

ELEMENTO FINITO TRIANGULAR LINEAR HIERÁRQUICO - AVALIAÇÃO DO MODELO

Antonio Pedro Clapis

Faculdade Federal de Uberlândia

Campus Santa Mônica – Departamento de Projetos e Sistemas Mecânicos

Uberlândia - MG - Brasil E-mail: apclapis@mecanica.ufu.br

Resumo

O trabalho apresenta um desenvolvimento da formulação do elemento finito triangular hierárquico de grau dois, enfatizando-se o uso de coordenadas de área, a obtenção das funções de forma hierárquicas, forças equivalentes nodais sobre os parâmetros hierárquicos e o desenvolvimento das equações de equilíbrio, principalmente no que se refere ao vetor gradiente e a montagem da matriz de rigidez global com os termos hierárquicos. O modelo obtido tem como objetivo a busca de um estimador de erro de discretização do elemento finito triangular linear. A formulação obtida é avaliada através de exemplos tradicionais da literatura e os resultados numéricos (lineares e quadráticos) são comparados às soluções analíticas.

Palavras-chave: elemento finito, funções de forma, erro de discretização

1. INTRODUÇÃO

No método dos elementos finitos uma eficiente formulação do elemento é de suma importância nos problemas onde muitas malhas podem ser geradas na busca da solução de um problema específico. Elementos triangulares têm um papel importante nos métodos adaptativos numa análise com este método pois possuem uma polinomial completa e, portanto, oferecem certas vantagens sobre os elementos quadriláteros os quais empregam polinomiais com termos parasíticos, Serpa (1991) e Zienkiewicz (1971). Observa-se, ainda, pelas discussões em Zienkiewicz (1983), e Szabo (1981), que as vantagens do elemento triangular aumentam com o uso da formulação hierárquica.

A formulação hierárquica possui os seguintes méritos: utiliza soluções prévias na busca de um refinamento, permite um esquema simples de iteração na solução para refinamentos sucessivos, melhora o condicionamento da matriz de rigidez e nos fornece um imediato estimador de erro. A propriedade de melhorar o condicionamento da matriz de rigidez é atribuída ao fato que os graus de liberdade hierárquicos são perturbações adicionadas as soluções, obtidas com funções de forma de ordem mais baixa. Por isso a matriz resultante é mais diagonal do que a que se obteria utilizando a formulação clássica. Logo a diferença entre o máximo e o mínimo autovalor da matriz de rigidez normalmente é menor em uma formulação hierárquica.

O campo de deslocamentos (\hat{v}, \hat{u}) para qualquer ponto do elemento finito triangular linear dado em termos dos deslocamentos nodais vale:

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}(L_1, L_2, L_3) \\ \hat{v}(L_1, L_2, L_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N](L_1, L_2, L_3) & 0 \\ 0 & [N](L_1, L_2, L_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{v}\} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

onde $[N]$ é a matriz função de forma em termos das coordenadas de área

Porém alguns problemas com as funções de forma padrão ocorrem quando existe a necessidade de se usar um elemento mais refinado. Novas funções de forma terão que ser geradas e todos os cálculos terão que ser refeitos. Seria uma grande vantagem evitar esta dificuldade de modo que a função de forma não dependeria do número de nós da malha. Isto é alcançado através das funções de forma hierárquicas.

Como cada termo de $[N]$ corresponde ao deslocamento do vértice do elemento triangular e associando-se com o elemento hierárquico tem-se a seguinte função de forma

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_\alpha \ N_\beta \ N_\gamma] = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ 2L_1L_2 \ 2L_2L_3 \ 2L_1L_3] \quad (2)$$

onde os três primeiros termos estão associados aos graus de liberdade anteriores e os três últimos termos estão associados aos novos graus de liberdade para cada lado do elemento, nas direções x e y.

2. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO TRIANGULAR HIERÁRQUICO DE GRAU 2

A expressão da energia de deformação, para o problema bidimensional, é dada por

$$U = \frac{1}{2} \iint \varepsilon^T D \varepsilon t \, dx \, dy \quad (3)$$

onde D é a matriz elasticidade, t é a espessura e ε é o vetor das deformações, ou vetor gradiente, e vale

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \bar{u}_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \bar{v}_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \bar{u}_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} \bar{v}_i \end{Bmatrix} \quad \text{onde } i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

