

# MODELO VISCO-ELÁSTICO DA CAMADA DE CONTATO MECÂNICO DE UM MOTOR POR ONDAS PROPAGANTES.

**Adolfo Gomes Marto**

**Pablo Siqueira Meirelles**

Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional, 59072-970, Campinas, SP, Brasil. E-mail: [agmarto@fem.unicamp.br](mailto:agmarto@fem.unicamp.br)

## Resumo

Este trabalho estuda o contato mecânico entre rotor e estator em motores por ondas propagantes. Uma fina camada de contato colada ao rotor é modelada como um material viscoelástico. O modelo de contato considera o fenômeno de agarramento e deslizamento, ou *stick-slip*. As tensões de contato e os campos de velocidade são desenvolvidos analiticamente. Um algoritmo numérico foi implementado para aplicar este modelo em um motor já em funcionamento.

**Palavras-chave:** onda propagante, contato mecânico, camada viscoelástica

## 1. INTRODUÇÃO

Motores ultra-sônicos utilizam forças de atrito para funcionarem. Esses motores são compostos basicamente de dois corpos em contato, rotor e estator. Um dos corpos, geralmente o estator, vibra a uma frequência acima da audível. As forças de contato entre os corpos produzem as forças de acionamento. (Marto, 1997) apresenta alguns princípios de funcionamento desses motores. O motor ultra-sônico por ondas propagantes, ou *Traveling Wave Ultrasonic Motor*, é o mais promissor entre esses por apresentar características como: uma construção simples, elevado torque por unidade de massa e velocidade reduzida, além de ser silencioso.

O motor ultra-sônico por ondas propagantes foi criado por Sashida em 1982 e citado em Sashida, 1993. O estator e rotor tem forma de anel ou disco. No estator são excitados dois modos degenerados, com uma diferença de fase no tempo, produzindo ondas propagantes. As ondas propagantes geram deslocamentos elípticos na superfície de contato. O rotor é pressionado contra o estator e as forças de atrito transformam os esforços tangenciais provocados pelos deslocamentos elípticos em força de acionamento. Uma camada de contato é colada ao rotor para melhorar o desempenho da transmissão das forças de contato. O funcionamento desse tipo de motores é apresentado em detalhes por (Marto & Meirelles, 1999).

(Hagedorn & Wallaschek, 1992) apresentam um modelo matemático do estator. O modelo analisa os modos naturais do estator pela teoria de placas de Kirchhoff, sem considerar a influência do contato com o rotor. (Cao & Wallaschek, 1995) desenvolvem um modelo viscoelástico da camada de contato colada ao rotor. Esse modelo considera a rigidez da camada bem menor que a rigidez do estator. Com isso, considera-se que a onda propagante não se deforma com a pressão do rotor.

Este trabalho apresenta o modelo viscoelástico, juntamente com uma implementação numérica para simular o comportamento de um motor por onda propagantes. Os parâmetros do motor foram extraídos de um protótipo sônico já em funcionamento. A camada de contato teve seus parâmetros estimados. Assim uma análise qualitativa é comparada com o modelo de (Cao & Wallaschek, 1995).

## 2. MODELO VISCOELÁSTICO DA CAMADA DE CONTATO

Os deslocamentos transversais de um disco ou anel submetido a uma onda propagante de forma co-senoidal são descritos em coordenadas cilíndricas pela equação 1.

$$w(r, \theta, t) = R(r) \cos(\omega t - k \theta) \quad (1)$$

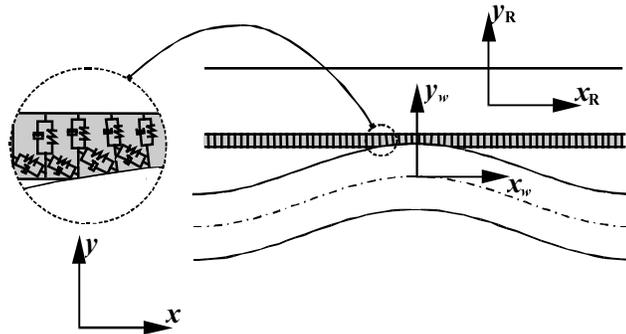
A onda de comprimento de onda  $\lambda$  e frequência  $f$  possui a frequência angular dada por  $\omega = 2\pi f$  e o número de onda por  $k = 2\pi/\lambda$ .

