

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE BROYDEN EM SIMULAÇÃO DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO

Francisco Marcondes

Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Engenharia Mecânica Rua Aprígio Veloso, 882 - Campina Grande, PB, Brasil, CEP:58109-970. E-mail:marconde@dem.ufpb.br

Mario Cesar Zambaldi

Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática Campus Universitário - Florianópolis, SC, Brasil, CEP:88040-900. E-mail:zambaldi@mtm.ufsc.br

Resumo: O presente trabalho consiste na utilização do método de Broyden para resolução de problemas de simulação de reservatórios de Petróleo. Trata-se de um método Quase-Newton para sistemas de equações não lineares. Nos testes numéricos, emprega-se o modelo *Black-oil* (óleo-água) em geometrias bidimensionais. São utilizadas malhas não-estruturadas do tipo Voronoi. As equações são discretizadas empregando um modelo totalmente implícito.

Pavras-chave: Métodos Quase-Newton, Simulação de Reservatório, Volumes Finitos.

1. INTRODUÇÃO

Os métodos Quase-Newton (QN) (Broyden (1965), Dennis e Schnabel (1983) e Zambaldi (1993)) foram originalmente introduzidos para problemas nos quais a avaliação da matriz Jacobiana envolve alto custo computacional. Neste caso, calcula-se uma aproximação para a mesma com algum critério específico. Diferentes aproximações caracterizam diferentes métodos QN. Uma outra característica desses métodos é aproveitar sua formulação para obter economia na fase de resolução dos sistemas lineares em cada iteração. O método de Broyden (Broyden (1965), Dennis e Schnabel (1983)) não considera a simetria para a matriz Jacobiana, como é o caso da aplicação deste trabalho. No caso, e como o problema em questão envolve grande número de variáveis, a implementação com memória limitada (Kozakevich e Zambaldi (1999), e Zambaldi (1993)) é necessária. O modelo físico empregado é o *Black-oil* (óleo-água) e as equações são resolvidas empregando-se um esquema totalmente implícito. Os resultados são comparados com algumas soluções disponíveis em Marcondes (1996) usando formulação totalmente implícita e solução do sistema linear via método de Newton Inexato, que consiste em empregar um algoritmo iterativo linear para resolução das equações linearizadas.

2. O MÉTODO DE BROYDEN COM MÉMORIA LIMITADA

Em geral, os métodos QN para resolução de um sistema não linear $F(x) = 0$, são estruturados da seguinte forma:

$$B_k s_k = -F(x_k) \tag{1}$$

$$x_{k+1} = x_k + s_k \tag{2}$$

Desse modo cada iteração é caracterizada pela avaliação da função $F(x_k)$, da matriz B_k , aproximação para a matriz Jacobiana de F , e do cálculo do sistema linear, (1). Para

a iteração seguinte, a matriz B_{k+1} é obtida de B_k utilizando uma fórmula de recorrência envolvendo x_k , x_{k+1} , $F(x_k)$ e $F(x_{k+1})$. Frequentemente, B_{k+1} é escolhida como uma das matrizes que satisfazem a Equação Secante,

$$B_k s_k = y \quad (3)$$

onde $y = F(x_k) - F(x_{k+1})$.

No método de Broyden, utiliza-se uma matriz de posto 1 para obter B_{k+1} a partir de B_k .

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k) s_k^t}{s_k^t s_k} \quad (4)$$

Ocorre entretanto que, se B_k é uma matriz esparsa, B_{k+1} não o será. Portanto, para problemas grandes e esparsos, a fórmula de atualização acima não é conveniente. Uma forma de superar esta limitação é o uso da chamada forma de memória limitada.