Para os componentes referentes ao campo hierárquico, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} &= \frac{1}{A} (L_2 y_{23} + L_1 y_{31}); & \frac{\partial N_\beta}{\partial x} &= \frac{1}{A} (L_3 y_{31} + L_2 y_{12}); & \frac{\partial N_\gamma}{\partial x} &= \frac{1}{A} (L_3 y_{23} + L_1 y_{12}) \\ \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} &= \frac{1}{A} (L_1 x_{13} + L_2 x_{32}); & \frac{\partial N_\beta}{\partial y} &= \frac{1}{A} (L_2 x_{21} + L_3 x_{13}); & \frac{\partial N_\gamma}{\partial y} &= \frac{1}{A} (L_1 x_{21} + L_3 x_{32}) \end{aligned}$$

Desenvolvendo-se então a equação (4), tem-se para o vetor das deformações a seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 & a & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} & 0 & d & 0 & e & 0 & f \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} & d & a & e & b & f & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= 2(L_2 y_{23} + L_1 y_{31}); & b &= 2(L_2 y_{12} + L_3 y_{31}); & c &= 2(L_1 y_{12} + L_3 y_{23}); \\ d &= 2(L_1 x_{13} + L_2 x_{32}); & e &= 2(L_2 x_{21} + L_3 x_{13}); & f &= 2(L_1 x_{21} + L_3 x_{32}); \\ A &= \text{área do elemento}; & \alpha \text{ e } \beta &= \text{campos de deslocamentos hierárquicos.} \end{aligned}$$

Substituindo (5) em (3) e desenvolvendo algebricamente a equação (2) observa-se que os coeficientes de rigidez originais permanecem preservados, sendo isto um dos méritos da formulação hierárquica conforme afirma Zienkiewicz [1983]. Todos os coeficientes adicionados à matriz de rigidez original podem ser calculados analiticamente pois as integrais são relativamente simples. As equações de equilíbrio iniciais aparecem então com os termos adicionais previamente calculados e, remontando-se as novas linhas e colunas correspondentes aos novos graus de liberdade, ficam:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_{nh} \\ \mathbf{K}_{hn} & \mathbf{K}_{hh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_n \\ \bar{\mathbf{u}}_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_n \\ \mathbf{f}_h \end{Bmatrix} \quad (6)$$

A matriz de rigidez inicial \mathbf{K} permanece invariável, possibilitando a recuperação de alguns coeficientes computacionais na ocorrência de refinamento. Isto já é uma das vantagens de se usar o elemento hierárquico. Além disso pode-se considerar $\bar{\mathbf{u}}_n = \bar{\mathbf{u}}$ como uma primeira aproximação razoável da solução, que se pode utilizar como início de um processo iterativo de resolução, Zienkiewicz (1989), Bugeda (1991). Os parâmetros hierárquicos derivados da solução das novas equações de equilíbrio valem:

$$\bar{\mathbf{u}}_h = \mathbf{K}_{hh}^{-1} (\mathbf{f}_h - \mathbf{K}_{hn} \bar{\mathbf{u}}) \quad (7)$$

3. FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES HIERÁRQUICAS $\{ \mathbf{f}_h \}$

3.1 Carregamento ao longo do lado

A interpolação do campo de deslocamentos $u(s)$, ao longo do lado $(i - j)$, denominado $u(\xi)$, vale:

$$u(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)}{2} & \frac{(1+\xi)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} + (1-\xi^2) \alpha_{ij} \quad (8)$$

onde $\begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)}{2} & \frac{(1+\xi)}{2} \end{bmatrix}$ representa a interpolação nodal e $(1-\xi^2)$ representa a interpolação hierárquica. Reportando-se a Figura 1(a) a interpolação das forças distribuídas ao longo do lado (i - j) permite uma variação quadrática e vale:

$$f_x(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)}{2} & \frac{(1+\xi)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x_i} \\ F_{x_j} \end{Bmatrix} + (1-\xi^2) F_x \quad (9)$$

onde F_x é a carga distribuída ao longo do lado (i - j). O vetor das forças nodais equivalentes pode ser obtido a partir do trabalho realizado pela força $f_x(\xi)$, agindo sobre $u(\xi)$ ao longo de um lado (i - j),

$$W = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ \alpha_{ij} \end{Bmatrix}^T \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (1-\xi)/2 \\ (1+\xi)/2 \\ (1-\xi^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)}{2} & \frac{(1+\xi)}{2} & (1-\xi^2) \end{bmatrix} d\xi \begin{Bmatrix} F_{x_i} \\ F_{x_j} \\ F_x \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

