

# INVESTIGAÇÃO SOBRE COMPORTAMENTOS LOCALIZADOS EM UMA SÉRIE TEMPORAL COM COMPORTAMENTO IRREGULAR

**Humberto Camargo Piccoli**

Fundação Universidade Federal do Rio Grande, Departamento de Materiais e Construção, 96201-900, Rio Grande, RS, Brasil. E-mail: [piccoli@dmc.furg.br](mailto:piccoli@dmc.furg.br)

## Resumo

Este trabalho apresenta uma investigação de uma série temporal que exhibe comportamentos não linear e linear em diferentes intervalos de tempo. Além da tradicional análise espectral, realizada em ambos os intervalos observados bem como nos intervalos de transição, foram também utilizadas ferramentas de análise não linear, com a reconstrução do espaço de estado por meio das coordenadas de espera, construção de diagramas de Poincaré e cálculo de expoentes de Lyapunov para a identificação das diferenças de comportamento. Embora os resultados da análise espectral e os diagramas de Poincaré tenham demonstrado significativas diferenças nos diferentes intervalos, os expoentes de Lyapunov não foram influenciados pelo intervalo de comportamento linear.

**Palavras-chave:** séries temporais, caos, expoentes de Lyapunov, diagramas de Poincaré, análise espectral.

## 1. INTRODUÇÃO

Em um trabalho anterior foi realizada uma investigação sobre o comportamento das vibrações laterais de um rotor vertical sujeito a “rubbing” que apresentavam espectros com conteúdos de banda larga (Piccoli, 1994, Piccoli e Weber, 1998). A possibilidade de movimento caótico em rotores sujeitos a “rubbing” foi amplamente sugerido na literatura (Szczygielski e Schweitzer, 1985, Ehrich, 1992 e Müller e Bajkowski, 1993). O trabalho de Li e Paidoussis (1994) simulando o comportamento dinâmico de um rotor tocando um obstáculo é também uma importante contribuição apesar de não considerar a rigidez e o amortecimento do sistema rotor-estator em um modelo inicial. A nossa atenção esteve concentrada na identificação de comportamento caótico diretamente das medições do movimento vibratório.

Este trabalho apresenta uma nova abordagem da análise do movimento lateral de um rotor vertical sujeito a “rubbing”. Uma análise mais ampla, embora utilizando as mesmas ferramentas foi desenvolvida com o objetivo de confirmar alguns resultados e explorar mais profundamente algumas observações realizadas posteriormente. Em especial, foi constatada uma diferença de comportamento em uma das medições que havia apresentado um comportamento caótico. O sistema mostra comportamento irregular durante parte do movimento e ocorre uma transição para um movimento regular e, posteriormente, uma nova transição para comportamento irregular. O sinal observado integralmente foi analisado

anteriormente e o comportamento foi identificado como caótico. Agora procura-se mostrar as diferenças entre a análise de toda a série temporal e os dois regimes distintos. As técnicas utilizadas para o estudo foram as tradicionais transformadas de Fourier e reconstrução do espaço de estado pelas coordenadas de espera (delay coordinates) para o cálculo das características caóticas do sinal medido. A partir desta reconstrução foram construídos diagramas de Poincaré e calculados expoentes de Lyapunov, utilizando-se o programa TISEAN (Hegger *et alli*, 1999).

## 2. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

A técnica de reconstrução do espaço de estado através das coordenadas de espera foi desenvolvida através de um conjunto de trabalhos realizados nas duas últimas décadas (Takens, 1981, Packard *et alli*, 1981, Eckmann e Ruelle, 1985).

Se a série temporal proveniente das medições realizadas é representada por  $s(n)$ ,  $n = (d-1)\tau+1, \dots, N$ , onde  $N$  é o número total de pontos da série, então o vetor no espaço de estado reconstruído é dado por

$$y(n) = \{s(n), s(n-\tau), \dots, s(n-(d-1)\tau)\}^T \quad (1)$$

onde o sobrescrito  $T$  indica a transposta da matriz,  $\tau$  e  $d$  são os parâmetros de mergulho.