Utilizando (4) e a conhecida fórmula de Sherman-Morrison (Golub & Van Loan 1996), pode-se obter uma expressão de B_{k+1}^{-1} a partir de B_k^{-1} . Isto feito, a iteração de Broyden pode ser obtida da forma,

$$x_{k+1} = x_k - B_k^{-1} F(x_k) \quad (5)$$

Portanto, em vez do cálculo explícito do sistema linear (1), pode-se fazer a atualização da inversa das aproximações. A expressão referida acima, para o método de Broyden, tem a forma,

$$B_{k+1}^{-1} = B_k^{-1} + \frac{(s_k - B_k^{-1} y_k) s_k^t B_k^{-1}}{s_k^t B_k^{-1} y_k} \quad (6)$$

É possível, a partir de (6) obter uma expressão do tipo:

$$B_k^{-1} = (I + u_{k-1} s_{k-1}^t) \dots (I + u_0 s_0^t) B_0^{-1} \quad (7)$$

O vetor u_k neste caso é dado pela expressão:

$$u_k = \frac{(s_k - B_k y_k)}{s_k^t B_k y_k} \quad (8)$$

A fórmula de recorrência (7), não pode ser empregada indefinidamente com a inicialização com B_0^{-1} . De fato, a cada iteração dois vetores adicionais são necessários além do fato de se estar incrementando o custo por iteração. Portanto, escolhe-se um intervalo de recomeços para que o processo iterativo possa prosseguir. Mais especificamente, escolhe-se um número inteiro, digamos m , tal que quando $k = 0 \bmod(m)$, o processo iterativo deve ser recomeçado. Isto implica utilizar B_m^{-1} no lugar de B_0^{-1} em (7) para introduzir os recomeços.

A inicialização de B_0 é relevante. Uma escolha possível é utilizar a própria matriz Jacobiana. Isto, entretanto, exigiria uma fatoração completa desta matriz, o que é inviável

computacionalmente. No trabalho utilizamos a fatoração incompleta da mesma conforme Marcondes *et al.* (1995).

A escolha do parâmetro m obviamente depende do problema em questão e principalmente da dimensão do mesmo. Nos experimentos numéricos alguns valores deste parâmetro são avaliados com relação ao desempenho global do método de Broyden.

3. MODELO FÍSICO

Apresenta-se nesta seção uma breve descrição do modelo empregado no presente trabalho para representar o escoamento bifásico (óleo-água) em simulação de reservatórios. Maiores detalhes podem ser encontrados em Palagi (1992).

Assumindo que existam duas fase imiscíveis no reservatório óleo(o) e água (w) e desprezando os efeitos gravitacional e de pressão capilar, a equação de conservação volumétrica para a fase p pode ser escrita como,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_p}{B_p} \right) = \nabla \cdot [\lambda_p \nabla P] + \bar{q}_p \quad (9)$$

onde ϕ denota a porosidade e B_p o fator de formação volumétrico da fase p . P é a pressão, \bar{q}_p é a vazão volumétrica nas condições de armazenagem do reservatório por unidade de volume do reservatório e λ_p é a mobilidade da fase p , definida por

$$\lambda_p = K \frac{K_{rp}}{\mu_p B_p} \quad (10)$$

onde K é a permeabilidade absoluta do reservatório, K_{rp} é a permeabilidade relativa e μ_p é a viscosidade da fase p , respectivamente.

Escrevendo a Eq. (9) para as fases óleo e água observa-se que existem três incógnitas (S_o , S_w and P) para a existência de somente duas equações. Como equação de fechamento é empregado a equação de conservação global de massa, dada por

$$S_w + S_o = 1 \quad (11)$$

4. EQUAÇÕES DISCRETIZADAS

O reservatório foi discretizado usando malhas de Voronoi e as equações aproximadas foram obtidas através do método dos volumes finitos. Fig. 1 indica um volume de controle típico de Voronoi. Integrando a Eq. (9) no volume de controle da Fig. 1 e no tempo, obtém-se

$$\int_t \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_p}{B_p} \right) dV dt = \int_t \int_V \nabla \cdot [\lambda_p \nabla P] dV dt + \int_t \int_V \bar{q}_p dV dt \quad (12)$$

e aplicando o teorema de Gauss para o primeiro termo no lado direito da Eq. (12), a seguinte equação é obtida

$$\int_t \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_p}{B_p} \right) dV dt = \int_t \int_A \lambda_p \nabla P \cdot d\vec{A} + \int_t \int_V \bar{q}_p \quad (13)$$

onde $d\vec{A}$ é o vetor área elementar. Realizando a integração da Eq. (13) no volume de controle i e representando $t + dt$ by $n + 1$ a seguinte equação implícita é obtida,

$$\left(\frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^{n+1} - \left(\frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^n = \sum_{j=1}^{N_v} T_{ij} \lambda_{ij}^{n+1} (P_j^{n+1} - P_i^{n+1}) + \bar{q}_p^{n+1} \quad (14)$$