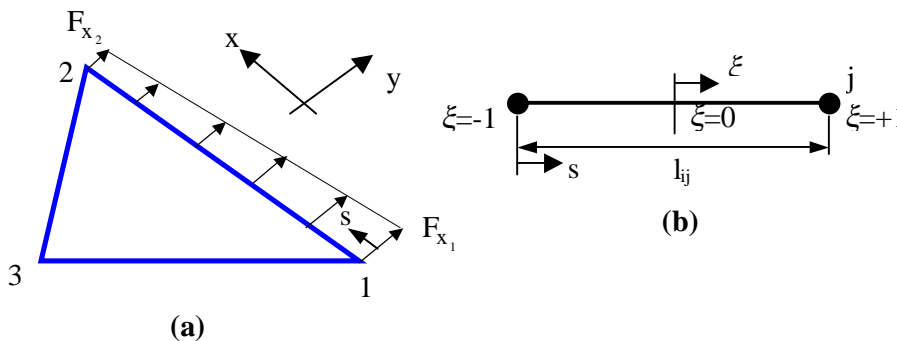


Figura 1 - Elemento triangular com carga ao longo do lado: (a) variação linear ao longo do lado 1-2; (b) coordenadas locais parametrizadas

Resolvendo-se a integral da equação (10), obtém-se para o trabalho a seguinte expressão:

$$W = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ \alpha_{ij} \end{Bmatrix}^T l_{ij} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 8/15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x_i} \\ F_{x_j} \\ F_x \end{Bmatrix} \quad (11)$$

onde o vetor força equivalente para o lado do elemento triangular fica o seguinte

$$\{F\}_{eq} = I_{ij} \begin{Bmatrix} \frac{F_{x_i}}{3} & \frac{F_{x_j}}{6} & \frac{F_x}{3} \\ \frac{F_{x_i}}{6} & \frac{F_{x_j}}{3} & \frac{F_x}{3} \\ \frac{F_{x_i}}{3} & \frac{F_{x_j}}{3} & \frac{8F_x}{15} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

3.2 Carregamento ao longo da área

A integral da equação (10) será modificada substituindo-se por uma integral da carga distribuída ao longo da área do elemento, $Q(x,y)$, dependente das funções de forma em coordenadas de área, equação (2). O vetor das forças nodais equivalentes ao longo da área para o caso de $Q(x,y) = Q$ (constante), usando-se as fórmulas de integração polinomial sobre o triângulo fica:

$$\{F\}_{eq} = Q A \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

4.1 Carga nodal equivalente ao longo da área e constante

A figura 2 apresenta uma viga sujeita ao carregamento de peso próprio, com espessura unitária, coeficiente de Poisson zero e módulo de elasticidade igual a 10. Foram usados 8 elementos triangulares lineares com grau hierárquico dois.

4.2 Carga nodal equivalente ao longo do lado e quadrática

Analisa-se uma viga, de seção transversal retangular, com cisalhamento aplicado na extremidade livre da mesma. A figura 3 apresenta as características dimensionais da viga, geometria da malha e o carregamento equivalente nodal. Adotou-se o módulo de elasticidade $E = 10000$, o coeficiente de Poisson $\nu = 0$ e a espessura $t=1$.

4.3 Carga nodal equivalente ao longo do lado e linear

Uma viga em balanço com uma carga distribuída constante, Q , aplicada na face superior está representada esquematicamente na figura 4. A mesma mostra um modelo discretizado com 20 elementos finitos triangulares lineares e hierárquicos de grau 2. A espessura da viga é unitária e as propriedades do material são módulo de elasticidade $E = 10000$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

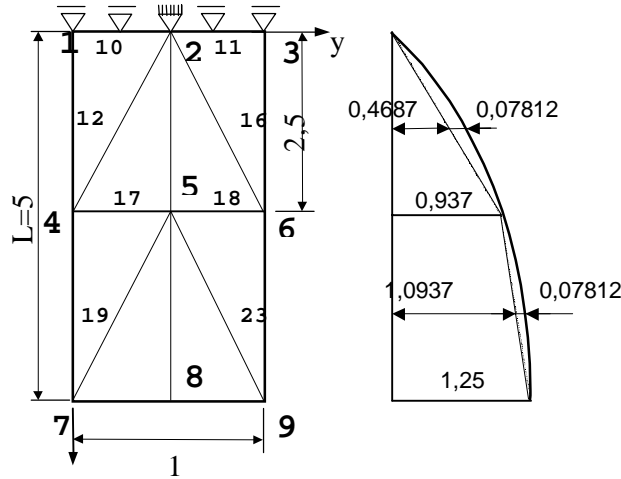


Figura 2 - Viga sob peso próprio e diagrama de deslocamentos na direção x

Tabela 1 - Comparação dos dados obtidos, numéricos e analíticos.

| NÓ | x | Linear (\bar{u}) | Proposto (\bar{u}) | Analítico |
|----|-----|----------------------|------------------------|-----------|
| 4 | 2,5 | 0,93742 | 0,93750 | 0,93750 |
| 7 | 5,0 | 1,25000 | 1,25000 | 1,25000 |