O tempo de espera  $\tau$  é um múltiplo inteiro do intervalo de amostragem não devendo ser tão pequeno que a correlação entre os pontos seja muito alta e nem muito grande que toda a informação que relaciona os dois pontos tenha sido completamente perdida. Dentre as técnicas possíveis para calcular  $\tau$  a mais utilizada na literatura é a que utiliza a informação mútua média (Fraser, 1989), dada por

$$I(\tau) = \sum_{n=1}^N P(s(n), s(n+\tau)) \log_2 \left[ \frac{P(s(n), s(n+\tau))}{P(s(n))P(s(n+\tau))} \right] \quad (2)$$

onde  $P(s(n))$  é a probabilidade de ocorrer uma medição  $s(n)$ ,  $P(s(n+\tau))$  é a probabilidade de ocorrer uma medição  $s(n+\tau)$ , e  $P(s(n), s(n+\tau))$  é a probabilidade de ocorrerem simultaneamente as medições  $s(n)$  e  $s(n+\tau)$ . O valor do tempo de espera escolhido é o correspondente ao primeiro mínimo local da curva da informação mútua média *versus* o tempo de espera. Geralmente, este primeiro mínimo local é bem determinado, entretanto, em alguns casos ele pode ser difícil de ser localizado. Em tais casos Fraser (1989) sugere que se escolha o valor correspondente a 1/5 do valor inicial. Isto também não é sempre eficiente. Nestas circunstâncias podem ser utilizadas alternativas como a função de autocorrelação ou a observação da topologia para valores localizados na região do primeiro mínimo local.

A dimensão de mergulho é obtida pelo método dos vizinhos falsos que está baseado na procura por um espaço de estado de dimensão  $d$  que apresente pontos que são observados como vizinhos devido exclusivamente à sua proximidade e não devido a uma observação de um atrator através de uma janela com uma dimensão insuficiente. Em outras palavras: não existem falsos cruzamentos ou aproximações da trajetória no espaço de estado reconstruído.

Após a reconstrução do espaço de estado pode ser realizada uma análise topológica através de diagramas de Poincaré.

O comportamento caótico pode ser quantificado calculando-se, dentre outros, os expoentes de Lyapunov. São os expoentes característicos associados a uma medida invariante. Eles são importante na identificação do movimento caótico em virtude da possibilidade dos mesmos serem calculados diretamente a partir dos dados experimentais e serem de fácil

interpretação. Um sistema apresentando comportamento caótico possui pelo menos um expoente de Lyapunov positivo.

A origem dos expoentes de Lyapunov está no teorema de Oseledec (1968), que estabelece que, se uma evolução no espaço de estado, dada pelo mapa

$$y(n+1) = F(y(n)) \quad (3)$$

é conhecida e, se alguns requisitos matemáticos adicionais são cumpridos, é possível construir a matriz

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( DF^n(y(0)) DF^n(y(0))^T \right)^{1/2n} \quad (4)$$

conhecida como matriz de *Oseledec* ( $D$  é um operador diferencial). Se  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  são os autovalores de  $\Lambda$ , os expoentes de Lyapunov associados são

$$\lambda_1 = \log|\alpha_1|, \lambda_2 = \log|\alpha_2|, \dots, \lambda_n = \log|\alpha_n|. \quad (5)$$

O expoente de Lyapunov dominante (máximo) pode ser estimado através da observação da evolução de pontos encontrados dentro de uma vizinhança no espaço de estado (muito próximos, pequenas perturbações). As trajetórias dos pontos observados devem separar-se com a evolução de forma que a sua distância cresça exponencialmente. Considerando-se dois pontos que visitam o espaço de estado em um determinado instante muito próximos  $y$  e  $y'$  e sendo a distância entre os mesmos igual a  $\Delta_0 = y_0 - y'_0$ , que ser observada depois de transcorridas um número  $j$  de iterações, tornando-se  $\Delta_j = y_j - y'_j$ . Encontra-se que  $|\Delta_j| \approx \Delta_0 e^{\lambda j}$  onde  $\lambda$  é o maior expoente de Lyapunov. Com base nisso, é possível calcular a função

$$S(\varepsilon, d, \tau) = \left\langle \ln \left( \frac{1}{|U_j|} \sum_{y', e^{U_j}} |y_{j+\tau} - y'_{j+\tau}| \right) \right\rangle_j \quad (6)$$

onde  $U_j$  é a vizinhança do ponto  $y_j$  e  $\varepsilon$  é o tamanho da vizinhança. A inclinação de  $S$  é uma robusta estimativa do máximo expoente de Lyapunov.