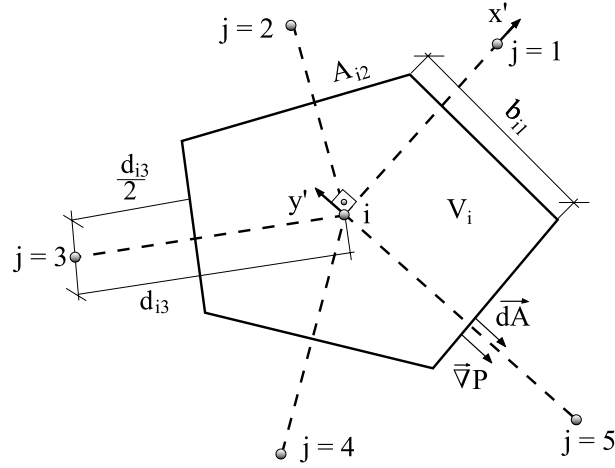


Figura 1: Volume de controle de Voronoi

O termo T_{ij} é um produto de termos geométricos e da permeabilidade absoluta e é conhecido como fator de transmisibilidade, sendo dado por,

$$T_{ij} = \left(\frac{b h K}{d} \right)_{ij} \quad (15)$$

onde d é a distância do volume i para o volume vizinho j , h and b são a altura e a largura da face ij , respectivamente e k é permeabilidade absoluta na interface ij .

5. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Todos os resultados que serão apresentados nesta seção foram obtidos com os seguintes critérios de parada de uma iteração no método Quase-Newton ou Newton Inexato: 68.93 kPa para as correções de pressão e 5×10^{-3} para as correções de saturação. Ainda com relação ao método de Newton Inexato, foi usado como acelerador de convergência para

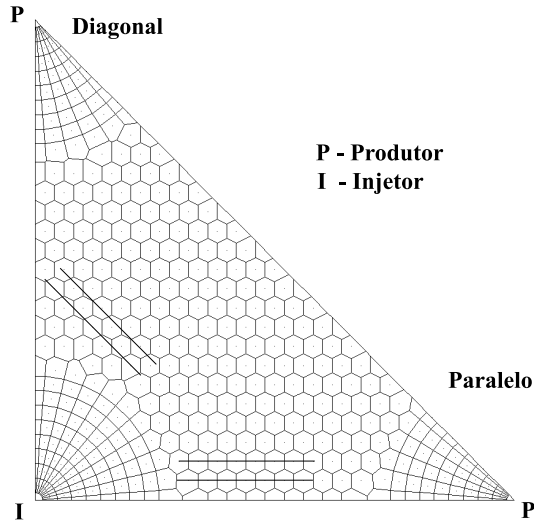


Figura 2: Malha hexagonal-híbrida com 445 volumes

o algoritmo iterativo GMRES, (Saad e Schultz (1986)) o preconditionador por fatoração incompleta de nível 1, ILU(1), (Marcondes et. all (1995)). Como critério de parada no GMRES foi empregado o seguinte critério: $\|r_k\|/\|r_o\| \leq 10^{-3}$, onde $\|r_k\|$ é a norma do resíduo na iteração k e $\|r_o\|$ é a norma do resíduo inicial. Para o método de Broyden foi utilizado $m = 20$, ou seja, recomeços a cada 20 iterações. Em todos os casos testados, exceto para a malha hexagonal-híbrida com 672 volumes, foi usado como intervalo de tempo máximo $\Delta t = 50$ dias.

