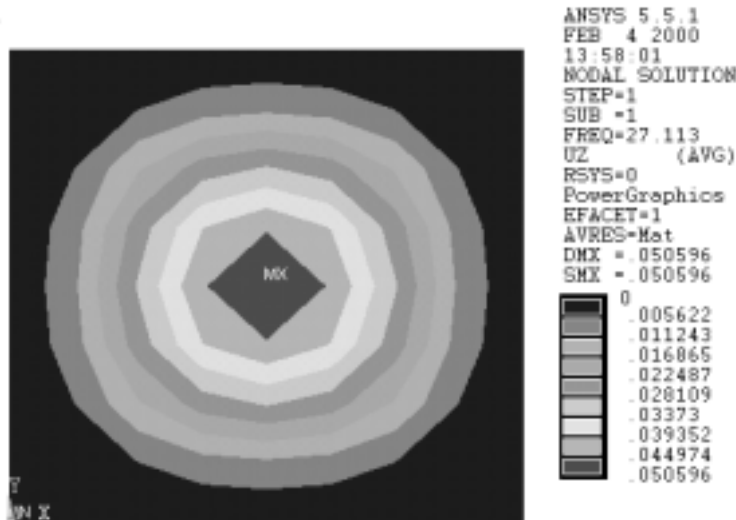
**Figura 7.** Espectro de resposta. Motores elétricos. Placa engastada.



**Figura 8.** Espectro de resposta. Queda de objetos. Placa apoiada.



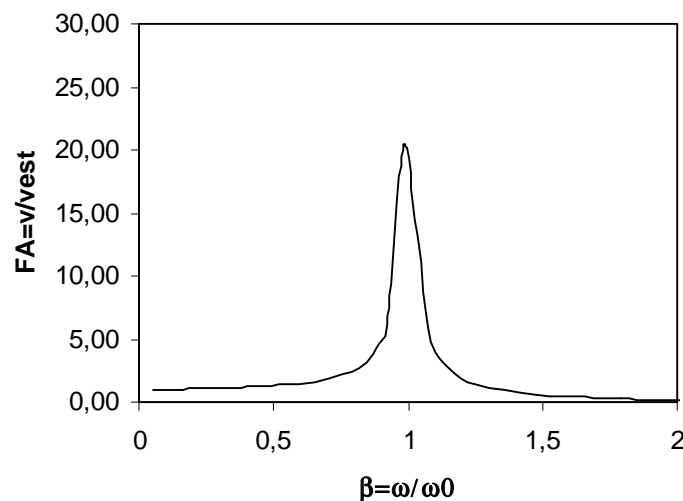
**Figura 9.** Espectro de resposta. Queda de objetos. Placa engastada.



**Figura 5.** Modo fundamental de vibração. Placa engastada.

Com o objetivo de avaliar quantitativa e qualitativamente os resultados obtidos, segundo a metodologia de análise proposta, são produzidos espectros de resposta. Assim sendo, varia-se o parâmetro de frequência,  $\beta$ , definido pela relação  $\omega/\omega_0$ , onde  $\omega$  representa a frequência da excitação, referente aos motores elétricos ou impacto de objetos, e  $\omega_0$  é a 1ª frequência natural da placa em estudo.

Os espectros de resposta são traçados para a resposta dinâmica das placas, associada aos deslocamentos translacionais verticais, sob a ação das cargas dinâmicas referentes aos motores e queda de objetos, em termos do fator de amplificação, FA, definido pela relação  $v/v_{est}$ , na qual  $v$  representa o deslocamento obtido na análise dinâmica e  $v_{est}$  é o deslocamento estático, ambos, nos espectros de resposta, associados ao nó central das lajes. As figuras 6, 7, 8 e 9, apresentam os espectros de resposta para as lajes de concreto protendido apoiada e engastada, respectivamente.



**Figura 6.** Espectro de resposta. Motores elétricos. Placa apoiada.

#### 4. EXEMPLOS

São consideradas neste trabalho, por questões de limitação de espaço, as solicitações dinâmicas referentes aos motores elétricos e ao impacto de objetos sobre a placa, descritos detalhadamente no item 3. Com a finalidade de simular a situação mais desfavorável, os carregamentos em questão são aplicados no ponto central da laje, nó central, representando assim solicitações simétricas.

Escolhe-se como modelo uma laje lisa de concreto protendido com dimensões máximas de 8,40m x 7,80m e espessura de 0,20m. A placa apresenta um módulo de elasticidade  $E=5 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu=0,20$ , e densidade  $\rho=1,8 \text{ kN/m}^3$ . Os resultados são obtidos a partir de uma análise numérica extensa, com base no método dos elementos finitos, mediante a utilização do programa ANSYS [1].

A tabela 1 apresenta os valores correspondentes as frequências naturais da placa modelada como simplesmente apoiada e, em seguida, como engastada.

Tabela 1. Frequências naturais da placa.

Frequências Naturais	Placa Apoiada		Placa Engastada	
	(rd/s)	(Hz)	(rd/s)	(Hz)
$f_{01}$	92,51	14,72	170,36	27,11
$f_{02}$	221,34	35,23	330,37	52,58
$f_{03}$	242,17	38,54	361,17	57,48
$f_{04}$	367,93	58,56	508,17	80,88
$f_{05}$	435,87	69,37	581,49	92,55

As figuras 4 e 5 apresentam os modos fundamentais de vibração referentes às lajes em estudo, apoiada e engastada.

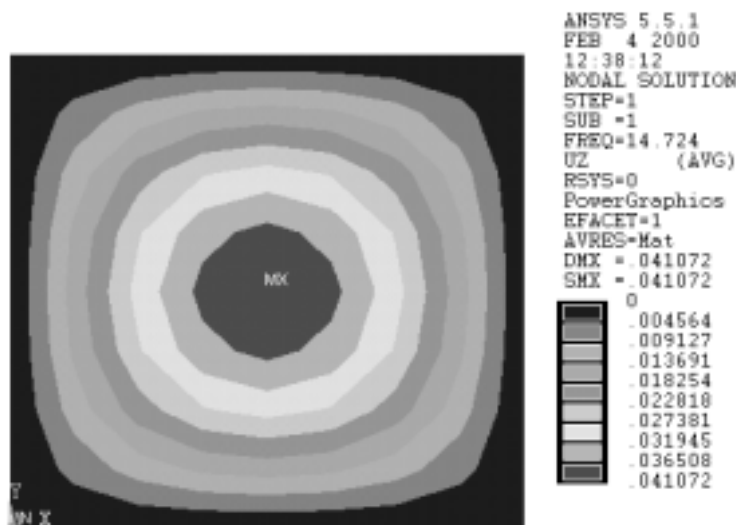
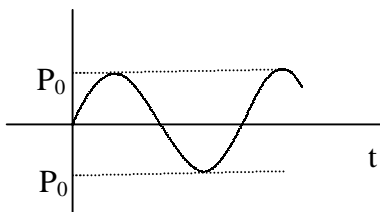


Figura 4. Modo fundamental de vibração. Placa simplesmente apoiada.

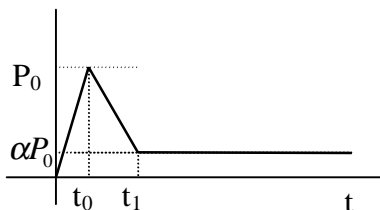
Na equação (1),  $P_0$  e  $\omega$  representam o peso e a freqüência do motor, respectivamente, e  $t$  representa o tempo. A Figura 1 apresenta a função senoidal empregada para simulação do carregamento dinâmico associado aos motores.



**Figura 1.** Carregamento de motores elétricos.

### 3.2 Queda de objetos

A queda de objetos é simulada através de um pulso triangular com um tempo de queda superior ao tempo de crescimento, seguido de uma função constante com amplitude equivalente ao peso do objeto. Admite-se um tempo de contato,  $t_1$ , da ordem de  $5 \times 10^{-2}$  s e uma amplitude máxima,  $P_0$ , de 200kN. A figura 2 mostra a função proposta para representação desta sollicitação dinâmica, referente à queda de objetos.



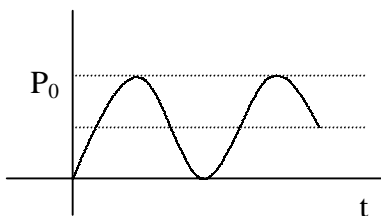
**Figura 2.** Carregamento referente à queda de objetos.

### 3.3 Salões de festa e ginástica

A excitação correspondente a salões de festa ou de ginástica é semelhante àquela correspondente aos motores. Considera-se uma carga,  $P_0$ , de  $2,1 \text{ kN/m}^2$  e freqüências correspondentes ao intervalo entre 1Hz e 4Hz. Adota-se para este tipo de carregamento um comportamento harmônico, essencialmente positivo e com valor inicial nulo. A equação que reproduz esta característica é mostrada na expressão (3).

$$P(t) = \frac{P_0}{2} [1 + \cos(\omega t + \pi)] \quad (3)$$

Na equação (3),  $P_0$  representa a carga, em  $\text{kN/m}^2$ ,  $\omega$  é a freqüência da excitação e  $t$  representa o tempo. A figura 3 apresenta a função associada a este tipo de carregamento.



**Figura 3.** Carregamento referente a salões de festa ou de ginástica.

utilização, principalmente quando as mesmas são submetidas a solicitações dinâmicas como as descritas anteriormente.

Neste trabalho, é desenvolvido um estudo acerca do comportamento dinâmico linear em serviço de lajes lisas de concreto protendido, com índices de esbeltez usuais, submetidas a solicitações dinâmicas correntes, a partir de uma análise numérica extensa, com base no método dos elementos finitos, utilizando-se para tal o programa ANSYS [1].

São determinados os espectros de resposta para lajes protendidas com diversas condições de continuidade submetidas a excitações dinâmicas. Finalmente, com base nas conclusões alcançadas, pretende-se alertar os projetistas para certas distorções que ocorrem em determinados casos, bem como desenvolver atitudes e recomendações de projeto.

## **2. ESBELTEZ DAS PLACAS**

Existe uma certa concordância entre alguns autores quanto à faixa econômica de utilização das lajes lisas de concreto protendido. Um fator preponderante nessa definição é o índice de esbeltez,  $\eta$ , definido pela relação  $h/L$ , na qual  $h$  é a espessura da placa e  $L$  o maior vão da mesma. A determinação da faixa de variação da esbeltez,  $\eta=h/L$ , dessas placas é diretamente influenciada pelo comportamento das mesmas frente a excitações dinâmicas correntes.

Segundo o manual “Recomendações para Cálculo de Lajes em Concreto Protendido”, publicado pela STUP [2], considera-se que placas com índices de esbeltez superiores a  $1/48$  para pavimentos correntes e  $1/52$  para coberturas atendem à necessidade de controle das vibrações e deformações excessivas nas mesmas. Esses valores encontram-se em consonância com manual semelhante publicado pela VSL [3], sendo ambos baseados nas recomendações de [4], que admite  $h/L=1/48$  quando realizada verificação quanto ao nível das vibrações em serviço na laje. Deve-se ressaltar que a norma brasileira, NBR 7197 [5] é absolutamente omissa a esse respeito. Diante do exposto, adota-se neste estudo uma variação do índice de esbeltez,  $\eta$ , no intervalo  $1/35 \leq \eta \leq 1/52$ .

## **3. SOLICITAÇÕES DINÂMICAS**

Com base no trabalho desenvolvido por [6], são propostos modelos para alguns tipos de carregamentos dinâmicos, de forma a reproduzir suas características preponderantes através de funções simples e conhecidas. Os modelos empregados neste estudo são descritos na seqüência.

### **3.1 Motores elétricos**

Adota-se uma função senoidal com frequências correspondentes a motores elétricos que trabalham entre 1500rpm (25Hz) e 3500rpm (58Hz), figura 1. Considera-se como modelo um motor com peso de 1kN. Desta forma, pretende-se cobrir a maior parte dos motores utilizados para serviços de acabamento e em pequenas oficinas. Buscando-se simular o caso mais desfavorável, o motor será posicionado no ponto central da laje, obtendo-se, assim, um carregamento simétrico. A equação que representa este carregamento dinâmico é definida pela expressão (1).

$$P(t) = P_0 \text{sen}(\omega t) \tag{1}$$



# COMPORTAMENTO DINÂMICO DE PLACAS

**José Guilherme Santos da Silva**

**Francisco José da Cunha Pires Soeiro**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Faculdade de Engenharia, FEN, Departamento de Engenharia Mecânica, MECAN, Rua São Francisco Xavier, N<sup>o</sup> 524, Sala 5016, Bloco A, 5<sup>o</sup> Andar, CEP 20550-013, E-Mail: jgss@uerj.br/soeiro@uerj.br

## Resumo

As placas em função de suas características geométricas exigem um cuidado maior do engenheiro projetista no que tange ao seu dimensionamento. A esbeltez dessas placas pode, em determinados casos, comprometer a segurança e prejudicar a sua utilização, principalmente quando as mesmas são submetidas a solicitações dinâmicas. Assim sendo, solicitações como as geradas por vibrações de motores e impacto de objetos ganham importância singular na análise do comportamento deste tipo de estrutura. Neste trabalho, procede-se à análise dinâmica de placas, com índices de esbeltez usuais, submetidas a solicitações dinâmicas correntes a partir de uma análise numérica extensa, com base no método dos elementos finitos, utilizando-se para tal o programa ANSYS. São determinados os espectros de resposta para placas, com diversas condições de continuidade, submetidas aos carregamentos dinâmicos descritos anteriormente. Pretende-se, ainda, com base nas conclusões alcançadas, alertar os projetistas para certas distorções que ocorrem em determinados casos, bem como desenvolver atitudes e recomendações de projeto.