### 3. ANÁLISE DOS SINAIS

Inicialmente, observa-se que os sinais medidos apresentam comportamentos distintos em diferentes intervalos de tempo: do início da medição até aproximadamente 152 segundos a série temporal mostra um comportamento irregular, passando então por uma transição que conduz a um comportamento regular (Fig. 1). Isto acontece nas medições realizadas em ambas as direções ortogonais radiais ( $x$  e  $y$ ).

A análise das figuras 1a e 1b mostra uma transição rápida de um regime irregular para um regular com maiores amplitudes. O retorno ao regime irregular, entretanto, passa por uma transição em que ocorre uma modulação entre 194 e 197 segundos (figuras 1c e 1d). Como os comportamentos nas duas direções foram similares os resultados que serão apresentados a

seguir serão exclusivamente obtidos das medições na direção  $x$  para efeito de maior brevidade. Toda análise também foi realizada na direção  $y$  apresentando resultados idênticos.

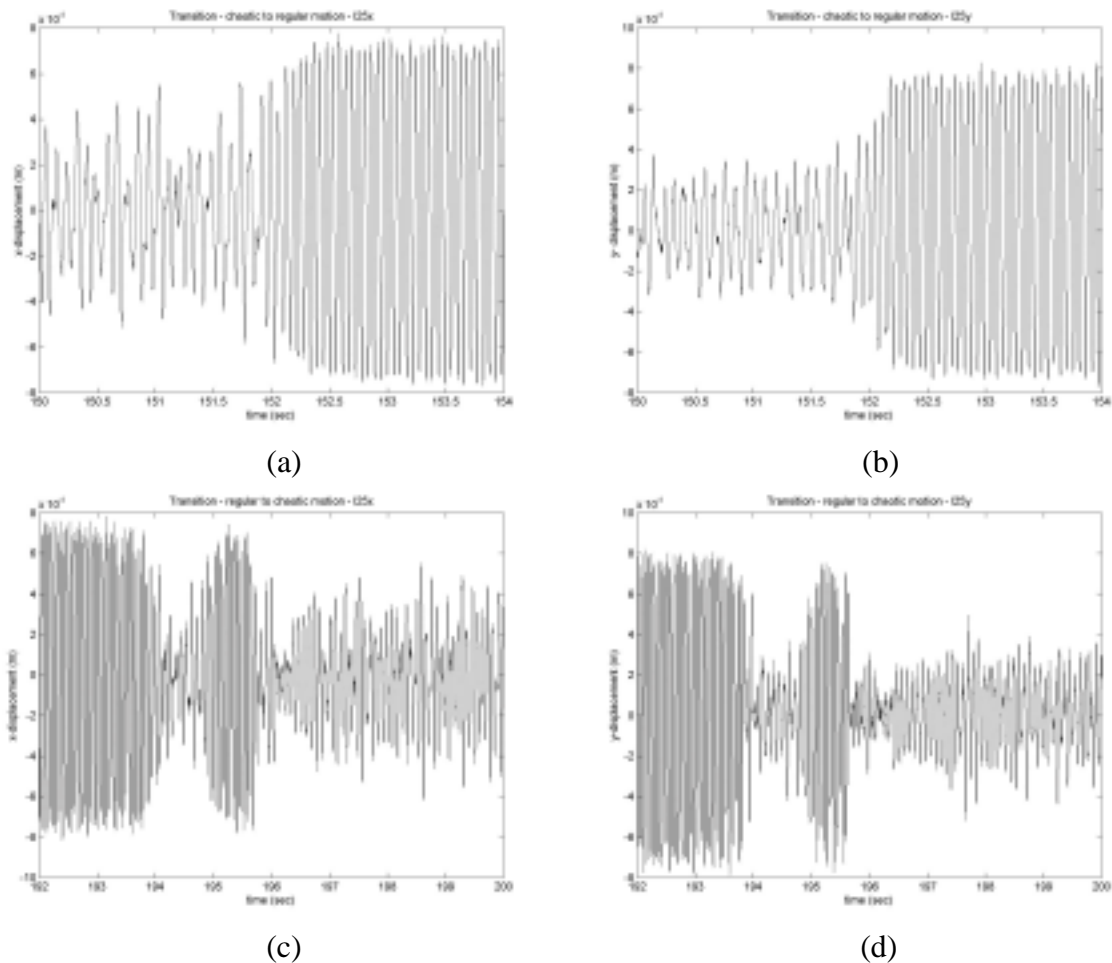


Figura 1 – Transições do regime irregular para o regular nas medições na direção  $x$  (a) e  $y$  (b) e do regime regular para o irregular na direção  $x$  (c) e  $y$  (d).