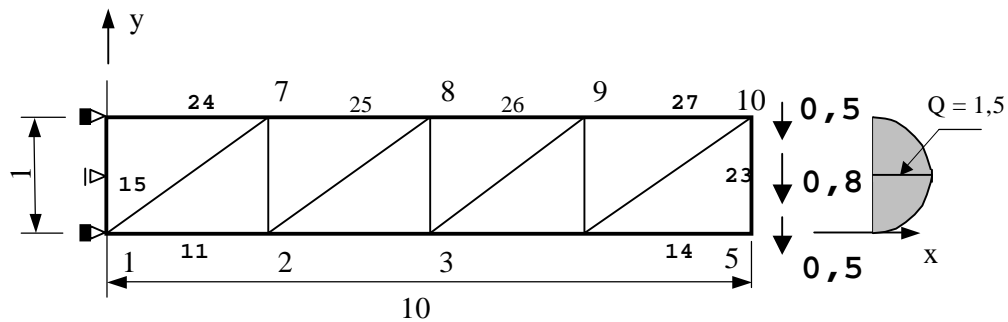


Figura 3 - Viga com cisalhamento na extremidade livre

Tabela 2 - Comparação de dados. Lineares, hierárquicos, e analíticos.

| NÓ | x | Linear (\bar{u}) | Proposto (\bar{u}) | Analítico |
|----|-------|----------------------|------------------------|-----------|
| 7 | 2,50 | -0,003148 | -0,033877 | -0,03437 |
| 8 | 5,00 | -0,01088 | -0,12393 | -0,1250 |
| 9 | 7,50 | -0,02167 | -0,25147 | -0,2531 |
| 10 | 10,00 | -0,03388 | -0,39776 | -0,4000 |

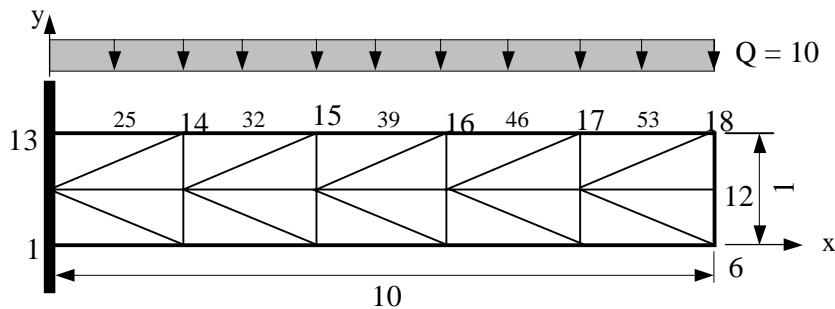


Figura 4 - Viga em balanço com carregamento distribuído constante e vertical.

Tabela 3 - Comparação numérica e analítica dos dados obtidos.

| NÓ | x | Linear (\bar{u}) | Proposto (\bar{u}) | Analítico | Erro relativo % |
|----|------|-------------------------|---------------------------|-----------|--------------------|
| 14 | 2,0 | -0,20405 | -1,041498 | -1,0480 | 0,62 |
| 15 | 4,0 | -0,65014 | -3,618349 | 3,6500 | 0,87 |
| 16 | 6,0 | -1,2329 | -7,070264 | -7,1280 | 0,81 |
| 17 | 8,0 | -1,8750 | -10,918380 | -11,0080 | 0,81 |
| 18 | 10,0 | -2,5299 | -14,876190 | -15,0000 | 0,83 |

5. CONCLUSÕES

As tabelas 2 e 3 mostram para os deslocamentos em y, dos nós da linha superior da viga, que os resultados são bastante satisfatórios mesmo considerando que as discretizações são bastante grosseiras nas regiões dos maiores erros relativos..

Observa-se com isto que os resultados com a introdução dos parâmetros hierárquicos nas funções de forma do elemento triangular linear são confiáveis na avaliação do modelo para o objetivo a que se destina.

6. REFERÊNCIAS

- L. A. Serpa, “Otimização de malhas de elementos finitos pelo método da relocação dos nós na elasticidade linear”, Tese de Mestrado, UNICAMP, Campinas, 1991.
- B. A. Szabo, P. K. Basu and D. A. Dunavant, “Quality control in finite element analysis”, Proc. Int. Conf. on Computing in Civil Engineering, New York, May, 1981, pp 15-26.
- O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and J. M. Too, “Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells”, Int. J. Num. Meth. Eng., 3, 275-290, 1971.
- O. C. Zienkiewicz, J. P. de S. R. Gago and D. W. Kelly, “The hierarchical concept in finite element analysis”, Comp. Struct., 16, 53-65 (1983)