**Palavras Chave:** Análise Dinâmica, Placas, Solicitações Dinâmicas, Espectros de Resposta.

## 1. INTRODUÇÃO

As placas de concreto protendido têm sido muito utilizadas pelos projetistas estruturais como uma solução economicamente bastante interessante à demanda por maiores vãos livres e menores tempos de execução. Tal aceitação está respaldada em um conjunto de vantagens técnicas e econômicas da solução em concreto protendido, dentre as quais pode-se citar a esbeltez elevada e a ausência de fissuras quando em regime de serviço.

Como decorrência das características citadas no parágrafo anterior, as lajes em concreto protendido apresentam baixos valores de frequências naturais e amortecimentos, sendo, portanto, sensíveis às excitações dinâmicas inerentes à sua utilização.

Assim sendo, solicitações como as geradas por academias de ginástica, salões de festa, pequenas oficinas, vibrações de motores, impacto de objetos e até mesmo o caminhar de pessoas, ganham importância singular na análise do comportamento deste tipo de estrutura.

As placas protendidas, em função de suas características geométricas, exigem um cuidado maior do engenheiro projetista no que tange ao seu dimensionamento. A esbeltez desse tipo de estrutura pode, em determinados casos, comprometer a segurança e prejudicar a sua

# LOAD CARRYING CAPACITY OF A DOUBLE-WALL CYLINDRICAL SHELL WITHOUT CONSIDERATION OF AXIAL FORCES

Ulisses Côrtes Oliveira

Instituto de Aeronáutica e Espaço — ASE-E/IAE/CTA

12228-904 — São José dos Campos—SP, Brazil E-Mail: ulisses@iae.cta.br

## Abstract

This paper presents a method and the calculation algorithm used to estimate the load carrying capacity of cylindrical part of a double-wall shell of combustion chamber of a regeneratively cooled liquid rocket engine, without taking into account the influence of axial forces. The basic method was developed by Feodosiev, and it was implemented here with small modifications. As an example, a typical case is thoroughly analyzed.

**Keywords:** Rocket engine, Limit analysis, Combustion chamber, Structural analysis.

## 1. INTRODUCTION

The short operational time is one of the characteristics of liquid rocket engines, mainly of the expendable ones. Thus it is believed to be reasonable for part of their components to work in a plastic state or for the entire units to approach the plastic state.

The design of a liquid rocket engine (LRE) according to this viewpoint will permit to fix the potential load resistance of the structure to the maximum degree possible. Consequently, the weight/strength ratio of the engine can be rationally designed (Anon., 1983).

The load carrying capacity of a structure at plastic state of the material represents its capacity to resist to loadings with preservation of its dimensions and shapes within allowable limits. Thus the maximum load carrying capacity is considered as the structure loading after which an essential change of dimensions occurs without substantial growth of loading, i.e., there comes a quick developing deformation (Feodosiev, 1980).

The load carrying capacity of a LRE chamber is estimated by the value of limiting gas pressure in the combustion chamber. In order to find the limiting gas pressure is necessary to construct the curve that expresses the relationship between the gas pressure in the combustion chamber and its radial elongation under action of combined pressure and temperature loads.

The limiting gas pressure is the value of pressure such that a small increment on it corresponds to a large increment on the radial elongation (or equivalently on the circumferential total strain) of shells, caused by development of plastic deformations in both shells of the chamber.

This paper is concerned with the calculation of global load carrying capacity of a double layer shell of revolution, a typical structure of combustion chamber case of LRE with regenerative cooling.

The fundamentals of the calculation method, originally devised for manual calculation, were stated by Feodosiev (1963), and are based on the nonbending theory of shells. Here, it was adopted a similar approach, a little more convenient for use in computers. The basic equations of this method and the pertinent computational procedures will be described in next sections. Finally, a practical case is analyzed in order to illustrate the application of the method.

## 2. THE PROBLEM AND ITS SOLUTION

Considers a cylindrical combustion chamber composed of two shells joined by arbitrary radially rigid connections. The inner shell will be designed by the index 1 and the outer one by index 2.

Assume as known the basic geometric parameters of this chamber, i.e., their curvature radii ( $R_1$  and  $R_2$ ) and thicknesses ( $h_1$  and  $h_2$ ). Denote by  $R$  its average radius of curvature.

Are known also the working value of the gas pressure in the chamber ( $p_g$ ); the pressure in cooling channels ( $p_l$ ); the average temperatures in each shell ( $T_1$  and  $T_2$ ), the coefficients of linear expansion of shell materials ( $\alpha_1$  and  $\alpha_2$ ), the stress-strain curves of these materials, and the reference temperature ( $T_o$ ) for thermal deformations. The thermo-mechanical properties are evaluated at the average temperature in each shell.

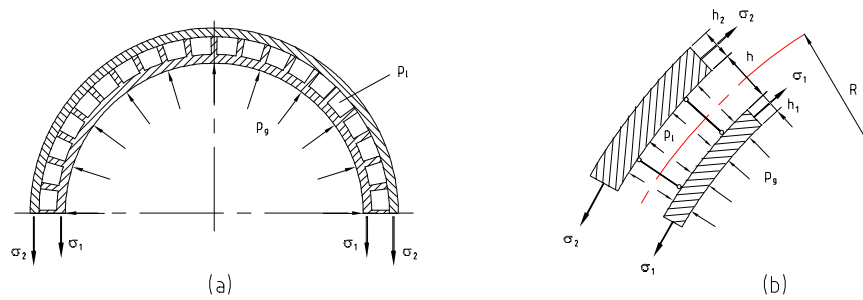


Figure 1: Mechanical model of the combustion chamber.

### 2.1 Simplifications of the mechanical model

The equations of the simulation model and the calculation procedures are based on the following hypotheses and assumptions (see calculation model in Fig. 1):

- the materials of shells are elasto-plastic, and work equally on tension and compression;
- shells are cylindrical and thin, and their radii are very close ( $R_2 \approx R_1 \approx R$ ,  $h_1 \ll R$ ,  $h_2 \ll R$ );
- the connections are considered rigid in the radial direction;
- the influence of local effects on the stress state of shells is not taken into account (infinitely long shell);

- the gas pressure  $p_g$  in the given section is considered equally distributed on the shell perimeter;
- the temperature field in each shell is axisymmetric, and the temperature value is defined as the average between the temperatures on internal and external surfaces of shell, corresponding to the engine nominal working mode.

## 2.2 Model equations

Examine the equilibrium of the shell element shown in Fig. 1-a. The inner shell is affected by the current gas pressure  $p_g$ , the pressure in the coolant passage  $p_l$ , and the contact pressure  $p_k$ , which appears as an averaged pressure of coupling forces between the shells (Fig. 1-b).

Only pressures  $p_k$  and  $p_l$  affect the outer shell, since the pressure on its outer surface is disregarded (if it is substantial, then it should be considered).

The equations of force balance of an element of shells in circumferential direction expressed in terms of stresses (Fig. 1) are:

$$\sigma_1 h_1 = (p_g - p_l - p_k) R, \quad (1)$$

$$\sigma_2 h_2 = (p_l + p_k) R. \quad (2)$$

Adding member by member the two previous equations, the sum of pressures  $p_l$  and  $p_k$  will be excluded from them. The result is:

$$\sigma_1 h_1 + \sigma_2 h_2 = p_g R. \quad (3)$$

In this equation there are two unknown:  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$ . Therefore, for its solution it is necessary to supplement it with the equation of total deformation.

As shown in (Oliveira, 1998), in the process of deformation of an axially symmetrical body, its points are displaced radially. So, there is a simple relationship between the deformations in radial and circumferential directions:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta R}{R}, \quad (4)$$

where:  $\varepsilon_t$  is the total strain in the circumferential direction,  $\Delta R$  is the radial elongation, and  $R$  is the original radius of the body.

This total hoop strain of each shell consists of mechanical and temperature strains:

$$\varepsilon_{1,t} = \varepsilon_1 + \alpha_1 \Delta T_1, \quad \varepsilon_{2,t} = \varepsilon_2 + \alpha_2 \Delta T_2. \quad (5)$$

Here  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  are only shell mechanical strains in circumferential direction;  $\alpha_1 \Delta T_1$  and  $\alpha_2 \Delta T_2$  are their temperature strains; and  $\varepsilon_{1,t}$  and  $\varepsilon_{2,t}$  are the total strains in each shell.

Since has been considered that  $R_1 = R_2 = R$ , the total circumferential strains in both shells are equals:

$$\varepsilon_{1,t} = \varepsilon_{2,t} = \varepsilon_t. \quad (6)$$

The relation  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  for a given material is described by its tensile diagram. So, having this diagram and knowing the value  $\varepsilon$  it is possible to determine the value of  $\sigma$ .

The system formed by Eqs. (3), (4), (5) and (6) is closed by the stress-strain relations of each shell material, and its direct solution is very easy, and can be accomplished by using simple numerical calculation process, as will be indicated the in next section.

### 3. DETERMINATION OF GAS PRESSURE CURVE

In this step, the main objective is the determination of the diagram relating the gas pressure  $p_g$  with the radial elongation  $\Delta R$  of the chamber.

For this purpose, the geometrical parameters of the shells ( $R, h_1, h_2$ ), the average temperatures of the shells ( $T_1, T_2$ ), the thermo-mechanical properties of the shell materials ( $\alpha_1, \alpha_2$  and their stress-strain curves) corresponding to their average temperatures, and the reference temperature  $T_o$  are given.

According to the present method, for definition of each point of the calculation diagram is necessary to be set values of the radial elongation  $\Delta R$ . Then the corresponding total strain  $\varepsilon_t$ , the mechanical strains  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$ , the hoop stresses  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$ , and finally the internal pressure  $p_g$  that satisfies to the equation of equilibrium, Eq. (3), are calculated.

The calculation will be carried out in the following sequence:

1. Set the value of radial elongation  $\Delta R$ ;
2. Calculate the total hoop strain  $\varepsilon_t$ :

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta R}{R};$$

3. Calculate the mechanical hoop strains  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  using Eqs. (4) and (5):

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_t - \alpha_1 \Delta T_1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_t - \alpha_2 \Delta T_2;$$

4. Find the stresses  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  using the stress-strain curves:

$$\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_1), \quad \sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon_2);$$

5. Calculate the gas pressure value  $p_g$  from Eq. (3):

$$p_g = \frac{\sigma_1 h_1 + \sigma_2 h_2}{R}.$$

Repeating this procedure an enough number of times, one can obtain a series of values  $p_g$ , corresponding to the prescribed values of  $\Delta R$ , which allows to construct the appropriate diagram where  $p_g$  is put along the axis of ordinates and  $\Delta R$  or  $\varepsilon_t$  along the axis of abscissas. This diagram will be used for the determination of limiting pressure  $p_{g,u}$  and corresponding safety factor  $n$ , which are the subject of the next section.

### 4. LIMITING PRESSURE AND SAFETY FACTOR

After the conclusion of the operational process described above, will result the calculated diagram of the relation  $p_g = p_g(\Delta R)$ , whose a typical representation is given in Fig. 2, where the points  $A, B$  and  $C$  are points in which the curve presents the greatest local curvatures.

On this curve one must find the points of working pressure  $p_c$  and of limiting pressure  $p_{g,u}$ , and determine the safety factor by the load carrying capacity of the shells.

The point  $C$  on curve  $p_g = p_g(\Delta R)$  of Fig. 2-a, where the straight line drawn from the origin of coordinates is tangent to the curve, must be pointed out. It determines the beginning of the larger shell deformations, which are dangerous with respect to the

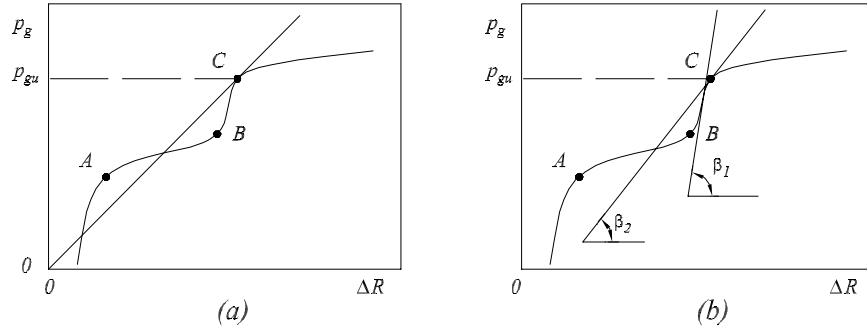


Figure 2: Typical gas pressure curve and limiting pressure determination: (a) first method; (b) second method.

change in geometrical dimensions of the shell, as well as to its strength. The pressure corresponding to point  $C$  will be the so called limit pressure  $p_{g,u}$ .

Alternatively, the limiting point can be determined based on value of the angle of inclination of the tangent to the curve  $p_g = p_g(\Delta R)$ . If this angle is small, the deformations accrue quickly, assuming inadmissible values. According to Feodosiev (1963), the limiting point is that one where the tangent of the angle of inclination of the line tangent to the curve is equal to a half from its greatest value on the segment  $BC$  (see Fig. 2-b).

The values given by these two methods can differ slightly, but the first method is simpler and easier to introduce in a computer program.

The safety factor by the load carrying capacity of shells is the ratio of the limit gas pressure  $p_{g,u}$  to the working pressure  $p_c$ :

$$n = \frac{p_{g,u}}{p_c}.$$

Usually is adopted a value of safety factor on load carrying capacity within the range  $n = 1.2 \dots 1.5$ . In case of unsatisfactory strength, it is necessary to change the thickness or the material of the outer shell.

## 5. STRESS-STRAIN CURVES

In order to introduce the relation  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  in the calculation formulas, approximating analytic representations of stress-strain diagram, as described below, will be used.