As transformadas de Fourier destes sinais (fig. 2) são então calculadas para interpretar os diferentes tipos de comportamento presentes. No intervalo entre 0 e 151,5 seg o comportamento é irregular (fig. 2a) nas direções  $x$  e  $y$  predominando as componentes síncrona em 11,4 Hz, aparecendo uma harmônica em 22,7 Hz resultado da folga existente. Estes espectros também apresentam um importante conteúdo de banda larga sugerindo um comportamento caótico. A transição entre este comportamento irregular e o regular que o segue é brusca não exigindo uma análise mais detalhada como mostram as figs. 1a e 1b. A seguir começa um movimento regular na frequência de 18,3 Hz, mostrado na fig. 2b. A transição deste intervalo regular para o irregular seguinte apresenta um movimento com banda larga misturada com as componentes do movimento regular e do irregular (fig. 2c). Finalmente o movimento retorna ao seu estado irregular semelhante ao inicial apenas com uma excitação da primeira frequência natural que migra de 21,3 Hz para 8,4 Hz quando a folga do sistema aumenta (Piccoli e Weber, 1996), devido à permanência de transientes não atenuados devido ao baixo amortecimento do sistema (fig. 2d).

A seguir inicia-se a reconstrução do espaço de estado calculando-se os parâmetros de mergulho, inicialmente o tempo de espera. Aplicando-se a informação mútua média, o tempo de espera foi calculado para toda a série (0 a 200 s) e apenas para o intervalo irregular inicial (0 a 151,5 s). As curvas estão mostradas na fig. 3, observando-se que o primeiro mínimo local

está melhor definido na série reduzida, sendo correspondente a um tempo de espera igual a 9, enquanto que na série completa a curva é mais irregular e o primeiro mínimo encontra-se com um tempo de espera igual a 8.