O primeiro caso analisado corresponde a um quarto da geometria *five-spot*. Os dados físicos e geométricos estão listados na Tab. 1. A malha empregada é apresentada na Fig. 2. As curvas de permeabilidade relativa e razão de viscosidade são dados pela Eq. (16).

$$K_{rw} = \frac{S_w^2}{M(1 - S_w^2) + S_w^2}; \quad K_{ro} = 1 - K_{rw}; \quad M = \mu_o/\mu_w \quad (16)$$

Tab. 1 - Dados Físicos e Geométricos do Reservatório - Caso 1

Dados do Reservatório	Condição Inicial	Propriedades Físicas
$k = 12,5 \times 10^{-15} \text{ m}^2$	$S_{wi} = 0,0$	$B_o = B_w = 1 \text{ a } 0 \text{ Pa}$
$h = 6,09 \text{ m}$	$P_i = 6,893 \times 10^5 \text{ Pa}$	$P_c = 0$
$A = 1,6 \times 10^5 \text{ m}^2$	$S_{or} = 0$	$\mu_o = 10^{-3} \text{ Pa.s}$
$\phi = 0,08$		$\mu_w = 1/M \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$
$r_w = 0,0914 \text{ m}$		$c_o = c_w = 1,45 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$
		$ \bar{q}_{11} = \bar{q}_{w1} = 1,10 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$

A Fig. 3 apresenta a recuperação de óleo adimensional (VOR) nos poços diagonal e paralelo para $M=10$ e 50 . Pode-se observar que os resultados apresentaram uma excelente concordância com aqueles obtidos pelo método de Newton Inexato.

A Tab. 2 apresenta dados mais realistas do ponto de vista de reservatório de petróleo. O reseqatório é composto de oito poços, sendo 06 produtores e 02 injetores. As curvas de permeabilidade relativa e viscosidades são dadas pelas Eqs. (17) e (18), respectivamente.

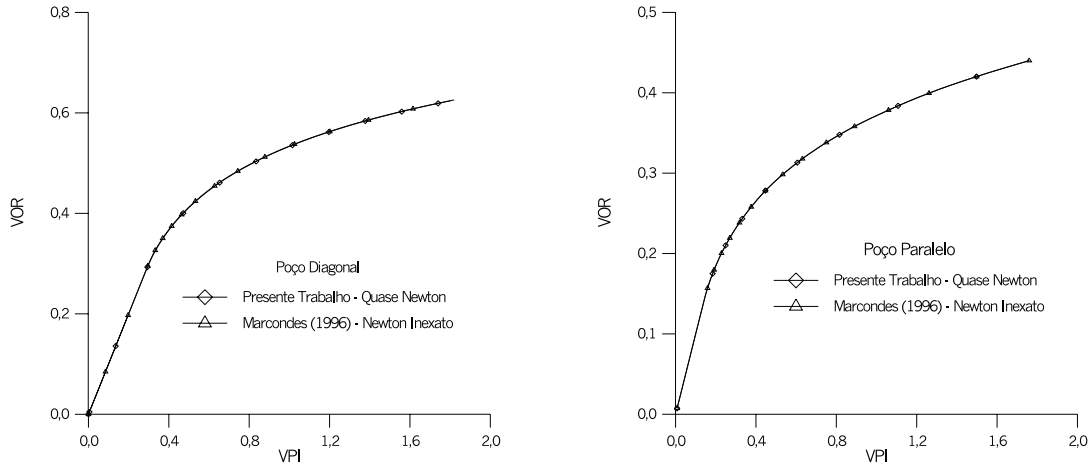


Figura 3: Recuperação dos poços diagonal - $M = 10$ e paralelo - $M = 50$

Para este caso foram testadas dois tipos de malhas. Uma malha hexagonal híbrida com 672 volumes e uma malha hexagonal com 559 volumes (Fig. 4). A localização dos poços é a mesma para ambas as malhas.