It is supposed that the material presents an elastic-plastic behavior, i.e., it is a material in which both elastic and plastic strains are present; strain-hardening may or may not be assumed negligible. Besides, some models can present diagram with no step of yielding.

### Elastic-plastic material with linear hardening

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{for } \varepsilon \leq \varepsilon_y \\ \sigma_y + D(\varepsilon - \varepsilon_y) & \text{for } \varepsilon > \varepsilon_y \end{cases},$$

where  $E$  and  $D$  are the angular coefficients of the straight segments (in general,  $D$  is rather lesser than  $E$ , the modulus of elasticity);  $\sigma_y$  and  $\varepsilon_y$  are the yielding limit and its corresponding strain. The coefficient  $D$  can be estimated by:

$$D = \frac{\sigma_u - \sigma_y}{\delta}, \quad \delta = \varepsilon_u - \varepsilon_y,$$

where  $\sigma_y$  usually is the material yielding limit  $\sigma_{0.2}$ ;  $\sigma_u$  is the material strength;  $\varepsilon_y$  and  $\varepsilon_u$  are the corresponding strains; and  $\delta$  is the residual strain at rupture.

### Elastic-plastic material with nonlinear hardening

$$\sigma = \begin{cases} E \varepsilon & \text{for } \varepsilon \leq \varepsilon_y \\ a + \frac{b}{c+\varepsilon} & \text{for } \varepsilon > \varepsilon_y \end{cases},$$

where  $a$ ,  $b$  and  $c$  are parameters obtained by curve fitting process of experimental data.

### Elastic-plastic nonlinear material

$$\sigma = A \varepsilon^m,$$

where  $A$  and  $m$  are constants chosen in such way to get a good representation of experimental data.

### Linear elastic-plastic with nonlinear-hardening material

$$\sigma = \begin{cases} E \varepsilon & \text{for } \varepsilon \leq \varepsilon_y \\ A \varepsilon^m & \text{for } \varepsilon > \varepsilon_y \end{cases},$$

where  $E$  is the modulus of elasticity in the elastic part;  $\varepsilon_y$  is the yielding strain;  $A$  and  $m$  are constants for the nonlinear part of the curve.

### Elastic-plastic nonlinear material with rational relationship

$$\sigma = \frac{a + d\varepsilon}{1 + c\varepsilon + b\varepsilon^2},$$

where  $a$ ,  $b$ ,  $c$  and  $d$  are constants obtained of a rational function fitting of experimental data.

Note that other idealizations can be made and incorporated in the analysis, but these models are those of most practical use, from the standpoint of mathematical simplicity, for the present task. Finally, one should take into consideration that most of steels have stress-strain diagrams that can be represented by two curve segments.

## 6. PROGRAM FOR CALCULATION OF LOAD CARRYING CAPACITY

The calculation of the load carrying capacity of the chamber begins after conclusion of the design and calculation of the cooling system, from where all set of the initial data used in the calculation are known.

A computer program for estimate the load carrying capacity of cylindrical part of a combustion chamber, without taking into account the axial forces, was developed in (Oliveira, 1998), based on the above described method. It was called **LCCCC-R**, and can be used for realize two different tasks:

1. **Verification Analysis.** With the thickness of the walls and the working internal pressure, the safety factor for load carrying capacity can be calculated.

2. **Design Analysis.** Using the prescribed safety factor and the working internal pressure, one must calculate the thickness of the outer shell. (Note that the thickness of inner shell results from its thermal possibilities, being determined by heat flow and temperature calculations at the cooling system design.)

Description of the computer program, instructions on preparation of the initial data, running operation and processing of calculation results are given in the following.

The LCCCC-R program was developed in Pascal language. Its code and detailed description are presented in (Oliveira, 1998). It consists of a **main module**, which coordinates the information flux and the calculation sequence, and three basic modules for specific tasks:

1. **ReadWriteInitData Module.** This procedure reads the input data, prepares additional parameters, and saves these information on specified file of results.
2. **Solver Module.** This procedure calculates the gas pressure corresponding to elongations in the prescribed range, for a given value of the outer shell thickness. It is a practical implementation of the computational procedure given in Section 3.
3. **PostProcessor Module.** This procedure does the calculation of the limit pressure and the safety factor for given outer shell thickness, in accordance with the methods discussed on Section 4.

The data of thermo-mechanical properties of constructional materials of inner and outer shells, average values of their temperatures, average radius of the chamber  $R$  and thickness of the inner shell  $h_1$ , all at the calculation section of the chamber, constitutes the initial data.

Within the limits of one calculation, the variable parameters of the chamber are outer shell thickness  $h_2$ , total circumferential strain of shells  $\varepsilon_t$ , and the gas pressure  $p_g$ .

The range for change of thickness  $h_2$  and also the incremental step  $\Delta h_2$  results from engineering sense of the analyst.

In order to get appropriate description of curve  $p_g = p_g(\Delta R)$ , the limits and steps of change of the radial elongation must be selected in such way that are calculated values of  $p_g$  in at least eight points.

All the initial data must be input in SI units, and its preparation must consider the following:

1. Thermo-mechanical behavior of materials of shells is taken from special technical literature and, in case of lack of data for the working temperatures of shells, the method of linear interpolation can be used. Anyway, the diagrams of materials used for the description of the relations  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  must be given in form of analytical approximations, as will be detailed later.
2. Shell radius  $R$  is determined during the calculation of basics dimensions of chamber, and represents the average radius of the cylindrical chamber.
3. The thickness of inner shell  $h_1$  is determined during the design of the chamber cooling system, from the condition of adequate cooling.
4. Initial and final thicknesses of outer shell can be roughly determined as follows:

$$h_{2,i} = \frac{p_g R - \sigma_{u1} h_1}{\sigma_{u2}}, \quad h_{2,f} = \frac{p_g R}{\sigma_{y2}} n,$$



where  $\sigma_u$  and  $\sigma_y$  denote ultimate and yielding stresses, respectively, and  $n$  is a factor that can be taken as  $n = 1.5$ .

The obtained values of  $h_{2,i}$  and  $h_{2,f}$  must be seen only as rough information, and can be conveniently changed, if necessary.

5. It is recommended to choose the thickness increment  $\Delta h_2$  in such way to get at least two or three intermediate values of thickness  $h_2$  between the extreme values  $h_{2,i}$  and  $h_{2,f}$ .

For each shell material must be supplied by the analyst a set of parameters corresponding to the chosen model of stress-strain curve, which depend on the temperature of the material.

The **main module** works in the following manner:

1. Read from keyboard the name of input data file, and assign the name of file of results.
2. Call **ReadWriteInitData** module.
3.  $h_2 = h_{2,i}$
4.  $\Delta R = \Delta R_{\text{initial}}$
5.  $\varepsilon_t = \frac{\Delta R}{R}$
6. Call **Solver** module to calculate  $p_g$  for the current data.
7.  $\Delta R = \Delta R + \delta(\Delta R)$
8. Repeat steps from 5 to 7 until  $\Delta R > \Delta R_{\text{max}}$
9. Call **PostProcessor** module. (Draw the curve  $p_g = p_g(\Delta R)$  and calculate  $n$ .)
10.  $h_2 = h_2 + \Delta h_2$
11. Repeat steps from 5 to 10 until  $h_2 = h_{2,f}$ .

## 7. APPLICATION OF THE METHOD

As an example of application of the above method, it is taken a double layer shell with dimensions  $R = 9.2$  cm,  $h_1 = 1.5$  mm, and  $h_2$  variable between 1.5 and 4.5 mm, in steps of 0.5 mm.

Average temperatures of inner and outer walls are equal to  $575^\circ\text{C}$  and  $100^\circ\text{C}$ , respectively. Both shells are made of the same material: Russian stainless steel 08KP. The thermal expansion coefficients, at the corresponding average temperatures of shells, are  $\alpha_1 = 14.5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  and  $\alpha_2 = 10.75 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Assume  $T_o = 0^\circ\text{C}$ .

The analytical expressions that represent the stress-strain diagrams of 08KP steel at temperatures of  $575$  and  $100^\circ\text{C}$  were obtained by means of curve fitting, in (Oliveira, 1998). For  $T_1 = 575^\circ\text{C}$ ,

$$\sigma = 4.3831 \times 10^8 \varepsilon^{0.322435}.$$

For  $T_2 = 100^\circ\text{C}$ ,

$$\sigma = \begin{cases} 1.421 \times 10^{11} \varepsilon & \text{for } \varepsilon \leq 0.0012 \\ 3.4567 \times 10^8 \varepsilon^{0.10572} & \text{for } \varepsilon > 0.0012 \end{cases} .$$

Whereby, as already stated, it is assumed that the stress diagrams are the same in compression or in tension, changing uniquely the signs.

The working pressure is the nominal combustion chamber pressure  $p_c = 35$  bar. The analysis will be accomplished taking up 50 values of  $\Delta R$  from 0 to 1.8 mm.

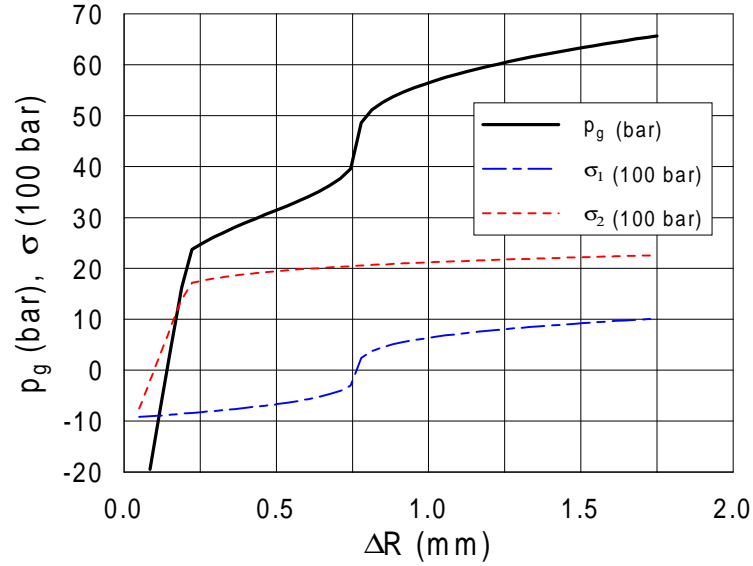


Figure 3: Gas pressure and shell stresses for  $h_2 = 2$  mm.

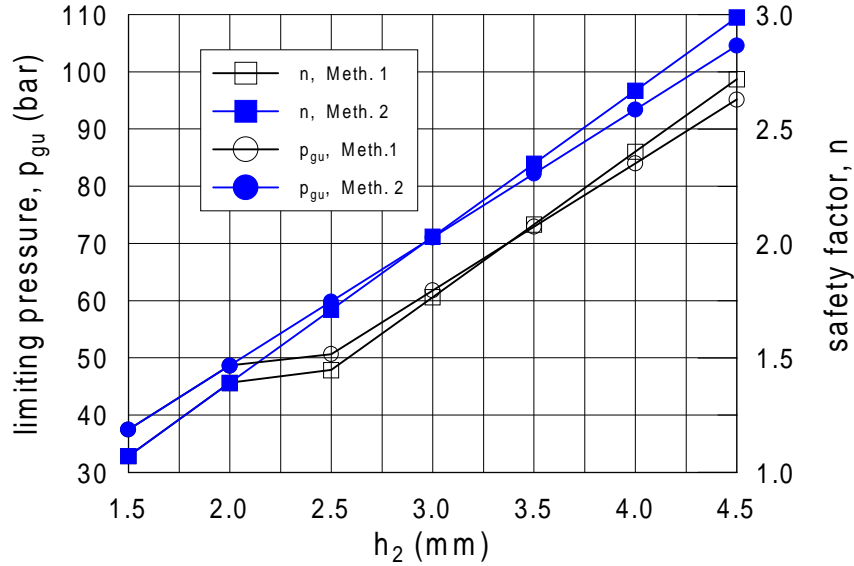


Figure 4: Limiting pressures and safety factors for different outer shell thickness.

Calculation results for  $h_2 = 2$  mm are represented in form of curves on Fig. 3. On it is shown the behavior of  $p_g$ ,  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  as functions of  $\Delta R$ . The point corresponding to chamber pressure  $p_g = p_c = 35$  bar could be indicated on the pressure curve.

As is evident from Fig. 3, the increase in cylinder radius at the working pressure constitutes 0.64 mm. The stress in the outer shell will be approximately  $\sigma_2 = 200$  MPa, and in the internal shell,  $\sigma_1 = -52$  MPa. The latter stress appears to be compressible, which is explained by greater temperature elongation on the internal shell. If the working pressure were greater, then the stress in the internal shell would pass from compressive stress to tensile.

The curves given in Fig. 3 show that at  $p_g = 0$  appears a certain deformation state due to temperature expansions within the shell.

It is important to mention that on the pressure curve are observed two quick growth segments. The first segment is at small  $\Delta R$  and the second begins at approximately  $\Delta R = 0.75$  mm. This is explained by the following. If the pressure is low, the outer shell works elastically and with an increase in the pressure, the deformation rises slowly.

If the pressure becomes greater than a definite value then in the outer shell originates plastic deformations. Whereby the outer shell will be loaded not only by pressure forces, but also by forces from the internal side of the more strongly heated shell. A sharp rise in  $\Delta R$  does take place at an insignificant pressure increase.

At greater pressures the shell resistance again rises and a sharp rise in the pressure curve does take place. This happens when the mechanical elongation of the internal shell covers temperature elongation. The internal shell then begins stretching, becoming a supporting element.

Finally, as it is evident from the curve given in Fig. 3, at pressures greater than  $p_g = 48$  bar a sharp rise in the plastic deformation of the shells takes place.

The safety factor of load carrying capacity of the shell will be equal to

$$n = \frac{48.7}{35} = 1.39,$$

where  $p_{g,u} = 48.7$  bar was determined by program LCCCC-R, according to the above indicated methods (both of them gave the same result).