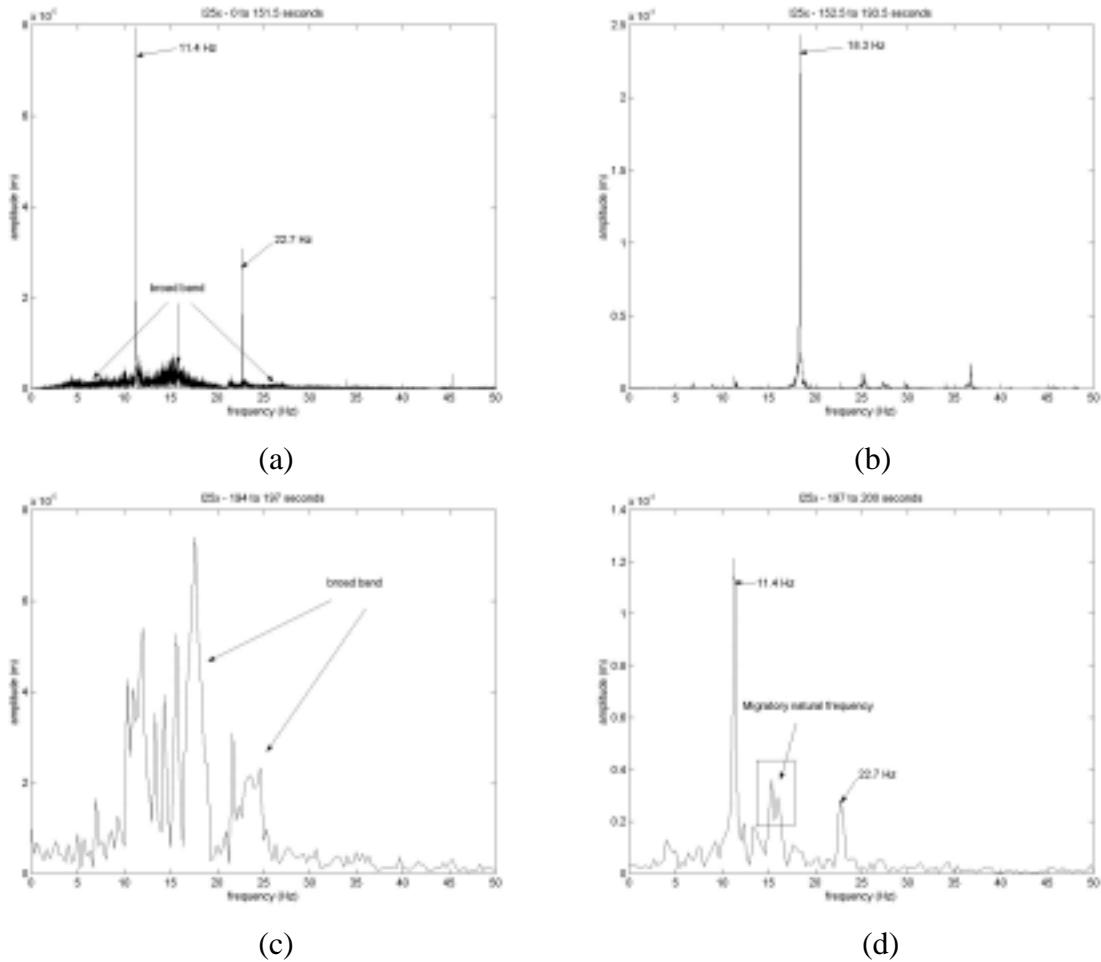


Figura 2 – Transformadas de Fourier das medições divididas em partes: (a) comportamento irregular no intervalo de 0 a 151,1 segundos; (b) comportamento regular no intervalo de 152,5 a 193,5 segundos; (c) transição do comportamento regular para o irregular no intervalo de 194 a 197 segundos; (d) comportamento irregular final no intervalo de 197 a 200 segundos.

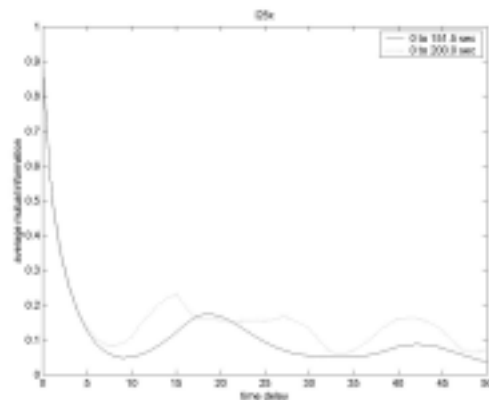


Figura 3 – Curvas de informação mútua média para a série reduzida (0 a 151,5 s) e completa (0 a 200 s).

Com base na fig. 3 deve ser escolhido o tempo de espera igual a 8 para a série completa e igual a 9 com a série reduzida. Foram obtidos tempos de espera também com a função de autocorrelação e os resultados foram os mesmos. A próxima escolha é da dimensão de mergulho, que é realizada através do método dos vizinhos falsos. Os resultados para as duas séries em questão estão mostrados na fig. 4.

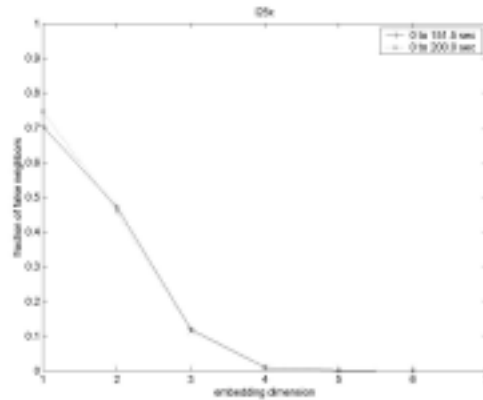


Figura 4 - Curvas de fração de vizinhos falsos para a série reduzida (0 a 151,5 s) e completa (0 a 200 s).

Como demonstra a fig. 4 tanto para a série reduzida como para a série completa uma dimensão de mergulho igual a 4 seria suficiente uma vez que o percentual de vizinhos falsos é inferior a 1 %, quantidade esta que é desprezível considerando-se o ruído presente no sinal (ruído de medição).

A fig. 5 mostra os diagramas de Poincaré, obtidos para dimensão de mergulho igual a 4, em que se evidenciam os dois tipos de comportamento onde, especialmente na fig.5b, estão bem distintos, com inclusive a transição sendo mostrada. O atrator formado na fig. 5b, considerada a região de transição pode ser considerado um atrator estranho, enquanto que na fig. 5a isto não está bem claro.