Considerando que o contato aconteça ao longo do diâmetro externo do anel (estator) e que a razão entre o diâmetro externo e interno seja bem menor que o comprimento circunferencial, o sistema de coordenada cilíndrica pode ser modificado para retangular mediante a transformação  $x = r\theta$ . Assim os deslocamentos transversais podem ser descritos pela equação 2.

$$w(x, t) = A_w \cos(\omega t - k x) \quad (2)$$

(Martó & Meirelles, 1999) apresentam a trajetória dos pontos da superfície de contato do estator. Os deslocamentos tangenciais do estator, agora longitudinais no sistema de coordenadas adotado, são descritos pela equação da viga de Euler-Bernoulli, como na equação 3.

$$u_s(x, t) = a \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = -a k \sin(\omega t - k x) \quad (3)$$



**Figura 1** Contato da onda propagante com o rotor

Para facilitar a abordagem do contato, três sistemas de referência são adotados, como apresentado na figura (1). O referencial absoluto,  $x y$ , independente dos movimentos ocorridos no estator ou rotor. Um sistema fixo na onda propagante,  $x_w y_w$ , e um sistema fixo ao rotor,  $x_R y_R$ . As relações entre os sistemas são dadas por (4) e (5), respectivamente

$$x_w = x - v_w t \quad (4)$$

$$x_R = x - v_R t \quad (5)$$

A velocidade relativa entre os sistemas da onda do rotor é a diferença entre a velocidade da onda,  $v_w$ , e a velocidade do rotor,  $v_R$ , ambas no referencial absoluto

$$v = v_w - v_R \quad (6)$$

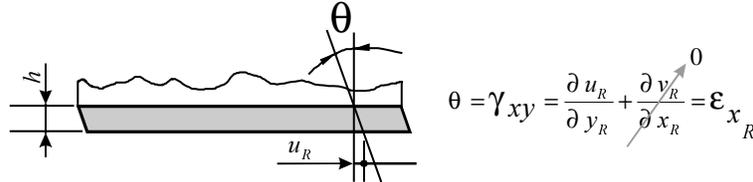
A velocidade de propagação da onda é função do comprimento da onda e da frequência

$$v_w = \lambda f \quad (7)$$

No referencial da onda, a velocidade tangencial dos dentes no estator é expressa por (8)

$$\frac{d u_S(x_w, t)}{d t} = \frac{\partial u_S(x_w, t)}{\partial x_w} \frac{d x_w}{d t} \Rightarrow V_{u_S}(x_w) = -a k^2 v_w \cos(\omega t - k x_w) \quad (8)$$

Para calcular o deslocamento tangencial da superfície de contato do rotor expresso em (9), a deformação da camada, apresentada pela figura 2, é analisada no referencial do rotor.



**Figura 2** Deformação da camada de contato

$$\theta \cong \epsilon_{x_R} \Rightarrow u_R = h \epsilon_{x_R} \quad (9)$$

A velocidade tangencial da superfície de contato do rotor, no mesmo referencial, é obtida em (10).

$$V_{u_R}(x_R) = \frac{\partial u_R}{\partial t} = \frac{\partial u_R}{\partial x_R} \frac{d x_R}{d t} = h \epsilon'_{x_R} v_R \quad (10)$$

Como o interesse é estudar o contato mecânico no referencial da onda propagante, a velocidade tangencial da superfície de contato do rotor é transformada para esse referencial, equação (11):

$$V_{u_R}(x_w) = v_R + h \epsilon'_{x_R} v \quad (11)$$

A distribuição de pressão de contato sobre o rotor é função da deformação normal ao contato. No referencial da onda propagante essa distribuição de pressão é dada por (14)

$$p(x_w) = E \epsilon_z(x_w) \quad (12)$$

$$\epsilon_z = \frac{A_w}{h} [\cos(k x_w) - \cos(k L)] \quad \text{de} \quad -L \leq x_w \leq L \quad (13)$$

$$p(x_w) = E \frac{A_w}{h} [\cos(k x_w) - \cos(k L)] \quad \text{de} \quad -L \leq x_w \leq L \quad (14)$$

Assim a força normal de contato por período é expresso por (15)

$$F_N = \int_S p(x_w) ds \Rightarrow F_N = b \frac{E A_w}{h} \int_{-L}^L [\cos(k x_w) - \cos(k L)] dx_w \quad (15)$$