The curves of limiting pressure and safety factor as functions of the outer shell thickness are given in Fig. 4. These curves permit to determine adequate value for  $h_2$ , when possible, or give indication of the necessity to change the material of the outer shell.

This application example shows how the present method can be used. In addition, becomes clear that it can be useful at preliminary study phase of LRE design, where simple and quick tools are particularly attractive. This methodology could be easily implemented in computer programs for preliminary and optimization studies. Note that in preliminary design and/or optimization studies of configurations of a LRE, normally there is no enough data to do a detailed study using a Finite Element computer program for elastoplastic structural analysis.

## 8. REFERENCES

- Anon., 1983, "Limit analysis of the structural strength for the combustion chamber of a liquid rocket engine." *J. of Chinese Society of Astronautics* Selected articles: N83-32820, FTD-ID(RS)T-0084-83, p. 18-47 (see N83-32818 21-12), Air Force Systems Command, Wright-Patterson AFB, OH.
- Feodosiev, V. I., 1980, *Strength of Materials*, Mir, Moscow. (In Spanish.)
- Feodosiev, V. I., 1963, *Strength of heat-stressed units of LRE*. Oborongiz, Moscow. (In Russian.)
- Oliveira, U. C., 1998, *Load carrying capacity of a double layer cylindrical shell without consideration of axial loads*, IAE Int. Tech. Rep., IAE, S. J. dos Campos, Brazil.

# SISTEMA COMPUTACIONAL GRÁFICO PARA MODELAGEM BIDIMENSIONAL DE FRATURAMENTO COESIVO COM AMOLECIMENTOS LINEARES

**Estela M. R. Bueno**<sup>☆</sup>  
**Túlio N. Bittencourt**<sup>☆</sup>  
**Carlos V. A. Carvalho**<sup>\*</sup>  
**Luiz F. Martha**<sup>\*</sup>

<sup>☆</sup> Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações (PEF) e Laboratório de Mecânica Computacional (LMC) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP) – CEP 05508-900 – São Paulo – SP – Brasil

E-mail: {ebueno,tbitten}@usp.br, web page: <http://www.lmc.ep.usp.br/>

<sup>\*</sup> Departamento de Engenharia Civil e Grupo de Tecnologia de Computação Gráfica (TecGraf) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

CEP 22453-900 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

E-mail: {alencar,lfm}@tecgraf.puc-rio.br, web page: <http://www.tecgraf.puc-rio.br/>

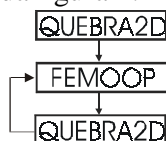
## Resumo

O processo de fraturamento em materiais quasi-frágeis com efeito de amolecimento do material e localização de deformações pode ser representado por meio do modelo de fissura coesiva. Neste trabalho foi implementado o sistema computacional QUEBRA2D-FEMOOP, que simula processos de fraturamento bidimensional de fissuras coesivas usando elementos finitos de interface de linha quadráticos com amolecimento linear e bi-linear. O modelo considera duas pontas de fissura, a real e a fictícia, entre as quais encontram-se os elementos de interface. O QUEBRA2D é um programa para modelamento de problemas bidimensionais de fraturamento, é responsável pela interface gráfica, entrada e saída de dados, geração de malhas adaptativas de elementos finitos e gerenciamento dos processos de mecânica da fratura. O FEMOOP (“*Finite Element Method Object-Oriented Program*”) é o programa utilizado para resolver o problema de elementos finitos. Serão apresentados exemplos de fraturamento coesivo, utilizando os dois modelos constitutivos de amolecimento linear e bi-linear, comparando os resultados numéricos com os experimentais, para ilustrar a utilização desta ferramenta computacional.

**Palavras-Chave** : fraturamento coesivo, elemento finito de interface, amolecimento linear e bi-linear.

## 1 INTRODUÇÃO

O sistema QUEBRA2D-FEMOOP constitui uma ferramenta computacional capaz de simular fraturamento bidimensional com interface gráfica moderna. O QUEBRA2D-FEMOOP (“*Finite Element Method – Object Oriented Programming*”) [Martha-1996] possui as rotinas computacionais necessárias para viabilizar a modelagem do fraturamento coesivo bidimensional. O funcionamento integrado do sistema QUEBRA2D-FEMOOP pode ser representado segundo o fluxograma da figura 1:

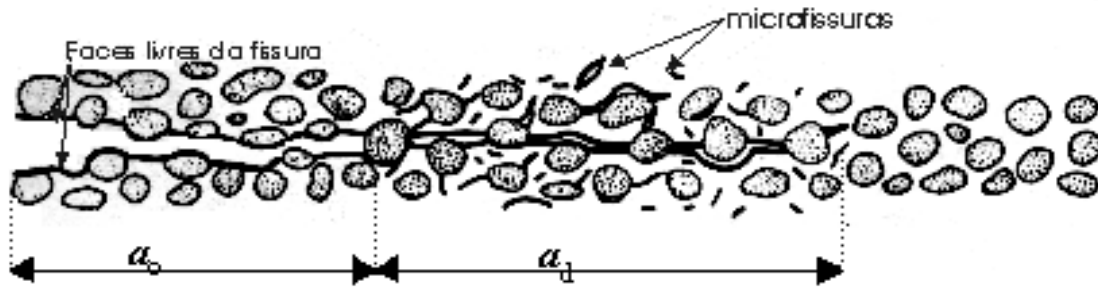


**Figura 1.** Fluxograma geral da integração QUEBRA2D-FEMOOP.

O QUEBRA2D possui interface gráfica bastante moderna e amigável, além de possuir recursos de geração automática e adaptativa de malhas. O gerenciamento de entrada e saída de dados, assim como o controle do processo de fraturamento, é feito pelo programa QUEBRA2D. O programa FEMOOP é desenvolvido em linguagem C++, utilizando os conceitos de programação orientada a objetos.

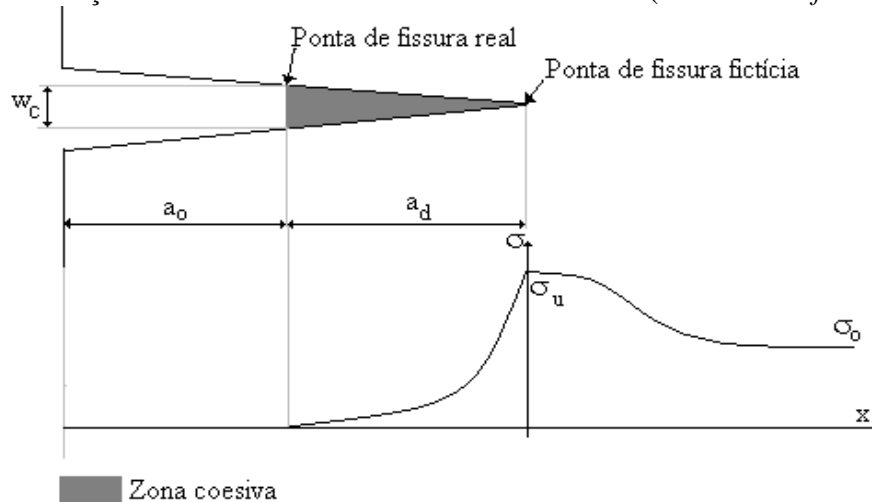
## 2 PROBLEMA COESIVO

O processo de fraturamento em materiais quasi-frágeis é caracterizado pela contribuição de resistência devida ao entrelaçamento de agregados, ligações por fibras, microfissuração e outros fenômenos inelásticos. A representação desses fenômenos inelásticos localizados pode ser feita satisfatoriamente por meio de modelos coesivos, os quais descrevem a região danificada próxima à ponta de fissura. Estes modelos propõem a representação dos fenômenos não-lineares considerando perda de resistência do material a medida que os deslocamentos das faces da fissura aumentam, caracterizando o efeito de amolecimento (“*strain-softening*”). Na figura 2, a região coesiva corresponde ao comprimento  $a_d$  da fissura (região na qual ocorre transmissão de esforços entre as faces da fissura) e a região de comprimento  $a_o$ , à parte da fissura sem nenhuma transmissão de esforços.



**Figura 2.** Zona de processo na ponta de fissura

A distribuição de tensão no modelo de fraturamento coesivo permite que o material atinja a tensão última de tração, e a partir deste ponto a tensão diminui progressivamente até o ponto que apresenta a condição de abertura crítica ( $w_c$ ), a partir do qual não há transferência de esforços entre as faces da fissura (figura 3). A curva que caracteriza a distribuição da tensão depende da relação constitutiva do amolecimento do material (curva de “*softening*”).



**Figura 3.** Distribuição de tensão no modelo coesivo

O modelo de fissura fictícia (“*Fictitious Crack Model*”) foi desenvolvido por Hillerborg [Hillerborg-1976] no final dos anos setenta. A partir de ensaios de tração uniaxial em corpos

de prova de concreto, foi possível observar que, após a carga máxima, a fissura inicial surgia numa região estreita de deformação localizada.

### 3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA COESIVO

Neste trabalho, foram utilizados elementos finitos de interface para representar o efeito das forças de coesão que atuam nas faces das fissura fictícia. Aplicando os conceitos do método dos elementos finitos (FEM), subdivide-se o domínio em diversos sub-domínios, permitindo que se escreva o vetor de deslocamentos como o produto de funções de forma e deslocamentos nodais. Pode-se escrever os problema coesivo na forma de elementos finitos:

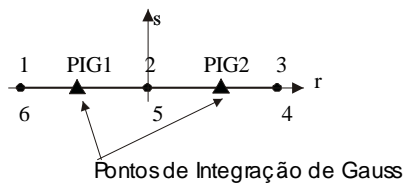
$$[K]\{u\} = \lambda\{P\} + \{R\} \quad (1)$$

onde:  $[K]$  = matrix de rigidez                       $\{u\}$  = vetor de deslocamentos  
 $\lambda$  = parâmetro de carga                       $\{P\}$  = vetor de forças externas  
 $\{R\}$  = vetor de forças desbalanceadas

O vetor de forças desbalanceadas está presente devido a contribuição do efeito dos elementos de interface, cuja configuração de equilíbrio é obtida através da condição de tensão última na ponta de fissura fictícia.

#### 3.1 Elemento de Interface

Para representar o efeito coesivo ao longo da fissura, foi utilizado neste trabalho o elemento de interface paramétrico de 6 nós com dois pontos de integração de Gauss [Schellekens-1990].



**Figura 4.** Elemento Finito de Interface de Linha INTERFACE6

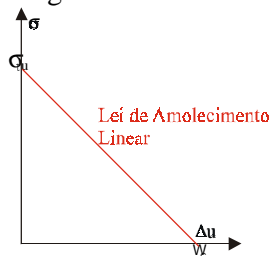
A matriz de propriedades do material [Bueno-1999] é definida como:

$$D = \begin{bmatrix} K_S & 0 \\ 0 & K_O \end{bmatrix} \quad (2)$$

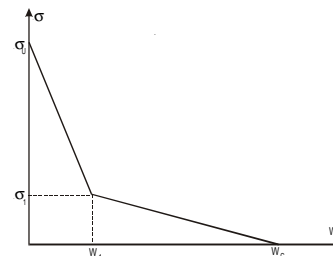
com :  $K_S = \sigma_r / \Delta u_r$  e  $K_O = \sigma_s / \Delta u_s$   
(sendo  $r$  e  $s$  os eixos naturais da formulação paramétrica).

#### 3.2 Modelo Constitutivo de Amolecimento Linear

O modelo constitutivo adotado para representar o efeito de coesivo por meio de elementos de interface é feito através de uma lei de amolecimento linear [Bueno-1999]. Baseando-se em estudos feitos por Carpinteri, Bocca e Valente [Carpinteri-1989], desprezou-se os efeitos coesivos tangenciais ( $K_S = \sigma_r / \Delta u_r = 0$ ) e simplificou-se a curva de resistência considerando que o material desde o início da solitação já começa a perder resistência, conforme a figura 5a.



**Figura 5.a** Amolecimento linear



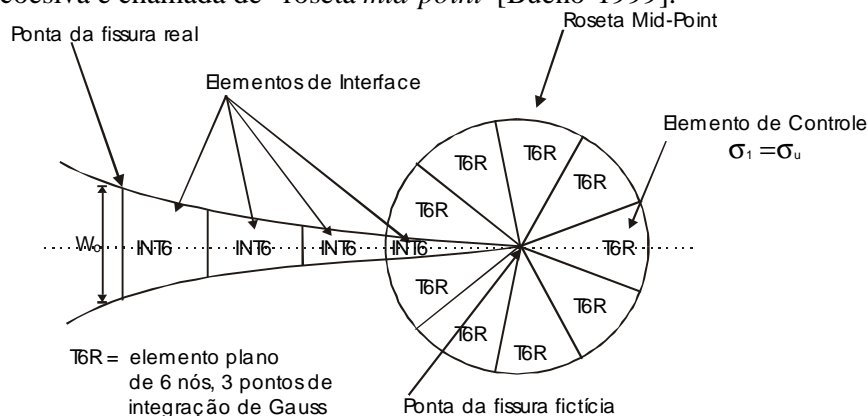
**Figura 5.b** Amolecimento Bi-linear

### 3.3 Modelo Constitutivo de Amolecimento Bi-Linear

O modelo constitutivo de amolecimento bi-linear [Bueno-1999] é caracterizado pela curva de resistência constituída por duas retas, desprezando a contribuição resistêcia de coesão dos efeitos tangenciais. Também foi considerado que o material desde o início da sollicitação já começa a perder resistência, conforme mostra a figura 5b.