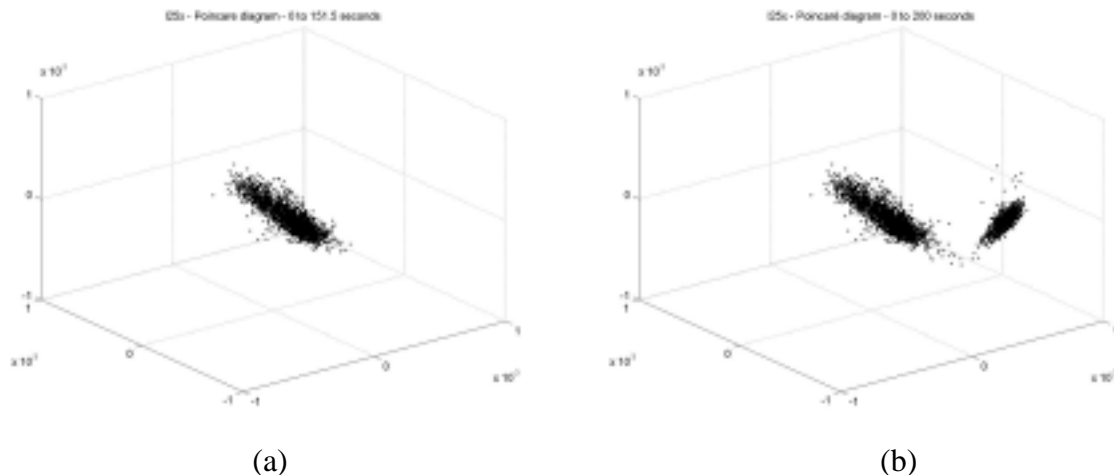


Figura 5 – Diagramas de Poincaré com a série projetada em dimensão 4, apresentando uma seção de dimensão 3 para (a) série reduzida (0 a 151,5 s) e (b) série completa (0 a 200 s).

Uma melhor análise é realizada com o cálculo do expoente de Lyapunov dominante que não mostrou diferença significativa entre as duas séries. Como mostra a fig. 6, os expoentes calculados para a série reduzida e para a série completa são muito próximos. Uma diferença

quase imperceptível está na região de inclinação constante que é menor na série completa. Entretanto, a inclinação média não chega a se modificar.

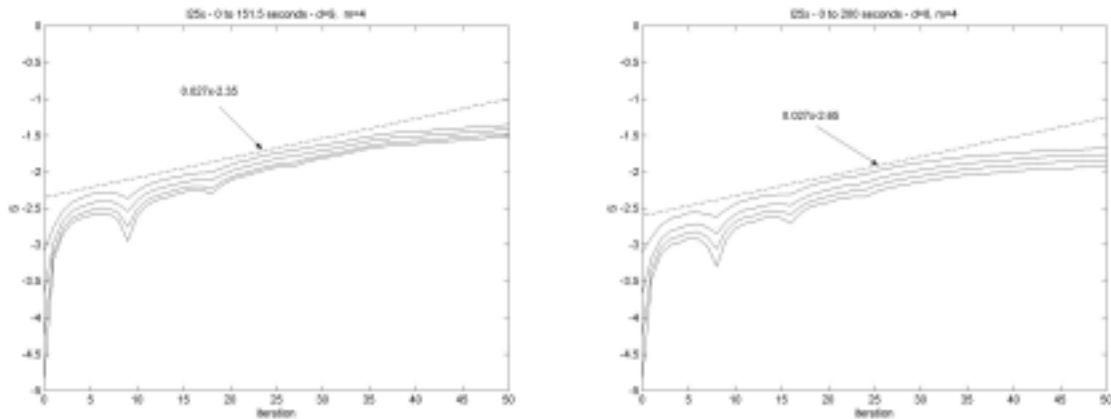


Figura 6 – Cálculo do expoente de Lyapunov dominante através do algoritmo de Kantz para (a) série reduzida (0 a 151,5 s) e (b) série completa (0 a 200 s).

Para validação dos resultados foram também calculados os expoentes de Lyapunov através do algoritmo desenvolvido por Rosenstein (Hegger et alli, 1999), onde apenas o vizinho mais próximo é seguido para cada ponto de referência. Os resultados estão apresentados na fig. 7 obtendo-se um expoente aproximado de 0,03 o que está bem próximo ao encontrado com o algoritmo de Kantz.