A condição de contato depende da pressão de contato local. As partes em contato, do rotor e do estator, se movimentam solidariamente quando a tensão devido aos esforços tangenciais são menores que o atrito estático local. A velocidade relativa entre as partes, dada por (16), é nula. Quando há uma velocidade relativa o esforço de atrito estático é insuficiente para equilibrar os esforços tangenciais. Uma parte escorrega sobre a outra. As condições de agarramento ou de escorregamento são previstas pela lei de Coloumb e apresentadas pelas equações (17) e (18) respectivamente.

$$v_{rel} = v_{u_r} - v_{u_S} \quad (16)$$

$$|\tau(x_w)| \leq \mu_o p(x_w) \quad ; \quad v_{rel} = 0 \quad (17)$$

$$|\tau(x_w)| \leq \mu_d p(x_w) \quad ; \quad v_{rel} \neq 0 \quad (18)$$

## 2.1 Escorregamento

Os esforços tangenciais durante o escorregamento, dados por (19), são limitados pelo esforço de atrito dinâmico local

$$\tau(x_w) = -\text{sign}(v_{rel}) Q [\cos(k x_w) - \cos(k L)] \quad \text{de} \quad -L \leq x_w \leq L \quad (19)$$

A constante de contato  $Q$  é dada por (20)

$$Q = \mu_d \frac{E A}{h} \quad (20)$$

A função  $\text{sign}(v_{rel})$ , dada por (21), define o sentido do escorregamento

$$\text{sign}(v_{rel}) = \frac{v_{uR} - v_{uS}}{|v_{uR} - v_{uS}|} \quad (21)$$

As deformações durante o escorregamento são deduzidas a partir da equação diferencial expressa por (22)

$$m \ddot{\mathcal{E}}(x_w, t) + \gamma \dot{\mathcal{E}}(x_w, t) + G \mathcal{E}(x_w, t) = \tau(x_w, t) \quad (22)$$

Os parâmetros de inércia  $m$ , de amortecimento  $\gamma$  e de rigidez  $G$  são dimensionados por unidade de comprimento como pode ser observado na análise dimensional (23)

$$\begin{aligned} [\tau(x_w)] &= \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \\ [G \mathcal{E}(x_w)] &= \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \Rightarrow [G] = \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right] \left[ \frac{1}{\text{m}} \right] \\ [\gamma \dot{\mathcal{E}}(x_w)] &= \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \Rightarrow [\gamma] = \left[ \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \right] \left[ \frac{1}{\text{m}} \right] \\ [m \ddot{\mathcal{E}}(x_w)] &= \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \Rightarrow [m] = \left[ \frac{\text{Ns}^2}{\text{m}} \right] \left[ \frac{1}{\text{m}} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

A solução da equação diferencial do escorregamento é obtida em duas etapas. A solução da homogênea é expressa por (24)

$$\mathcal{E}_h(x_w, t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \text{sen}(\beta t) \quad (24)$$

com as constantes essenciais dadas por (25)

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2m} \quad \beta = \sqrt{\frac{G}{m} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4mG}}} \quad (25)$$

Para que estas deformações possam ser analisadas com o referencial da onda propagante é necessário que o tempo (absoluto) desde o início do escorregamento seja transformado na distância percorrida pela onda desde a posição do início do escorregamento, como em (26):

$$t = \frac{x_w - x}{v_w} \quad (26)$$

A solução particular, dada por (27), corresponde à deformação que a onda propagante impõe à camada de contato

$$\mathcal{E}_p(x_w, t) = -\text{sign}(v_{rel}) [A \cos(k x_w) + B \text{sen}(k x_w) + C \cos(k L)] \quad (27)$$

As constantes A, B e C são dadas por (28), (29) e (30).

$$A = \frac{Q(G - m k^2 v_w^2)}{G^2 - (\gamma^2 - 2 G m) k^2 v_w^2 + m^2 k^4 v_w^4} \quad (28)$$

$$B = -\frac{Q \gamma k v_w}{G^2 - (\gamma^2 - 2 G m) k^2 v_w^2 + m^2 k^4 v_w^4} \quad (29)$$

$$C = -\frac{Q}{G} \quad (30)$$

A solução geral das deformações ocorridas durante o escorregamento é expressa em (31)