### 3.4 Representação da fissura coesiva

A fissura coesiva é representada no sistema QUEBRA2D-FEMOOP através de elementos de interface com modelo constitutivo de amolecimento linear. O controle da condição de equilíbrio do modelo é feito por meio da verificação da tensão principal de tração no elemento de ponta de fissura. A figura 6 ilustra como uma fissura coesiva é modelada no QUEBRA2D-FEMOOP, utilizando elementos de interface e elementos planos triangulares de 6 nós e 3 pontos de integração de Gauss. A fissura coesiva não apresenta singularidade de tensão, portanto os elementos que formam a roseta de ponta de fissura têm seus nós intermediários não deslocados, no meio do lado do elemento, por isso a roseta de ponta de fissura coesiva é chamada de “roseta *mid-point*” [Bueno-1999].



**Figura 6.** Fissura fictícia com elementos de interface e ponta de fissura com roseta “*mid-point*”.

## 4 SOLUÇÃO E CONDIÇÃO DE PROPAGAÇÃO

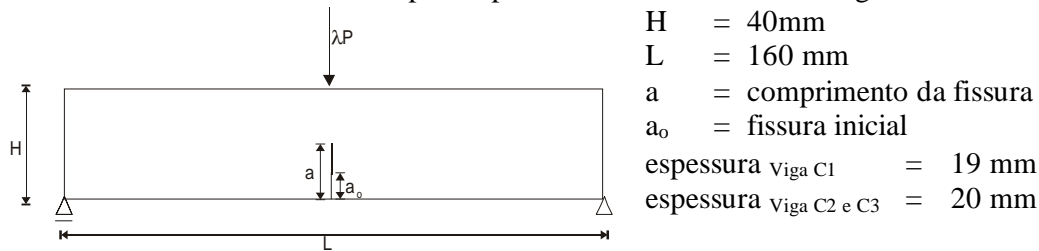
Para resolver o sistema de equações do problema coesivo da Eq. (1), com  $n$  equações lineares e  $n+1$  incógnitas ( $n$  deslocamentos e o fator de carga  $\lambda$ ), utiliza-se a restrição de que a tensão principal no elemento de ponta de fissura deve ser igual a tensão última do material. O sistema de equações resultante é não-linear, e optou-se por resolvê-lo através da associação do método de Comprimento de Arco de Cilindro com o Método da Relaxação. A condição de propagação da ponta de fissura fictícia é a tensão principal máxima se igualar à tensão última do material, a direção da propagação é perpendicular à da tensão principal máxima na ponta da fissura fictícia. A ponta de fissura real localiza-se no ponto onde a abertura da fissura se iguala à abertura crítica de fissura ( $w_c$ ), seguindo a trajetória traçada pela ponta de fissura fictícia [Bueno-1999].

## 5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

### 5.1 Amolecimento Linear

Foi modelada uma viga sujeita à flexão por 3 pontos (TPB - “*Three Point Bending*”), contendo uma fissura inicial como mostrado na figura 7. O objetivo deste exemplo é mostrar a semelhança entre os resultados numéricos fornecidos pelo sistema QUEBRA2D-FEMOOP e resultados experimentais obtidos da literatura por Bocca [Bocca-1991].

Para modelar este problema no sistema QUEBRA2D-FEMOOP [Bueno-1999] foram utilizados elementos triangulares de 6 nós e 3 pontos de integração de Gauss (T6 e elementos de roseta mid-point -T6R) e elementos de interface de 6 nós e dois pontos de integração de Gauss (INTERFACE), em estado plano de tensão. Considerou-se a existência de uma fissura inicial sem elementos de interface para representar o chanfro feito na viga do ensaio.



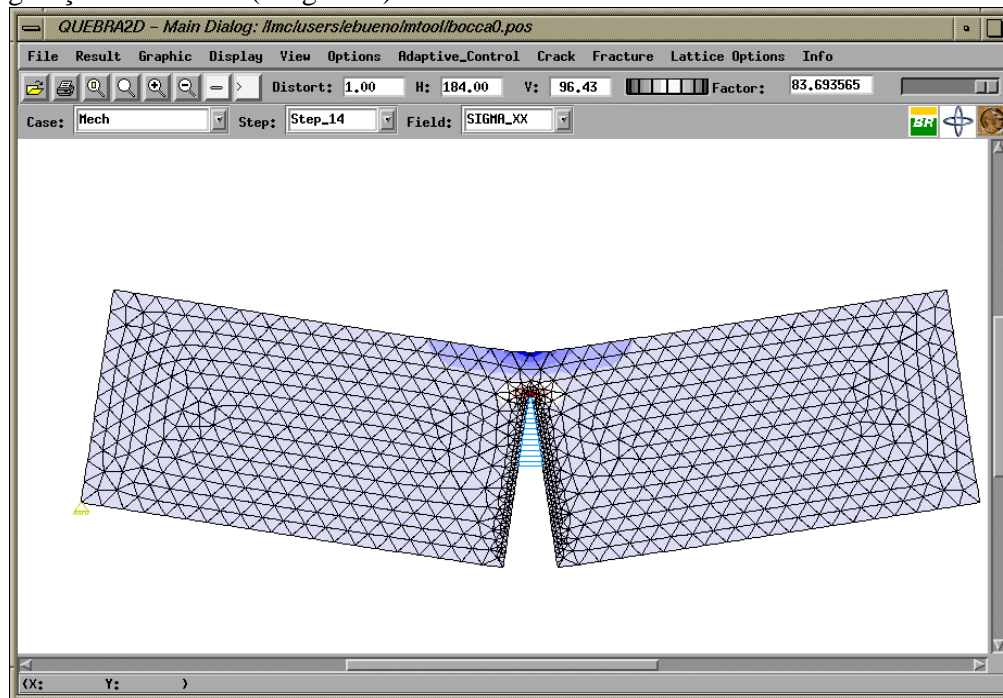
**Figura 7.** Geometria da viga.

As propriedades do material, com amolecimento linear, constam na tabela 1:

**Tabela 1.** Propriedades do material – Amolecimento Linear

$E$	= 4,9 GPa	$G_F$	= $52,1 \times 10^{-3} \text{ N/mm}$	$w_c$	= 10,42 $\mu\text{m}$
$\nu$	= 0,15	$G_{F\text{vigaC1}}$	= $59,5 \times 10^{-3} \text{ N/mm}$	$w_{c\text{vigaC1}}$	= 11,90 $\mu\text{m}$
$\sigma_u$	= 10 MPa	$G_{F\text{vigaC2}}$	= $50,2 \times 10^{-3} \text{ N/mm}$	$w_{c\text{vigaC2}}$	= 10,04 $\mu\text{m}$
		$G_{F\text{vigaC3}}$	= $49,6 \times 10^{-3} \text{ N/mm}$	$w_{c\text{vigaC3}}$	= 9,92 $\mu\text{m}$

Na figura 8 ilustra-se a simulação numérica feita no sistema QUEBRA2D-FEMOOP através de uma das malhas utilizadas na modelagem do problema deste exemplo, da configuração deformada (exagerada).



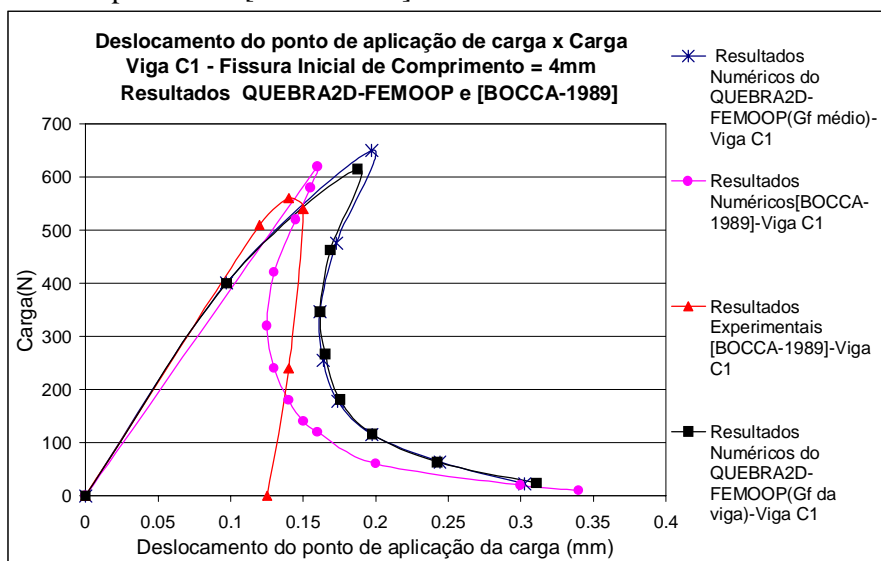
**Figura 8.** Tela do QUEBRA2D - Viga com chanfro inicial de 19mm.

Foram analisados três modelos de vigas (3PB- “Three Point-Bending”) com as mesmas dimensões, mas com chanfro inicial (fissuras iniciais) de três tamanhos diferentes:  $a_0 = 4\text{ mm}$  (viga C1),  $a_0 = 11\text{ mm}$  (viga C2) e  $a_0 = 19\text{ mm}$  (viga C3). Os resultados fornecidos pelo sistema QUEBRA2D-FEMOOP foram comparados com resultados experimentais e numéricos obtidos da literatura [Bocca-1991]. Na viga ensaiada a abertura do chanfro (CMOD) antes do carregamento é de 1,0 mm, esta abertura não foi considerada no modelo numérico.



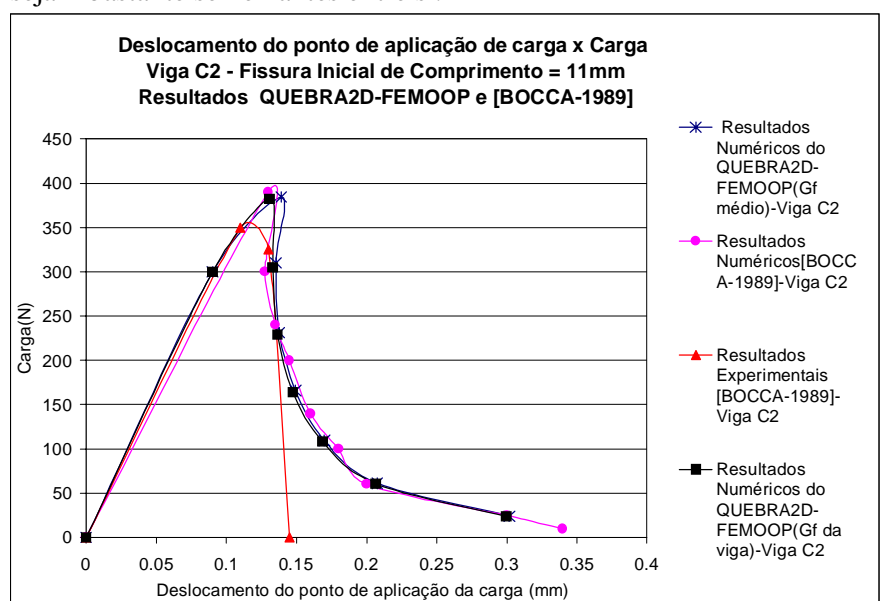
### 5.1.1 Resultados

Nas figuras 9, 10 e 11 são mostrados os resultados para as vigas analisadas, considerando a carga e a flecha do ponto de aplicação de carga. Para cada uma das três vigas modeladas são apresentadas duas curvas de resultados, uma referente a análise que utilizou um valor de energia de fraturamento média do material, igual para todas as vigas ( $G_F = 52,1 \times 10^{-3}$  N/mm), e a outra análise utilizando a energia de fraturamento obtida para cada viga nos ensaios experimentais ( $G_{F-Viga C1} = 59,50 \times 10^{-3}$  N/mm,  $G_{F-Viga C2} = 50,20 \times 10^{-3}$  N/mm e  $G_{F-Viga C3} = 46,70 \times 10^{-3}$  N/mm). São apresentados também os resultados experimentais e numéricos obtidos por Bocca [Bocca-1991].