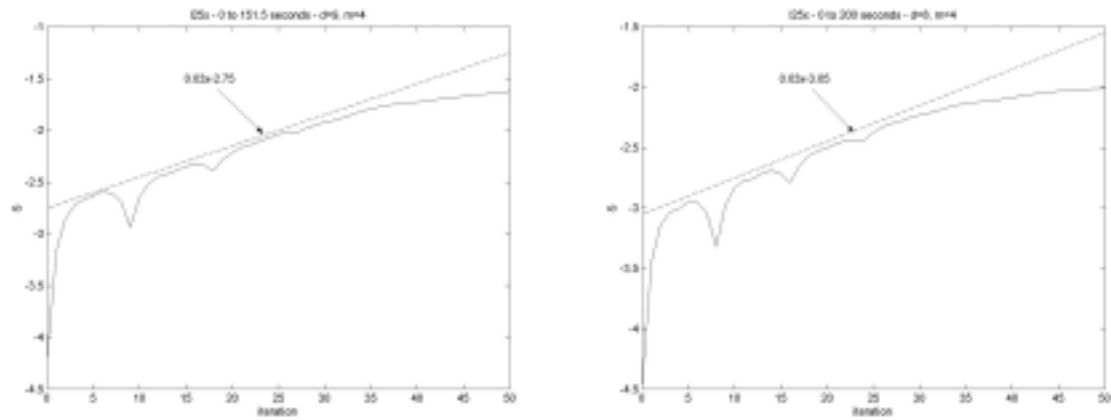


Figura 7 – Cálculo do expoente de Lyapunov dominante através do algoritmo de Rosenstein para (a) série reduzida (0 a 151,5 s) e (b) série completa (0 a 200 s).

#### 4. CONCLUSÃO

Uma comparação entre uma série temporal obtida de medições experimentais mostrando comportamento irregular e a mesma série com um intervalo com comportamento regular foi realizada. Observou-se diferenças significativas entre os espectros da séries nos dois intervalos e também nos diagramas de Poincaré, sugerindo a existência de um atrator estranho. O maior expoente de Lyapunov entretanto não foi significativamente afetado pelo período de comportamento regular talvez pelo fato que o período de comportamento irregular é bem mais longo. Novas investigações continuam a ser realizadas, tanto no campo da análise não linear como também com a utilização de “wavelets”, ferramentas apropriadas para este tipo de situação (localização).

## 5. REFERÊNCIAS

- Eckmann, J.-P., e Ruelle, D., 1985, Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics, Part I*, vol. 57, n. 3, p. 617-656.
- Ehrich, F.F., 1992, Observations of subcritical superharmonic and chaotic response in rotordynamics. *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 114, n. 1, p. 93-100.
- Fraser, A.M., 1989, Reconstructing attractors from scalar time series: a comparison of singular system and redundancy criteria. *Physica D*, vol. 34, n. 3, p. 391-404.
- Hegger, R, Kantz, H. e Schreiber, T., 1999, Pratical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package. *Chaos*, vol. 9, n. 2, p. 413-435.
- Li, G.X., and Païdoussis, M.P., 1994, Impact phenomena of rotor-casing dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*, vol. 5, p. 53-70.
- Müller, P.C., and Bajkowski, 1993, J. Signal analysis in multibody systems. Preprint.
- Oseledec, V.I., 1968, A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Transactions of Moscow Mathematical Society*, vol. 19, p. 197-231.
- Packard, N.H., Crutchfield, J.P., Farmer, J.D., and Shaw, R.S., 1980, Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, vol. 45, n. 9, p. 712-716.
- Piccoli, H.C., 1994, Observação de Caos nas medições do movimento de um rotor sujeito a “rubbing”
- Piccoli, H.C. e Weber, H.I., 1996, Nonlinear and frequency domain analysis of measured signals with chaotic behavior. *Proceedings of 2nd European Nonlinear Oscillations Conference, Praga, República Tcheca*, vol. 3, p. 137-140.
- Piccoli, H.C. e Weber, H.I., 1998, Experimental observation of chaotic motion in a rotor with rubbing, *nonlinear dynamics*, vol. 16, n. 1, p. 55-70, Kluwer, Holanda.
- Szczygielski, W.M., and Schweitzer, G., 1985, Dynamics of a high-speed rotor touching a boundary. *IUTAM/IFTToMM Symposium*.
- Takens, F., 1981, Detecting strange attractors in turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 898, p. 366-381.