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \mathcal{E}_h + \mathcal{E}_p = \\ C_1 e^{\alpha \left( \frac{x_w - x}{v_w} \right)} \cos \left( \beta \frac{x_w - x}{v_w} \right) + C_2 e^{\alpha \left( \frac{x_w - x}{v_w} \right)} \operatorname{sen} \left( \beta \frac{x_w - x}{v_w} \right) \\ - \operatorname{sign}(v_{rel}) [A \cos(k x_w) + B \operatorname{sen}(k x_w) + C \cos(k L)] \end{aligned} \quad (31)$$

As constantes essenciais, expressas em (32), são determinadas a partir das condições de contorno dadas pelas equações (33) e (34) no início do escorregamento. Neste instante, a deformação e sua taxa de variação em relação a  $x$  são conhecidas

$$\begin{aligned} C_1 = \operatorname{sign}(v_r) [A \cos(k x) + B \operatorname{sen}(k x) + C \cos(k L)] + \psi \\ C_2 = -\frac{1}{\beta} \left\{ \operatorname{sign}(v_r) \alpha [A \cos(k x) + B \operatorname{sen}(k x) + C \cos(k L)] + \alpha \psi + \right. \end{aligned} \quad (32)$$

$$\left. + \operatorname{sign}(v_r) k v_w [B \cos(k x) - A \operatorname{sen}(k x)] + \iota v_w \right\}$$

$$\mathcal{E}(x_w, 0) = \psi \Rightarrow C_1 + A \cos(k x_w) + B \operatorname{sen}(k x_w) + C \cos(k L) = \psi \quad (33)$$

$$\mathcal{E}'(x_w, 0) = \iota \Rightarrow -\frac{\alpha C_1 + \beta C_2}{v_w} - \operatorname{sign}(v_r) k [A \operatorname{sen}(k x_w) - B \cos(k x_w)] = \iota \quad (34)$$

## 2.2. Agarramento

Os pontos da camada de contato do rotor possuem a mesma velocidade de contato da superfície de contato do estator quando existe agarramento

$$v_{u_R}(x_w) = v_{u_S}(x_w) \quad (35)$$

Assim, pela igualdade de velocidades dada por (35) e pela equação (10), a variação da deformação local em relação à onda propagante é expressa por (36). A deformação local é facilmente obtida em (37).

$$\mathcal{E}'(x_w) = -\frac{1}{h} \frac{v_R}{v} - a \frac{A_w k^2}{h} \frac{v_w}{v} \cos(k x_w) \quad (36)$$

$$\mathcal{E}(x_w) = -\frac{1}{h} \frac{v_R}{v} x_w - a \frac{A_w k}{h} \frac{v_w}{v} \operatorname{sen}(k x_w) + D \quad (37)$$

$$\mathcal{E}''(x_w) = a \frac{A_w k^3}{h} \frac{v_w}{v} \operatorname{sen}(k x_w) \quad (38)$$

Como existe agarramento entre as partes, a equação (22) não depende do tempo no referencial da onda propagante, podendo ser rescrita por (39). Substituindo as equações (36), (37) e (38) em (39) obtém-se a tensão de deformação ao longo do agarramento (40).

$$m v_w^2 \mathcal{E}''(x_w, t) + \gamma v_w \mathcal{E}'(x_w, t) + G \mathcal{E}(x_w, t) = \tau(x_w, t) \quad (39)$$

$$\tau(x_w) = \left[ a \frac{A_w k}{h} \frac{v_w}{v} (m v_w^2 k^2 - G) \right] \text{sen}(k x_w) - \gamma a \frac{A_w k^2}{h} \frac{v_w^2}{v} \cos(k x_w) + \frac{v_w v_R}{h} - \frac{G v_R}{h} x_w + G D \quad (40)$$

A constante D, dada por (42), é calculada da condição de contorno no início do agarramento apresentada em (41). As tensões de escorregamento e agarramento são iguais neste instante.

$$\tau(\xi_i)_{\text{escorregamento}} = \tau(\xi_i)_{\text{agarramento}} \quad (41)$$