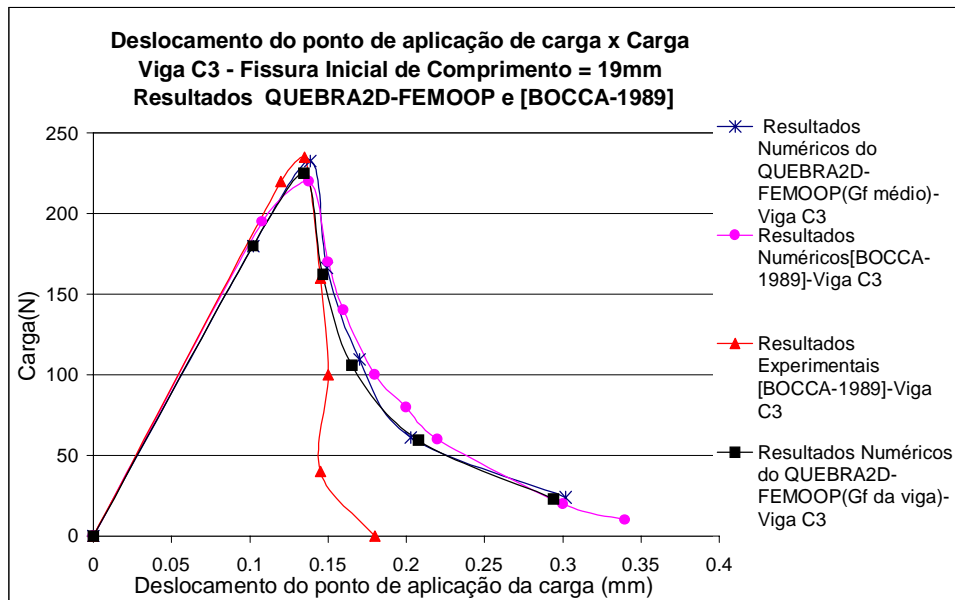


**Figura 9.** Curva deslocamento do ponto de aplicação de carga (flecha)  $\times$  carga – Viga C1.

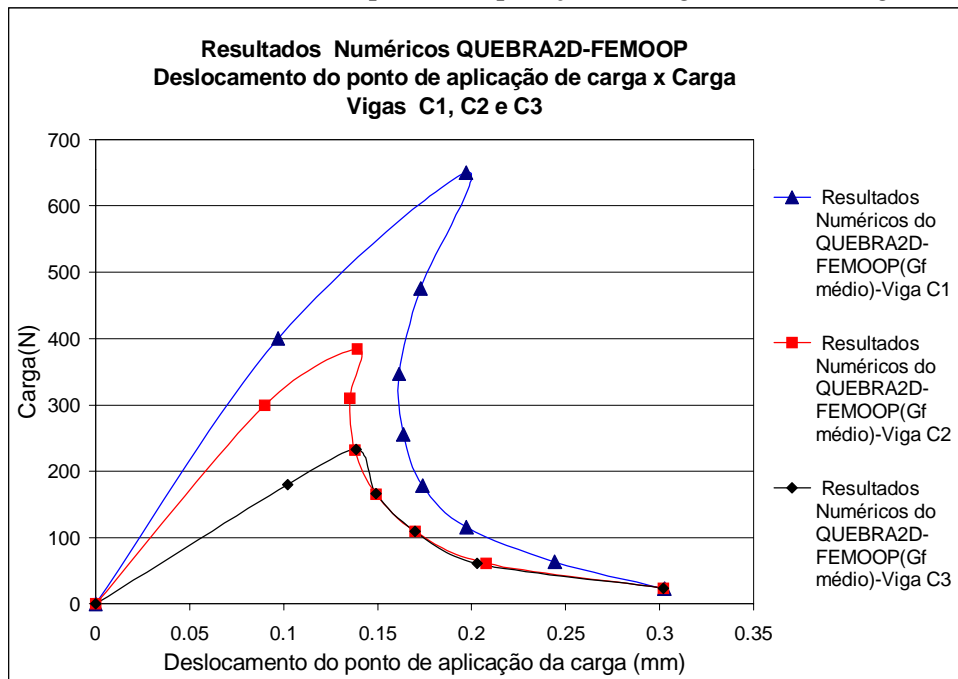
Observando os gráficos das figuras 9, 10 e 11 nota-se que os resultados obtidos através da análise que utiliza os valores de energia de fraturamento obtidos através do ensaio de cada viga aproximam-se mais dos resultados experimentais do que aqueles em que se utilizou um valor médio de energia de fraturamento do material, para as vigas C1e C2, embora os resultados sejam bastante semelhantes entre si.



**Figura 10.** Curva deslocamento do ponto de aplicação de carga (flecha)  $\times$  carga – Viga C2.



**Figura 11.** Curva deslocamento do ponto de aplicação de carga (flecha) × carga – Viga C3.



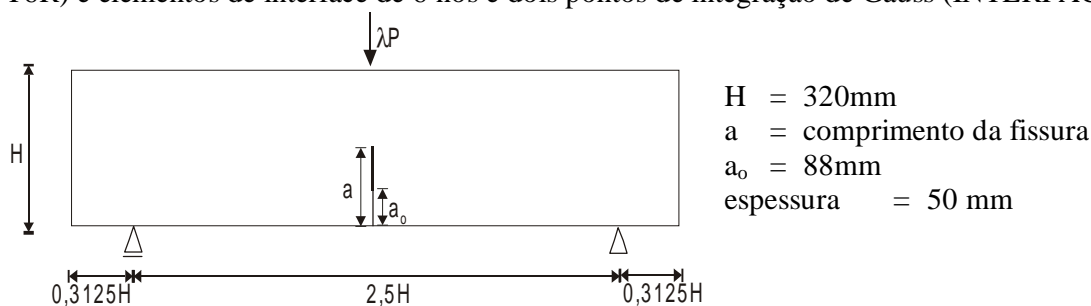
**Figura 12.** Comparação das curvas de equilíbrio das vigas C1, C2 e C3.

É possível observar na figura 12 que o efeito coesivo se mostra atuante quando o comprimento de fissura fictícia é maior, aumentando o comportamento dúctil. Isto ocorre na viga C3, decrescendo na viga C2, e sendo a viga C1 a mais frágil das três, que se traduz através do efeito acentuado de “snap-back” na sua curva de equilíbrio. A maior diferença entre resultados ocorreu na viga C1. Isto porque, sendo a viga C1 a mais frágil das três analisadas, há maior concentração de tensão na região da fissura, pequeno comprimento de fissura fictícia e por isso grande variação de tensão na região coesiva, além de uma maior variação de tensão dentro do elemento de ponta de fissura onde se faz o controle de tensão. Comparando-se as curvas de resultado obtidas pelo sistema QUEBRA2D-FEMOOP, demonstram que o programa fornece resultados satisfatórios, em comparação com resultados experimentais.

## 5.2 Amolecimento Bi-Linear

Neste exemplo também foi analisada uma de viga sujeita à flexão por três pontos TPB (“*Three Point Bending*”) (figura 10) com fissura alinhada à carga no vão central é tipicamente um modelo de fraturamento no Modo I. Neste modelo considerou-se o modelo constitutivo de amolecimento bi-linear e estado plano de tensão. Esta viga foi analisada experimentalmente por Jamet et al. [Jamet-1995].

A modelagem no sistema QUEBRA2D-FEMOOP também foi feita utilizando elementos triangulares de 6 nós e 3 pontos de integração de Gauss (T6 e elementos de roseta mid-point - T6R) e elementos de interface de 6 nós e dois pontos de integração de Gauss (INTERFACE).



**Figura 13.** Geometria da viga.

**Tabela 2.** Propriedades dos materiais – Amolecimento Bi-linear

E = 30,7 Gpa		ν = 0,15	
Material 1:		Material 2:	
G <sub>F</sub> = 60,0×10 <sup>-3</sup> N/mm		G <sub>F</sub> = 60,0×10 <sup>-3</sup> N/mm	
σ <sub>u</sub> = 4,0 MPa	w <sub>c</sub> = 77,33 μm	σ <sub>u</sub> = 4,0 Mpa	w <sub>c</sub> = 46,67 μm
σ <sub>1</sub> = 0,6 MPa	w <sub>1</sub> = 16,0 μm	σ <sub>1</sub> = 0,6 Mpa	w <sub>1</sub> = 20,0 μm

Foram feitas análises da viga com mesma geometria, mas com duas leis de amolecimento linear diferentes (material 1 e 2 da tabela 2). As duas leis de amolecimento consideradas têm a mesma energia de fraturamento e a mesma tensão última de tração, mas consideram-se dois diferentes limites de abertura da fissura para mudança da lei de amolecimento ( $w_{1Viga 1} \neq w_{1Viga 2}$ ), conseqüentemente, tem-se  $w_{cViga 1} \neq w_{cViga 2}$ . Na referência [Jamet-1995], a abertura do chanfro (CMOD) anterior ao carregamento é de 3,0 mm. Esta abertura foi desconsiderada na modelagem numérica.

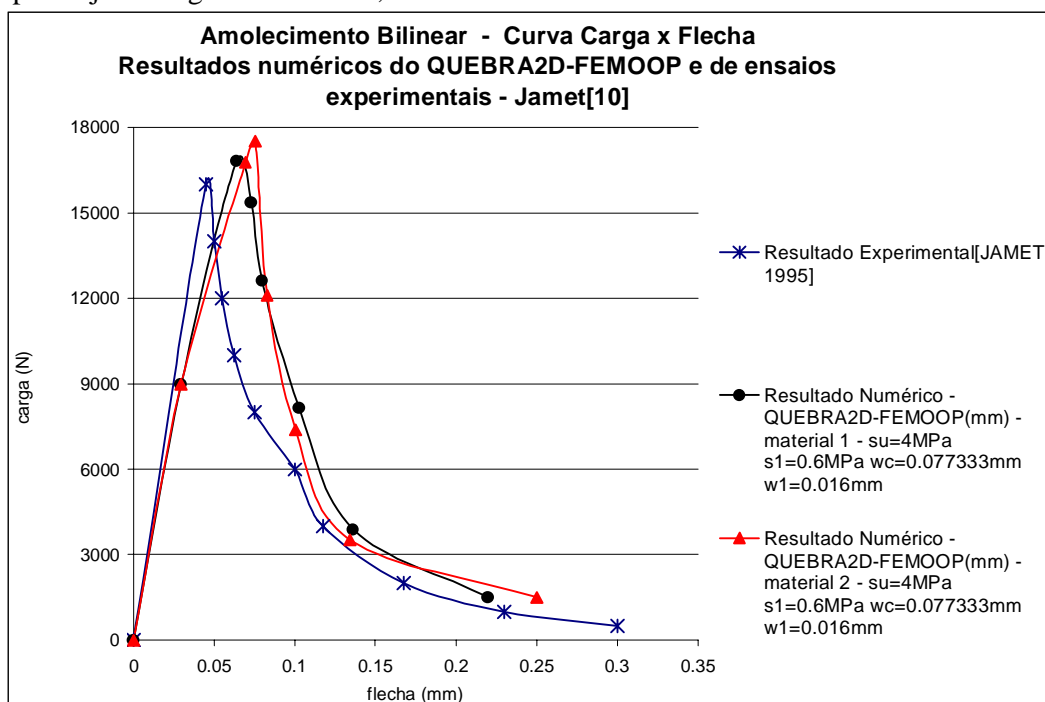
### 5.2.1 Resultados

Os resultados obtidos das duas vigas modeladas foram comparadas com resultados experimentais obtidos da literatura [Jamet-1995] e [Álvarez-1997]. Na figura 14 consta curva do deslocamento vertical do ponto de aplicação de carga (flecha) × carga máxima das vigas modeladas, mostrando que os resultados do sistema QUEBRA2D-FEMOOP estão próximos dos experimentais.

Baseando-se nos resultados numéricos obtidos, é possível observar que a curva de amolecimento bi-linear do material 1 se mostrou mais adequada ao comportamento da interface do material ensaiado, pois o material 1 apresentou resultados mais semelhantes aos experimentais do que o material 2. Mesmo assim, ambos superestimam a carga máxima em relação aos resultados experimentais.

Os valores de máximos de carga obtidos nas simulações numéricas do QUEBRA2D-FEMOOP foram superiores ao valor máximo experimental. Esta diferença se deve a diversos fatores, tais como a influência da posição do ponto no qual se faz o controle de tensão. Além disso, a diferença de inclinação entre as curvas numéricas e experimentais na parte superior trecho ascendente deve-se ao fato das curvas numéricas terem sido construídas considerando

o resultado de um único ponto em regime elástico linear, sendo imediatamente conectado a um ponto já em regime não-linear, com efeitos coesivos.



**Figura 14.** Curva flecha × carga–amolecimento bi-linear.

Os resultados fornecidos pelo sistema computacional QUEBRA2D-FEMOOP para amolecimento bi-linear mostram-se bastante animadores quanto ao seu potencial de simulação. Algumas adaptações na parte de controle de tensão podem melhorar significativamente estes resultados.

## 6 CONCLUSÃO

A simulação do fraturamento coesivo por meio do Método dos Elementos Finitos utilizando elementos de interface com modelo constitutivo de amolecimento linear tem se mostrado eficiente. A implementação do fraturamento coesivo no sistema QUEBRA2D-FEMOOP torna-o uma ferramenta computacional muito poderosa para análise de fraturamento de materiais de comportamento quasi-frágil, possibilitando a análise de estruturas de concreto que apresentam fissuras.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Álvarez, V. Ó. G. : *Estudio de la Fractura en Modo Mixto de los Materiales cuasifrágiles: Aplicación al Hórmigon Convencional y al Hórmigon de Alta Resistencia*, Tesis Doctoral, Departament D’Enginyeria del Terreny i Cartogràfica, Escola Tècnica Superior D’Engenyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espanha, (1997).
- Bittencourt, T. N.: *Computer Simulation of Linear and Nonlinear Crack Propagation in Cementious Materials*, Ph.D. Thesis, Cornell University, (1993).
- Bocca, P. , Carpinteri, A. e Valente, S.: *Mixed mode fracture of concrete*, Int. J. Solids Structures, vol. 27, n°9, pág. 1139-1153, (1991).

- Bueno, E.M.R.: *Simulação Bidimensional de Fraturamento Coesivo por meio do Método dos Elementos Finitos*, Dissertação de Mestrado, Dep. de Engenharia de Estruturas e Fundações (PEF), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, (1999)
- Carpinteri, A., Valente, S. e Bocca, P. : *Mixed mode cohesive crack propagation*, 7<sup>th</sup> International Conference on Fracture(ICF7), 20-24 March 1989, Pergamon Press, Oxford, pág. 2243-2257.(1989)
- Carpinteri, A; Valente, S; Ferrara, G.; Melchiori, G.: *Is mode II fracture energy a real material property?* , Computers and Structures, vol.48, n° 3, pp. 397-413, (1993)
- Crisfield, M.A.: *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Editora John Wiley & Sons, Vol.1, pág. 252-327,(1990).
- Fujji, G.: *Análise de Estruturas Tridimensionais: Desenvolvimento de uma Ferramenta Computacional Orientada para Objetos*, Dissertação de Mestrado, Dep. de Engenharia de Estruturas e Fundações (PEF), Escola Politécnica, USP, (1997).
- Hillerborg, A., Modéer, M., e Petersson, P.E. : *Analysis of a crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*, Cement and Concrete Research, vol. 6, pág.773-782, (1976).
- Jamet, D., Gettu, R., Gopalaratnam, V. S. e Aguado, A. : *Toughness of fiber reinforced high-strength concrete from notched beam test*, Testing of fiber reinforced concrete, SP-155, D. J. Stevens et al., ACI, Detroit, USA, pág.23-29, (1995).
- Martha, L.F., Menezes, I.F.M., Lages, E.N., Parente Jr, E. and Pitangueira, R.L.S., “*An OOP Class Organization for Materially Nonlinear Finite Element Analysis*”, Join Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering, pp. 229-232, University of Padova, Padova, Italy, (1996).
- Planas, J., Guinea, G. V., Elices, M. : *Rupture modulus and fracture properties of concrete*, *Fracture Mechanics of Structures*, Vol. 1, F. H. Wittmann, eds. , Aedificatio Publishers, Freiburg, Alemanha, pág. 95-110, (1995).
- Schellekens, J. C. J.: *Interface Elements in Finite Elements Analysis*, TNO-BI-90-165, (1990).