Tab. 2 - Dados Físicos e Geometricos do Reservatório - Caso 2

Dados do Reservatório	Condição Inicial	Propriedades Físicas
$k = 3,0 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ $h = 15 \text{ m}$ $A = 1,82 \times 10^6 \text{ m}^2$ $\phi = 0,30$ $r_w = 0,122 \text{ m}$	$S_{wi} = 0,20$ $P_i = 2,413 \times 10^7 \text{ Pa}$ $S_{or} = 0,20$	$B_o = B_w = 1$ a $2.068427 \times 10^7 \text{ Pa}$ $P_c = 0$ $c_o = c_w = 7,25 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$ $\bar{q}_{p1} = \bar{q}_{p3} = -9,2 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p2} = -1,1 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p4} = -5,52 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p5} = \bar{q}_{p6} = -7,36 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{i1} = 2,94 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{i2} = 2,024 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

$$K_{rw} = (S_w - 0.2)(-250S_w^2 + 325S_w - 55)/27; \quad K_{ro} = 1 - K_{rw} \quad (17)$$

$$\mu_w = 10^{-3}(1 + 1.45 \times 10^{-12}(P - 1.37 \times 10^7)); \quad \mu_o = 1.163\mu_w [\text{Pa}\cdot\text{s}] \quad (18)$$

Para a malha hexagonal-híbrida da Fig. 4 foi observado oscilações nos cortes de água, curvas de recuperação, etc. Neste caso, foi necessário reduzir o valor de Δt_{max} . Soluções fisicamente consistentes só foram obtidas com $\Delta t_{max} = 3$ dias. Este fato deve ser explicado considerando a natureza da matriz Jacobiana, que é bastante esparsa devido ao elevado número de poços radiais. Foram realizados alguns testes com a fatoração incompleta maior do que 1, sem contudo ter-se obtido convergência para $\Delta t_{max} = 50$ dias. Soluções fisicamente consistentes só foram obtidas para $\Delta t_{max} = 3$ dias. Testes estão, no momento, sendo realizados na tentativa de melhorar a performance do método. A Fig. 5 apresenta curvas de corte de água no poço 5 para as malhas hexagonal e hexagonal-híbrida. Os resultados são apresentados para o corte de água por ser este parâmetro mais sensível a

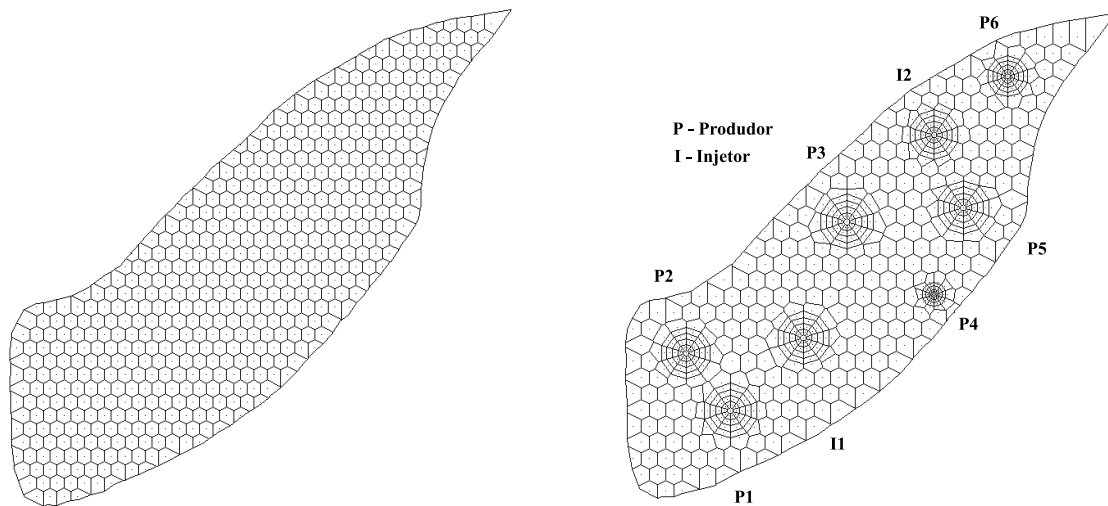


Figura 4: Malhas hexagonal com 559 volumes e hexagonal-híbrida com 672 volumes

evolução da solução. Pode-se notar que novamente a concordância do Quase-Newton com o Newton Inexato é bastante próxima.