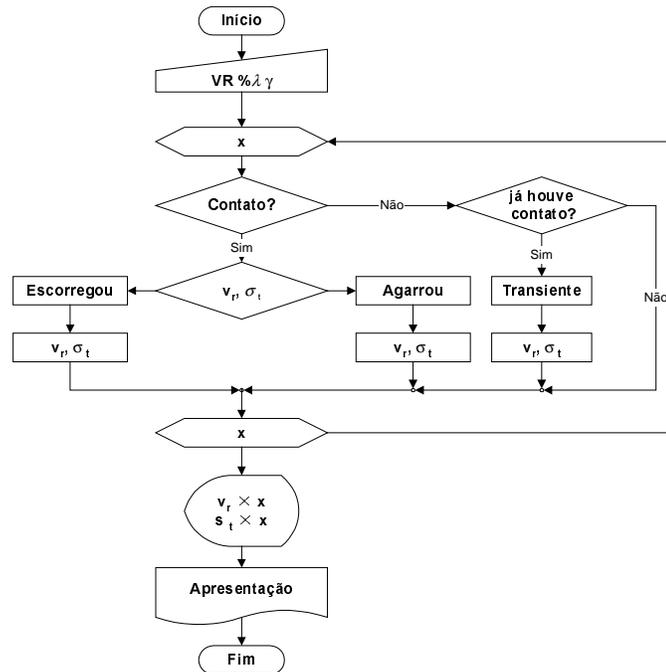
$$D = \tau(\xi_i) + \frac{a}{G} \frac{A_w k^2}{h v} \cos(k \xi_i) + a \frac{A_w k}{h} \frac{v_w}{v} \left( 1 - \frac{k^2 m v_w^2}{G} \right) \text{sen}(k \xi_i) + \frac{v_R}{h v} \xi_i + \frac{\gamma}{G} \frac{v_w}{h v} v_R \quad (42)$$

Após o final do contato o comportamento das deformações é descrito pela solução homogênea apresentada no desenvolvimento do modelo de escorregamento.

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para implementar numericamente o modelo viscoelástico, foi desenvolvido um algoritmo cujo diagrama de blocos é apresentado na figura (3).

O algoritmo determina na região de contato as zonas de escorregamento e agarramento. As zonas de escorregamento são determinadas pela diferença de velocidade relativa, até se igualarem. Quando as velocidades relativas se igualam, existe um agarramento até que as forças de atrito não suportam os esforços tangenciais, voltando a escorregar. Para verificar a condição de agarramento, as tensões tangenciais são comparadas as forças distribuídas máximas de atrito, dadas pela lei de atrito de Coulumb. O perfil de velocidade e o campo de tensões são apresentados na figura(4)