# AVALIAÇÃO DA FLAMBAGEM EM VASOS METÁLICOS DE CONTENÇÃO

**Renato Campos da Silveira**

Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo (CTMSP)

**Miguel Mattar Neto**

Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares (IPEN-CNEN/SP)

## Resumo

A análise da flambagem é um dos aspectos mais importantes do projeto estrutural de vasos metálicos de contenção de centrais nucleares e, neste trabalho, é utilizado o *Code Case N-284-1* do Código ASME na avaliação dessas estruturas sujeitas a esse modo de falha. A partir de análises de tensões, efetuadas com o método dos elementos finitos em estruturas discretizadas com elementos de casca, os procedimentos do referido *Code Case* são aplicados na avaliação do vaso metálico de contenção da usina nuclear Angra 2 submetido a peso próprio, carregamentos sísmicos e subpressão em caso de acidente. Adicionalmente, para indicar a aplicabilidade da abordagem a outras estruturas, é também apresentado o estudo de vasos de pressão reforçados por anéis sob pressão externa. Conclusões e comentários são estabelecidos com base nos resultados obtidos.

**Palavras-chave:** Vaso de Pressão, Análise estrutural, Flambagem, Cascas, Método dos Elementos Finitos

## 1. INTRODUÇÃO

A análise da flambagem é um dos aspectos mais importantes do projeto estrutural de vasos metálicos de contenção de centrais nucleares. O dimensionamento de estruturas de cascas esbeltas, como é o caso desses vasos de contenção, sujeitas a carregamentos que podem provocar flambagem não é uma tarefa trivial com que se depara o projetista estrutural. Muitas investigações têm sido feitas sobre o assunto, que está longe de poder ser considerado como perfeitamente entendido. Há carência de subsídios que encaminhem o dimensionamento dessas estruturas de maneira clara e de fácil utilização.

O presente trabalho apresenta procedimentos de verificação baseados na utilização do *Code Case N-284-1 Metal Containment Shell Buckling Design Methods* do Código ASME (*The American Society of Mechanical Engineers*) (ASME, 1999). Esses procedimentos permitem a avaliação da flambagem a partir dos resultados de análise de tensões para os diversos carregamentos.

A abordagem descrita é aplicada na avaliação da flambagem localizada do vaso metálico de contenção da usina nuclear Angra 2 submetido a peso próprio, carregamentos sísmicos e subpressão em caso de acidente.

Embora o *Code Case N-284-1* tenha sido emitido com escopo de aplicação voltado para vasos metálicos de contenção, seu uso pode ser feito com vantagens em outras situações como, por exemplo, foi indicado em Weingart & Mikesell Jr. (1992) para um tanque de armazenamento de gasolina. Para demonstrar a aplicabilidade dos procedimentos, apresenta-se, também, a avaliação da flambagem localizada e global de vasos de pressão

cilíndricos reforçados por anéis sob pressão externa e uma comparação com resultados obtidos com critérios de projeto alemães para dimensionamento de casco resistente de submarinos (GL (1988) e Franitza (1989)).

Conclusões e comentários são estabelecidos a partir dos resultados apresentados.

## 2. ROTEIRO PARA UTILIZAÇÃO DO *CODE CASE N-284-1*

Dentro do chamado “Projeto por Análise” do Código ASME (ASME, 1999) e baseado em avaliações de flambagem de cascas sob carregamentos combinados (Cho & Frieze, 1988), o *Code Case N-284-1* apresenta procedimentos para verificação de diversas situações de geometria e carregamentos.

Satisfazendo às inequações de interação que levam em conta a combinação de carregamentos a que a casca pode estar submetida, a estrutura é considerada aprovada pelo *Code Case N-284-1*. Antes disso, porém, alguns passos têm que ser seguidos e estão mostrados a seguir, onde procurou-se manter a numeração do próprio *Code Case N-284-1*.

**(Passo 1)** um conjunto de componentes de tensão,  $\sigma_j$ , decorrente das cargas aplicadas, é calculado de acordo com –1300.

O que governa a análise de flambagem de uma casca são as regiões de tensão de membrana de compressão, que aparecem devido à resposta estática ou dinâmica da casca aos carregamentos aplicados. O campo de tensões interno que controla a flambagem de uma casca consiste de tensões de membrana longitudinal, de membrana circunferencial e de cisalhamento. Cada uma dessas componentes pode aparecer isoladamente ou em combinação com as outras, dependendo do carregamento aplicado. De acordo com o *Code Case N-284-1*, somente estas três componentes de tensão são consideradas na análise de flambagem.

Na combinação dos efeitos de diferentes cargas aplicadas simultaneamente, cada uma das componentes de tensão é somada algebricamente. Se a soma das componentes longitudinal ou circunferencial resultar em tração, aquela componente pode ser feita igual a zero.

**(Passo 2)** um fator de segurança, FS, é determinado de acordo com –1400.

(a) Para Condições de Projeto e Limites de Serviço Níveis A e B, FS = 2,0.

(b) Para Limites de Serviço Nível C, FS = 1,67.

(c) Para Limites de Serviço Nível D, FS = 1,34.

As condições de projeto e os níveis de serviço A, B, C e D são definidos no próprio código ASME (ASME, 1999) de acordo com a severidade e o número de ocorrência dos carregamentos e as consequências das suas aplicações nas estruturas.

Os fatores de segurança dados acima são utilizados na avaliação de flambagem de –1700 e são os mínimos valores requeridos para flambagem local. Os critérios de flambagem dados em –1700 requerem que as tensões de flambagem correspondentes às falhas relacionadas com flambagem da casca com reforçadores leves e instabilidade global sejam no mínimo 20% maiores que as tensões de flambagem local.

**(Passo 3)** fatores de abatimento de capacidade,  $\alpha_{ij}$ , são determinados de acordo com –1500.

Três modos de flambagem são considerados no *Code Case N-284-1*. Eles são:

- (a) flambagem local, que é definida como a flambagem do painel de casca entre reforçadores.
- (b) flambagem da casca com reforçadores leves, que é definida como a flambagem entre anéis circunferenciais da unidade de chapeamento juntamente com os reforçadores meridionais.
- (c) instabilidade global, que é definida como o colapso total da casca.

Esses fatores de abatimento de capacidade podem ser usados para cascas interna ou externamente reforçadas e também para cascas sem reforçadores. Todos os reforçadores devem ser bem proporcionados para impedir a flambagem local da alma e do flange.

**(Passo 4)** fatores de abatimento de plasticidade,  $\eta_j$ , são determinados de acordo com –

1600.

As tensões de flambagem elástica para cascas fabricadas são dadas pelo produto das tensões de flambagem clássica ( $\sigma_{iej}$ ) pelos fatores de abatimento de capacidade ( $\alpha_{ij}$ ), ou seja,  $\alpha_{ij} * \sigma_{iej}$ , onde o primeiro índice refere-se à direção da componente da tensão, o último refere-se ao modo de flambagem e o do meio é usado para ressaltar que se trata de tensão elástica. Quando esses valores excedem o limite de proporcionalidade do material, fatores de redução de plasticidade,  $\eta_j$ , são utilizados para levar em conta as propriedades não lineares do material, onde o índice refere-se à direção da componente da tensão. As tensões de flambagem inelástica são dadas, portanto, por  $\eta_j * \alpha_{ij} * \sigma_{iej}$ .

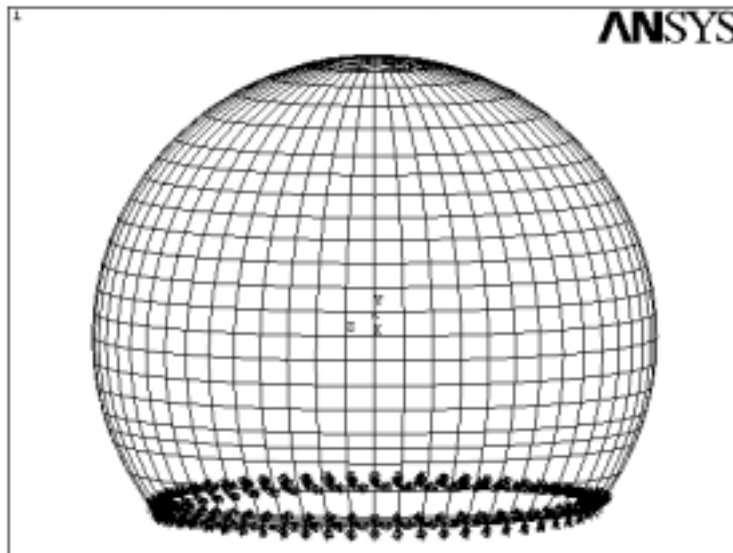
**(Passo 5)** é feita a avaliação de flambagem, de acordo com -1700.

Na avaliação de flambagem por fórmula, as componentes de tensão  $\sigma_j$  são inseridas nas equações de interação dadas em -1713. Equações simples são fornecidas em -1712 para a determinação das tensões teóricas de flambagem clássica de cascas em estados de tensão especiais,  $\sigma_{iej}$ . As tensões admissíveis de flambagem para os estados de tensão especiais são usadas nas equações de interação de -1713 na determinação das tensões admissíveis para os estados de tensões combinadas. Nas regiões de descontinuidades é aceitável utilizar a média dos valores de componentes de tensão de membrana até uma distância de  $\sqrt{Rt}$ , onde R é o raio e t a espessura da casca, a partir de um ponto de apoio ou  $0,5\sqrt{Rt}$  de cada lado de uma descontinuidade na determinação de  $\sigma_j$ .

### 3. VERIFICAÇÃO DO VASO METÁLICO DE CONTENÇÃO DE ANGRA 2

#### 3.1 Modelo, Geometria e Características do Material

A estrutura foi modelada como pode ser visto na Figura 1.



**Figura 1.** Modelo em elementos finitos do vaso metálico de contenção de Angra 2

As informações sobre a geometria e características do material da estrutura em avaliação foram obtidas de Nuclen (1984).

As características do material são: módulo de elasticidade  $E = 1,95 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e massa específica  $\gamma = 7850 \text{ kg/m}^3$ .



As principais dimensões do vaso metálico são: raio  $R = 28$  m, espessura  $t = 30$  cm e distância do engastamento no concreto  $d = 17$  m (a partir do centro da esfera).

O modelo foi discretizado com a utilização do programa ANSYS (ANSYS. Inc., 1999), tendo sido utilizado o elemento de casca facetado SHELL63, com 3 ou 4 nós e 6 graus de liberdade por nó.

### 3.2 Carregamentos

O peso próprio da casca esférica foi simulado através da aplicação da aceleração de 1 g ( $9,8 \text{ m/s}^2$ ), atuando verticalmente para baixo em todos os elementos do modelo.

A subpressão de 30 mbar ( $0,003 \text{ N/mm}^2$ ), cujo aparecimento está previsto após o acidente de perda de refrigerante chamado LOCA (*Loss of Coolant Accident*), foi simulada através da aplicação de pressão atuando de fora para dentro da casca esférica, em todos os elementos do modelo, como se fosse pressão externa.

O sismo foi simulado através de um carregamento estático equivalente, com a aplicação de aceleração em todos os elementos do modelo, como descrito a seguir. De acordo com o *Regulatory Guide 1.60* (USNRC,1973), para simular o carregamento sísmico com aceleração de período nulo do espectro de resposta de 1 g (aceleração da gravidade) deve-se aplicar 1 g nas duas direções horizontais (X e Z no modelo) e 2/3 de 1 g na direção vertical (Y no modelo). As direções X, Y e Z estão indicadas na Figura 1. Na direção Y, portanto, foi aplicada em todos os elementos do modelo a aceleração de  $6,53 \text{ N/mm}^2$  (igual a 2/3 de  $9,8 \text{ m/s}^2$ ), verticalmente para baixo, por ser esse o sentido que acarreta a pior situação para o caso estudado, que é o aparecimento de tensões de compressão. Para simular as acelerações horizontais ortogonais foi aplicada na direção X, em todos os elementos do modelo a aceleração de  $13,86 \text{ N/mm}^2$  ( $9,8\sqrt{2} \text{ N/mm}^2$ ).

### 3.3 Avaliação dos Resultados de Acordo com o Code Case N-284-1

Os carregamentos descritos acima foram combinados em dois casos de carregamento CC1 e CC2. O CC1 é composto de peso próprio + sismo SBO, que é o Sismo Básico de Operação. O SBO é previsto para ser suportado pela estrutura até 10 vezes e por isso faz parte da condição de projeto da instalação. O CC2 é composto de peso próprio + subpressão + sismo SDS, que é o Sismo de Desligamento Seguro. O SDS tem que ser suportado pela estrutura uma única vez e por isso faz parte da condição de acidente da instalação, assim como a subpressão.

A notação utilizada é a mesma do *Code Case N-284-1* e não será descrita novamente, aqui. Os passos seguidos foram:

**(Passo 1)** Determinação das Componentes de Tensão

As componentes de tensão utilizadas na aplicação do *Code Case N-284-1* a cascas esféricas são as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , sendo  $\sigma_1$  a mais negativa delas. Serão retiradas do modelo de elementos finitos descrito anteriormente. Tem que ser feita uma investigação quando da utilização das fórmulas de interação para que seja determinada a condição mais desfavorável de  $\sigma_1 + \sigma_2$ .