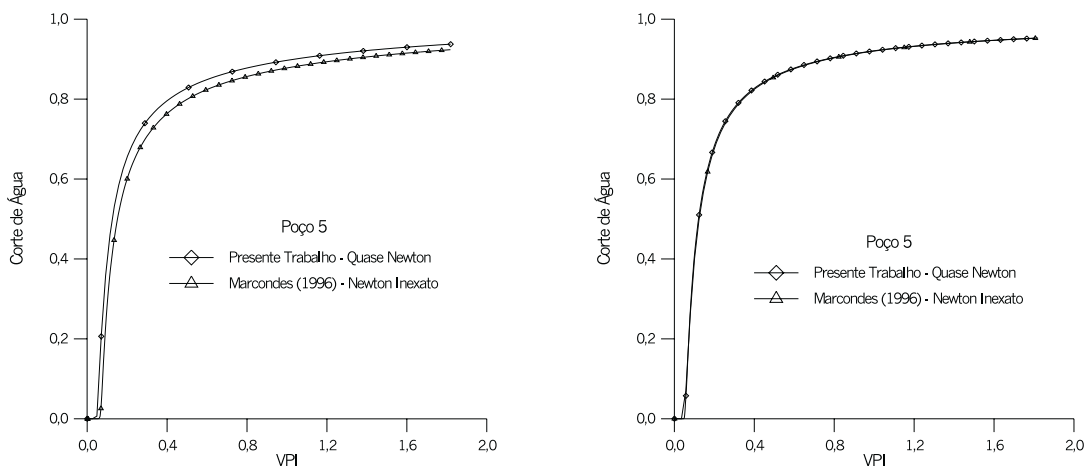


Figura 5: Recuperação do poço 5 - Malhas hexagonal e hexagonal-híbrida

6. CONCLUSÕES

O presente trabalho aplicou o método Quase-Newton de Broyden para a solução de problemas de reservatório de petróleo usando malhas não-estruturadas de Voronoi. Os resultados foram comparados com soluções usando o GMRES com uma fatoração incompleta e mostraram uma excelente concordância. No entanto, verificou-se que o Quase-Newton foi bastante sensível a estrutura da malha, o que por sua vez afeta sobremaneira a estrutura do Jacobiano. Testes estão sendo realizados na tentativa de evitar a divergência da solução com intervalos de tempos maiores, e portanto, melhorar a eficiência do método.

7. REFERÊNCIAS

- Broyden, C.G., 1965, “A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations”, *Mathematics of Computation*, Vol. 19, pp. 577-593.
- Dennis Jr., J. E. and Schnabel, R. B., 1983, “Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations”, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Golub G. and C. F. Van Loan, 1996, “Matrix Computation” The John Hopkins University Press, Baltimore London, 3rd. Ed., University Press.
- Marcondes, F., 1996, “Solução Numérica Usando Métodos Adaptativos-Implícitos e Malha de Voronoi de Problemas de Reservatórios de Petróleo, Tese de Doutorado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC, Brasil.
- Marcondes, F., Zambaldi, M. C. Z e Maliska, C. R., 1995, “Comparação de Métodos Não Estacionários em Malhas Não Estruturadas na Solução de Problemas de Petróleo”, *Anais do XIII Cong. Bras. de Eng. Mecânica*, Belo Horizonte, Brasil.
- Palagi, C., 1992 “Generation and Application of Voronoi Grid to Model Flow in Heterogeneous Reservoirs”, PhD dissertation, Stanford University, Stanford.
- Kozakevich D. N. and M. C. Zambaldi, 1999, “Quasi-Newton Methods with Incomplete Factorizations for Some Nonlinear Predominant Convection-Diffusion Problems” Tech. Rep. 01/99. Depto. Math. Federal University of Santa Catarina, Brasil.
- Saad Y., and Schultz M. H., 1986, “GMRES: A General Minimal residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems”, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 7, pp 857-869.
- Zambaldi, M. C., 1993, “Novos Resultados Sobre Fórmulas Secantes e Aplicações”, Tese de Doutorado, IMECC, UNICAMP, Brasil.