**Figura 3** Diagrama de blocos da implementação numérica do comportamento dinâmico da camada de contato colada ao rotor

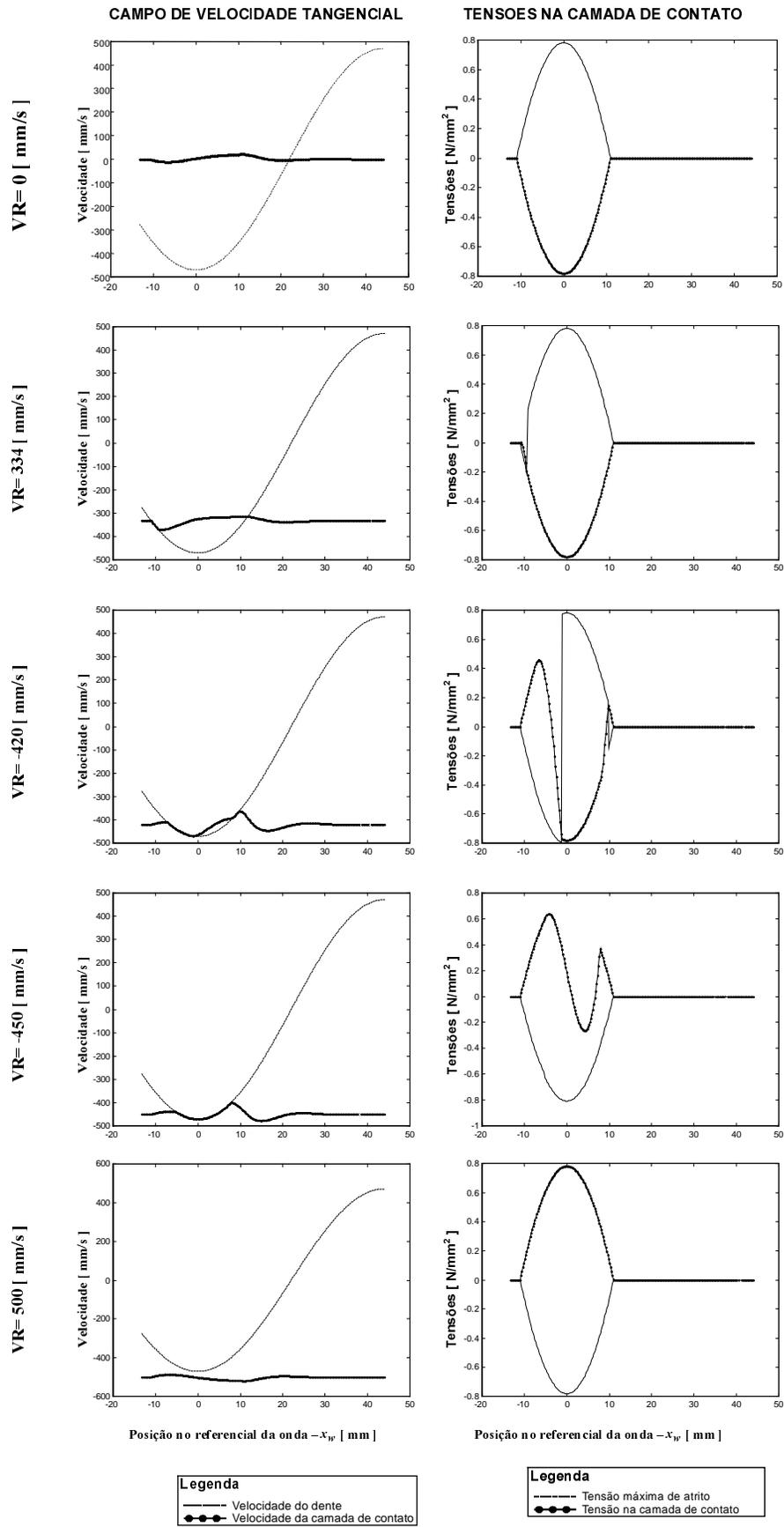


Figura 4 Campo de velocidades tangenciais e de tensões na camada de contato colada ao rotor

#### 4. CONCLUSÃO

Este trabalho possibilitou a implementação numérica de um modelo dinâmico de uma camada de contato colada ao rotor em motores por ondas propagantes. Os resultados numéricos são coerentes e aproximam-se qualitativamente com os apresentados por (Cao & Wallaschek, 1995).

Na figura , pode-se observar que quando o rotor está travado, a camada de contato sofre apenas escorregamento, da mesma forma que quando o rotor é forçado a girar a uma velocidade superior a velocidade do dente na crista da onda, ( $VR=500$  [mm/s] no caso estudado). Contudo, o campo de velocidades inicia uma aproximação da velocidade do dente e depois têm um comportamento amortecido. Esse comportamento é percebido toda vez que apenas há escorregamento.

Quando há o agarramento, o perfil de velocidades muda e com ele o perfil de tensões. Dependendo da situação pode haver um novo intervalo de escorregamento. Nesta situação, por exemplo com  $VR=420$  [mm/s], o dente não é mais capaz de agarrar a camada de contato, apesar de passarem pela pressão máxima de contato. Em outras situações existe escorregamento apenas no início e no final do contato.

Assim este estudo apresenta a importância da velocidade de operação sobre o desempenho do motor, e principalmente sobre o desgaste, que será mais acentuado quanto maior for o escorregamento.

#### 5. BIBLIOGRAFIA

- Cao, X.; Wallaschek, J., 1995 Estimation of the tangential stresses in the stator/rotor contact of travelling wave ultrasonic motor using visco-elastic foundation models. In: INTERNATIONAL CONFERENCE CONTACT MECHANICS, 2, Ferrara, Italy.
- Hagedorn, P.; Wallaschek, J., 1992 Travelling wave ultrasonic motors, part I: working principle and mathematical modelling of the stator. *Journal of Sound and Vibration*. v. 168, n.1, p. 31-46.
- Marto, A. G., 1997 *Motores ultra-sônicos: princípios de funcionamento e características* Guaratinguetá, 145 p.(Dissertação de Mestrado) UNESP – Guaratinguetá.
- Marto, A. G.; Meirelles, P. S., 1999 Motor por ondas propagantes In: CD-Rom do Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica – COBEM
- Sashida, T.; Kenjo, T., 1993 *An Introduction to Ultrasonic motors*. Oxford: Claredon Press. 242 p.