**(Passo 2)** Determinação do Fator de Segurança

Para CC1, FS = 2,0 e para CC2, FS = 1,34.

**(Passo 3)** Determinação dos Fatores de Abatimento de Capacidade  $\alpha_{ij}$ .

(a) Compressão Uniaxial

$$M_{\theta} = \frac{l_{\theta}}{\sqrt{Rt}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rt}} = \frac{2\pi * 28000}{\sqrt{28000 * 30}} = 191,95$$

$$\rightarrow \alpha_{2L} = 0,124$$

$$\rightarrow \alpha_{\phi L} = \alpha_{\theta L} = \alpha_{1L} = \frac{\alpha_{2L}}{0,6} = 0,206$$

(b) Tensão de Compressão Biaxial Igual

$$\alpha_{2L} = 0,124 \quad (M > 23,6)$$

$$\alpha_{\phi L} = \alpha_{\theta L} = \alpha_{2L} = 0,124$$

**(Passo 5)** Avaliação de Flambagem Elástica

**(Passo 5a)** Determinação do Valores Teóricos de Flambagem

(a) Tensão de Compressão Biaxial Igual

$$C = 0,605 \quad (M \geq 1,73)$$

$$\rightarrow \sigma_{\phi eL} = C Et/R = 0,605 * 206000 * 30 / 28000$$

$$\rightarrow \sigma_{\phi eL} = 133,53 \text{ N/mm}^2$$

**(Passo 5b)** Equações de Interação para Flambagem Local

$$\sigma_{1a} = \frac{\alpha_{1L} * \sigma_{\phi eL}}{FS} = \frac{0,206 * 133,53}{FS} = \frac{27,51}{FS}$$

$$\sigma_{2a} = \frac{\alpha_{2L} * \sigma_{\phi eL}}{FS} = \frac{0,124 * 133,53}{FS} = \frac{16,56}{FS}$$

As fórmulas de interação que têm que ser satisfeitas são:

(a) Compressão Uniaxial

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{1a}} \leq 1,0$$

(b) Compressão Biaxial

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_{1a}} + \frac{\sigma_2}{\sigma_{2a}} \leq 1,0$$

A avaliação das inequações acima foi feita com a utilização de duas macros, desenvolvidas dentro da sessão interativa do programa ANSYS. A primeira faz a avaliação através das tensões principais atuantes nos nós da região selecionada. A segunda faz a avaliação através de uma média das tensões atuantes nos elementos da região selecionada e só deve ser utilizada na regiões próximas de descontinuidades, como permite o *Code Case N-284-1*.

O cálculo para a determinação dos valores de máximo e dos pontos onde ocorrem é iterativo, porque não se sabe para qual valor do carregamento esses valores irão ocorrer. Alterando a participação do carregamento sísmico dentro das condições de carregamento descritas anteriormente até que o valor para o lado esquerdo das inequações fosse igual a 1,0, foram obtidos os valores admissíveis em termos de aceleração de período nulo do espectro de resposta para o carregamento sísmico dados na Tabela 1.

**Tabela 1.** Valores Admissíveis para o Carregamento Sísmico em termos de Aceleração de Período Nulo do Espectro de Resposta

Posição	SBO	SDS
engastamento	0,51 g	0,82 g
raio máximo	2,87 g	3,80 g
entre raio máximo e topo	2,35 g	3,12 g
topo	2,57 g	3,50 g

g – aceleração da gravidade (9,8 m/s<sup>2</sup>)

## 4. VERIFICAÇÃO DE VASO DE PRESSÃO CILÍNDRICO REFORÇADO POR ANÉIS SOB PRESSÃO EXTERNA

A maior parte do casco resistente dos submarinos modernos é composta de uma casca cilíndrica reforçada por anéis circunferenciais denominados cavernas. Regiões menores nas extremidades do cilindro têm normalmente forma esférica, com a existência ou não de cones para fazer a transição geométrica.

O carregamento mais importante no dimensionamento da estrutura dessa casca resistente é a pressão hidrostática. Essa configuração, casca fina submetida a pressão externa, é o típico caso para a ocorrência da flambagem. É esse o fator determinante no dimensionamento do casco resistente de submarinos.

Tomando dimensões de submarinos atuais, duas configurações de cilindro reforçado foram estudadas: a primeira representando um casco de um submarino pequeno e a segunda um casco de um submarino grande. Para ambas as configurações foram assumidos: módulo de elasticidade  $E = 206000 \text{ N/mm}^2$ , limite de escoamento  $\sigma_y = 550 \text{ N/mm}^2$ , limite de proporcionalidade de  $440 \text{ N/mm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , falta de circularidade de 0.3% do raio e ângulo de empenamento (*tilting*) de  $4^\circ$ .

Para o primeiro casco foram assumidos: pressão de cálculo de  $5 \text{ N/mm}^2$ , raio de 3250 mm (diâmetro de 6500 mm), espaçamento de cavernas de 450 mm e espaçamento de anteparas de 9000 mm. Para o segundo casco foram assumidos: pressão de cálculo de  $7 \text{ N/mm}^2$ , raio de 5000 mm (diâmetro de 10000 mm), espaçamento de cavernas de 750 mm e espaçamento de anteparas de 12500 mm

Primeiramente foram utilizados critérios de projeto alemães (GL (1988) e Franitza (1989)) na obtenção da estrutura mais eficiente, ou seja, na determinação das dimensões da caverna e espessura do cilindro que levasse à configuração geométrica mais leve, atendendo aos requisitos de projeto. Essa tarefa é trabalhosa por tratar-se de um cálculo iterativo. Uma configuração inicial casco e cavernas é assumida e para ela são determinados os resultados, que devem ser comparados com os requisitos. Modificações vão sendo feitas até que os resultados mostrem-se satisfatórios.

Da configuração final selecionada foram retiradas as tensões máximas para que fosse feita a avaliação de flambagem de acordo com o *Code Case N-284-1*.

### 4.1 Os Critério de Projeto Alemães

Os critérios de projeto alemães para o dimensionamento do casco resistente de submarinos, no que diz respeito ao cilindro reforçado, podem ser resumidos da maneira como segue:

- (a) são determinadas as tensões atuantes. Como a configuração é simples (cilindro reforçado por anéis, submetido a pressão constante) existe formulação analítica para a determinação das tensões. A formulação utilizada encontra-se em Pulos & Salerno (1961).
- (b) são determinadas as pressões críticas de flambagem local, utilizando as tensões calculadas anteriormente. Aqui são feitas duas investigações; a primeira para a verificação da flambagem axissimétrica e a segunda para a flambagem com a formação de lóbulos (ou assimétrica). É utilizada Lurchick (1961) para o caso simétrico e Reynolds (1960) para o não simétrico. Para trazer os resultados teóricos mais para perto da realidade são utilizados fatores de abatimento, determinados a partir de testes com modelos, de acordo com Pulos & Krenzke (1965).
- (c) é feita a verificação para a flambagem global, onde entram fatores que dependem da capacidade construtiva do estaleiro, como falta de circularidade e ângulo de empenamento (*tilting*) das cavernas.

## 4.2 Casco de Raio 3250 mm

Os cálculos das tensões foram feitos de acordo com Pulos & Salerno (1961), Lunchick (1961), Reynolds (1960) e Pulos & Krenzke (1965). Ao invés de determinar um FS para que fosse feita a avaliação de flambagem, foi feita a avaliação de flambagem para determinar qual o FS que se aplica ao caso. Seguindo todos os passos indicados anteriormente, depois de satisfeitas as inequações, os FS resultantes para as várias investigações de flambagem estão listados abaixo:

	elástica	inelástica
Localizada	0,985	0,631
Global	1,456	0,846

O valor que deve ser considerado, portanto, é FS = 0,631.

## 4.3 Casco de Raio 5000 mm

Da mesma maneira que para o casco de raio 3250 mm, foram efetuadas todas as etapas para o casco de raio 5000 mm. Os FS para as várias investigações de flambagem estão listados abaixo:

	elástica	inelástica
Localizada	1,244	0,651
Global	1,785	0,870

O valor que deve ser considerado, portanto, é FS = 0,651.

## 5. CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

Do ponto de vista de utilização, os procedimentos do *Code Case* N-284-1 constituem uma alternativa interessante tecnicamente por permitirem a aplicação direta de resultados de análises de tensões, feitas analiticamente ou numericamente, na avaliação da flambagem. Esse aspecto é muito importante na fase de síntese estrutural onde as análises de flambagem numéricas complexas, com não linearidades geométricas e dos materiais, ou experimentais são, em geral, inviáveis frente a quantidade de configurações e condições de carregamento que devem ser avaliadas.

Há algumas vantagens econômicas, também, na utilização do *Code Case* N-284-1 que permite a eliminação de conservadorismos ao considerar as tensões de tração como nulas na avaliação de flambagem. Isso foi observado Weingart & Mikesell Jr. (1992) para um tanque de armazenamento de gasolina.

Para o vaso metálico de contenção de Angra 2, pode-se estimar que os níveis de aceleração sísmicas atuantes em termos de aceleração de período nulo do espectro de resposta sejam, para o SOB, da ordem de até 0,15 g, para a cota do engaste do vaso metálico no concreto, e amplificados para até 0,60 g, no topo. No caso do SDS, os valores estimados são da ordem de até 0,25 g e 1,0 g, respectivamente. Pode-se notar, portanto, que os valores admissíveis dados na Tabela 1 são maiores que os atuantes, indicando que o vaso metálico de contenção de Angra 2 está adequadamente dimensionado quanto à flambagem, para as combinações de carregamento consideradas.

No caso de cilindros reforçados por anéis sob pressão externa, duas configurações estruturais foram avaliadas. Foram dimensionadas com a utilização do critério de projeto alemães para submarinos (GL, 1988 e Franitza, 1989), para o qual se chegou a uma estrutura bastante otimizada (FS = 1,0, de acordo com esses critérios). Quando avaliadas pelo *Code Case* N-284-1, obteve-se FS da ordem de 0,65, ou seja, teriam que ser reforçadas para serem

aprovadas por esse último critério. Embora não seja exagerado ( $FS = 0,65$  versus  $FS = 1,0$ ), parece coerente esse conservadorismo maior quando são utilizadas as regras do *Code Case N-284-1*. Os submarinos são dimensionados para ter o mínimo peso possível, porque uma configuração não otimizada no que se refere ao peso estrutural leva, na maioria das vezes, à inviabilidade do projeto como um todo. Não é esse o caso de estruturas de vasos metálicos de contenções nucleares. Claro que é desejável que o peso seja baixo, por economia de material e mesmo por limitação nas espessuras, mas a responsabilidade dessas estruturas é maior porque, além da segurança dos trabalhadores, também está relacionada com a segurança do público e do meio ambiente.

Mesmo com as análises de tensões simplificadas como as aqui apresentadas é possível avaliar a resistência à flambagem utilizando o *Code Case N-284-1*. Como foi mencionado anteriormente, a partir dos resultados da análise de tensões, a metodologia de avaliação da flambagem foi automatizada. Assim, mesmo com de análise de tensões mais refinadas, como a avaliação da flambagem é a mesma, a mesma automatização dos cálculos pode ser empregada, demonstrando o forte apelo para a utilização do *Code Case N-284-1*.

## 6. REFERÊNCIAS

- ANSYS, Inc., 1999, ANSYS User's Manual for Rev. 5.4, ANSYS, EUA
- ASME (*The American Society of Mechanical Engineers*), 1999, *ASME Boiler and Pressure Vessel Code*, ASME, New York, NY, EUA.
- Cho, S.-R. and Frieze, P. A., 1988, Strength Formulation for Ring-Stiffened Cylinders under Combined Axial Loading and radial Pressure, *J. Construct Steel Research*, Vol. 9, pp. 3-34.
- Franitza, S., 1989, Strength Aspects of the Design of Submarine Pressure Hulls, offprint from Naval Forces, number V, vol. X
- GL (Germanischer Lloyd), 1988, Rules for Underwater Technology, 1988 Edition, Chapter 2 – Submersibles, GL, Hamburgo, Alemanha
- Lunchick, M. E., 1961, Plastic Axisymmetric Buckling of Ring-Stiffened Cylindrical Shells Fabricated from Strain-Hardening Materials and Subjected to External Hydrostatic Pressure, David Taylor Model Basin Report 1393, EUA
- NUCLEN, 1984, PSAR (Preliminary Safety Analysis Report) of Angra 2 NPP, NUCLEN, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Pulos, J. G. & Krenzke, M. A., 1965, Recent Developments in Pressure Hull Structures and Materials for Hydrospace Vehicles, David Taylor Model Basin Report 2137, EUA
- Pulos, J. G. & Salerno, V. L., 1961, Axisymmetric Elastic Deformations and Stresses in a Ring-Stiffened, Perfectly Circular Cylindrical Shell under External Hydrostatic Pressure, David Taylor Model Basin Report 1497, EUA
- Reynolds, T. E., 1960, Inelastic Lobar Buckling of Cylindrical Shells under External Hydrostatic Pressure, David Taylor Model Basin Report 1392, EUA
- USNRC (*United States Nuclear Regulatory Commission*), 1973, Design Response Spectra for Seismic Design of Nuclear Power Plants. Regulatory Guide 1.60, USNRC, Washington, DC, EUA.
- Weingart, L. J. and Mikesell Jr., W. R., 1992, *Evaluation of Wind Buckling in Atmospheric Storage Tanks Utilizing ASME Code Case N-284*, ASME PVP-Vol. 230, ASME, New York, NY, EUA.